

Kapitel 10

Einige exakte Resultate

In diesem Kapitel besprechen wir einige wichtige exakte Resultate über diskrete Gittermodelle. Wir beginnen mit den erstaunlichen Dualitätstransformationen, die zwei Gittermodelle ineinander transformieren. Diese Transformationen existieren auch für Abelsche Eichtheorien und einfache (supersymmetrische) Feldtheorien. Danach wird das Peierlsche Argument für die Existenz einer geordneten Phase in ferromagnetischen Systemen in 2 oder mehr Dimensionen bei tiefen Temperaturen besprochen. Nach einer Diskussion der hilfreichen Korrelationsungleichungen findet sich im Anhang eine kurze Einführung in den Differenzkalkül auf Gittern, einer diskreten Version des äußeren Kalküls.

10.1 Dualität für das $2d$ Ising-Modell

KRAMERS und WANNIER [46] fanden 1941 eine Transformation, welche das $2d$ -Ising-Modell mit $(\beta, h = 0)$ auf ein $2d$ -Ising-Modell mit $(\beta^*, h = 0)$ abbildet. Dabei ist die Temperatur T^* eine monoton abnehmende Funktion der Temperatur T des ursprünglichen Modells und die Hochtemperaturphase geht über in die Tieftemperaturphase. Diese interessante *Dualitätstransformation* führt auf neue Einsichten über die Dynamik des Ising-Modells. Sie kann auf beinahe alle Abelschen Theorien, auch in höheren Dimensionen, verallgemeinert werden. Zum Beispiel auf Theorien mit Symmetriegruppen $\mathbb{Z}_N, \mathbb{R}, U(1)$. Nicht immer ist die duale Theorie gleich der ursprünglichen mit anderen Parametern, d.h. nicht jede Abelsche Theorie ist selbstdual. Oft ist die duale Theorie wesentlich komplizierter als die ursprüngliche. Leider ist es viel schwieriger, Dualitätstransformationen für nicht-Abelsche Theorien zu finden. Eine schöne Einführung in Dualitäten in Feldtheorien und der statistischen Mechanik findet sich im Übersichtsartikel von R. SAVIT [44].

Wir beginnen mit der graphischen Entwicklung der Zustandssumme für hohe Tempe-

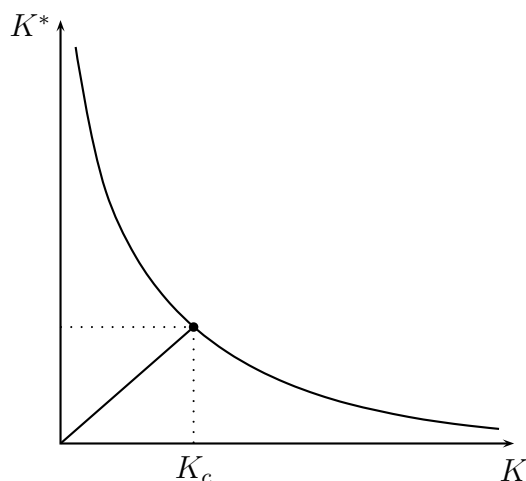
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (\cosh K)^{2V} (2v)^V \sum_{w^*} v^{-\frac{1}{2} \sum_{(rs)} \sigma_r \sigma_s} \\
 &= \frac{1}{2} (2 \sinh K \cosh K)^V \sum_{w^*} e^{-\beta^* H(\sigma)},
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

wobei H die Energie des Ising-Modells ist und wir $v = \exp(-2K^*)$ beziehungsweise $K^* = -\frac{1}{2} \log \tanh K$ gesetzt haben. Diese Beziehung zwischen K und K^* kann wie folgt umgeformt werden,

$$2 \sinh 2K^* = e^{2K^*} - e^{-2K^*} = \frac{1}{v} - v = \coth K - \tanh K = \frac{2}{\sinh 2K}.$$

Die Beziehung zwischen K und K^* hat also die symmetrische Form

$$\sinh 2K \cdot \sinh 2K^* = 1. \tag{10.4}$$



Die Gleichung (10.4) sollte als Beziehung zwischen der Temperatur T des Ising-Modells auf dem Gitter Λ und der Temperatur T^* des Ising-Modells auf dem dualen Gitter Λ^* interpretiert werden. Die Beziehung $K \leftrightarrow K^*$ ist symmetrisch und reziprok: wenn K monoton von 0 nach ∞ wächst, so fällt K^* monoton von ∞ nach 0. Die Abbildung links zeigt die monoton fallende Funktion $K^*(K)$ und den Fixpunkt der Abbildung $K \rightarrow K^*$.

Weiterhin ist

$$\sinh K \cosh K = \frac{1}{2} \sinh 2K \implies (2 \sinh K \cosh K)^2 \stackrel{(10.4)}{=} \frac{\sinh 2K}{\sinh 2K^*}.$$

und wegen (10.3) führt dies auf die Dualitätsrelation

$$\frac{Z(K)}{(\sinh 2K)^{V/2}} = \frac{1}{2} \frac{Z(K^*)}{(\sinh 2K^*)^{V/2}}. \tag{10.5}$$

Wenn wir nun annehmen, dass die freie Energiedichte reell-analytisch ist für $T > 0$, bis auf eine *einzig*e kritische Temperatur T_c , dann ist K_c die Lösung der Gleichung $K = K^*$,

also von

$$\sinh 2K_c = \pm 1 \implies K_c = \pm \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \approx \pm 0.4407.$$

Die negative Lösung entspricht dem antiferromagnetischen Fall $J < 0$. Für das ferromagnetische System ist die kritische Temperatur

$$T_c = \frac{2J}{\log(1 + \sqrt{2})} \approx 2.2692J \approx 0.5673 T_{\text{MF}}. \quad (10.6)$$

Hätte das Ising-Modell mehrere kritische Punkte, dann würde die Dualitätsrelation (10.5) nicht mehr alle kritischen Temperaturen bestimmen, sondern nur noch Relationen zwischen Paaren von kritischen Temperaturen.

Wir geben eine zweite, mehr algebraische Herleitung der Dualitätsrelation, welche sich leichter auf andere Systeme verallgemeinern lässt. Wir schreiben

$$Z = \sum_{\{s\}} \prod_{\langle xy \rangle} (\cosh K + \sinh K s_x s_y) = \sum_{\{s\}} \prod_{\langle xy \rangle} \sum_{k=0}^1 c_k(K) (s_x s_y)^k, \quad (10.7)$$

wobei $c_0(K) = \cosh K$ und $c_1(K) = \sinh K$ eingeführt wurden. Wir werden hier auf ein zweiwertiges Feld geführt, das jeder Linie $\ell = \langle xy \rangle$ die Zahl 0 oder 1 zuordnet,

$$k_\ell = k_{xy} \in \{0, 1\}.$$

Für eine feste Belegung $\{k\}$ der Links ist der Beitrag zur Zustandssumme

$$\begin{aligned} \sum_{\{s\}} \prod_{\langle xy \rangle} c_{k_{xy}}(K) (s_x s_y)^{k_{xy}} &= \prod_{\langle xy \rangle} c_{k_{xy}}(K) \sum_{\{s\}} \prod_{\langle xy \rangle} (s_x s_y)^{k_{xy}} \\ &= \prod_{\langle xy \rangle} c_{k_{xy}}(K) \sum_{\{s\}} \prod_x s_x^{\partial k(x)}, \end{aligned}$$

wobei $\partial k(x) = \sum_{y:(yx)} k_{xy}$ eingeführt wurde. Für jede ganze Zahl k ist

$$\sum_{s_x=-1,1} s_x^n = 2\delta_2(n), \quad \delta_2(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad (10.8)$$

und die Summe über die Spinkonfigurationen kann leicht ausgeführt werden. Damit erhalten wir folgende Formel für die Zustandssumme in beliebigen Dimensionen

$$Z = 2^V \sum_{\{k\}} \prod_{\ell} c_{k_\ell}(K) \prod_x \delta_2(\partial k(x)). \quad (10.9)$$

Jede Linie $\ell = \langle xy \rangle$ auf dem Gitter ist mit einem $k_\ell \in \{0, 1\}$ belegt. Die Variable

$$\partial k(x) = \sum_{\ell: x \in \partial \ell} k_\ell$$

kann einen der Werte 0, 1, 2, 3 oder 4 annehmen. ∂k ist die Divergenz des „Vektorfeldes“ k_ℓ . Nun ordnen wir einer Belegung $\ell \rightarrow k_\ell$ der Linien zwischen nächsten Nachbarn eine Konfiguration $\{\sigma_r | r \in \Lambda^*\}$ mit $\sigma_r \in \{\pm 1\}$ auf dem dualen Gitter zu. Schneidet die Linie $\langle rs \rangle$ zwischen den nächsten Nachbarn r, s auf dem dualen Gitter die Linie ℓ , so setzen wir

$$k_\ell = \frac{1}{2}(1 - \sigma_r \sigma_s). \quad (10.10)$$

Für parallele Spins auf den Gitterplätzen r und s ist $k_\ell = 0$, für antiparallele Spins 1. Es folgt die Relation

$$\partial k(x) = 2 - \frac{1}{2}\sigma_p(x),$$

wobei $\sigma_p(x)$ in (10.2) eingeführt wurde. Die rechte Seite ist immer gerade, so dass alle δ -Bedingungen in (10.9) automatisch erfüllt sind. Die Transformation (10.10) liefert alle Belegungen der Links mit geraden Divergenzen.

Die Summe über die $\{k\}$ -Konfigurationen wird zur Summe über die Spinkonfigurationen auf dem dualen Gitter. Allerdings müssen wir dabei berücksichtigen, dass $\{\sigma\}$ und $\{-\sigma\}$ zur selben $\{k\}$ -Konfiguration gehören. Da zu jeder Linie ℓ genau eine Linie $\langle rs \rangle$ auf dem dualen Gitter gehört, ist das Produkt über alle ℓ gleich dem Produkt über alle nächste Nachbarn Paare $\langle rs \rangle$ auf dem dualen Gitter und

$$Z = \frac{1}{2} 2^V \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle rs \rangle} c_{(1-\sigma_r \sigma_s)/2}(K)$$

Nun formen wir $c_k(K)$ noch um:

$$\begin{aligned} c_k(K) &= \cosh K e^{k \log \tanh K} \\ &\stackrel{(10.10)}{=} (\cosh K \sinh K)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_r \sigma_s \log \tanh K\right). \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} (2 \cosh K \sinh K)^V \sum_{\{\sigma\}} \exp\left(-\frac{1}{2} \log \tanh K \sum_{\langle rs \rangle} \sigma_r \sigma_s\right) \\ &= \frac{1}{2} (\sinh 2K^*)^{-V} \sum_{\{\sigma\}} \exp\left(K^* \sum_{\langle rs \rangle} \sigma_r \sigma_s\right) \end{aligned} \quad (10.11)$$

mit $K^* = -\frac{1}{2} \log \tanh K$. Wir finden also wieder unser früheres Resultat mit allen Konsequenzen.

Die letzte Umschreibung der Zustandssumme lässt sich nun relativ leicht verallgemeinern um die Frage nach der Interpretation der Variablen σ_r auf dem dualen Gitter zu beantworten. Dazu berechnen wir die *Zweipunktfunktion* des dualen Modells,

$$\langle \sigma_r \sigma_s \rangle = \frac{1}{Z^*} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_r \sigma_s \exp \left(K^* \sum_{\langle pq \rangle} \sigma_p \sigma_q \right).$$

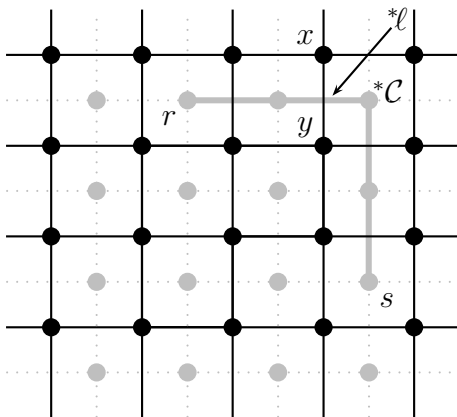
Die Zustandssumme $Z(K^*)$ im Nenner wurde schon „dualisiert“ und braucht nicht weiter betrachtet zu werden. Wir schreiben den Zähler um,

$$\begin{aligned} Z_{rs} &= \sum_{\{\sigma\}} \sigma_r \sigma_s \exp \left(K^* \sum_{\langle pq \rangle} \sigma_p \sigma_q \right) \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \sigma_r \sigma_s \prod_{\langle pq \rangle} \sum_{k=0}^1 c_k(K^*) (\sigma_p \sigma_q)^k, \end{aligned}$$

wobei das Produkt über alle nächste Nachbarn-Paare auf Λ^* zu nehmen ist. Die weitere Rechnung ist eine leichte Modifikation der obigen Manipulation und ergibt

$$Z_{rs} = 2^V \sum_{\{k\}} \prod_{*\ell} c_{k_{*\ell}}(K^*) \delta_2(1 + \partial k(r)) \delta_2(1 + \partial k(s)) \prod'_p \delta_2(\partial k(p)), \quad (10.12)$$

wobei der Strich am letzten Produktzeichen das Produkt über alle Gitterpunkte des dualen Gitters mit Ausnahme von r und s anzeigen soll. Wir möchten wieder eine Darstellung der k finden, so dass die Bedingungen an die Divergenz ∂k in (10.12) erfüllt sind. Die Darstellung (10.10) erfüllt diese Forderung nicht.



Um zu einer Darstellung zu gelangen, verbinden wir die Punkte r und s mit einem beliebigen Weg ${}^*\mathcal{C}$ auf dem dualen Gitter. Dann wählen wir folgende Darstellung für die k :

$$k_{*\ell} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - s_x s_y) & * \ell \notin {}^*\mathcal{C} \\ \frac{1}{2}(1 + s_x s_y) & * \ell \in {}^*\mathcal{C}. \end{cases}$$

Fall also $\langle xy \rangle$ den Weg ${}^*\mathcal{C}$ schneidet, so wählen wir eine andere Transformationsregel.

Mit dieser Darstellung ist ∂k auf allen Gitterplätzen von Λ^* eine gerade Zahl, mit Ausnahme der Punkte r, s , wo ∂k ungerade ist. Eingesetzt in (10.12) erhalten wir

$$Z_{rs} = \frac{1}{2} 2^V \sum_{\{s\}} \prod_{\langle xy \rangle \in \mathcal{C}} c_{(1+s_x s_y)/2}(K^*) \prod_{\langle xy \rangle \notin \mathcal{C}} c_{(1-s_x s_y)/2}(K^*)$$

wobei \mathcal{C} die Menge aller Kanten auf dem Gitter Λ ist, die den Weg ${}^*\mathcal{C}$ schneiden. Nach einer ähnlichen Umformung wie oberhalb von (10.11) gelangen wir zu folgender Darstellung

$$Z_{rs} = \frac{1}{2} (\sinh 2K)^{-V} \sum_{\{s\}} \exp \left(\sum_{\langle xy \rangle} K_{xy} s_x s_y \right). \quad (10.13)$$

Im Exponenten wird über alle nächste-Nachbarn Paare auf Λ summiert. Die Kopplung zwischen nächsten Nachbarn ist βJ , außer für nächste Nachbarn deren Verbindungslinie den Weg ${}^*\mathcal{C}$ auf dem dualen Gitter von r nach s schneidet. Für diese speziellen Paare ist die Kopplung $-\beta J$ antiferromagnetisch. Damit ist Z_{rs} die Zustandssumme eines Ising-Modells mit einer Mischung aus ferromagnetischen und antiferromagnetischen Kopplungen zwischen nächsten Nachbarn. Die Korrelationsfunktion $\langle \sigma_r \sigma_s \rangle$ ist das Verhältnis von zwei Zustandssummen: einer mit gemischten ferro- und antiferromagnetischen Kopplungen und einer mit nur ferromagnetischen Kopplungen.

10.2 Dualität für das 3d Ising-Modell

Wir beginnen wie bei der Transformation des 2-dimensionalen Modells und erinnern an das in beliebigen Dimensionen gültige Resultat (10.9)

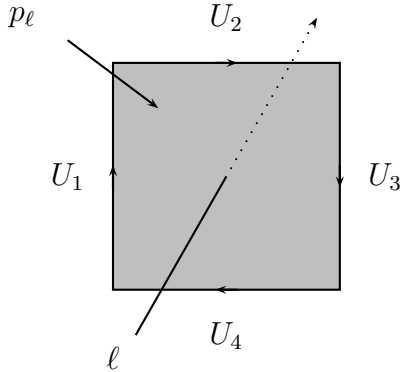
$$Z = 2^V \sum_{\{k\}} \prod_{\ell} c_{k_{\ell}}(K) \prod_x \delta_2(\partial k(x)). \quad (10.14)$$

Wiederum gibt es eine Variable k pro Kante, und entsprechend erhält man in 3 Dimensionen die Divergenz

$$(\partial k)(x) = \sum_{\ell: x \in \partial \ell} k_{\ell}. \quad (10.15)$$

Sie ist nun die Summe von 6 Termen, ein k für jede von x ausgehende Linie. Nun ist es schwieriger, die Bedingung $\partial k(x) \in \{0, 2, 4, 6\}$ in (10.14) zu erfüllen. Zuerst führen wir wieder das duale Gitter Λ^* ein. Die Gitterpunkte von Λ^* sind die Zentren der Elementarzellen des ursprünglichen Gitters. Zwei Punkte auf dem dualen Gitter werden mit einer Linie verbunden (sind nächste Nachbarn) wenn die entsprechenden Elementarzellen eine

Seite teilen. Das duale Gitter eines kubischen Gitters ist damit wieder ein kubischen Gitter, das in alle drei Raumrichtungen um eine halbe Gitterlänge gegenüber Λ verschoben ist. Jede Kante ℓ des ursprünglichen Gitters geht durch genau eine elementare Plaquette (Seite) des dualen Gitters. Dies ist die zu ℓ duale Plaquette p_ℓ . Wir ordnen nun jeder Kante $^*\ell$ des dualen Gitters eine Variable (Linkvariable) $U_{^*\ell} \in \{-1, 1\}$ zu.



Es sei p_ℓ die zur Kante ℓ duale Plaquette. Wir schreiben

$$k_\ell = \frac{1}{2} \left(1 - \prod_{^*\ell \in \partial p_\ell} U_{^*\ell} \right) \quad (10.16)$$

Haben eine gerade Anzahl von gruppenwertigen $U_{^*\ell}$ auf dem Rand der Plakette p den Wert 1, dann ist $k_\ell = 0$, sonst $k_\ell = 1$.

Nun betrachten wir die Divergenz von ∂k am Gitterpunkt x . Sie ist gleich der Summe der k -Werte aller 6 Kanten, die bei x beginnen. Es sei K_x der Kubus des dualen Gitters mit Mittelpunkt x . Durch jede Seite (Plaquette) dieses Kubus geht eine bei x beginnende Kante. Die zu diesen 6 Kanten ℓ dualen Plaquetten sind offensichtlich die 6 Seiten des Kubus und

$$\partial k(x) = 3 - \frac{1}{2} \sum_{^*p \in \partial K_x} \prod_{^*\ell \in \partial ^*p} U_{^*\ell}. \quad (10.17)$$

Das Produkt der U 's kann nur die Werte ± 1 annehmen. Wir wollen nachprüfen, dass für diese Darstellung die Divergenz nur die Werte 0, 2, 4 und 6 annehmen kann. Sind alle $U_{^*\ell}$ auf den Kanten des Kubus 1, so ist $\partial k = 0$. Ändern wir das Vorzeichen eines der $U_{^*\ell}$, so ändern 2 Terme in (10.17) das Vorzeichen und die Summe ändert sich entsprechend um 4, 0 oder -4 . Also ändert sich ∂k um eine gerade Zahl. Das die Darstellung (10.16) notwendig ist, werden wir später beweisen.

Das Produkt über alle Kanten (10.14) wird zum Produkt über alle dualen Plaquetten. Setzen wir die Darstellung (10.17) in (10.14) ein, so sind die Kronecker-Funktionen alle 1 und

$$Z = 2^V \sum_{\{k(U)\}} \prod_{\{^*p\}} c_{(1 - \prod U_{^*\ell})/2} (K). \quad (10.18)$$

Wir werden sehen, dass verschiedene Konfigurationen $U : ^*\ell \longrightarrow U_{^*\ell} \in \{-1, 1\}$ zu derselben Konfiguration $k : \ell \longrightarrow k_\ell \in \{0, 1\}$ gehören. Nach Konstruktion ist das Gewicht

zweier U -Felder mit identischem k -Feld gleich. Wir dürfen also nur über Klassen $k(U)$ von U -Feldern summieren, welche zum selben k -Feld gehören. Dies ist die Summe in (10.18). Mit der Beziehung

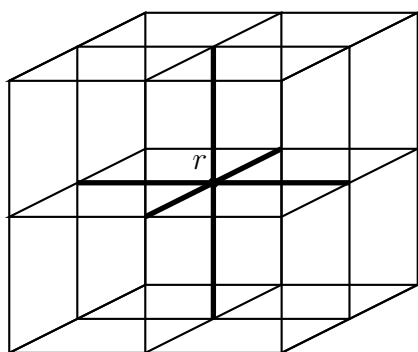
$$c_{k_\ell} = \cosh K e^{k_\ell \log \tanh K} \stackrel{(10.16)}{=} (\cosh K \sinh K)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \log \tanh K \prod_{*\ell \in \partial_p \ell} U_{*\ell}\right)$$

ergibt sich folgende Form für die Zustandssumme,

$$Z = 2^V (\cosh K \sinh K)^{3V/2} \cdot \sum_{\{k(U)\}} \exp\left(K^* \sum_{\{*p\}} \prod_{*\ell \in \partial^* p} U_{*\ell}\right) \quad (10.19)$$

Die Summe im Exponenten ist über alle Plaquetten des dualen Gitters und die Beziehung $K^*(K)$ lautet genauso wie in 2-Dimensionen,

$$K^* = -\frac{1}{2} \log \tanh K. \quad (10.20)$$



Multiplizieren wir die $U_{*\ell}$ derjenigen Kanten $*\ell$, deren Rand den Punkt $r \in \Lambda^*$ enthält mit -1 , so ändert sich das Feld $k(U)$ in (10.16) nicht, da jede Plaquette des dualen Gitters entweder zwei oder keine dieser Kanten enthält. Diese Operation kann an jedem Gitterpunkt $r \in \Lambda^*$ unabhängig vorgenommen werden, und daher gibt es 2^{V^*} Konfigurationen $\{U\}$ mit demselben $k(U)$.

Es folgt, dass unter einer *Umeichung*

$$U_{\langle rs \rangle} \longrightarrow U'_{\langle rs \rangle} = g_r U_{\langle rs \rangle} g_s^{-1}, \quad g : \Lambda^* \longrightarrow \mathcal{G} = \{-1, 1\} \quad (10.21)$$

sich weder das Feld $k(U)$ noch der Term

$$\prod_{*\ell \in \partial^* p} U_{*\ell}$$

im Exponent in (10.19) ändern. Es sind Beispiele für eichinvariante Größen. Andere wichtige eichinvariante Variablen sind die Wilsonschleifen-Variablen: Es sei $*\mathcal{C}$ ein geschlossener Weg (eine Schleife) auf dem dualen Gitter, $\partial^* \mathcal{C} = 0$. Dann ist die Schleifenvariable gegeben

durch

$$W(*\mathcal{C}) = \prod_{\ell \in *\mathcal{C}} U_{*\ell} \in \mathcal{G}. \quad (10.22)$$

Zwei Konfigurationen U und U' müssen in der Summe (10.19) identifiziert werden. Die Theorie mit Zustandssumme (10.19) hat damit eine *lokale Symmetrie*. Da $g : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ ein beliebiges Feld ist, gibt es 2^{V^*} eichäquivalente Konfigurationen U . Wir haben damit bewiesen, dass die zum 3-dimensionalen Ising-Modell duale Theorie eine \mathbb{Z}_2 -Eichtheorie ist. Man kann nun zeigen (siehe [44]), dass die duale Theorie der \mathbb{Z}_2 -Eichtheorie wieder das 3-dimensionale Ising-Modell ist. Die Dualitätstransformation ist idempotent.

Es stellt sich natürlich die Frage, wie man die Summe in (10.19) über eich-inäquivalente Konfiguration, also Konfigurationen U mit unterschiedlichen $k(U)$ ausführt. Es gibt zwei Vorgehensweisen: Man versucht die Eichung zu fixieren und wählt aus jeder Eichklasse

$$\{U_{\langle rs \rangle}\} \sim \{g_r U_{\langle rs \rangle} g_s^{-1}\} \quad (10.23)$$

einen Repräsentanten aus und summiert nur über die Repräsentanten. Oder man summiert einfach über alle U -Konfigurationen in (10.19). Dann überzählt man, aber die Überzählung ist unabhängig von k immer (etwa) 2^{V^*} . Auf diese Weise findet man für kubische Gitter, für die $V = V^*$ ist, das Resultat

$$Z = (\cosh K \sinh K)^{3V/2} \cdot \sum_{\{U\}} \exp \left(K^* \sum_{\{*p\}} \prod_{*\ell \in \partial^* p} U_{*\ell} \right). \quad (10.24)$$

Wir haben benutzt, dass der Boltzmannfaktor auf jeder Eichklasse konstant ist. Nun schreiben wir die Eichtransformation (10.21) noch in einer Form, die den Zusammenhang zur Elektrodynamik (in 3 Euklidischen Raumzeit-Dimensionen) herstellt. Dazu schreiben wir

$$U_{\langle rs \rangle} = \exp(i\pi A_{\langle rs \rangle}) \quad \text{und} \quad g_r = \exp(i\pi \lambda_r),$$

wobei die Variablen $A_{\langle rs \rangle}$ und λ_x aus der additive geschriebenen Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ sind. In dieser Gruppe ist zum Beispiel $1 + 1 = 0$. Wegen

$$\partial \langle rs \rangle = \langle s \rangle - \langle r \rangle \implies (\lambda, \partial \langle rs \rangle) = \lambda_s - \lambda_r = (d\lambda, \langle rs \rangle)$$

hat die Eichtransformation (10.21) für das Eichfeld $A = A_{\langle rs \rangle} \langle rs \rangle$ die uns allen wohlbekannte Form wie in der (diskretisierten) Elektrodynamik,

$$A \longrightarrow A' = A - d\lambda, \quad A \in C_1(\Lambda^*, \mathbb{Z}_2), \quad \lambda \in C_0(\Lambda^*, \mathbb{Z}_2). \quad (10.25)$$

10.3 Peierls Argument

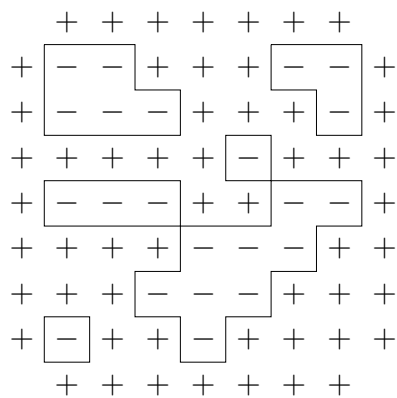
Schon vor der Berechnung der freien Energie des 2-dimensionalen Ising-Modells durch ONSAGER [47] bewies PEIERLS [45] die Existenz zweier Phasen für tiefe Temperaturen. Seine von ihm verwendete Methode ist auf viele andere Modelle der statistischen Physik anwendbar. In diesem Abschnitt wird das Peierlsche Argument für das 2-dimensionale Ising-Modell besprochen. Am Ende werden wir klären, welche Verallgemeinerungen möglich sind.

Wir wählen feste Randbedingungen und setzen alle Spins am Gitter-Rand auf 1. Die Wahl von nicht-periodischen Randbedingungen wird sich später als wichtig herausstellen. Mit den gewählten 1-Randbedingungen gehört zu jeder Konfiguration w eine Menge Γ_w von sich nicht schneidenden Schleifen innerhalb derer die Spins -1 sind. Es sei also

$$\Gamma_w = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$$

eine Menge von durchschnittsfreien Schleifen und w_Γ die zugehörige *eindeutige* Spinkonfiguration, siehe die folgende Abbildung. Es gibt $\sum_i |\gamma_i|$ NN-Paare mit antiparallelen Spins.

Wir wollen nun die Energie einer Konfiguration w_Γ mit zugehörigen Schleifen Γ_w und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Konfiguration abschätzen.



Die Energie $H = -J \sum_{\langle xy \rangle} s_x s_y$ dieser Konfiguration ist offensichtlich

$$\begin{aligned} H_\Lambda(w_\Gamma) &= -J \#(\text{Paare mit gleichem Spin}) \\ &\quad + J \#(\text{Paare mit ungl. Spin}) \\ &= -JP + 2J \sum_i |\gamma_i|, \end{aligned}$$

wobei wie früher P die Anzahl NN-Paare und $|\gamma_i|$ die Länge der Schleife γ_i bezeichnet.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Konfiguration w_Γ gleich

$$P[w_\Gamma] = \frac{1}{Z'} \exp \left(-2K \sum_{\gamma_i \in \Gamma_w} |\gamma_i| \right), \quad Z' = \sum_{\Gamma} \exp \left(-2K \sum_{\gamma_i \in \Gamma} |\gamma_i| \right). \quad (10.26)$$

Es gilt die folgende Ungleichung

Lemma (Peierls-Ungleichung) Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Schleife γ kann wie folgt abgeschätzt werden,

$$P[\gamma] \equiv P[\{w : \gamma \in \Gamma_w\}] \leq e^{-2K|\gamma|}. \quad (10.27)$$

Beweis: Die linke Seite ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z'} \sum_{w:\gamma \in \Gamma_w} \exp\left(-2K \sum_{\gamma' \in \Gamma_w} |\gamma'|\right) &= \frac{1}{Z'} e^{-2K|\gamma|} \sum_{w:\gamma \in \Gamma_w} \exp\left(-2K \sum_{\gamma' \in \Gamma_w \setminus \gamma} |\gamma'|\right) \\ &= \frac{1}{Z'} e^{-2K|\gamma|} \sum_{w:\gamma \in \Gamma_{P_\gamma w}} \exp\left(-2K \sum_{\gamma' \in \Gamma_w} |\gamma'|\right). \end{aligned}$$

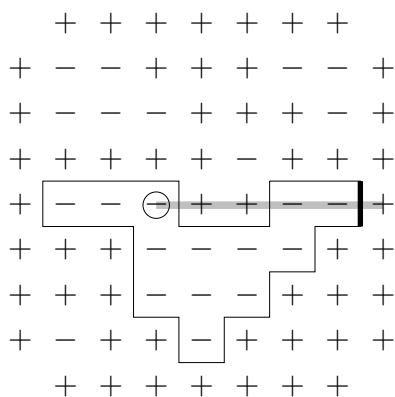
Wir haben benutzt, dass die Schleifen in Γ_w mit $\gamma \in \Gamma_w$ bis auf die Wegnahme von γ identisch zu den Schleifen der Konfiguration $P_\gamma w$ ist, wobei $P_\gamma w$ aus w durch das Umkehren der Vorzeichen aller Spins innerhalb γ hervorgeht. In der letzten Summe wird über eine Teilmenge aller Konfigurationen summiert, so dass sie kleiner oder gleich Z' ist. Dies beweist dann die Ungleichung (10.27). Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten langer Konturen vorgegebener Form sinkt also exponentiell mit deren Länge. Diese Ungleichung ist unabhängig von der Größe des Gitters Λ .

Wir wollen diese Information dazu benutzen, um die Wahrscheinlichkeit der Spinkonfigurationen mit $s_x = -1$ für 1-Randbedingungen abzuschätzen. Dazu bemerken wir, dass jeder solche Spin von mindestens einer Kontur umschlossen sein muss (es können natürlich auch mehr sein). Wir haben das

Lemma Die Länge $|\gamma|$ jeder Kontur ist gerade. Die Anzahl $A(n)$ der einen Punkt $x \in \Lambda$ umschliessenden Konturen der Länge n ist nach oben beschränkt durch

$$A(n) \leq \frac{n-2}{2} \cdot 3^{n-1}.$$

Für einen geschlossenen Kontur ist sowohl die Zahl der horizontalen als auch die Zahl der vertikalen Kanten gerade. Deshalb ist $n = |\gamma| \in \{4, 6, 8, \dots\}$.



Zur Abschätzung von $A(n)$ überlegen wir uns zunächst, dass der vom Punkt x ausgehende Strahl $y = x + \lambda e_1$, $\lambda > 0$, den Kontur γ mindestens einmal schneiden muss. Wir betrachten die vertikale Kante von γ mit dem größten λ -Wert. Diese kann nur λ -Werte der Form $-\frac{1}{2} + k$ mit $k \in \{1, \dots, \frac{1}{2}(n-2)\}$ besitzen. Der größte Wert wird für das Rechteck der Höhe 1 und Länge $\frac{1}{2}(n-2)$ realisiert. Jede der $n-1$ anderen Kanten kann bezüglich seines Vorgängers höchstens 3 Richtungen einschlagen:

links, geradeaus, rechts. Durch Multiplikation der kombinatorischen Faktoren erhalten wir die obige Schranke für $A(n)$. Die Zahl der x umschliessenden Konturen wächst also

exponentiell mit der Länge. Aus der Peierls-Ungleichung und dem obigen Lemma folgt durch Vergleich, dass für

$$K > \frac{1}{2} \log 3 \approx 0.55$$

das Auftreten sehr langer, den Punkt x umschliessender Konturen unwahrscheinlich ist. Es gilt der

Satz Für $K > 0.7$ existieren zwei verschiedene Gibbsmasse P_β^+, P_β^- für das Isingmodell auf dem Gitter \mathbb{Z}^2 , wobei für alle $x \in \mathbb{Z}^2$ gilt

$$\langle s_x \rangle_{P_\beta^+} > 0 \quad \text{und} \quad \langle s_x \rangle_{P_\beta^-} < 0. \quad (10.28)$$

Für tiefe Temperaturen tritt also spontane Magnetisierung auf. Aus der exakten Lösung oder den Dualitätsargumenten folgt, dass schon für $K > K_c$ mit $K_c = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \approx 0.44$ spontane Magnetisierung auftritt.

Zum Beweis schätzen wir die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $s_x = -1$ bei +1-Randbedingungen ab. Wir wollen annehmen, dass $\alpha \equiv 4K - 2 \log 3$ positiv ist:

$$\begin{aligned} P^+[s_x = -1] &\leq \sum_{\gamma \text{ um } x} P[\gamma] \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} A(n) e^{-2Kn} = \sum_{m \in \mathbb{N}} A(2m) e^{-4Km} \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{N}} (m-1) 3^{2m-1} e^{-4Km} = \frac{1}{3} \sum_{m \in \mathbb{N}} (m-1) e^{-\alpha m} \\ &= \frac{1}{3} e^{-\alpha} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n e^{-n\alpha} = \frac{1}{3} e^{-\alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{-n\alpha} \right) = \frac{1}{3} \frac{y^2}{(1-y)^2}, \end{aligned}$$

mit $y = e^{-\alpha} \in (0, 1)$. Wir wollen herausfinden, wann diese Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Sie ist $\frac{1}{2}$ für

$$2y^2 = 3(1-y)^2 \quad \text{oder für} \quad y = 3 \pm \sqrt{6}.$$

Wir schliessen, dass für $y < 3 - \sqrt{6}$ oder auch für $\alpha > -\log(3 - \sqrt{6})$ die Wahrscheinlichkeit $P[s_x = -1]$ kleiner 1/2 wird. Damit finden wir für +1-Randbedingungen und für

$$\beta J = K > \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{4} \log(3 - \sqrt{6}) = \frac{1}{4} \log(3(3 + \sqrt{6})) \approx 0.69853. \quad (10.29)$$

eine positive Magnetisierung. Diese Abschätzung ist unabhängig vom Gitterplatz x und der Größe des Gitters. Im thermodynamischen Limes bleibt also für hinreichend tiefe Temperaturen eine positive Magnetisierung $\langle s_x \rangle^+ > 0$ übrig. Setzen wir alle Spins auf dem Rand gleich -1 , dann finden wir mit ähnlichen Argumenten, dass für $K > \frac{1}{4} \log[3(3 +$

$\sqrt{6}]$ die Wahrscheinlichkeit $P[s_x = 1]$ kleiner als $1/2$ ist. Im thermodynamischen Limes erhalten wir dann eine negative Magnetisierung. Dies beweist die Existenz von mindestens zwei verschiedenen Phasen für $K > 0.7$.

Nun wollen wir uns überlegen, inwieweit sich das Peierls-Argument auf andere Systeme anwendbar ist. Beim Argument studiert man Anregungen über der Konfiguration w_0 mit der kleinsten Energie, der sogenannten Grundzustandskonfiguration. Für das d -dimensionale Ising-Modell mit $+1$ -Randbedingungen ist dies die geordnete Konfiguration

$$w_0 = \{s_x = 1 | x \in \Lambda\}.$$

Daneben braucht man die Verallgemeinerung der *Peierlskonturen*. Dies sind randlose $d-1$ -Ketten auf dem dualen Gitter,

$$\gamma \in C_{d-1}(\Lambda^*, \mathcal{G}), \quad \partial\gamma = 0.$$

Für jede Konfiguration $w = \{s\}$ definiert man diese Peierlskonturen wie folgt:

$$\Gamma_w = {}^*v_{d-1}^1 + {}^*v_{d-1}^2 + \dots,$$

wobei die Zellen ${}^*v_{d-1}^i$ auf dem dualen Gitter Λ^* dual zu einer Kante $\langle xy \rangle$ auf dem Gitter Λ sind, für die $s_x s_y = -1$ ist. Die Zellen ${}^*v_{d-1}^i$ bilden eine geschlossene (randlose) Fläche die im Allgemeinen aus mehreren Zusammenhangskomponenten $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ besteht. Diese Komponenten nennt man Peierlskonturen. Eine Kontur ist also eine zusammenhängende und geschlossene Hyperfläche auf dem dualen Gitter. Sie trennt das Innere $\bar{\gamma} \subset \Lambda$ von seinem Komplement $\bar{\gamma}^c = \Lambda \setminus \bar{\gamma}$, dem Äusseren von γ . Zwei Konturen heissen verträglich, falls ihre Vereinigung keine zusammenhängende Menge von $d-1$ -Ketten ist. Eine Menge von Konturen heisst verträglich, falls je zwei Konturen in der Menge verträglich sind. Es gibt offensichtlich eine $1-1$ -Beziehung zwischen Konfigurationen w mit $+1$ -Randbedingungen und Mengen von verträglichen Konturen. Wir finden folgende Abschätzungen für das d -dimensionale Ising-Modell:

Lemma Die Anzahl $A(n)$ der verschiedenen Peierlskonturen der Größe n erfüllt die Ungleichung

$$\exp\left(\frac{n-2d}{2d-2} \log d\right) < A(n) < \frac{n-2}{2d-2} (3(2d-3))^{n-1}. \quad (10.30)$$

Die untere Schranke ist leicht zu beweisen: Man betrachte eine Kette von k benachbarten Gitterpunkten die bei x beginnt. Dabei gelangt man von einem Gitterpunkt zum folgenden indem man eine Gitterlänge in eine der d positiven Koordinatenrichtungen fortschreitet. Offensichtlich erhält man d^{k-1} verschiedene Ketten dieser Art. Nun betrachtet man die

dazu duale d -Kette. Deren Rand ist eine zusammenhängende geschlossene Kontur die x umschließt. Die Größe jeder Kontur ist $n = (2d - 2)k + 2$, da sich die inneren Flächen der Kettenzellen wegheben. Damit finden wir

$$A(n) > d^{k(n)-1} = d^{(n-2)/(2d-2)} = \exp\left(\frac{n-2}{2d-2} \log d\right).$$

Wir beweisen die obere Schranke in (10.30) mit ähnlichen Argumenten wie wir sie für das 2-dimensionale Modell benutzten. Der von $x \in \Lambda$ ausgehende Strahl $x + \lambda e_1$, $\lambda > 0$ schneidet eine x umschließende Kontur γ mindestens einmal. Wir betrachten die duale Zelle $*v_{d-1}^1 \in \gamma$ mit dem größten λ -Wert. Diese kann nur λ -Werte der Form $-\frac{1}{2} + k$ mit $k \in \{1, \dots, (n-2)/(2d-2)\}$ annehmen. Der größte Wert wird für die Säule mit Grundfläche 1 und der Länge $(n-2)/(2d-2)$ in die e_1 -Richtung realisiert. Jede der $n-1$ anderen Zellen $*v_{d-1}^i$, $i = 2, \dots, n$ kann bezüglich seiner Vorgängerzelle höchstens 3 Richtungen einschlagen und an $2(d-1) - 1$ Seiten angeheftet werden. Multipliziert man die kombinatorischen Faktoren, dann findet man die obere Schranke in (10.30).

Nun argumentiert ganz ähnlich wie in 2 Dimensionen. Dabei nehmen wir an, dass $\alpha = 4K - 2 \log(6d - 9)$ positiv ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spin am Gitterpunkt x gleich -1 ist, kann wie folgt nach oben abgeschätzt werden:

$$P^+[s_x = -1] \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} A(2m) e^{-4Km} \leq \frac{1}{\zeta^2} \frac{y^2}{(1-y)^2}$$

mit $y = e^{-\alpha}$, $\zeta^2 = 3(2d-3)(d-1)$.

Diese Wahrscheinlichkeit ist kleiner als $1/2$ für

$$y < \frac{\zeta}{\zeta + \sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad K > \frac{1}{4} \log \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\zeta} \right) + \frac{1}{2} \log 3(2d-3).$$

In 2 Dimensionen ist $\zeta = \sqrt{3}$ und wir finden das frühere Resultat. In 3 Dimensionen ist $\zeta = 9\sqrt{2}$ und es gibt 2 Phasen für

$$K > \frac{1}{4} \log 108 \implies T < \frac{2}{3 \log 108} T_{\text{MF}} \approx 0.1424 T_{\text{MF}}.$$

Die Existenz von mehreren Phasen in höher-dimensionalen Modellen kann auch mit den Korrelationsungleichungen, denen wir uns jetzt zuwenden, bewiesen werden.

10.4 Korrelationsungleichungen

Wir betrachten ein Spinmodell auf einem (zunächst) endlichen Gitter Λ mit $V = |\Lambda|$ Gitterpunkten und dem Konfigurationenraum

$$\Omega = \{w = (s_1, \dots, s_V) \mid s_x \in \mathbb{R}\}. \quad (10.31)$$

Jeder Spin kann zunächst alle reellen Werte annehmen. Die Einschränkung von s_x erfolgt durch ein apriori Wahrscheinlichkeitsmass μ_x für s_x , dass *gerade* sei. Zum Beispiel gehört zum Ising-Spin ein mit Gewichten $\frac{1}{2}$ auf den Punkten ± 1 konzentriertes apriori Mass. Wir untersuchen ferromagnetische Gittersysteme mit Energie

$$H(w) = - \sum_{K \subset \Lambda} J_K s_K, \quad \text{wobei} \quad s_K = \prod_{x \in K} s_x, \quad J_K \geq 0. \quad (10.32)$$

Der kanonische Erwartungswert einer Spinfunktion $A(w)$ ist

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \int_{\mathbb{R}^V} A(w) e^{-\beta H(w)} d\mu(w), \quad d\mu(w) = \prod_{x=1}^V d\mu_x(s_x), \quad (10.33)$$

mit der entsprechenden Zustandssumme Z , so dass $\langle 1 \rangle = 1$ gilt.

Weiter betrachten wir das „doppelte“ System, das aus 2 ungekoppelten Kopien des ursprünglichen Systems besteht:

$$\begin{aligned} \text{Konfigurationen:} & \quad (w, w') \in \mathbb{R}^V \times \mathbb{R}^V \\ \text{a-priori-Mass:} & \quad d\mu(w, w') = d\mu(w) d\mu(w') \\ \text{Energie:} & \quad H(w, w') = H(w) + H(w'). \end{aligned} \quad (10.34)$$

In diesem System benutzt man oft die Variablen

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(w + w') \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(w - w'). \quad (10.35)$$

Es gilt nun die folgende Ungleichung von GRIFFITHS, KELLY und SHERMAN:

1. GKS-Ungleichung: *Ist die Energiefunktion $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ferromagnetisch, so gilt die Ungleichung*

$$\langle s_A \rangle \geq 0 \quad (10.36)$$

für alle $A \subset \Lambda$, wobei in A derselbe Punkt von Λ mehrfach vorkommen darf.

Beweis: Wir entwickeln den Boltzmannfaktor

$$e^{-H(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_K J_K s_K \right)^n = \sum_{n_1, \dots, n_V} \underbrace{a_{n_1 \dots n_V}}_{\geq 0} s_1^{n_1} \cdots s_V^{n_V}$$

und setzen ein,

$$Z \cdot \langle s_A \rangle = \sum_{n_1, \dots, n_V} a_{n_1 \dots n_V} \int s_1^{m_1} \cdots s_V^{m_V} d\mu(s_1) \cdots d\mu(s_V),$$

wobei $m_x = n_x + (\text{Vielfachheit von } x \text{ in } A)$ ist. Da μ_x als gerade vorausgesetzt wurde, ist das letzte Integral

$$\prod_{x=1}^V \int s_x^{m_x} d\mu_x(s_x) = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } m_x \\ \geq 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist $\langle s_a \rangle$ als Summe von nicht-negativen Termen selbst nicht-negativ.

Als nächstes beweisen wir die

Ginibre-Ungleichung: *Im doppelten System ist*

$$\langle u_{AVB} \rangle \geq 0 \tag{10.37}$$

für alle $A, B \subset \Lambda$.

Beweis: Die negative Energie

$$-H(w, w') = \sum_{K \subset \Lambda} J_K \left[\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}} \right)_K + \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}} \right)_K \right]$$

ist ein Polynom mit positiven Koeffizienten in u und v . Wir erhalten eine ähnliche Entwicklung wie im Beweis der GKS-Ungleichung (10.36). Wir müssen daher noch zeigen, dass

$$I_{mn} = \int_{\mathbb{R}^2} u^m v^n d\mu(s) d\mu(s') \geq 0$$

ist. Dies ist klar für gerade Exponenten m und n . Ist m oder n ungerade, dann verschwindet I_{mn} . Dies folgt aus der Invarianz des Masses $d\mu(s)d\mu(s')$ bezüglich:

$$\begin{aligned} (s, s') &\longrightarrow (-s, -s') \iff (u, v) \longrightarrow (-u, v) \\ (s, s') &\longrightarrow (s', s) \iff (u, v) \longrightarrow (u, -v). \end{aligned}$$

Das Mass ist also gerade in den neuen Variablen u und v und deshalb verschwindet I_{mn} wenn m oder n ungerade ist. Als nächstes beweisen wir die

2. GKS-Ungleichung: Es gilt die Ungleichung

$$\langle s_A s_B \rangle - \langle s_A \rangle \langle s_B \rangle \geq 0 \quad \forall A, B \subset \Lambda. \quad (10.38)$$

Beweis: Im doppelten System ist

$$\begin{aligned} \langle s_A s_B \rangle - \langle s_A \rangle \langle s_B \rangle &= \langle s_A (s_B - s'_B) \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}} \right)_A \left[\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}} \right)_B - \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}} \right)_B \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern ist wieder ein Polynom in u, v mit positiven Koeffizienten. Mit der Ungleichung (10.37) von GINIBRE folgt dann die Ungleichung (10.38).

Wir betrachten nun anstelle des allgemeinen Modells mit Energie (10.32) den speziellen Fall von *Paarwechselwirkungen*,

$$H(w) = - \sum_{\langle xy \rangle} J_{xy} s_x s_y - \sum_x J_x s_x \quad (10.39)$$

und setzen zunächst ferromagnetische Kopplungen $J_{xy} \geq 0$ voraus. Dann gilt die

Percus-Ungleichung: *Im doppelten System ist*

$$\langle v_A \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } A \subset \Lambda. \quad (10.40)$$

Beweis: Die Transformation

$$\begin{pmatrix} s \\ s' \end{pmatrix}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x$$

ist eine Drehung, so dass

$$-H(w) - H(w') = \sum_{xy} J_{\langle xy \rangle} (u_x u_y + v_x v_y) + \sqrt{2} \sum_x J_x u_x.$$

Nun entwickelt man nur den Term $\exp(\sum J_{xy} v_x v_y)$ und zeigt, dass

$$I = \sum_{\mathbb{R}^{2V}} d\mu(w) d\mu(w') v_1^{n_1} \cdots v_V^{n_V} \exp \left(\sum_{\langle xy \rangle} J_{xy} u_x u_y + \sqrt{2} \sum_x J_x u_x \right) \geq 0$$

ist. Da das apriori-Mass gerade in allen u_x und allen v_x ist, ist dieses Integral nur ungleich Null wenn alle Exponenten n_x gerade sind. Für gerade n_x ist das Integral aber offensichtlich ≥ 0 .

Neben den hier vorgestellten und bewiesenen Resultaten gibt es weitere Korrelationsungleichungen, z.B. für das Produkt von 3 oder 4 Spinfunktionen. Ich verweise auf [48].

Anwendungen: Besonders wichtig ist die 2. GKS-Ungleichung in der Form

$$\langle s_A s_B \rangle - \langle s_A \rangle \langle s_B \rangle = \frac{\partial \langle s_A \rangle}{\partial J_B} \geq 0. \quad (10.41)$$

Es folgt die Monotonie der Korrelationsfunktionen als Funktionen der Kopplungskonstanten. Insbesondere wächst $\langle s_A \rangle$ monoton

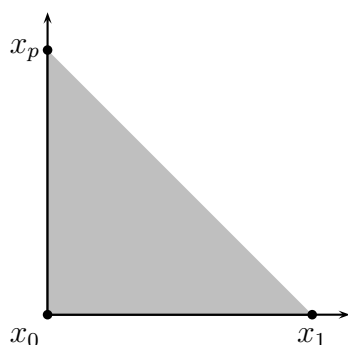
- bei wachsendem äußeren Feld
- bei wachsender ferromagnetischer Kopplung
- bei sinkender Temperatur.

Die Ungleichung (10.41) erlaubt uns, verschiedene Modelle der statistischen Mechanik miteinander zu vergleichen. So folgt aus dem Peierlschen Argument für Systeme mit NN-Wechselwirkung dann sofort die Existenz einer spontanen Magnetisierung falls noch zusätzliche ferromagnetische Wechselwirkungen längerer Reichweite wirken. Diese ist sogar größer und die entsprechende kritische Temperatur nimmt zu. Ferner ist die spontane Magnetisierung eine sinkende Funktion der Temperatur. Es folgt weiter, dass ein 3-dimensionales Ising-Modell, das durch ferromagnetische Kopplung von 2-dimensionalen Modellen entsteht, eine größere Magnetisierung und damit eine höhere kritische Temperatur als das 2-dimensionale Modell hat.

10.5 Anhang B: Differenzenkalkül

Bei der Behandlung von allgemeinen Gittertheorien und insbesondere der Dualitäten lohnt es, den Differenzen-Kalkül auf dem Gitter zu kennen. Der Vollständigkeit halber erinnern wir an die Definition und die wesentlichen Eigenschaften von Simplizial-Komplexen in einem Euklidischen Raum¹.

¹In dieser Vorlesung benötigen wir nicht die allgemeineren Simplexe in Mannigfaltigkeiten.



Gegeben seien affine unabhängige Punkte x_0, x_1, \dots in einem abstrakten Raum. Ein p -Standardsimplex v_p ist die konvexe Hülle

$$\langle x_0 x_1 \dots x_p \rangle = \left\{ x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1 \right\}.$$

Sind alle baryzentrischen Koordinaten λ_i positiv, so liegt x im Innern des Simplex. Ist $\lambda_i = 0$, so liegt x auf der Seite gegenüber dem Vertex x_i .

Ein 0-Simplex $\langle x_0 \rangle$ ist ein Punkt, ein 1-Simplex $\langle x_0 x_1 \rangle$ eine Strecke, ein 2-Simplex $\langle x_0 x_1 x_2 \rangle$ ein Dreieck und ein 3-Simplex $\langle x_0 x_1 x_2 x_3 \rangle$ ein Tetraedron. Ein *orientierter* p -Simplex ändert das Vorzeichen bei einer Orientierungsänderung: Ist π eine Permutation von p Elementen, so ist

$$\langle \pi(x_0) \dots \pi(x_p) \rangle = \text{sign}(\pi) \langle x_0 \dots x_p \rangle. \quad (\text{B.1})$$

Der j -Seite eines Simplex ist die Menge definiert durch $\lambda_j = 0$. Sie ist gleich dem x_j gegenüberliegenden Oberflächenstück. Die 2 Seiten des 1-Simplex $\langle x_0 x_1 \rangle$ sind die Punkte (0-Simplexe) x_0 und x_1 , die 3 Seiten eines 2-Simplex $\langle x_0 x_1 x_2 \rangle$ die drei Strecken (1-Simplexe) $\langle x_0 x_1 \rangle$, $\langle x_1 x_2 \rangle$ und $\langle x_2 x_0 \rangle$ usw.

p -Simplexe sind spezielle p -Zellen, also p -dimensionale konvexe Polyeder v_p im \mathbb{R}^d . Ein Zellkomplex K ist eine Menge von Zellen $\{v_p^1, v_p^2, \dots\}$, so dass

- Jede Seite einer Zelle eine Zelle ist.
- Die Schnittmenge zweier Zellen v_p^i und v_p^j entweder leer oder eine gemeinsame Seite der beiden Zellen ist.

Eine *Simplizial-Komplex* ist ein Zellkomplex, dessen Zellen Simplexe sind. Hier sind insbesondere Zellkomplexe, die zu einem Raumgitter gehören von Interesse. Die Anzahl p -dimensionaler orientierter Zellen des endlichen Gitters (Punkte, Kanten, Plaquetten, Kuben,...) sei N_p . Die geometrischen Objekte eines Zellkomplexes sind formale endliche Summen von p -Zellen,

$$\phi_p = \sum_{i=1}^{N_p} \varphi_i v_p^i, \quad (\text{B.2})$$

und werden p -Ketten genannt. Die Koeffizienten φ_i sind Elemente einer additiv geschriebenen Abelschen Gruppe \mathcal{G} . Sie sind die Stärke des Feldes ϕ_p in der Zelle v_p^i , analog zum

Wert eines Skalarfeldes in einem Punkt. Eine alternative Schreibweise für die Ketten eines Simplicialkomplexes ist

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \sum_i \varphi_i \langle x_i \rangle \\ \phi_1 &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \varphi_{ij} \langle x_i x_j \rangle \\ \phi_2 &= \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \varphi_{ijk} \langle x_i x_j x_k \rangle \quad \dots \end{aligned} \tag{B.3}$$

Wegen (B.1) sind die $\varphi_{ij}, \varphi_{ijk}, \dots$ antisymmetrisch in ihren Indizes,

$$\varphi_{\pi(i_1)\dots\pi(i_p)} = \text{sign}(\pi) \varphi_{i_1, \dots, i_p}.$$

Die *Kettengruppe* $C_p(\mathcal{G})$ ist die freie Abelsche Gruppe über p -Zellen. Gehören die Zellen zu einem Gitter Λ , so schreiben wir oft $C_p(\Lambda, \mathcal{G})$ für die Kettengruppe. Der Körper $|K|$ eines Komplexes K ist die Vereinigung aller Zellen. Ist eine Menge der Körper eines Simplicialkomplexes K , dann nennt man K eine *Triangulation* dieser Menge. Die Triangulation einer endlichen Menge S von Punkten im \mathbb{R}^d ist der Simplicialkomplex K mit $|K| = \text{conv. Hülle}(S)$. Jede p -Zelle hat eine Simplicialzerlegung, so dass Simplexe die fundamentalen Bausteine von Zellen sind.

Rand und Co-Rand: Im folgenden werden der *Randoperator* und sein adjungierter Operator, der *Co-Randoperator* eine wichtige Rolle spielen. Der Randoperator ordnet einer Kette von Zellen den orientierten Rand zu,

$$\partial : C_p(\mathcal{G}) \longrightarrow C_{p-1}(\mathcal{G}). \tag{B.4}$$

Für einen orientierte p -Zelle ist

$$\partial v_p^i = \sum_j [v_p^i : v_{p-1}^j] v_{p-1}^j, \tag{B.5}$$

wobei die *Inzidenzmatrix* wie folgt definiert ist:

$$[v_p^i : v_{p-1}^j] = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } v_{p-1}^j \subset v_p^i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{B.6}$$

Das Plus- oder Minuszeichen berücksichtigt die relative Orientierung der beiden Zellen.

Für ein p -Simplex ist der Rand gegeben durch

$$\partial\langle x_0 \dots x_p \rangle = \sum_0^p (-)^j \langle x_0 \dots \check{x}_j \dots x_p \rangle \quad (\text{B.7})$$

Die Definition (B.7) für Simplexe impliziert die Definition (B.6) für allgemeinere Zellen. Um dies einzusehen wähle man eine Simplicialzerlegung der Zelle.

Das Bild von ∂ ist ein orientierter Rand. Ist $\langle x_0 x_1 \rangle$ die orientierte Linie von x_0 zu x_1 , dann ist ihr Rand gleich dem Endpunkt minus dem Anfangspunkt. Ist $\langle x_0 x_1 x_2 \rangle$ ein orientiertes Dreieck, dann ist sein Rand die Summe der orientierten Linien $\langle x_1 x_2 \rangle - \langle x_0 x_2 \rangle + \langle x_0 x_1 \rangle$. Der Randoperator ∂ wird linear auf Ketten ausgedehnt,

$$\partial\phi_p = \sum \phi_i \partial v_p^i.$$

Zum Beispiel ist der Rand der 1- und 2-Ketten eines Simplicialkomplexes

$$\begin{aligned} \partial\phi_1 &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \phi_{ij} (\langle x_j \rangle - \langle x_i \rangle) = \sum_{i < j} \phi_{ij} (\langle x_j \rangle - \langle x_i \rangle) \\ \partial\phi_2 &= \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \phi_{ijk} (\langle x_j x_k \rangle - \langle x_i x_k \rangle + \langle x_i x_j \rangle) \\ &= \sum_{i < j < k} \phi_{ijk} (\langle x_j x_k \rangle - \langle x_i x_k \rangle + \langle x_i x_j \rangle). \end{aligned}$$

Der Randoperator ist nilpotent,

$$\partial\partial = 0, \quad (\text{B.8})$$

und der Rand eines Randes gleich Null. Es genügt, dies für Simplexe zu beweisen,

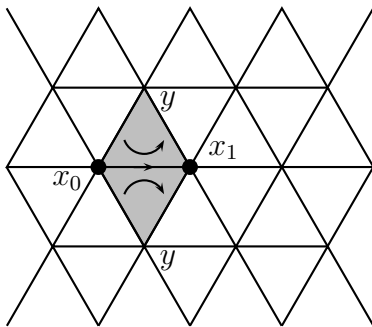
$$\begin{aligned} \partial\partial\langle x_0 x_1 x_2 \dots x_p \rangle &= \partial \left(\sum_j (-)^j \langle x_0 \dots \check{x}_j \dots x_p \rangle \right) \\ &= \sum_{k < j} (-)^{j+k} \langle x_0 \dots \check{x}_k \dots \check{x}_j \dots x_p \rangle \\ &\quad - \sum_{k > j} (-)^{j+k} \langle x_0 \dots \check{x}_j \dots \check{x}_k \dots x_p \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Der *Co-Rand* d ist eine lineare Abbildung von C_p nach C_{p+1} . Wenden wir d auf eine p -Zelle

v_p an, so erhalten wir die Summe derjenigen $p + 1$ -Zellen, deren Rand $+v_p$ enthält,

$$dv_p^i = \sum_j [v_{p+1}^j : v_p^i] v_{p+1}^j. \tag{B.10}$$

Hier ist wieder das Vorzeichen wichtig.



Zum Beispiel ist der Co-Rand eines Simplex $\langle x_0 \dots x_p \rangle$ die Kette

$$\sum_{y: \langle yx_0 \dots x_p \rangle} \langle yx_0 x_1 \dots x_p \rangle. \tag{B.11}$$

Summiert wird hier über alle y , für die $\langle yx_0 \dots x_p \rangle$ ein $p + 1$ -Simplex ist. Beim Dreiecksgitter ist $d\langle x_0 x_1 \rangle$ die Summe von zwei Dreiecken.

Genauso wie der Randoperator ist der *Co-Randoperator* nilpotent,

$$dd = 0. \tag{B.12}$$

Für Standardsimplexe ist der Beweis relativ einfach:

$$dd\langle x_0 x_1 \dots x_p \rangle = \sum_{y, y': \langle y' y x_0 \dots x_p \rangle} \langle y' y x_0 \dots x_p \rangle = 0,$$

da sich $\langle yy' \dots \rangle$ und $\langle y'y \dots \rangle = -\langle yy' \dots \rangle$ in der Summe wegheben. Später werden wir sehen, dass d der zu ∂ adjungierte Operator ist. Aus $\partial\partial = 0$ folgt dann sofort $dd = 0$ für beliebige Ketten.

Wir notieren die expliziten Formeln für 0 und 1-Ketten von Simplicialkomplexen. Eine 0-Kette (Skalarfeld) $\phi_0 = \sum \phi_x \langle x \rangle$ hat den Co-Rand

$$d\phi_0 = \sum_x \phi_x \sum_{y: \langle yx \rangle} \langle yx \rangle = \sum_{\langle xy \rangle} (\phi_x - \phi_y) \langle yx \rangle. \tag{B.13}$$

Er ist der *Differenziengradient* von ϕ_0 . Für eine 1-Kette (Vektorfeld) ϕ_1 ist

$$d\phi_1 = \sum_{\langle xy \rangle} \phi_{xy} \sum_{z: \langle zxy \rangle} \langle zxy \rangle = \sum_{\langle xyz \rangle} (\phi_{xy} - \phi_{zy} + \phi_{yz}) \langle zxy \rangle \tag{B.14}$$

Die *Divergenz* einer 1-Kette erhält man mit dem Randoperator. Man findet

$$\partial\phi_1 = \sum_{\langle yx \rangle} \phi_{yx} \partial\langle yx \rangle = \sum_{\langle yx \rangle} \phi_{yx} (\langle x \rangle - \langle y \rangle) = \sum_x \langle x \rangle \sum_{y:\langle yx \rangle} \phi_{xy}. \quad (\text{B.15})$$

Der Koeffizient von $\langle x \rangle$ ist minus der Differenzen-Divergenz am Punkt x . Wir erwarten, dass ∂d proportional zum Laplace-Operator sein sollte. Für eine 0-Zelle gilt zum Beispiel,

$$\begin{aligned} \partial d\phi_0 &= \delta \left(\sum_x \sum_{y:\langle yx \rangle} \phi_x \langle yx \rangle \right) \\ &= \sum_x \langle x \rangle \left(q\phi_x - \sum_{y:\langle yx \rangle} \phi_y \right) = - \sum_x (\Delta\phi_0)(x) \langle x \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

wobei q die Anzahl 1-Simplexe ist, die x als Randpunkt haben. Für einen Zellkomplex ist

$$\partial d\phi_0 = \sum_{jk} \phi_i [v_1^j : v_0^i] [v_1^j : v_0^k] v_0^k. \quad (\text{B.17})$$

Für 0-Ketten aus $C_0(\Lambda, \mathcal{G})$ findet man wieder die Formel (B.16), wobei q die Anzahl nächster Nachbarn von x ist und über alle nächsten Nachbarn y von x summiert wird. Für das 2-dimensionale Wabengitter ist $q = 3$, das quadratische Gitter $q = 4$ und das Dreiecksgitter $q = 6$.

Satz von Stokes: Wir geben hier das diskrete Gegenstück zum Stokesschen Satzes im Kontinuum an. Dazu betrachten wir einen orientierten Weg \mathcal{C} auf dem Gitter Λ , der zwei Punkte $a, b \in \Lambda$ verbindet,

$$\mathcal{C} = \langle x_0 x_1 \rangle + \langle x_1 x_2 \rangle + \dots + \langle x_{n-1} x_n \rangle, \quad \langle x_i x_{i+1} \rangle \in K, \quad (\text{B.18})$$

wobei $x_0 = a$ und $x_n = b$ sein soll. Offensichtlich ist $\partial\mathcal{C} = \langle b \rangle - \langle a \rangle$. Wir wollen annehmen, dass der Weg sich nicht selbst schneidet. Dem Wegintegral in der Kontinuumstheorie entspricht folgende Formel für eine 1-Kette,

$$(\phi, \mathcal{C}) \equiv \phi(\mathcal{C}) = \sum_{\langle xy \rangle \in \mathcal{C}} \phi_{xy}, \quad (\text{B.19})$$

wobei wir auf der linken Seite das in beiden Argumenten innere Produkt

$$(v_p^i, v_q^j) = \delta^{ij} \delta_{pq} \quad (\text{B.20})$$

einführten. Für zwei orientiert Simplexe, die als Mengen gleich sind aber eine andere

Orientierung haben, ist das innere Produkt -1 . Für zwei Kanten gilt zum Beispiel

$$(\langle xy \rangle, \langle uv \rangle) = \delta(x, u)\delta(y, v) - \delta(x, v)\delta(y, u). \quad (\text{B.21})$$

Nun betrachten wir $(d\phi, \mathcal{C})$ für ein beliebiges Skalarfeld (1-Kette),

$$(d\phi, \mathcal{C}) = \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_{x_{i+1}} - \phi_{x_i}) = \phi_b - \phi_a \quad (\text{B.22})$$

wobei wir $x_0 = a$ und $x_n = b$ berücksichtigten. Sind a und b nächste Nachbarn auf einem Gitter Λ , dann ist

$$(d\phi, \langle ab \rangle) = \phi_b - \phi_a$$

genau die Form der Wechselwirkung für ein Ising-artiges Spinmodell.

Da andererseits $\partial\mathcal{C} = \langle b \rangle - \langle a \rangle$ gilt, folgt unmittelbar der Stokesscher Satz

$$(d\phi, \mathcal{C}) = (\phi, \partial\mathcal{C}). \quad (\text{B.23})$$

Es sein nun \mathcal{S} eine orientierte Fläche im Gitter. Damit meinen wir eine Kette aus orientierten 2-Zellen mit gemeinsamen Seiten und derart orientiert, dass sich die inneren Ränder wegheben,

$$\mathcal{S} = \sum_{i \in I} v_2^i, \quad \partial\mathcal{S} = \sum_{i \in I, k} [v_2^i : v_1^k] v_1^k. \quad (\text{B.24})$$

Die Fläche \mathcal{S} braucht keineswegs eben zu sein. Es sei nun

$$\phi = \sum_j \phi_j v_1^j, \quad d\phi = \sum_{jk} \phi_j [v_2^k : v_1^j] v_2^k.$$

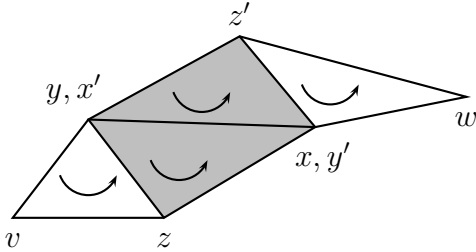
eine beliebige 1-Kette. Dann sind

$$\begin{aligned} (d\phi, \mathcal{S}) &= \sum_{i \in I} \sum_{j, k} \phi_j ([v_2^k : v_1^j] v_2^k, v_2^i) = \sum_{i \in I, j} \phi_j [v_2^i : v_1^j] \\ (\phi, \partial\mathcal{S}) &= \sum_j \sum_{i \in I, k} \phi_j (v_1^j, [v_2^i : v_1^k] v_1^k) = \sum_{i \in I, j} \phi_j [v_2^i : v_1^j] \end{aligned}$$

offensichtlich gleich und es folgt der Stokessche Satz

$$(d\phi, \mathcal{S}) = (\phi, \partial\mathcal{S}). \quad (\text{B.25})$$

In der folgenden Abbildung ist der Satz für ein Simplicialkomplex illustriert.



Im Beitrag der beiden schraffierten Dreiecke zu $(d\phi, \mathcal{S})$ heben sich ϕ_{xy} und $\phi_{x'y'} = -\phi_{xy}$ gegenseitig weg. Ganz analog heben sich für alle inneren Kanten $\langle xy \rangle$ die Beiträge ϕ_{xy} weg. Es bleiben nur ϕ_{xy} für Kanten $\langle xy \rangle$ auf dem Rand ∂S übrig.

Ist $\mathcal{S} = P$ eine Plaquette auf einem kubischen Gitter, dann ist

$$(d\phi, P) = (\phi, \partial P) = \sum_{\langle xy \rangle \in \partial P} \phi_{xy}$$

der Wilsonsche Term in Gittereichtheorien. Addieren wir zu ϕ den Co-Rand eines Feldes χ , so ändert sich der Term nicht,

$$(d\phi', P) = (d(\phi + d\chi), P) = (d\phi, P).$$

Der Satz von Stokes ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes für eine p -Kette ϕ_p und ein $p - 1$ -Kette χ_{p-1} . Für den Beweis notieren wir, dass

$$(dv_p^i, v_{p+1}^j) = (v_p^i, \partial v_{p+1}^j) \tag{B.26}$$

gilt. In der Tat, mit Hilfe von (B.10) und (B.18) findet man für die linke Seite

$$\left(\sum_k [v_{p+1}^k : v_p^i] v_{p+1}^k, v_{p+1}^j \right) = [v_{p+1}^j : v_p^i],$$

und mit (B.5) für die rechte Seite

$$\left(v_p^i, \sum_k [v_{p+1}^j : v_p^k] v_p^k \right) = [v_{p+1}^j : v_p^i].$$

Also ist d der zu ∂ adjungierte Operator auf den Zellen. Wegen der Bilinearität des inneren Produktes gilt dann für beliebige Ketten ϕ_p und χ_{p-1} die Formel

$$(d\phi_p, \chi_{p+1}) = (\phi_p, \partial\chi_{p+1}). \tag{B.27}$$

Wählt man hier für χ_{p+1} ein Weg oder eine Fläche auf dem Gitter, so erhält man die entsprechenden Sätze von Stokes.

Dualität: Die 0-Zellen des zu K dualen Komplexes K^* sind die d -Zellen des Komplexes

$K \subset \mathbb{R}^d$. Zwei Knoten ${}^*v_0^i, {}^*v_0^j$ sind genau dann Randpunkte derselben 1-Zelle, wenn die entsprechenden d -Zellen v_d^i und v_d^j eine gemeinsame Seite haben. Es sei V ein Volumen des Gitters Λ , also eine d -Kette aus orientierten d -Zellen mit gemeinsamen Seiten und derart orientiert, dass sich die inneren Seiten wegheben. Unter der Dualitätstransformation geht dieses d -dimensionale Volumen $V \subset E^n$ über in die duale 0-Kette

$$V = \sum_{i \in V} v_d^i \longrightarrow V^* = \sum_{i \in V} {}^*v_0^i. \tag{B.28}$$

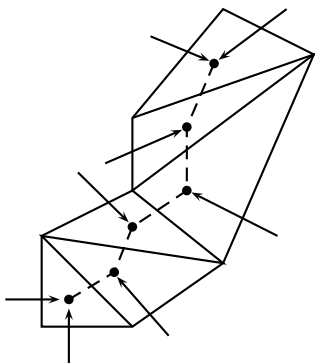
Mit $i \in V$ meinen wir, dass die d -dimensionale Zelle v_d^i in V liegt. Der Co-Rand des dualen Volumens ist

$$dV^* = \sum_j \sum_{i \in V} [{}^*v_1^j : {}^*v_0^i] {}^*v_1^j,$$

und deshalb gilt für eine 1-Kette auf dem dualen Gitter, $\phi_1^* = \sum_i \phi_i^* {}^*v_1^i$, folgende Identität

$$(\phi_1^*, dV^*) = \sum_j \sum_{i \in V} \phi_i [{}^*v_1^j : {}^*v_0^i].$$

Sind beide Endpunkte von ${}^*v_1^j$ im Volumen V , dann heben sich die entsprechenden Terme in der Summe weg und wir erhalten die Summe der Amplituden ϕ_i derjenigen Kanten, die den Rand des Volumen V durchstoßen.



Zum Beispiel ist für einen Simplicialkomplex

$$(\phi_1^*, dV^*) = \sum_{\langle ij \rangle \in V^c \times V} \phi_{ij}.$$

In der nebenstehenden Figur ist die Situation für einen 2-dimensionalen Simplicialkomplex gezeigt. Ein Index von ϕ_{ij} gehört zu einem Knoten außerhalb V und der andere zu einem innerhalb V .

Nun ist es einfach zu beweisen, dass

$$(\phi_1^*, dV^*) = (\partial \phi_1^*, V^*) \tag{B.29}$$

gilt. Dies ist das duale Divergenztheorem. Allgemeiner macht man beim Übergang von einem Gitter $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ zum dualen Gitter die folgenden Identifikation für die Erzeugenden

der Kettengruppen $C(\Lambda, \mathcal{G})$ und $C^*(\Lambda^*, \mathcal{G})$:

$$\begin{aligned} v_p^i &\longleftrightarrow {}^*v_{d-p}^i \\ [v_p^i : v_{p-1}^j] &\longleftrightarrow [{}^*v_{d-p+1}^j : {}^*v_{d-p}^i]. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Wir wollen hier annehmen, dass das ursprüngliche Gitter eine Triangulation einer geschlossenen und orientierbaren Mannigfaltigkeit, zum Beispiel des d -dimensionalen Torus, sei. Dann sind die v_p^* ebenfalls Zellen eines *Gitters*.

Jeder p -Kette wird also eine duale $d - p$ -Kette zugeordnet,

$$\phi_p = \sum_i \phi_i v_p^i \longrightarrow {}^*\phi_p = \sum_i \phi_i {}^*v_{d-p}^i. \quad (\text{B.31})$$

Mit dem entsprechenden inneren Produkt für die dualen Ketten,

$$({}^*v_p^i, {}^*v_q^j) = \delta^{ij} \delta_{pq} \quad (\text{B.32})$$

ist die Dualitätstransformation „längenerhaltend“,

$$(\phi_p, \chi_q) = ({}^*\phi_{d-p}, {}^*\chi_{d-q}), \quad (\text{B.33})$$

Daraus folgen sofort die wichtige Formeln

$${}^*d^* = \partial \quad \text{und} \quad {}^*\partial^* = d. \quad (\text{B.34})$$

Der Randoperator geht in den Co-Randoperator über und umgekehrt,

$$\begin{aligned} \partial \phi_p &= \sum_{ij} \phi_i [v_p^i : v_{p-1}^j] v_{p-1}^j \xleftrightarrow{*} \sum_{ij} \phi_i [{}^*v_{d-p+1}^j : {}^*v_{d-p}^i] {}^*v_{d-p+1}^j = d^* \phi_{d-p} \\ d \phi_p &= \sum_{ij} \phi_{ij} [v_{p+1}^j : v_p^i] v_{p+1}^j \xleftrightarrow{*} \sum_{ij} \phi_i [{}^*v_{d-p}^i : {}^*v_{d-p-1}^j] {}^*v_{d-p-1}^j = \partial^* \phi_{d-p}. \end{aligned}$$

und (B.27) geht über in

$$(\partial^* \phi_p, {}^*\chi_{p-1}) = ({}^*\phi_p, d^* \chi_{p-1}) \quad (\text{B.35})$$

Das Divergenztheorem (B.2) ist ein Spezialfall dieser allgemeineren Formel.

Hodge-Komplex: Oft hat man im unterliegenden Euklidischen Raum p -Formen, die über Simplexe, Zellen oder Ketten integriert werden können. Wir wollen hier kurz an die wichtigsten Eigenschaften von p -Formen und insbesondere an die Integralsätze erinnern. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ differenzierbar. In lokalen Koordinaten sei $x^i = f(t^1, \dots, t^d)$. Im Allgemeinen wird f allerdings kein Diffeomorphis-

mus sein. Das Bild $\sigma_p = f(v_p) \subset M$ der Zelle $v_p \subset \mathbb{R}^d$ ist dann eine *Zelle* in M . Es ist am einfachsten mit einem simplizialen Komplex zu arbeiten. Dann sind die σ_p *Simplexe* in M . Wir wollen immer voraussetzen, dass $f(v_p)$ in einer Karte von M liegt.

Es sei ω eine differenzierbare p -Form in M . In lokalen Koordinaten hat sie die Form

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^d \omega_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Diese Form kann über einen p -Simplex σ_p integriert werden,

$$\int_{\sigma_p} \omega = \frac{1}{p!} \int_{v_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(x^{i_1} \dots x^{i_p})}{\partial(t^1 \dots t^p)} dt^1 \dots dt^p = \int_{v_p} f^*(\omega). \tag{B.36}$$

Diese Definition ist natürlich unabhängig von der gewählten Karte in M . Für ein p -Form ω ist das Integral über die p Kette $c_p = f(\phi_p) = \sum \phi_i \sigma_p^i$ durch

$$\int_{c_p} \omega = \sum \phi_i \int_{\sigma_p^i} \omega \tag{B.37}$$

definiert. Es gilt zudem der wichtige

Satz [Stokes] *Es sei ω^{p-1} eine $p-1$ -Form und c_p eine p -Kette in M . Dann gilt*

$$\int_{c_p} d\omega^{p-1} = \int_{\partial c_p} \omega^{p-1}. \tag{B.38}$$

Wir betrachten die einfachsten Beispiele für welche $M = \mathbb{R}^d$ und $f = \mathbb{1}$ ist:

Es sei $\omega^0(x)$ eine 0-Form, also eine differenzierbare Funktion, und $v_1 = \langle x_0 x_1 \rangle$ ein 1-Simplex.

Dann gilt

$$\int_{\sigma_1} d\omega^0 = \int_{\partial \sigma_1} \omega^0 = \omega^0(x_1) - \omega^0(x_0)$$

Für eine 1-Form $\omega^1 = \sum \omega_i dx^i$ und einen 2-Simplex $\sigma_2 = \langle x_0 x_1 x_2 \rangle$ gilt entsprechend

$$\int_{\sigma_2} d\omega^1 \stackrel{(B.9)}{=} \int_{\langle x_1 x_2 \rangle} \omega^1 - \int_{\langle x_0 x_2 \rangle} \omega^1 + \int_{\langle x_0 x_1 \rangle} \omega^1.$$

Dies ist aber gerade der bekannte Integralsatz von Stokes in der Formensprache.

Ist nun ω^p eine geschlossene p -Form, $d\omega^p = 0$, dann folgt unmittelbar

$$\int_{\partial c_{p+1}} \omega^p = \int_{c_{p+1}} d\omega^p = 0. \tag{B.39}$$

Die Menge aller *geschlossenen p -Formen* bezeichnen wir mit \dot{F} . Unterscheiden sich zwei Ketten nur um einen Rand, $c_p - c'_p = \partial c_{p+1}$, dann gilt für jede geschlossene p -Form

$$\int_{c_p} \omega^p = \int_{c'_p} \omega^p, \quad \omega^p \in \dot{F}^p(M), \quad c_p - c'_p \in \partial C_{p+1}. \quad (\text{B.40})$$

Eine Kette c_p heisst *Zyklus*, wenn sie keinen Rand hat, $\partial c_p = 0$. Die Menge aller p -Zyklen bezeichnen wir mit $\dot{C}_p(M)$. Jeder Rand ist ein Zyklus, $\partial C_{p+1}(M) \subset \dot{C}_p(M)$. Ist nun ω^p exakt, $\omega^p = d\alpha^{p-1}$, dann gilt für jeden Zyklus

$$\int_{c_p} \omega^p = \int_{c_p} d\alpha^{p-1} = \int_{\partial c_p} \alpha^{p-1} = 0. \quad (\text{B.41})$$

Die exakten p -Formen bezeichnen wir mit dF^{p-1} . Unterscheiden sich zwei p -Formen um eine exakte Form, $\omega^p - \omega'^p = d\alpha^{p-1}$, dann gilt für jeden Zyklus

$$\int_{c_p} \omega^p = \int_{c_p} \omega'^p, \quad c_p \in \dot{C}_p, \quad \omega^p - \omega'^p \in dF^{p-1}. \quad (\text{B.42})$$

Zusammengefasst können wir folgendes sagen: ist ω^p eine geschlossene p -Form und c_p ein Zyklus, dann gilt

$$\int_{c_p} \omega^p = \int_{c_p + \partial c_{p+1}} (\omega^p + d\omega^{p-1}). \quad (\text{B.43})$$

Identifiziert man zwei Zyklen, wenn sie sich um einen Rand unterscheiden und zwei geschlossene Formen, wenn sie sich um eine exakte Form unterscheiden, dann gelangt man zu der *Homologiegruppen* und den de Rham'schen Gruppen,

$$\begin{aligned} H_p(M) &= \dot{C}_p(M) / \partial C_{p+1}(M) \\ R^p(M) &= \dot{F}^p(M) / dF^{p-1}(M). \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Das Integral $\int_{c_p} \omega^p$ hängt nur von den Klassen von ω^p in \dot{F}^p und von c_p in \dot{C}^p ab und wir erhalten den Komplex

$$\begin{array}{ccccccccccc} C_d & \xrightarrow{\partial} & C_{d-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 & \xrightarrow{\partial} & C_0 & \xrightarrow{\partial} & 0 \\ F^0 & \xrightarrow{d} & F^1 & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & F^{d-2} & \xrightarrow{d} & F^{d-1} & \xrightarrow{d} & F^d & \xrightarrow{d} & 0. \end{array} \quad (\text{B.45})$$

Dies sind *exakte Sequenzen* wenn das Bild von ∂ (d) genau dem Kern von ∂ (d) ist. Ist die erste Sequenz in (B.45) exakt, so sind alle Homologiegruppen trivial, ist die zweite Sequenz exakt, dann sind alle de Rham'schen Gruppen trivial.