

# Einführung in die Quantenelektrodynamik

Prof. A. Wipf

Theoretisch-Physikalisches-Institut

Friedrich-Schiller-Universität, Max Wien Platz 1

07743 Jena

1. Auflage, Wintersemester 2006/07

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Einheiten . . . . .	2
1.2	Lorentztransformationen . . . . .	2
1.3	Literaturempfehlungen: . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Klassische Felder</b>	<b>6</b>
2.1	Lagrangesche Feldtheorien . . . . .	7
2.1.1	Erhaltungsgrößen . . . . .	10
2.1.2	Das Skalarfeld . . . . .	12
2.1.3	Das elektromagnetische Feld . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Kanonische Quantisierung</b>	<b>19</b>
3.1	Skalarfeld . . . . .	19
3.1.1	Quantisierung . . . . .	21
3.1.2	Fockraum . . . . .	25
3.2	Hohlraumstrahlung . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Kausalität</b>	<b>35</b>
4.1	Kommutatoren des freien Skalarfeldes . . . . .	35
4.1.1	Quantenelektrodynamik . . . . .	39
4.1.2	Unbestimmtheitsrelationen . . . . .	42
4.2	Greenfunktionen . . . . .	43
4.2.1	Klein-Gordon Propagator . . . . .	44
4.2.2	Zusammenfassung . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Diracfeld</b>	<b>48</b>
5.1	Diracgleichung . . . . .	48
5.2	Lösungen der freien Diracgleichung . . . . .	51
5.3	Quantisierung des Diracfeldes . . . . .	53
5.3.1	Zweipunktsfunktionen . . . . .	55

---

<b>6</b>	<b>Streumatrix</b>	<b>58</b>
6.1	Teilchenproduktion durch eine klassische Quelle . . . . .	58
6.2	Streuoperator im allgemeinen Fall . . . . .	64
6.2.1	Eigenschaften der $S$ -Matrix . . . . .	66
6.3	Streuamplituden und Wirkungsquerschnitte . . . . .	68
<b>7</b>	<b>QED</b>	<b>71</b>
7.1	Lagrangedichte . . . . .	71
7.2	QED in der Coulombbeziehung . . . . .	73
7.3	Streuung am äußeren Potential . . . . .	74
7.4	Paarvernichtung . . . . .	80
7.5	Compton-Streuung und Eichinvarianz . . . . .	85
7.6	Møller-Streuung und Photonpropagator . . . . .	87
7.7	Wirkungsquerschnitte . . . . .	91

# Kapitel 1

## Einführung

In seinen Arbeiten legte P. DIRAC das Fundament zur *Quantenelektrodynamik*, kurz QED genannt [1]. Er untersuchte die Wechselwirkung des Strahlungsfeldes  $A_\mu(x)$  mit Atomen. Indem er das Strahlungsfeld nicht mehr klassisch, sondern als operatorwertiges Feld (die Koeffizienten in der Fourierentwicklung von  $A_\mu(x)$  werden zu Operatoren) auffasste, gelang ihm eine Überwindung der semiklassischen Beschreibung der quantenhaften Emission und Absorption von Photonen bei Strahlungsübergängen. Damit verband er die Quantenmechanik von HEISENBERG und SCHRÖDINGER mit der Quantentheorie der Strahlung im Sinne von PLANCK oder EINSTEIN. Die Materie wurde dabei noch durch die nichtrelativistische Quantenmechanik beschrieben.

Benötigt wurde eine relativistische Verallgemeinerung der Quantenmechanik. Der entscheidende Schritt kam wiederum von DIRAC, als er eine relativistische Wellengleichung für Teilchen mit Spin  $1/2$  aufstellte. Diese erklärte die Feinstruktur des Wasserstoffatoms, hatte aber prinzipielle Schwierigkeiten bei der Anwendung auf das Wasserstoffatom. Diese konnten erst behoben werden, als die Wellenfunktion als Quantenfeld reinterpretiert wurde. Eine erste systematische Feldquantisierung stammt von HEISENBERG und PAULI und weitere Arbeiten bauten darauf auf.

In den Jahren nach dem zweiten Weltkrieg sah man eine rasante Entwicklung der Quantenelektrodynamik. Diese war eng verbunden mit Forschern wie SCHWINGER, FEYNMAN, DYSON und TOMONAGA [2]. Die Anstrengungen mündeten in ein tieferes Verständnis der Divergenzen in der QED. Man gelangte zu einer Störungstheorie, die in jeder Ordnung wohldefiniert ist.

Die QED ist das einfachste, erfolgreichste und in vielen Details untersuchte Modell einer renormierbaren Quantenfeldtheorie. Die beispiellose Genauigkeit der Berechnungen der QED basiert auf dem Gebrauch der Störungstheorie; dabei dient die dimensionslose Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante  $\alpha = e^2/\hbar c \sim 1/137$  als Entwicklungsparameter. Am weitesten wurde die Berechnung des magnetischen Moments des Elektrons voran-

getrieben, für das die Glieder der Ordnungen  $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$  und  $\alpha^4$  bestimmt wurden. Die Rechnungen stimmen bis zur zehnten Stelle nach dem Komma mit den experimentellen Werten überein. Im Rahmen der QED wurden viele fundamentale Begriffe und Gesetzmässigkeiten der Quantenfeldtheorien entdeckt und formuliert.

## 1.1 Einheiten

In der Hochenergiephysik werden üblicherweise die *natürlichen Einheiten* mit

$$\hbar = c = 1 \quad (1.1)$$

benutzt. Durch die Festlegung  $c = 1$  werden Geschwindigkeiten in Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit gemessen. Dann haben Länge und Zeit gleich Einheiten,  $[L] = [T]$ . Es folgt aus der relativistischen *Energie-Impuls Beziehung*

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (1.2)$$

dass auch Energie, Masse und Impuls gleiche Einheiten haben,

$$[E] = [m] = [p]. \quad (1.3)$$

In den üblichen Einheiten hat das Plancksche *Wirkungsquantum*  $\hbar$  die Einheit  $[m][L]^2[T]^{-1}$ . In natürlichen Einheiten mit  $\hbar = c = 1$  sind die Dimensionen von Masse, Länge und Zeit dann wie folgt verknüpft,

$$[m] = [L]^{-1} = [T]^{-1}. \quad (1.4)$$

Wenn ich die Rolle von  $c$  oder  $\hbar$  hervorheben möchte, werde ich diese Konstanten explizit schreiben. In Anwendungen wird auch das SI-System zum Zuge kommen.

## 1.2 Lorentztransformationen

In einer relativistischen Theorie treten Zeit und Ort gleichberechtigt auf und werden zusammengefasst zu Koordinaten von Ereignissen im Minkowski-Raum,

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x^0 = ct, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Beim Wechsel von einem Inertialsystem  $I$  mit Koordinaten  $x^\mu$  in ein Inertialsystem  $I'$  mit Koordinaten  $x'^\mu$  gilt

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad \text{mit} \quad \Lambda^T g \Lambda = g \quad \text{und} \quad a \in R^4, \quad (1.6)$$

wobei der metrische Tensor

$$g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

auftritt. Im Gegensatz zu den Koordinaten  $x$  eines Ereignisses ist die Differenz  $\xi = x - y$  der Koordinaten zweier Ereignisse ein Vektor und transformiert homogen

$$\xi'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \xi^\nu \quad \text{oder} \quad \xi' = \Lambda \xi. \quad (1.8)$$

Analog bilden Energie und Impuls einen 4-er Vektor

$$p = (p^\mu) = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Vierervektoren mit oberen Indizes heißen kontravariant, Vektoren mit unteren Indizes kovariant. Indizes werden mit dem metrischen Tensor heruntergezogen. Zum Beispiel ist

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = \begin{pmatrix} E \\ -\mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Dabei wird nach der *Einsteinschen Summenkonvention* über doppelt auftretende Indizes summiert. Entsprechend zieht man Indizes mit dem inversen metrischen Tensor

$$g^{-1} = (g^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \quad (1.11)$$

nach oben,

$$\xi^\mu = g^{\mu\nu} \xi_\nu. \quad (1.12)$$

Im Minkowski-Raum sind für kartesischen Koordinaten die Matrizen  $g$  und  $g^{-1}$  identisch. Für krummlinige Koordinaten oder in der Gravitationstheorie ist dies nicht mehr der Fall.

Ein kovarianter Vektor  $\xi_\mu$  transformiert unter Lorentztransformationen gemäß

$$\xi'_\mu = g_{\mu\nu} \xi'^\nu \stackrel{(1.8)}{=} g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha \xi^\alpha = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha g^{\alpha\beta} \xi_\beta = \Lambda_\mu{}^\beta \xi_\beta. \quad (1.13)$$

und die Bedingung (1.6) an die Lorentztransformation lautet

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\beta_\mu = \delta_\alpha^\beta. \quad (1.14)$$

Ein Tensor  $T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m}$  mit  $m$  kovarianten und  $n$  kontravarianten Indizes transformiert beim Wechsel des Inertialsystems wie durch die Stellung seiner Indizes angezeigt,

$$T'_{\nu_1 \dots \nu_n}{}^{\mu_1 \dots \mu_m} = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\alpha_m} \Lambda^{\beta_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\beta_n}_{\nu_n} T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}. \quad (1.15)$$

Durch *Verjüngen* von Indexpaaren gewinnt man Tensoren geringerer Stufe, zum Beispiel  $T'_{\alpha\nu}{}^{\alpha\mu} = T_\nu^\mu$ . Insbesondere ist das Produkt zweier 4-er Vektoren

$$\xi^\mu \eta_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\mu \eta^\nu \equiv (\xi, \eta) \quad (1.16)$$

lorentzinvariant,  $(\xi', \eta') = (\xi, \eta)$ . Ist ein Tensor symmetrisch oder antisymmetrisch bei Vertauschung eines Indexpaares der gleichen Sorte, dann erbt der transformierte Tensor diese Eigenschaft, zum Beispiel für einen symmetrischen Tensor  $T_{\mu\nu}$  ist auch

$$T'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta T_{\alpha\beta} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta T_{\beta\alpha} = \Lambda_\nu^\beta \Lambda_\mu^\alpha T_{\beta\alpha} = T'_{\nu\mu}$$

symmetrisch.

*Feldtheorien* wie die Elektrodynamik nennt man relativistisch kovariant, wenn Lösungen der Feldgleichungen in einem Inertialsystem auch Lösungen in jedem anderen Inertialsystem sind. In Einklang mit dem Äquivalenzprinzip soll also kein Inertialsystem durch die Lösungen ausgezeichnet werden. Diese Forderung ist am einfachsten zu erfüllen, wenn die auftretenden Felder Tensorfelder sind. Ein Tensorfeld  $T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_m}(x)$  transformiert bei einer Änderung des Inertialsystems gemäß

$$T'_{\nu_1 \dots \nu_n}{}^{\mu_1 \dots \mu_m}(x') = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\alpha_m} \Lambda^{\beta_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\beta_n}_{\nu_n} T_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x). \quad (1.17)$$

Teilchen mit Spin 0 werden durch *Skalarfelder* beschrieben. Der Wert eines Skalarfeldes ändert nicht bei einem Systemwechsel,

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (1.18)$$

Das skalare und Vektorpotential der Elektrodynamik sind Komponenten eines 4-er Vektorfeldes,

$$A^\mu(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \mathbf{A}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

welches unter Lorentztransformationen wie folgt ändert,

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x). \quad (1.20)$$

Durch Symmetrisieren oder Antisymmetrisieren in gleichartigen Indizes und durch Verjüngen von Indexpaaren gewinnt man aus Tensorfelder neue Tensorfelder. Aber auch das Ableiten nach den Raumzeitkoordinaten bildet Tensoren in Tensoren ab. Ist zum Beispiel  $A_{\mu}$  ein kovarianten Vektorfeld, dann ist

$$\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}} \equiv \partial_{\nu} A_{\mu}(x) \equiv A_{\mu,\nu}(x) \quad (1.21)$$

ein kovariantes Tensorfeld der Stufe 2. Beim Beweis benutzt man  $x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} x^{\mu}$ , woraus  $x^{\mu} = x'^{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{\mu}$  folgt. Bezeichnen wir die Ableitung nach  $x'^{\alpha}$  mit  $\partial'_{\alpha}$ , dann gilt

$$\partial'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \partial_{\mu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \partial_{\mu}. \quad (1.22)$$

Der 4-er Gradient  $\partial_{\mu}$  ist ein kovarianter Vektor(operator). Nun folgt sofort die Behauptung

$$A'_{\mu,\nu}(x') = \partial'_{\nu} A'_{\mu}(x') = \Lambda_{\nu}^{\beta} \partial_{\beta} (\Lambda_{\mu}^{\alpha} A_{\alpha}(x)) = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} A_{\alpha,\beta}(x). \quad (1.23)$$

Wichtige Tensorfelder sind der antisymmetrische *Feldstärketensor*

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu} A_{\nu}(x) - \partial_{\nu} A_{\mu}(x) \quad (1.24)$$

und der symmetrische Energie-Impulstensor  $T_{\mu\nu}(x)$ . Um Elektronen zu beschreiben braucht es *Spinorfelder*. Diese werden später eingeführt.

### 1.3 Literaturempfehlungen:

Folgende Bücher kann ich als Begleitung zur Vorlesung empfehlen:

C. Itzykson und J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.

F. Mandl und G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley & Sons, 1996

O. Nachtmann, *Elementarteilchenphysik; Phänomene und Konzepte*, Vieweg, 1992.

N. Straumann, *Relativistische Quantentheorie, Einführung in die QFT*, Springer, 2005.

L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge UP, 1996.

S. Schweber, *QED and the Men who made it*, Princeton University Press, 1994.



# Kapitel 2

## Klassische Felder

Die fundamentalen nicht-gravitativen Wechselwirkungen der Natur werden erfolgreich durch relativistische Feldtheorien beschrieben. Dabei sind die kovarianten Feldgleichungen die Euler-Lagrange Gleichungen zu einer lorentzinvarianten Wirkung. Auch die Einsteinsche Gravitationstheorie ist eine Lagrangesche Feldtheorie, deren allgemein kovariante Feldgleichungen die Euler-Lagrange Gleichung der unter Koordinatentransformationen invarianten *Hilbert-Einstein Wirkung* ist.

Eine Feldtheorie hat unendlich viele Freiheitsgrade. Ein einfacher heuristischer Übergang von der klassischen Punktmechanik für ein System mit  $N$  Freiheitsgraden, beschrieben durch Koordinaten  $q^i, \dots, q^N$  zu einer Feldtheorie mit unendlich vielen Freiheitsgraden geht über die Ersetzungen

$$q^i(t) \longrightarrow \Phi_a(t, \mathbf{x}) \quad , \quad \sum_i \longrightarrow \sum_a \int d^3x \quad (d^3x \equiv d^3x). \quad (2.1)$$

Die endliche Indexmenge  $\{i\}$  wird ersetzt durch die kontinuierliche „Indexmenge“  $\{\mathbf{x}, a\}$ , wobei  $\mathbf{x}$  der Aufpunkt des Feldes ist und  $a$  die Komponenten des Feldes kennzeichnet. Die Lagrange- und Hamiltonfunktion sind Funktionen auf dem Orts-Geschwindigkeitsraum mit Koordinaten  $(q^i, \dot{q}^i)$  beziehungsweise dem Phasenraum mit Koordinaten  $(q^i, p_i)$ , zum Beispiel

$$L = \frac{1}{2} \sum_i (\dot{q}^i)^2 - V(q^1, \dots, q^N) \quad \text{bzw} \quad H = \frac{1}{2} \sum_i p_i^2 + V(q^1, \dots, q^N). \quad (2.2)$$

In einer Feldtheorie werden die Summe über  $i$  wird zu einem Integral über den Raum und einer Summe über  $a$  und entsprechend werden Funktionen wie  $L$  und  $H$  zu *Funktionalen* der Felder  $\Phi, \dot{\Phi}$  beziehungsweise  $\Pi, \Phi$ . In einer relativistisch kovarianten Theorie treten mit der zeitlichen stets räumliche Ableitungen der Felder auf. Weiterhin werden die

Ableitungen nach den  $q^i$  und  $p_i$  zu funktionalen Ableitungen nach  $\Phi(\mathbf{x})$  und  $\Pi(\mathbf{x})$ .

Für ein Funktional  $F[\Phi]$  benutzt man folgende konstruktive Definition der Funktionalableitung: Ist  $\Phi(\mathbf{x})$  das betrachtete Feld und  $\alpha(\mathbf{x})$  eine Abweichung von  $\Phi$ , dann ist

$$\frac{d}{dt}F[\Phi + t\alpha]\Big|_{t=0} = \int d^3x \frac{\delta F}{\delta \Phi(\mathbf{x})} \alpha(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Diese für „beliebige“ Verrückungen  $\alpha$  gültige Formel bestimmt die variationelle Ableitung unter dem zweiten Integral. Oft muss man partiell integrieren um diese zu berechnen. Dann engt man den Raum der Funktionen und/oder Verrückungen so ein, dass Randterme verschwinden. Eine nützliche Regel der *Funktionalableitung* ist

$$\frac{\delta \Phi(\mathbf{x})}{\delta \Phi(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.4)$$

Ist das Funktional  $F[\Phi]$  das Integral über eine lokale Dichte, dann gilt

$$F[\Phi] = \int f(\Phi(\mathbf{x})) d^3x \implies \frac{\delta F}{\delta \Phi(\mathbf{x})} = f'(\Phi(\mathbf{x})). \quad (2.5)$$

Ein oft auftretendes Funktional ist  $F = \int (\nabla \Phi)^2 d^3x$ . Dessen Funktionalableitung ist wegen

$$\frac{d}{dt}F[\Phi + t\alpha]\Big|_{t=0} = 2 \int \nabla \Phi(\mathbf{x}) \nabla \alpha(\mathbf{x}) d^3x = -2 \int \Delta \Phi(\mathbf{x}) \alpha(\mathbf{x}) d^3x$$

gegeben durch

$$\frac{\delta}{\delta \Phi(\mathbf{x})} \int \nabla \Phi(\mathbf{x}) \nabla \Phi(\mathbf{x}) d^3x = -2 \Delta \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Nach diesen Vorbetrachtungen wenden wir uns Lagrangeschen Feldtheorien zu.

## 2.1 Lagrangesche Feldtheorien

Ohne Reibung können die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik aus dem Hamiltonschen Prinzip gewonnen werden. Gleiches gilt für alle grundlegenden Feldgleichungen. Das Feld  $\Phi$  werde durch Funktionen  $\Phi_a(x)$  beschrieben, wobei  $x = (x^\mu)$  die Koordinaten von Ereignissen im Minkowski-Raum sind. Der Bereich des Index  $a$  hängt von der Art des Feldes ab. Für ein skalares Feld hat  $a$  einen Wert und für ein Vektor- oder Spinorfeld hat es 4 Werte. Die *Lagrangefunktion*  $L$  ist das Raumintegral einer *Lagrangedichte*  $\mathcal{L}$ ,

die nur vom Feld und seinen ersten Ableitungen abhängen soll,

$$L[\Phi] = \int \mathcal{L}(\Phi_a, \partial_\mu \Phi_a) d^3x \equiv \int \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) d^3x. \quad (2.7)$$

Dichten mit höheren Ableitungen des Feldes führen auf Feldgleichungen mit dritten oder noch höheren Zeitableitungen. Derartige Theorien können auftreten, Skyrme-Modelle sind Beispiele dieses Typs. Sie spielen in dieser Vorlesung aber keine Rolle.

Wie üblich definiert man die *Wirkung* als Zeitintegral der Lagrangefunktion,

$$S[\Phi] = \int_{t_0}^{t_1} L[\Phi] dt = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) d^4x, \quad (2.8)$$

wobei  $\Omega$  ein zylindrisches Gebiet im Minkowski-Raum ist. Jetzt wird das Feld variiert,

$$\Phi_a(x) \longrightarrow \Phi'_a(x) = \Phi_a(x) + \delta\Phi_a(x). \quad (2.9)$$

Die zugehörige Variation der Wirkung ist

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \delta\Phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta(\partial_\mu \Phi_a) \right) d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} \delta\Phi_a + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \delta\Phi_a \right) - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right) \delta\Phi_a \right\} d^4x \end{aligned}$$

Die Feldgleichungen folgen aus dem *Hamiltonschen Variationsprinzip*

$$\delta S = 0 \quad (2.10)$$

unter der Nebenbedingung, dass die Variationen  $\delta\Phi_a$  auf der Oberfläche  $\partial\Omega$  des Gebiets  $\Omega$  verschwinden. Dann verschwindet nämlich der zweite Summand im obigen Integral, da er sich nach dem Gaußschen Satz in ein Integral über den Rand  $\partial\Omega$  umwandeln lässt. Da die Variationen  $\delta\Phi_a$  innerhalb von  $\Omega$  beliebig sein sollen, folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0. \quad (2.11)$$

Dies sind partielle Differentialgleichungen für die Feldkomponenten  $\Phi_a$ . Im Gegensatz zur klassischen Mechanik treten in einer relativistisch kovarianten Feldgleichung mit der zeitlichen Ableitung immer auch die räumlichen Ableitungen auf. Ist die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  ein skalares Feld, dann ist diese Feldgleichung automatisch kovariant, da für ein skalares  $\mathcal{L}$  der Wert der Wirkung nicht vom Inertialsystem abhängt und deshalb die Extremalbedingung

(2.10) in jedem Inertialsystem gilt.

Nun definiert man genauso wie in der klassischen Mechanik die *kanonisch konjugierten Impulsfelder* als Ableitung der Lagrangedichte nach den Geschwindigkeitsfeldern,

$$\Pi^a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\Phi, \partial \Phi)}{\partial \dot{\Phi}_a(x)}, \quad (2.12)$$

und die *Hamiltonfunktion* als Legendre-Transformierte der Lagrangefunktion

$$H[\Pi, \Phi] = \int \mathcal{H} d^3x, \quad \mathcal{H} = \Pi^a \dot{\Phi}_a - \mathcal{L}. \quad (2.13)$$

Darin ist die „Geschwindigkeit“ eine Funktion von Feld und Impuls,  $\dot{\Phi} = \dot{\Phi}(\Pi, \Phi)$ . Diese gewinnt man durch Auflösen von (2.12) nach  $\dot{\Phi}$ . Für nichtsinguläre Systeme mit

$$\det \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \Phi_a(x) \partial \Phi_b(y)} \right) \neq 0 \quad (2.14)$$

ist diese Auflösung lokal möglich und folgende Vorgehensweise führt zum Ziel.

Für ein nichtsinguläres System ist die *Poisson-Klammer* zwischen dem Feld  $\Phi_a$  und seinem kanonisch konjugierten Impuls

$$\{\Phi_a(\mathbf{x}), \Pi^b(\mathbf{y})\} = \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.15)$$

wobei Feld und Impulsfeld in der Klammer zu *gleichen Zeiten* zu nehmen sind. Für zwei Funktionale  $F[\Pi, \Phi]$  und  $G[\Pi, \Phi]$  auf dem Phasenraum hat die Poisson-Klammer die Form

$$\{F, G\} = \sum_a \int d^3x \left( \frac{\delta F}{\delta \Phi_a(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \Pi^a(\mathbf{x})} - \frac{\delta G}{\delta \Phi_a(\mathbf{x})} \frac{\delta F}{\delta \Pi^a(\mathbf{x})} \right). \quad (2.16)$$

Sie ist antisymmetrisch, bilinear, erfüllt die Produktregel und die Jakobi-Identität.

Die zeitliche Änderung eines Funktionals ist dann

$$\dot{F} = \{F, H\}, \quad (2.17)$$

und insbesondere die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* lauten

$$\dot{\Phi}_a(\mathbf{x}) = \{\Phi_a(\mathbf{x}), H\} = \frac{\delta H}{\delta \Pi^a(\mathbf{x})} \quad (2.18)$$

$$\dot{\Pi}^a(\mathbf{x}) = \{\Pi^a(\mathbf{x}), H\} = -\frac{\delta H}{\delta \Phi_a(\mathbf{x})}. \quad (2.19)$$

Später betrachten wir zwei wichtige Spezialfälle: das skalare Feld und das Vektorfeld. Das erste beschreibt Spin-0 Teilchen und das zweite Spin-1 Teilchen, zum Beispiel Photonen.

### 2.1.1 Erhaltungsgrößen

Invertierbare Transformationen der Koordinaten und Felder, die Lösungen der Feldgleichungen in Lösungen überführen, nennt man *Symmetrien*. Für Lagrangesche Theorien ändert die Wirkung  $S$  nicht bei Symmetrietransformationen. Da die Menge der Symmetrien über eine Invarianzeigenschaft definiert ist, bildet sie eine Gruppe, die sogenannte *Symmetriegruppe*. Nach einem zentralen Theorem von EMMY NOETHER gehört zu jedem Parameter der Symmetriegruppe eine erhaltene Ladung. Wir untersuchen nun Symmetrien und erhaltene Ladungen von inneren und Raumzeit-Symmetrien.

**Innere Symmetrien:** Hier ist die Wirkung invariant unter *globalen Transformationen* der Felder bei denen die Koordinaten nicht ändern. Wir betrachten hier nur lineare Transformationen der Form

$$\Phi'(x) = U\Phi(x) \quad \text{oder} \quad \Phi'_a(x) = U_{ab}\Phi_b(x), \quad U = e^{iX}. \quad (2.20)$$

Die Menge der Matrizen  $U$  bildet eine Gruppe, da die Zusammensetzung von Symmetrien wieder eine Symmetrie ist. Die Symmetriegruppe hänge von  $n$  kontinuierlichen Parametern ab. Nach Noetherschen Theorem existieren dann  $n$  erhaltene Ladungen.

Für Symmetrietransformationen in der Nähe der Eins ist  $\Phi' = \Phi + \delta_X\Phi$ , mit einer infinitesimalen Änderung  $\delta_X\Phi = iX\Phi$  des Feldes. Die Invarianz der Lagrangedichte impliziert

$$0 = \delta_X\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi)} \partial_\mu(\delta_X\Phi) + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} \delta_X\Phi = \partial_\mu \left( \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi)} \delta_X\Phi \right), \quad (2.21)$$

wobei wir im letzten Schritt die Bewegungsgleichungen (2.11) benutzten. Wir erhalten die kovariant erhaltenen *Noether-Ströme*

$$J_X^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Phi)} \delta_X\Phi, \quad \partial_\mu J_X^\mu = 0. \quad (2.22)$$

Jeder kovariant erhaltene Strom führt auf eine zeitlich konstante Ladung,

$$\dot{Q}_X = 0 \quad \text{with} \quad Q_X = \int_t d^3x J_X^0 = \int_t d^3x \Pi(x) \delta_X\Phi(x) \quad (2.23)$$

Umgekehrt erzeugt eine erhaltene Noether-Ladung diejenige Symmetrie, aus der sie her-

vorging,

$$\{\Phi(x), Q_X\} = \int d^3y \{\Phi(x), \Pi(y) \delta_X \Phi(y)\} = \delta_X \Phi(x), \quad (2.24)$$

**Translationen:** In einer relativistischen Feldtheorie ist  $S$  invariant unter Translationen der Koordinaten  $x \rightarrow x' = x + a$  und der Felder

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \implies \delta_a \Phi = a^\mu \partial_\mu \Phi. \quad (2.25)$$

Eine Lagrangedichte ist ein skalares Feld und transformiert entsprechend unter infinitesimalen Translationen,

$$\delta_a \mathcal{L} = a^\nu \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (2.26)$$

Daraus folgt nach partieller Integration die Invarianz der Wirkung,  $\delta S = \int \delta \mathcal{L} d^4x = 0$ . Da die Dichte in eine Divergenz transformiert, wird die on-shell Identität (2.21) wie folgt modifiziert,

$$\delta_a \mathcal{L} = a^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi)} a^\nu \partial_\nu \Phi \right), \quad \text{oder} \quad \partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad (2.27)$$

mit kovariant erhaltenden Noetherströmen

$$J_a^\mu = a^\nu T_{\nu}^{\mu}, \quad T_{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.28)$$

$T_{\mu\nu}$  ist der Energie-Impuls Tensors des Feldes:  $T^0_0$  die Energiedichte,  $T^0_i$  die Impulsdichte in Richtung der  $i$ 'ten Koordinatenachse und  $T^i_j$  der Spannungstensor. Die *erhaltenen Noetherladungen* sind Energie und Impuls des Feldes,

$$P^\mu = \int_t T^{0\mu} \implies \dot{P}^\mu = 0. \quad (2.29)$$

Die Komponente  $P^0$  ist die *Feldenergie* und  $P^i$  die  $i$ 'te Komponente des *Feldimpulses*,

$$P^0 \equiv H = \int_t (\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}) d^3x \quad \text{und} \quad P^i = \int_t \Pi \partial^i \Phi d^3x. \quad (2.30)$$

Die erhaltenen Ladungen erzeugen die Symmetrien aus denen sie abgeleitet wurden,

$$\{\Phi, P_\mu\} = \partial_\mu \Phi. \quad (2.31)$$

**Lorentztransformationen:** Die Diskussion der Noetherströme und Ladungen die zu den Lorentztransformationen von Koordinaten und Feldern gehören ist etwas aufwendiger. Ich möchte nur das Resultat erklären. Da die Lagrangedichte ein skalares Feld ist, ändert sie unter infinitesimalen Lorentztransformationen gemäß

$$\delta_\omega \mathcal{L} = \frac{i}{2} (\omega, M) \mathcal{L}, \quad \text{wobei} \quad M_{\mu\nu} = \frac{1}{i} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad (2.32)$$

die orbitalen Drehimpulse verallgemeinern. Die 6 Parameter  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$  charakterisieren die infinitesimalen Lorentztransformationen. Die Änderung  $\delta_\omega \mathcal{L}$  ist wieder eine totale Divergenz und man kann wie bei der Behandlung der Translationen verfahren. Man findet 6 kovariant erhaltene Noetherströme

$$M^{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( T^{\mu\beta} x^\alpha - T^{\mu\alpha} x^\beta + i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi)} S^{\alpha\beta} \Phi \right) = -M^{\mu\beta\alpha} \quad (2.33)$$

die nun 6 zeitlich erhaltene Noetherladungen bedingen,

$$J^{\alpha\beta} = \int_t M^{0\alpha\beta} d^3x = -J^{\beta\alpha}. \quad (2.34)$$

Die  $J^{\alpha\beta}$  sind verallgemeinerte Drehimpulse des Feldes. Die  $J_i = \epsilon_{ijk} J^{jk}$  sind die gewöhnlichen Drehimpulse.

### 2.1.2 Das Skalarfeld

Es sei  $\phi(x)$  ein reelles Skalarfeld. Als lorentzinvariante Lagrangedichte wählt man

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.35)$$

mit Potential  $V$ . Die kovariante Euler-Lagrange-Gleichung hat die Form

$$\square\phi + V'(\phi) = 0. \quad (2.36)$$

Für das quadratische Potential  $V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$  ergibt sich die lineare *Klein-Gordon-Gleichung* zur Masse  $m$ ,

$$\square\phi + m^2\phi = 0. \quad (2.37)$$

In den natürlichen Einheiten ist die Masse eines Teilchens gleich seiner inversen Compton-Wellenlänge. Das zu  $\phi$  kanonisch konjugierte Impulsfeld und die Hamiltondichte lauten

$$\pi = \dot{\phi} \quad \text{und} \quad \mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi). \quad (2.38)$$

Zur Austellung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen benötigen wir die variationelle Ableitung der Hamiltonfunktion  $H = \int \mathcal{H} d^3x$  nach dem Feld. Diese ist

$$\frac{\delta H}{\delta\phi(\mathbf{x})} = \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \int \left( \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi\nabla\phi + V(\phi) \right) d^3x = -\Delta\phi(\mathbf{x}) + V'(\phi(\mathbf{x})), \quad (2.39)$$

so dass die Bewegungsgleichungen (2.18) und (2.19) für das reelle Skalarfeld folgende Form annehmen,

$$\dot{\phi} = \pi \quad \text{und} \quad \dot{\pi} = \Delta\phi - V'(\phi). \quad (2.40)$$

Zusammen ergeben sie die Klein-Gordon Feldgleichung (2.36) für das skalare Feld.

Für ein *komplexes Skalarfeld* ist

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - V(\phi^*, \phi) \quad (2.41)$$

mit reellem Potential  $V$ . Für  $V = m\phi^*\phi$  vereinfacht sich die Feldgleichung

$$\square\Phi + \frac{\partial V}{\partial\Phi^*} = 0 \quad (2.42)$$

wieder auf die Klein-Gordon-Gleichung (2.37). Der zu  $\phi$  kanonisch konjugierte Impuls ist  $\pi = \dot{\phi}^*$  und die Hamiltondichte hat die Form

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} + \pi^*\dot{\phi}^* - \mathcal{L} = \pi^*\pi + \nabla\phi^*\nabla\phi + V(\phi). \quad (2.43)$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{\phi} = \pi^* \quad \text{und} \quad \dot{\pi} = \Delta\phi^* - \frac{\partial V}{\partial\phi} \quad (2.44)$$

und implizieren wiederum die Feldgleichung (2.42).

Die Lagrangedichte (2.41) ist invariant unter Phasentransformationen

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\phi(x) \quad \text{bzw.} \quad \delta_\alpha\phi(x) = i\alpha\phi(x) \quad (2.45)$$

mit konstanter Phase  $\alpha$ . Die unimodularen Zahlen  $e^{i\alpha}$  bilden bezüglich der Multiplika-



tion die eindimensionale Symmetriegruppe  $U(1)$ . Diese innere Symmetrie führt auf den kovariant erhaltenen Noetherstrom

$$J^\mu = \frac{1}{i} (\phi^* \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^* \phi). \quad (2.46)$$

Die zugehörige Noetherladung ist gerade die elektrische Ladung des Feldes,

$$Q = \int J^0 d^3x = \frac{1}{i} \int d^3x (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi). \quad (2.47)$$

Ein reelles Feld trägt keine Ladung.

Der kanonische *Energie-Impultensor* (2.28) für ein komplexes Skalarfeld hat die Form

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi^* \partial_\mu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.48)$$

und führt auf die die gleiche erhaltene Feldenergie wie (2.43),

$$H = \int (\pi^* \pi + \nabla \phi^* \nabla \phi + V(\phi)) d^3x. \quad (2.49)$$

Der erhaltene Feldimpuls lautet

$$P_i = \int (\pi \partial_i \phi + \partial_i \phi^* \pi^*) d^3x. \quad (2.50)$$

Im nächsten Schritt wenden wir uns dem elektromagnetischen Feld zu.

### 2.1.3 Das elektromagnetische Feld

Das elektromagnetische Feld ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) erfüllt die aus der Elektrodynamik bekannten Maxwellgleichungen, die wir in eine manifest kovariante Form bringen wollen. Dabei tritt das 4-er Potential und die 4-er Stromdichte als Vektorfelder und der Feldstärketensor als antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe auf.

Die *homogenen Maxwellgleichungen* für das elektromagnetische Feld,

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.51)$$

werden bekanntlich durch Einführung von Potentialen gelöst,

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (2.52)$$

Das skalare Potential  $\phi$  und 3-er Vektorpotential  $\mathbf{A}$  sind Komponenten eines Vektorfeldes,

des sogenannten 4-er Potentials,

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Definiert man den antisymmetrischen *Feldstärketensor*  $F_{\mu\nu}$  gemäß

$$F_{0i} = E_i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \quad \text{und} \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad (2.54)$$

wobei  $E_i$  und  $B_i$  die Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  sind, dann nehmen die Relationen (2.52) folgende einfache Form an,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.55)$$

Die explizite Form des Feldstärketensors ist

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

In Heaviside-Einheiten mit  $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$  haben die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (2.57)$$

folgende elegante Form,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (j^\nu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Die Gleichungen sind manifest kovariant wenn elektrische Ladungsdichte und Stromdichte die Komponenten eines 4-er Vektorfeldes  $j^\mu$  sind. Dass  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  zu einem Objekt zusammengefasst werden sollten ist naheliegend, da die Stromdichte einer gleichmässig bewegten Ladung verschwindet, wenn man sich mit der Ladung bewegt.

Bei einer *Eichtransformation* der Potentiale

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda \quad (2.59)$$

ändert die Feldstärke  $F_{\mu\nu}$  nicht und man kann diese Eichfreiheit ausnutzen, um die kovariante *Lorentzgleichung* zu wählen,

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0. \quad (2.60)$$

Der letzte Term in

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu$$

verschwindet in der Lorentzgleichung und die inhomogenen Maxwellgleichungen werden zur *Wellengleichung* für das 4-er Potential,

$$\square A^\mu = j^\mu. \quad (2.61)$$

Die Feldgleichung (2.58) soll nun als Euler-Lagrange Gleichung einer invarianten Wirkung für das dynamische Feld  $A_\mu$  geschrieben werden. Die Lagrangedichte sollte erste Ableitungen enthalten, da die Feldgleichung von zweiter Ordnung ist. Weiter sollte sie quadratisch in  $A_\mu$  sein, da die Feldgleichungen linear in  $A_\mu$  sind. Verlangt man noch Eichinvarianz in Abwesenheit von Strömen, dann wird man auf

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) - \rho\phi + \mathbf{j}\mathbf{A} \quad (2.62)$$

geführt. Der Beweis ist einfach und folgt unmittelbar aus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j^\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = -F^{\mu\nu}.$$

Die Stromdichte ändert nicht bei einer Umeichung des Potentials,  $j'^\mu = j^\mu$ , und deshalb ist die Änderung der Wirkung bei einer Eichtransformation (2.59) gleich

$$S[A'_\mu, j'_\mu] = S[A_\mu, j^\mu] + \int j^\mu \partial_\mu \lambda d^4x = S[A_\mu, j^\mu] - \int \lambda \partial_\mu j^\mu d^4x. \quad (2.63)$$

Die Wirkung ist eichinvariant, wenn die 4-er Stromdichte die *Kontinuitätsgleichung*

$$\partial_\mu j^\mu = \dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.64)$$

erfüllt. Diese Kontinuitätsgleichung für die elektrische Stromdichte garantiert dann die zeitliche Konstanz der elektrischen Ladung  $Q = \int j^0 d^3x$ .

Im Folgenden sollen nun Impuls und Energie des elektromagnetischen Feldes berechnet werden. Dabei ist bei der Bildung der Impulse

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}, \quad (\pi^\mu) = \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

zu beachten, dass  $\pi^0$  verschwindet,

$$\pi^0 = F_{00} = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbf{E}. \quad (2.66)$$

Die erste Bedingung ist eine primäre Zwangsbedingung und zeigt an, dass die Elektrodynamik ein singuläres System ist. Jede Eichtheorie ist ein singuläres System. Die Zeitableitung der primären Zwangsbedingung muss verschwinden, und diese sekundäre Zusatzbedingung ist gerade das *Gauss-Gesetz*,

$$\nabla \mathbf{E} = \rho. \quad (2.67)$$

Dies ist keine Bewegungsgleichung. Es ist eine Zwangsbedingung an die Anfangsdaten. Die Dynamik wird durch die Hamiltonfunktion mit Hamiltondichte

$$\mathcal{H}' = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi + \rho \phi - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}.$$

erzeugt. Hier haben wir die Beziehung  $\dot{A}_i = E_i + \partial_i \phi$  in (2.52) benutzt. In der Hamiltonfunktion heben sich nach einer partiellen Integration wegen der Gauss-Zwangsbedingung die Terme proportional zu  $\phi$  weg und deshalb ist

$$H = \int \mathcal{H} d^3x, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \quad (2.68)$$

Wir berechnen noch den kanonischen Energie-Impuls Tensor für das elektromagnetische Feld in Abwesenheit von Materie. Die allgemeine Formel (2.28) ergibt

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu A_\alpha)} \partial_\nu A_\alpha - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = -F_\mu^\alpha \partial_\nu A_\alpha + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (2.69)$$

Die zugehörigen erhaltenen Ladungen sind die bekannte *Feldenergie*

$$H = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3x \quad (2.70)$$

und der *Feldimpuls*

$$\mathbf{P} = \int (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) d^3x. \quad (2.71)$$

Bei der Berechnung von Energie und Impuls wurde jeweils partiell integriert und  $\mathbf{A}_{,t} = \nabla \phi - \mathbf{E}$  beziehungsweise  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  und  $\nabla \mathbf{E} = 0$  benutzt.

Der kanonische Energie-Impuls Tensor  $T_{\mu\nu}$  für das elektromagnetische Feld in (2.68) ist

weder eichinvariant noch symmetrisch. Man kann nun einen kovariant erhaltenen Noetherstrom immer durch Addition eines Termes so abändern,

$$J'^{\mu} = J^{\mu} - \partial_{\nu} A^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}, \quad (2.72)$$

dass die erhaltenen Ladungen sich nicht ändern,

$$J'^0 = J^0 - \partial_i A^{0i} \implies Q' = Q.$$

Insbesondere kann man den kanonischen Energie-Impuls Tensor des elektromagnetischen Feldes derart abändern, dass er eichinvariant und symmetrisch wird. Der verbesserte Tensor hat die bekannte Form

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad \partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.73)$$

Er enthält neben der bekannten Feldenergiedichte  $T^{00}$  und dem Poynting Vektor  $T^{0i}$  den *Maxwellsche Spannungstensor*  $T^{ij}$ ,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) & (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})^t \\ \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} & \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\delta_{ij} - E_i E_j - B_i B_j \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Dieser trägt zur Impulsbilanz für das elektromagnetischen Feld bei [4].

# Kapitel 3

## Kanonische Quantisierung

In diesem Kapitel Quantisieren wir das freie Skalarfeld und das freie Strahlungsfeld. Freie bosonische Felder sind äquivalent zu einer unendlichen Zahl von harmonischen Oszillatoren. Diese werden dann in bekannter Weise quantisiert. Als Anwendungen werden die *Hohlraumstrahlung* und der *Casimir-Effekt* besprochen. Untersuchungen der Hohlraumstrahlung markierten die Geburt der Quantentheorie. Der Casimir-Effekt spielt in vielen Bereichen der neueren Forschung eine nicht unwesentliche Rolle.

### 3.1 Skalarfeld

Als Vorbereitung zur Quantisierung des Strahlungsfeldes betrachten wir ein reelles Skalarfeld in einer kubischen Kavität mit Seitenlänge  $L$  und Volumen  $V = L^3$ . Das Feld sei periodisch mit Periode  $L$  in alle drei Raumrichtungen. Die Fouriermoden

$$u_{\mathbf{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{k} \in K = \left\{ \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \mid \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3 \right\} \quad (3.1)$$

bilden eine Orthonormalbasis im Raum  $L_2(V)$  der quadratintegriblen Funktionen in der Kavität,

$$(u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}) = \int d^3x u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int_V d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \quad (3.2)$$

und entsprechend können die Felder nach dieser Basis entwickelt werden,

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \phi(t, \mathbf{k}) \\ \pi(t, \mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}) \pi(t, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei über alle Wellenzahlvektoren  $\mathbf{k}$  in  $K$  summiert wird. Die Wahl von  $u_{\mathbf{k}}^*$  anstelle von  $u_{\mathbf{k}}$  in der Fourierentwicklung für das Impulsfeld vereinfacht die folgenden Formeln etwas. Die Fourierkoeffizienten berechnen sich mit Hilfe der inversen Fouriertransformation,

$$\phi(t, \mathbf{k}) = (\phi(t), u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})) \quad \text{und} \quad \pi(t, \mathbf{k}) = (\pi(t), u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})). \quad (3.4)$$

Da die Betrachtungen im Hamiltonschen Formalismus zu festen Zeiten sind, brauchen wir das Zeitargument der Felder und Koeffizienten nicht explizit anzugeben. Die Felder sind reell und deshalb erfüllen die Fourierkoeffizienten die Realitätsbedingungen

$$\phi(\mathbf{k}) = \phi^*(-\mathbf{k}) \quad \text{und} \quad \pi(\mathbf{k}) = \pi^*(-\mathbf{k}). \quad (3.5)$$

Als nächstes berechnen wir die Poisson-Klammern zwischen diesen Koeffizienten. Dazu setzen wir in der fundamentalen Poissonklammer

$$\{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.6)$$

die Entwicklungen (3.3) ein und benutzen Zerlegung der Eins,

$$\sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{y}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.7)$$

Es ergeben sich die fundamentalen Poisson-Klammern für die Fourier-Koeffizienten,

$$\{\phi(\mathbf{k}), \pi(\mathbf{k}')\} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (3.8)$$

Wie beim harmonischen Oszillator führen wir nun komplexe Linearkombinationen der Entwicklungskoeffizienten ein,

$$a(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left( \phi(\mathbf{k}) + \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \pi(-\mathbf{k}) \right) \quad (3.9)$$

$$a^*(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \left( \phi(-\mathbf{k}) - \frac{i}{\omega_{\mathbf{k}}} \pi(\mathbf{k}) \right). \quad (3.10)$$

Diese haben wohlbekannte Poisson-Klammern,

$$\{a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')\} = \{a^*(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')\} = 0, \quad \{a(\mathbf{k}), a^*(\mathbf{k}')\} = -i\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (3.11)$$

Lösen wir die Gleichungen (3.9) und (3.10) nach dem Koeffizienten  $\phi(\mathbf{k})$  und  $\pi(\mathbf{k})$  auf und setzen das Resultat in (3.3) ein, dann finden wir folgende Entwicklungen für das Feld

und sein Impulsfeld zu fester Zeit,

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + a^*(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})), \quad (3.12)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{-i\omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - a^*(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})). \quad (3.13)$$

Diese Entwicklungen sind unabhängig von der spezifischen Dynamik für das skalare Feld, also unabhängig vom Wechselwirkungspotential  $V$  in (2.35). Auch der Parameter  $m$  in  $\omega_{\mathbf{k}}$  ist unbestimmt; verschiedene  $m$  liefern verschiedene  $a$  und  $a^*$ .

Für das *freie Feld* mit quadratischem Potential

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (3.14)$$

kann man die Energie  $H = \int d^3x \mathcal{H}$  mit Hamiltondichte (2.38) explizit berechnen. Für eine wechselwirkende Theorie ist dies natürlich nicht mehr möglich. Wegen der Orthogonalität (3.2) der stehenden Wellen im Hohlraum findet man für die Feldenergie des freien Feldes den einfachen Ausdruck

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (|\pi(\mathbf{k})|^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 |\phi(\mathbf{k})|^2) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}), \quad (3.15)$$

wobei nun  $m$  in der Energie  $\omega_{\mathbf{k}}$  die Masse des freien Feldes ist.

### 3.1.1 Quantisierung

Wir übernehmen die heuristische Quantisierungsvorschrift aus der Quantenmechanik, nach der Funktionen auf dem Phasenraum zu linearen Operatoren auf einem Hilbertraum werden und Poisson-Klammern durch Kommutatoren zu ersetzen sind<sup>1</sup>

$$\{A, B\} = C \longrightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}. \quad (3.16)$$

Komplex konjugieren geht über in adjungieren von Operatoren. Meistens geht aus dem Zusammenhang hervor, ob wir von Funktionen oder Operatoren sprechen. Deshalb werden wir keine „Hütchen“ über den Symbolen für Operatoren schreiben.

InsInsbesondererden die Fourierkoeffizienten der Felder zu Operatoren mit Kommuta-

---

<sup>1</sup>Nach dem *Groenevold-Van Hove Theorem* ist dies allerdings nur für eine kleine Untermenge von Funktionen gleichzeitig möglich.



tionsregeln

$$[\phi(\mathbf{k}), \pi(\mathbf{k}')] = i\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \mathbb{1} \quad \text{und} \quad [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \mathbb{1}. \quad (3.17)$$

Hier ist  $\mathbb{1}$  der Einheitsoperator auf dem Hilbertraum der Quantenfeldtheorie. Alle nicht angegebenen Kommutatoren, zum Beispiel  $[\phi(\mathbf{k}), \phi(\mathbf{k}')] oder  $[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')]$ , verschwinden. Die reellwertigen klassischen Felder  $\phi, \pi$  werden zu operatorwertigen Quantenfeldern mit den Entwicklungen$

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + a^\dagger(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})) \quad (3.18)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{-i\omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) - a^\dagger(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})). \quad (3.19)$$

Sie erfüllen die (gleichzeitigen) Kommutationsregeln

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0, \quad [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbb{1}. \quad (3.20)$$

Der erhaltene Impuls des Quantenfeldes hat die einfache Form

$$\mathbf{P} = - \int d^3x \pi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (3.21)$$

und erzeugt die infinitesimalen Raumtranslationen der Felder,

$$i[\phi(\mathbf{x}), \mathbf{P}] = \nabla \phi(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad i[\pi(\mathbf{x}), \mathbf{P}] = \nabla \pi(\mathbf{x}). \quad (3.22)$$

Es sei  $|\mathbf{p}\rangle$  Eigenzustand des Impulsoperators,  $\mathbf{P}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle$ . Aufgrund der Kommutationsregeln

$$[\mathbf{P}, a^\dagger(\mathbf{k})] = \mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k}) \quad \text{und} \quad [\mathbf{P}, a(\mathbf{k})] = -\mathbf{k} a(\mathbf{k}) \quad (3.23)$$

führt  $a^\dagger(\mathbf{k})$  dem System den Impuls  $\mathbf{k}$  zu und  $a(\mathbf{k})$  entzieht dem System diesen Impuls,

$$a^\dagger(\mathbf{k})|\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p} + \mathbf{k}\rangle \quad \text{und} \quad a(\mathbf{k})|\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p} - \mathbf{k}\rangle. \quad (3.24)$$

Die Zeitentwicklung eines Operators  $A$  folgt aus der *Heisenberg-Gleichung*

$$i \frac{\partial A}{\partial t} = [A, H]. \quad (3.25)$$

Bei der (formalen) Berechnung des Kommutators von Quantenfeld und Hamiltonoperator

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} (\pi^2 + (\nabla\phi)^2) + V(\phi). \quad (3.26)$$

benutzen wir die Derivationsregel und die fundamentalen Kommutatoren in (3.20)

$$\begin{aligned} [\phi(x), H] &= [\phi(t, \mathbf{x}), \int d^3y \mathcal{H}(t, \mathbf{y})] = \frac{1}{2} \int d^3y [\phi(\mathbf{x}), \pi^2(\mathbf{y})] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y ([\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] \pi(\mathbf{y}) + \pi(\mathbf{y}) [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})]) \\ &= i \int d^3y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \pi(\mathbf{y}) = i\pi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Bei der Berechnung des Kommutators von konjugierten Impulsfeld mit Hamiltonoperator müssen wir unter dem Integral auch noch partiell integrieren,

$$\begin{aligned} [\pi(x), H] &= [\pi(t, \mathbf{x}), \int d^3y \mathcal{H}(t, \mathbf{y})] = \int d^3y [\pi(\mathbf{x}), \frac{1}{2} \nabla\phi(\mathbf{y}) \nabla\phi(\mathbf{y}) + V(\phi(\mathbf{y}))] \\ &= \int d^3y (\nabla\phi(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} [\pi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] - iV'(\phi(\mathbf{y})) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &= i\Delta\phi(\mathbf{x}) - iV'(\phi(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Damit lauten die Heisenberg-Gleichungen (3.25) für das Quantenfeld und sein Impulsfeld

$$\dot{\phi} = \pi \quad \text{und} \quad \dot{\pi} = \Delta\phi - V'(\phi). \quad (3.27)$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt die kovariante Feldgleichung

$$\square\phi + V'(\phi) = 0. \quad (3.28)$$

Dies ist gerade die klassische Feldgleichung (2.36). Das Quantenfeld erfüllt (formal) die klassische Bewegungsgleichung. Bei unseren Manipulationen kümmerten wir uns allerdings nicht darum, ob die betrachteten Größen überhaupt definiert sind.

Die Kommutationsregel (3.20) zeigt bereits an, dass  $\phi$  und  $\pi$  keine beschränkten Operatoren sein können. In der Tat sind Quantenfelder operatorwertige Distributionen. Selbst nach Ausschmieren mit Testfunktionen,

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(f) = \int d^3x f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x})$$

erhält man im Allgemeinen immer noch unbeschränkte Operatoren. Operatorwertige Dis-

tributionen sollte man aber besser nicht multiplizieren. Deshalb sind viele der obigen Ausdrücke divergent. Die auftretenden Divergenzen sind ein ärgerliches Problem in vielen Quantenfeldtheorien.

**Das freie Feld:** Wir betrachten nun das freie Feld, für das die angesprochenen Divergenzen harmlos sind. Setzen wir die Entwicklungen (3.18,3.19) in den Ausdruck für die Energie ein, so ergibt sich

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}). \quad (3.29)$$

Im letzte Schritt sind die Kommutationregeln für die  $a(\mathbf{k})$  und  $a^\dagger(\mathbf{k})$  verwendet worden. Der Term  $\frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}}$  ist die bekannte *Nullpunktsenergie* des harmonischen Oszillators. Die Summe aller Nullpunktsenergien ist *divergent*. Da im homogenen Raum die Energie sowieso nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist können wir diese divergente Nullpunktsenergie ignorieren. Für nichthomogene Systeme können Änderungen der Nullpunktsenergie aber durchaus beobachtbar werden. Der *Casimir-Effekt* ist ein derartiger beobachtbarer Effekt der als Änderung der Vakuumenergie interpretiert werden kann. Würden wir beim korrespondenzmässigen Übergang vom klassischen Ausdruck  $H = \int d^3x \mathcal{H}$  mit  $\mathcal{H}$  in (2.38) für die Energie zum Hamilton-Operator eine andere Operatorordnung wählen, dann würden wir im Allgemeinen eine andere Nullpunktsenergie finden. Das Ergebnis für  $H$  hängt also von der Reihenfolge von Umformung und Quantisierung ab. Da  $H$  nicht eindeutig bestimmt ist und im Minkowski-Raum die Addition einer Konstanten zu  $H$  die Dynamik des Systems nicht ändert, kann der Hamiltonoperator redefiniert werden,

$$H \longrightarrow :H: = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}). \quad (3.30)$$

Dies entspricht der Einführung eines *Normalprodukts* in die Definition des Hamiltonoperators. Dies wird weiter unten genauer erklärt.

Für das freie Feld kann die Heisenberg-Gleichung (3.25) für das Quantenfeld gelöst werden. Mit Hilfe der Kommutatoren

$$\begin{aligned} [H, a(\mathbf{k})] &= \sum_{\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}'} [a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}'), a(\mathbf{k})] = -\omega_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k}) \\ [H, a^\dagger(\mathbf{k})] &= \sum_{\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}'} [a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}'), a^\dagger(\mathbf{k})] = \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

führen die Heisenberggleichungen  $i\dot{a}(\mathbf{k}) = \omega_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k})$  und  $i\dot{a}^\dagger(\mathbf{k}) = -\omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})$  auf harmonische Zeitabhängigkeiten der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren,

$$a(t, \mathbf{k}) = e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} a(\mathbf{k}) \quad \text{und} \quad a^\dagger(t, \mathbf{k}) = e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} a^\dagger(\mathbf{k}). \quad (3.32)$$

Eingesetzt in die Entwicklung (3.26) finden wir für den Feldoperator des freien Feldes zu beliebigen Zeiten die Darstellung

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + a^\dagger(\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}), \quad (k^\mu) = \begin{pmatrix} \omega_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Wegen  $k^\mu k_\mu = \omega_{\mathbf{k}}^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$  erfüllt es die Klein-Gordon Gleichung,

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (3.34)$$

Im nächsten Abschnitt folgen wir FOCK und konstruieren einen Hilbertraum auf dem das Quantenfeld wirkt.

### 3.1.2 Fockraum

Die folgende Diskussion macht Gebrauch von der Tatsache, dass das freie Feld äquivalent zu einem System von unendlich vielen ungekoppelten harmonischen Oszillatoren ist. Für jeden Wellenzahlvektor  $\mathbf{k} \in K$  existiert ein Oszillator mit Kreisfrequenz  $\omega_{\mathbf{k}}$ . Für jedes Paar von Operatoren  $a$  und  $a^\dagger$  können wir die Resultate bei der Behandlung des harmonischen Oszillators in der Vorlesung Quantenmechanik I benutzen. Wie dort führen wir den hermiteschen und nicht-negativen *Anzahloperator*

$$N = a^\dagger a = N^\dagger \geq 0 \quad (3.35)$$

ein. Die Operatoren  $a$  und  $a^\dagger$  erniedrigen und erhöhen die Eigenwerte von  $N$  um Eins,

$$[N, a] = -a \quad \text{und} \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger. \quad (3.36)$$

Ist  $|n\rangle$  ein *auf Eins normierter Eigenzustand* von  $N$  zum Eigenwert  $n \geq 0$ , so gelten

- $n = 0 \iff a|n\rangle = 0$
- $a^\dagger|n\rangle$  verschwindet nicht und ist wieder Eigenzustand von  $N$  zum Eigenwert  $n + 1$ .
- Für  $n > 0$  ist  $a|n\rangle$  wieder ein Eigenzustand von  $N$  zum Eigenwert  $n - 1$ .

Es folgt, dass das Spektrum von  $N$  aus den natürlichen Zahlen inklusive 0 besteht. In einer irreduziblen Darstellung der Operatoren  $a$  und  $a^\dagger$  ist jeder Eigenwert einfach. Es gelten die Beziehungen (siehe QM I)

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (3.37)$$

Insbesondere annihiliert  $a$  den Zustand  $|0\rangle$ . Durch Iteration erhält man die Beziehung

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle. \quad (3.38)$$

Für den späteren Gebrauch notieren wir die wichtigen Matrixelemente

$$\langle n-1|a|n\rangle = \sqrt{n}, \quad \langle n+1|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}. \quad (3.39)$$

Wir kehren zum freien Quantenfeld zurück. Der Zustand mit allen Oszillatoren im Grundzustand identifizieren wir mit dem *Vakuum* und bezeichnen dieses wieder mit  $|0\rangle$ . Es wird von allen Absteigeoperatoren annihiliert,

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \in K. \quad (3.40)$$

Der normierte Fock-Zustand

$$|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s}\rangle = \prod_{i=1}^s \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_i}!}} a^\dagger(\mathbf{k}_i)^{n_{\mathbf{k}_i}}|0\rangle \quad (3.41)$$

ist gleichzeitiger Eigenvektor der verträglichen Besetzungszahloperatoren  $N_{\mathbf{k}} = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$ ,

$$N_{\mathbf{k}_i}|n_{\mathbf{k}_1}, \dots, n_{\mathbf{k}_s}\rangle = n_{\mathbf{k}_i}|n_{\mathbf{k}_1}, \dots, n_{\mathbf{k}_s}\rangle. \quad (3.42)$$

Wir interpretieren (3.41) als Fockzustand, bei den  $n_{\mathbf{k}_1}$  *Teilchen* der Sorte  $\mathbf{k}_1$ ,  $n_{\mathbf{k}_2}$  *Teilchen* der Sorte  $\mathbf{k}_2$ , etc. vorhanden sind.  $N_{\mathbf{k}}$  zählt dann die Anzahl Teilchen der Sorte  $\mathbf{k}$ . Aus (3.37) folgt, dass  $a^\dagger(\mathbf{k})$  ein Teilchen der Sorte  $\mathbf{k}$  erzeugt und  $a(\mathbf{k})$  ein derartiges Teilchen vernichtet. Deshalb heißen sie auch *Erzeugungs-* und *Vernichtungsoperator*. Wir werden sehen, dass  $\mathbf{k}$  der Impuls der Teilchensorte  $\mathbf{k}$  ist.

Die Eigenzustände (3.41) der Anzahloperatoren  $N_{\mathbf{k}}$  für alle möglichen *endlichen* Sequenzen  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_s$  bilden eine *orthonormierte* Basis im Hilbert-Raum des quantisierten Skalarfeldes. Wir notieren noch, dass die Zustände (3.41) bei Permutationen der  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_s$  symmetrisch sind, d.h. die Teilchen genügen der *Bose-Einstein-Statistik*.

**Energie und Impuls:** Der normalgeordnete Hamiltonoperator  $:H:$  in (3.30) ist nicht-negativ und sein eindeutiger Grundzustand  $|0\rangle$  wird von allen  $a(\mathbf{k})$  annihiliert, siehe Gleichung (3.40). Der Grundzustand enthält also keine Teilchen,  $N_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$  für alle  $\mathbf{k}$ , und hat weder Energie noch Impuls,

$$:H:|0\rangle = \sum \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad P|0\rangle = \sum \mathbf{k} N_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0. \quad (3.43)$$

Die angeregten Zustände des freien Theorie konstruiert man nun genauso wie für den harmonischen Oszillator. Wir wirken mit den Erzeugungsoperatoren  $a^\dagger(\mathbf{k})$  mehrfach auf den Vakuumzustand. Wegen der Vertauschungsrelationen (3.31) erhöht  $a^\dagger(\mathbf{k})$  die Energie um  $\omega_k$  und erniedrigt  $a(\mathbf{k})$  die Energie um  $\omega_k$ . Der Operator  $a^\dagger(\mathbf{k})$  erzeugt ein Feldquant der Energie  $\omega_k$  und dem Impuls  $\mathbf{k}$ . Die Quanten zu verschiedenen  $\mathbf{k}$  sind die vom Feld beschriebenen Teilchen. Die *Einteilchenzustände*  $|1_{\mathbf{k}}\rangle$  haben Energie  $\omega_k$  und Impuls  $\mathbf{k}$ , die *Zweiteilchenzustände*  $|1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'}\rangle$  haben Energie  $\omega_k + \omega_{k'}$  und Impuls  $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$ . Allgemeiner gilt

$$\begin{aligned} :H:|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s}\rangle &= \left(\sum n_{\mathbf{k}_i} \omega_{k_i}\right) |n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s}\rangle \\ \mathbf{P}|n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s}\rangle &= \left(\sum n_{\mathbf{k}_i} \mathbf{k}_i\right) |n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s}\rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Im Fockraum aufgespannt von den Fockzuständen (3.41) existieren Zustände mit einer beliebigen Anzahl Teilchen mit gleichem Impuls. Zum Beispiel enthält  $|5_{\mathbf{k}}\rangle$  fünf Teilchen mit Impuls  $\mathbf{k}$ .

## 3.2 Hohlraumstrahlung

Ende des 19. Jahrhunderts traten bei der Untersuchung der Spektralverteilung der elektromagnetischen Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht mit Materie die ersten Widersprüche zwischen klassischer Physik und Erfahrung auf. Die Lösung des Problems gelang MAX PLANCK 1900 und gilt als Geburtsstunde der Quantentheorie. Wir wollen uns nun dieses Problem und seine Lösung etwas näher ansehen.

Die Wände eines Hohlraums seien auf die (absolute) Temperatur  $T$  gebracht. Die Atome in den Wänden wechselwirken mit den elektromagnetischen Wellen im Hohlraum: sie absorbieren und emittieren Wellen. Dabei stellt sich bald ein von  $T$  abhängiges Gleichgewicht ein. Die Strahlung im Hohlraum enthält elektromagnetische Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen und Wellenzahlvektoren. Um die spektrale Energieverteilung dieser Strahlung zu untersuchen, zerlegen wir das Strahlungsfeld in Normalmoden.

Wir lösen die homogenen Maxwellgleichungen (2.51) durch Einführung von Potentialen. Im materiefreien Hohlraum dürfen wir  $\phi = 0$  setzen. Weiter wählen wir die *Coulombbeziehung*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.45)$$

Diese ist nicht kovariant und zeichnet das Ruhesystem des Hohlraums aus. Die verbleibenden Maxwellgleichungen (2.57) im Hohlraum,

$$\nabla \wedge \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.46)$$

sind dann gleichbedeutend mit der freien Wellengleichung

$$\square \mathbf{A} = 0. \quad (3.47)$$

Der Hohlraum sei ein Kubus mit Seitenlänge  $L$ . Die elektromagnetischen Felder bilden darin stehende Wellen, für die  $\mathbf{E}_{\text{tang}}$  und  $\mathbf{B}_{\text{norm}}$  an der Wand verschwinden. Statt mit diesen annähernd realistischen Randbedingungen zu arbeiten<sup>2</sup>, wählen wir periodische Randbedingungen für das Vektorpotential. Für  $L \rightarrow \infty$  werden Observablen der Hohlraumstrahlung durch diese Idealisierung nicht geändert. Nun entwickeln wir das Potential  $\mathbf{A}$  in eine Fourierreihe,

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in K} \mathbf{A}(t, \mathbf{k}) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{A}(t, -\mathbf{k}) = \mathbf{A}^*(t, \mathbf{k}), \quad 0 \leq x_i \leq L, \quad (3.48)$$

wobei wegen der Periodizität des Potentials die Wellenzahlvektoren  $\mathbf{k}$  aus der Menge  $K$  in (3.1) sein müssen. Aus der Coulomb-Eichbedingung

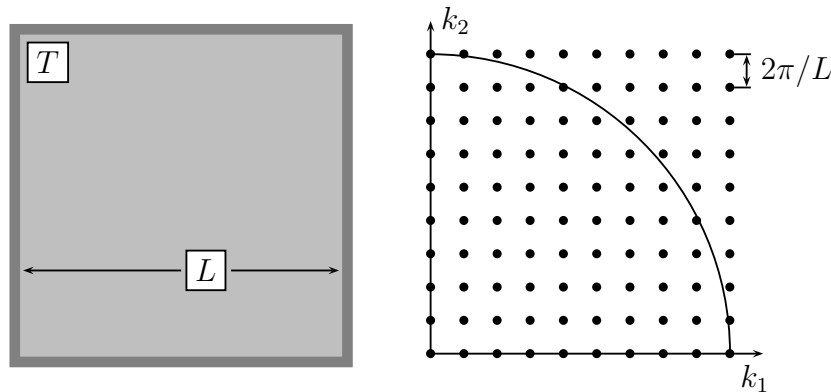


Abbildung 3.1: Hohlraumstrahlung und mögliche Wellenzahlvektoren

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \sum \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{k}) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 0$$

folgt, dass der Koeffizient  $\mathbf{A}(t, \mathbf{k})$  senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle steht,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{k}) = 0. \quad (3.49)$$

Die Polarisation der Wellen ist senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung und man sagt, das Strahlungsfeld sei *transversal*<sup>3</sup>. Zu jedem Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  gehören also zwei linear

<sup>2</sup>Für kleine Wellenlängen ist jede realistische Hohlraumwand durchlässig.

<sup>3</sup>Der Spezialfall  $\mathbf{k} = 0$  verlangt eine separate Behandlung. Aber eine genauere Analyse führt für große

unabhängige Polarisationsvektoren senkrecht zu  $\mathbf{k}$ . In der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung wählen wir zwei linear unabhängige reelle Vektoren  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda)$ , die mit dem Einheitsvektor  $\hat{\mathbf{k}}$  eine kartesische Basis bilden,

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) = \hat{\mathbf{k}}, \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2. \quad (3.50)$$

Der Tensor  $\sum_{\lambda} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \boldsymbol{\epsilon}^{\dagger}(\mathbf{k}, \lambda)$  hängt nur von  $\mathbf{k}$  ab und projiziert auf die Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, also ist

$$\sum_{\lambda=1}^2 \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \boldsymbol{\epsilon}^{\dagger}(\mathbf{k}, \lambda) = \mathbb{1} - \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}^{\dagger}. \quad (3.51)$$

Die Amplitude  $\mathbf{A}(t, \mathbf{k})$  ist eine Linearkombination der Polarisationsvektoren

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{k}) = \sum_{\lambda} A_{\lambda}(t, \mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda). \quad (3.52)$$

Hier lohnt es sich wieder für die Moden mit Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  und Polarisation  $\lambda$  ein Symbol einzuführen,

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \lambda}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}). \quad (3.53)$$

Diese Moden bilden eine Orthonormalbasis für die transversalen Felder in  $V$ ,

$$(u_{\mathbf{k}, \lambda}, u_{\mathbf{k}', \lambda'}) = \frac{1}{V} \int d^3x e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \boldsymbol{\epsilon}^{\dagger}(\mathbf{k}, \lambda) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}', \lambda') = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}. \quad (3.54)$$

Mit Hilfe von (2.52) finden wir für das elektromagnetische Feld die Modenentwicklung

$$\mathbf{E} = - \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \dot{A}_{\lambda}(t, \mathbf{k}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}, \lambda}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\lambda}(t, \mathbf{k}) \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}_{\mathbf{k}, \lambda}(\mathbf{x}). \quad (3.55)$$

Um die Lagrangefunktion des Feldes zu berechnen benutzt man die Orthogonalität der stehenden Wellen, siehe Gleichung (3.54), und findet

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left( |\dot{A}_{\lambda}(t, \mathbf{k})|^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 |A_{\lambda}(t, \mathbf{k})|^2 \right), \quad \omega_{\mathbf{k}} = 2\pi\nu = c|\mathbf{k}|. \quad (3.56)$$

Offensichtlich ist die Hohlraumstrahlung zu zwei reellen masselosen Skalarfeldern äquivalent und wir können ähnlich wie bei der Quantisierung des Skalarfeldes fortfahren. Der zu

---

Volumen ebenfalls auf die unten bestimmten Dichten.



$A_\lambda(\mathbf{k})$  konjugierte Impuls lautet

$$\pi_\lambda(\mathbf{k}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\lambda(\mathbf{k})} = \dot{A}_\lambda(-\mathbf{k}) = \dot{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \quad (3.57)$$

und entsprechend ist die Energie der Hohlraumstrahlung

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (|\pi_\lambda(\mathbf{k})|^2 + \omega_k^2 |A_\lambda(\mathbf{k})|^2). \quad (3.58)$$

Die Quantisierung geschieht, indem man die Fouriermoden und deren Impulse in den fundamentalen Poissonklammern

$$\{A_\lambda(\mathbf{k}), \pi_{\lambda'}(\mathbf{k}')\} = \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (3.59)$$

durch Operatoren im Hilbertraum des Strahlungsfeldes ersetzt. Die fundamentalen Kommutationsregeln lauten

$$[A_\lambda(\mathbf{k}), \pi_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = i \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (3.60)$$

Nun führen wir wieder *Vernichtungs-* und *Erzeugungsoperatoren* ein,

$$\begin{aligned} a_\lambda(\mathbf{k}) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left( A_\lambda(\mathbf{k}) + \frac{i}{\omega_k} \pi_\lambda(-\mathbf{k}) \right) \\ a_\lambda^*(\mathbf{k}) &= \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left( A_\lambda(-\mathbf{k}) - \frac{i}{\omega_k} \pi_\lambda(\mathbf{k}) \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Diese gehorchen den Vertauschungsrelationen

$$[a_\lambda(\mathbf{k}), a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (3.62)$$

Für den Hamilton-Operator des Strahlungsfeldes wählen wir den Ausdruck (3.58), worin wir die  $(\pi_\lambda, A_\lambda)$  Operatoren durch Auf- und Absteigeoperatoren ersetzen,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_k \left( a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) + a_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \right) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_k \left( a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (3.63)$$

Die Nullpunktenergie aller Oszillatoren ist *divergent*, und wir führen den normalgeordneten Hamiltonoperator ein,

$$:H: = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_k a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}). \quad (3.64)$$

Die Heisenberggleichung für den Vernichtungsoperator  $a_\lambda(\mathbf{k})$  lautet  $i\dot{a}_\lambda(\mathbf{k}) = \omega_k a_\lambda(\mathbf{k})$  und führt auf eine harmonische Zeitabhängigkeit mit Kreisfrequenz  $\omega_k$ ,

$$a_\lambda(t, \mathbf{k}) = e^{-i\omega_k t} a_\lambda(0, \mathbf{k}). \quad (3.65)$$

Entsprechend hat das Quantenfeld die Zeitenentwicklung

$$\begin{aligned} A(t, \mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left( a_\lambda(t, \mathbf{k}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}, \lambda}(\mathbf{x}) + a_\lambda^\dagger(t, \mathbf{k}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}, \lambda}^*(\mathbf{x}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left( a_\lambda(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Wegen  $k^\mu k_\mu = 0$  erfüllt es die Wellengleichung

$$\square \mathbf{A} = 0. \quad (3.67)$$

Aus (3.56) und (3.57) entnehmen wir, dass das Strahlungsfeld in der Kavität  $V$  einem System von unendlich vielen ungekoppelten harmonischen Oszillatoren äquivalent ist, und zwar zwei Oszillatoren je Wellenzahlvektor. Das elektrische und magnetische Feld haben die Entwicklungen

$$\mathbf{E} = i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left( a_\lambda(\mathbf{k}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}, \lambda}(\mathbf{x}) - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}, \lambda}^*(\mathbf{x}) \right) \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}. \quad (3.68)$$

**Photonen:** Der Zustand in welchem *alle* Oszillatoren im Grundzustand sind identifizieren wir mit dem *Vakuum* und bezeichnen dieses wieder mit  $|0\rangle$ . Es wird von allen Absteigeoperatoren annihilert,

$$a_\lambda(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \in K \quad \text{und} \quad \lambda = 1, 2. \quad (3.69)$$

Der normierte Fock-Zustand

$$|n_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}, n_{\mathbf{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s, \lambda_s}\rangle = \prod_{i=1}^s \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_i, \lambda_i}!}} (a_{\lambda_i}^\dagger(\mathbf{k}_i))^{n_{\mathbf{k}_i, \lambda_i}} |0\rangle \quad (3.70)$$

enthält  $n_{\mathbf{k}_i, \lambda_i}$  Quanten mit Impuls  $\mathbf{k}_i$  und linearer Polarisation  $\lambda_i$ ,

$$N_{\mathbf{k}_i, \lambda_i} |n_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}, \dots, n_{\mathbf{k}_s, \lambda_s}\rangle = n_{\mathbf{k}_i, \lambda_i} |n_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}, \dots, n_{\mathbf{k}_s, \lambda_s}\rangle, \quad N_{\mathbf{k}\lambda} = a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}). \quad (3.71)$$

Wir interpretieren ihn als Zustand mit  $n_{\mathbf{k}_i, \lambda_i}$  *Photonen* der Sorte  $(\mathbf{k}_i, \lambda_i)$ . Der Operator  $a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$  erzeugt ein Photon der Sorte  $(\mathbf{k}, \lambda)$  und  $a_{\mathbf{k}, \lambda}$  vernichtet es.

Die Eigenzustände (3.70) der Anzahloperatoren  $N_{\mathbf{k}_i, \lambda_i}$  für alle möglichen *endlichen* Sequenzen  $\mathbf{k}_1, \lambda_1, \mathbf{k}_2, \lambda_2, \dots, \mathbf{k}_s, \lambda_s$  bilden eine *orthonormierte* Basis im Hilbert-Raum der quantisierten Hohlraumstrahlung. Diese Fockzustände ändern nicht bei einer Permutationen der Quantenzahlen  $\mathbf{k}_1, \lambda_1, n_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}; \mathbf{k}_2, \lambda_2, n_{\mathbf{k}_2, \lambda_2}; \dots; \mathbf{k}_s, \lambda_s, n_{\mathbf{k}_s, \lambda_s}$ , in Einklang mit der Bose-Einstein Statistik. Die Energie und der Impuls der Fockzustände (3.70) sind

$$:H: |n_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}, n_{\mathbf{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s, \lambda_s}\rangle = \left( \sum n_{\mathbf{k}_i, \lambda_i} \omega_{\mathbf{k}_i} \right) |n_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}, n_{\mathbf{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s, \lambda_s}\rangle \quad (3.72)$$

$$\mathbf{P} |n_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}, n_{\mathbf{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s, \lambda_s}\rangle = \left( \sum n_{\mathbf{k}_i, \lambda_i} \mathbf{k}_i \right) |n_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}, n_{\mathbf{k}_2, \lambda_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_s, \lambda_s}\rangle. \quad (3.73)$$

Photonenzustände mit gleichem  $\mathbf{k}$  können verschiedene Polarisierungen  $\lambda$  haben. Klassisch verstehen wir darunter die Schwingungsrichtung des elektrischen Feldes in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{k}$ . Nun kann man zeigen, dass die Komponente des Drehimpulses eines Photonenzustandes zu den Basisvektoren  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \pm)$  in Richtung  $\mathbf{k}$  gleich  $\pm 1$  ist. Man sagt, die *Helizität* des Photons sei  $\pm 1$ .

Um dies einzusehen benutzt man die Modenentwicklung des quantisierten Strahlungsfeldes im korrespondenzmässigen Ausdruck für den Drehimpuls-Operator

$$\mathbf{J} = \frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{x} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \int d^3x \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{k}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (3.74)$$

Eine Rechnung liefert für die Projektion des Drehimpulses auf die Ausbreitungsrichtung

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{k}} |\mathbf{k}, \pm\rangle = \pm \hbar |\mathbf{k}, \pm\rangle. \quad (3.75)$$

**Spektrale Dichte der Oszillatoren:** Wir wollen die Anzahl Freiheitsgrade mit Kreisfrequenzen kleiner als  $\omega$ , gegeben durch

$$N(\omega) = \sharp \{ \mathbf{k} : |\mathbf{k}| < \omega \}, \quad (3.76)$$

berechnen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass für jeden Wellenzahlvektor zwei Oszillatoren existieren. Das Gitter im  $\mathbf{k}$ -Raum hat die Dichte  $(L/2\pi)^3$ , siehe Abbildung 3.1, und wir finden in guter Näherung für genügen große Hohlräume

$$N(\omega) \cong \frac{2 \cdot 4\pi}{3} \omega^3 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3,$$

oder auch

$$N(\omega) \cong \frac{1}{3\pi^2} V \omega^3. \quad (3.77)$$

Die Anzahl Oszillatoren pro Kreisfrequenzintervall um die Frequenz  $\omega$  ist demnach

$$n(\omega) \equiv \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{V\omega^2}{\pi^2}. \quad (3.78)$$

**Energiedichte:** Im thermischen Gleichgewicht ist die mittlere Energie je Oszillator wegen der Isotropie unabhängig von der Polarisierung und der Richtung von  $\mathbf{k}$ , also eine Funktion  $E(T, \omega)$  die nur von der Temperatur und der Frequenz abhängt. Damit finden wir für die *Energiedichte* pro Frequenzintervall, auch spektrale Energiedichte genannt,

$$\rho(T, \omega) = \frac{1}{V} n(\omega) E(T, \omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2} E(T, \omega). \quad (3.79)$$

Zur Berechnung der mittleren Energie je Oszillator nehmen wir an, dass zur Beschreibung des thermischen Gleichgewichts der Strahlung das *Boltzmann-Gibbssche* Postulat gültig sei: im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$  ist die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes mit Energie  $E$  proportional zu

$$e^{-\beta E} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{kT}. \quad (3.80)$$

Die Eigenwerte des normalgeordneten Hamiltonoperators für den harmonischen Oszillator sind  $E_n = n\omega$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  und deshalb ist die mittlere Energie eines Oszillators

$$E(T, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n\omega) p_n \quad (3.81)$$

mit Wahrscheinlichkeiten

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} = \frac{e^{-\beta n\omega}}{Z}, \quad Z = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta m\omega} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}}. \quad (3.82)$$

Daraus berechnet sich nun die mittlere Energie gemäß

$$E(T, \omega) = -\frac{d}{d\beta} \log Z = \frac{\omega e^{-\beta\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}} = \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1}.$$

Eingesetzt in (3.79) findet man die spektrale Energiedichte

$$\rho(T, \omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (3.83)$$

worin die Naturkonstanten  $\hbar$  und  $c$  wieder geschrieben wurden. Mit  $\rho(T, \omega)d\omega = \tilde{\rho}(\nu, T)d\nu$  lautet diese im Frequenzraum

$$\tilde{\rho}(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (3.84)$$

in völliger Übereinstimmung mit der *Planckschen Strahlungsformel*.

# Kapitel 4

## Kausalität

Bei der kanonischen Quantisierung einer klassischen Feldtheorie werden den Umgebungen aller Raumzeitpunkte Observablen zugeordnet, zum Beispiel die Feldoperatoren  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , die Energiedichte  $\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$  oder ihre Mittelwerte in den betrachteten Umgebungen. Derartige Operatoren heißen *lokale Observablen*. Nicht alle dieser Observablen vertauschen und deshalb existieren Unbestimmtheitsrelationen. Diese setzen untere Schranken an die Genauigkeit, mit der nicht-verträgliche lokale Observablen im gleichen Zustand gemessen werden können.

In einer Lorentz-invarianten Theorie sollten sich zwei Messungen an raumartig getrennten Raumzeit-Punkten<sup>1</sup> gegenseitig nicht beeinflussen. Deshalb sollte eine lokale Observable bei  $x$  mit einer Observablen bei  $y$  vertauschen wenn  $x$  und  $y$  raumartig getrennt sind. Wir fordern diese *Kausalitätsbedingung* für alle relativistischen Quantenfeldtheorien und nicht nur für die quantisierte Elektrodynamik. Mehrere wichtige Eigenschaften von quantisierten Feldtheorien folgen aus dieser natürlichen Forderung. Die erstaunlichste ist vielleicht das Theorem über die Beziehung zwischen Spin und Statistik, die im Rahmen einer nicht-relativistischen Theorie unbewiesen bleibt. In einer lokalen relativistischen QFT ist die Beziehung ein Theorem. Eine anderer wichtige Konsequenz der Kausalitätsbedingung sind Aussagen über Antiteilchen. Zum Beispiel sind Masse und Lebensdauer eines Teilchens und seines Antiteilchens gleich.

### 4.1 Kommutatoren des freien Skalarfeldes

In diese Abschnitt berechnen wir die Kommutatoren von Skalarfeldern und die daraus resultierenden Unschärferelationen. Bei der Berechnung der Vertauschungsrelationen zwischen dem Quantenfeld (3.33) an verschiedenen Raumzeit-Punkten benutzen wir den Kommutator (3.17) zwischen Vernichtungs- und Erzeugungsoperator. Der Kommutator

---

<sup>1</sup>Besser wäre es, von Messungen in einer offenen Umgebung zu sprechen.

hängt nur von  $x - y$  ab,

$$[\phi(x), \phi(y)] = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left( e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(x^0 - y^0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} - c.c. \right) = i\Delta_m(x - y) \quad (4.1)$$

wobei wir die *Pauli-Jordan* Kommutator-Funktion

$$\Delta_m(x) = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \sin \omega_{\mathbf{k}} t. \quad (4.2)$$

einführten. Sie ist eine Lösung der Klein-Gordon Gleichung,

$$(\square + m^2)\Delta_m(x) = 0, \quad (4.3)$$

und ändert das Vorzeichen bei Zeitumkehr,

$$\Delta_m(-t, \mathbf{x}) = -\Delta_m(t, \mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \Delta_m(0, \mathbf{x}) = 0. \quad (4.4)$$

Das Verschwinden von  $\Delta_m(0, \mathbf{x})$  ist in Einklang mit der bekannten Tatsache, dass Felder zu gleichen Zeiten vertauschen. Weiter gilt

$$\dot{\Delta}_m(0, \mathbf{x}) = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.5)$$

Daraus folgt die bekannte Vertauschungsrelation zwischen dem Feld und seinem konjugierten Impulsfeld zu gleichen Zeiten.

An dieser Stelle ist es angebracht vom Hohlraum mit endlichen Volumen  $L^3$  zum Euklidischen Raum überzugehen. Erst im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  ist kein Inertialsystem mehr ausgezeichnet und wir erwarten eine relativistisch kovariante Quantenfeldtheorie. Für  $L \rightarrow \infty$  geht die Riemann-Summe über alle  $\mathbf{k} \in K$  in das Riemann-Integral über,

$$\sum_{\mathbf{k}} \epsilon^3 f(\mathbf{k}) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} d^3k f(\mathbf{k}) \quad \text{und} \quad \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \longrightarrow \epsilon^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad \epsilon = \frac{2\pi}{L}. \quad (4.6)$$

Wir reskalieren die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gemäß

$$a(\mathbf{k}) \longrightarrow \sqrt{\frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{\epsilon^3}} a(\mathbf{k}) \quad \text{und} \quad a^\dagger(\mathbf{k}) \longrightarrow \sqrt{\frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{\epsilon^3}} a^\dagger(\mathbf{k}), \quad (4.7)$$

so dass die reskalierten Operatoren folgende Kommutationsregeln erfüllen,

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 2\omega_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (4.8)$$

Die Fourierreihe (3.33) für das Quantenfeld in der kubischen Kavität mit periodischen Randbedingungen wird zu einem Fourierintegral,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{k}) (a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}). \quad (4.9)$$

Hier haben wir das lorentzinvariante Mass eingeführt,

$$d\mu(\mathbf{k}) = \frac{d^3k}{2\omega_k}. \quad (4.10)$$

Es hat den Träger auf der positiven Massenschale. Diese Eigenschaft und die Lorentzinvarianz folgen aus der Identität

$$\int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) f(k) = \int \frac{d^3k}{2\omega_k} f(k^0 = \omega_k, \mathbf{k}), \quad (4.11)$$

bei deren Beweis man  $k^2 = (k^0 - \omega_k)(k^0 + \omega_k)$  benutzt. In der Literatur werden die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren nicht einheitlich definiert. Man findet auch die Normierung für die der Faktor  $2\omega_k$  in (4.8) nicht auftritt. Aber dann ist das Integrationsmass im  $\mathbf{k}$ -Raum nicht mehr lorentzinvariant.

Im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  lautet die Formel für die Pauli-Jordan Funktion

$$\begin{aligned} \Delta_m(x) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{k}) (e^{-ikx} - e^{ikx}) = -\frac{1}{4\pi^3} \int d\mu(\mathbf{k}) \sin(\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{x}) \quad (4.12) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta(x^2) + \frac{m}{4\pi\sqrt{x^2}} \theta(x^2) \epsilon(x^0) J_1(m\sqrt{x^2}). \end{aligned}$$

Die Pauli-Jordan Funktion ist ungerade,  $\Delta_m(-x) = -\Delta_m(x)$  und nur ungleich Null für

$$x^2 = x^\mu x_\mu \geq 0, \quad (4.13)$$

also innerhalb des Lichtkegels oder auf dem Lichtkegel. Außerhalb verschwindet  $\Delta_m(x)$ . Damit kommutiert der Feldoperator an zwei raumartig getrennten Punkten des Minkowski-Raumes und zwei raumartig getrennte Messungen beeinflussen sich nicht. Die Funktion ist lorentzinvariant und deshalb konstant auf den Hyperboloiden

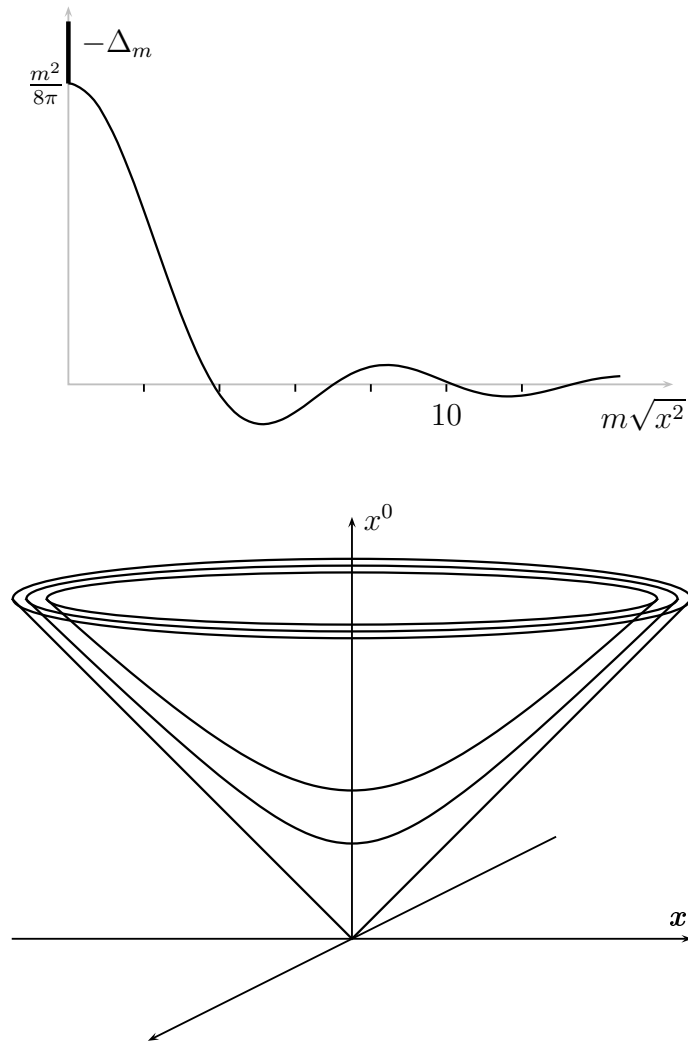
$$x^2 = t^2 - r^2 = \text{const.} \quad (4.14)$$

Für kleine Argumente  $z$  gilt  $J_1(z) \sim z/2 + O(z^3)$ , so dass

$$\Delta_m(x) = -\frac{1}{2\pi} \epsilon(x^0) \delta(x^2) + \frac{m^2}{8\pi} \theta(x^2) \epsilon(x^0) + O(m^4 x^2). \quad (4.15)$$



Für beliebige Werte  $m\sqrt{x^2} > 0$  ist sie in der folgenden Figur geplottet.



Mit wachsendem lorentzinvarianten 'Abstand'  $x^2$  vom Lichtkegel wird der Kommutator  $[\phi(x), \phi(0)]$  stetig kleiner. Auf Hyperboloiden (4.14) mit  $x^2 \gg \lambda_c^2$ , wobei  $\lambda_c = 1/m$  die Comptonwellenlänge zu  $m$  ist, sind die Werte der Pauli-Jordan Funktion sehr klein. Deshalb ist der Kommutator  $[\phi(t, \boldsymbol{\theta}), \phi(0)]$  für Zeiten viel größer als die Comptonzeit vernachlässigbar. Im System beschrieben durch ein Quantenfeld mit Masse  $m$  beeinflussen sich zwei Messungen am selben Ort kaum, wenn sie durch mehrere Comptonzeiten getrennt sind. Insbesondere für ein masseloses Feld hat die Kommutatorfunktion ihren Träger auf dem Lichtkegel.

$$\Delta_0(x) = -\frac{1}{2\pi}\epsilon(x^0)\delta(x^2) = -\frac{1}{4\pi r}(\delta(t-r) - \delta(t+r)). \quad (4.16)$$

In einem System beschrieben durch ein masseloses Skalarfeld können sich nur lichtartig

getrennte Messungen gegenseitig beeinflussen. Für Theorien mit Wechselwirkung ist der Kommutator des Feldoperators an verschiedenen Raumzeit Punkten nicht mehr proportional zum Einheitsoperator. Diese Eigenschaft ist eine Spezialität von freien Feldtheorien mit linearen Feldgleichungen. Dagegen sollte die wichtige Kausalitätsbedingung nach der Felder an raumartig getrennten Punkten kommutieren auch für wechselwirkende Felder gelten.

Mit Hilfe der Kommutatorfunktion  $\Delta_m$  kann man das Anfangswert-Problem für die Klein-Gordon Gleichung lösen: Für gegebene Anfangsbedingungen  $\phi(0, \mathbf{x})$  und  $\dot{\phi}(0, \mathbf{x})$  lautet die eindeutige Lösung der Klein-Gordon Gleichung

$$\phi(t, \mathbf{x}) = - \int d\mathbf{y} \left( \partial_t \Delta_m(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(0, \mathbf{y}) + \Delta_m(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \dot{\phi}(0, \mathbf{y}) \right). \quad (4.17)$$

Zum Beweis benutzt man die Eigenschaften (4.4) und (4.5) der Pauli-Jordan Funktion.

### 4.1.1 Quantenelektrodynamik

Alle Kommutatoren zwischen lokalen Observablen in der Elektrodynamik (ohne Materie) folgen aus dem Kommutationsregeln für das elektromagnetische Potential. Die Vertauschungsrelationen zwischen den Komponenten des Vektorpotentials an verschiedenen Raumzeitpunkten folgen aus (3.66) und (3.62)

$$[A_i(x), A_j(y)] = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{2\omega_k} (e^{-ik(x-y)} \epsilon_i(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_j(\mathbf{k}, \lambda) - k.k.) \quad (4.18)$$

Nach (3.51) projiziert  $\sum_{\lambda} \mathbf{e}(\mathbf{k}, \lambda) \mathbf{e}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$  auf die Ebene senkrecht zum Wellenzahlvektor, so dass

$$[A_i(x), A_j(y)] = -\frac{i}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\omega_k} \left( \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j \right) \sin \omega_k (x^0 - y^0). \quad (4.19)$$

Als Kommutator zweier hermitescher Feldoperatoren ist die rechte Seite ein antihermitescher Operator, in unserem Fall eine imaginäre Funktion multipliziert mit dem Einheitsoperator. In Einklang mit der Homogenität von Raum und Zeit hängt der Kommutator nur von der Differenz  $x - y$  ab und wir dürfen ohne Informationsverlust  $y = 0$  setzen.

Mit  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$  finden wir für den Kommutator zwischen dem Potential und elektrischen Feld zu *gleichen Zeiten*

$$[A_i(\mathbf{x}), E_j(\mathbf{0})] = -\frac{\partial}{\partial y^0} [A_i(0, \mathbf{x}), A_j(y^0, \mathbf{y})] \Big|_{y^0=0} = -\frac{i}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left( \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j \right).$$

Wegen der Vollständigkeit des Funktionensystems  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  folgt dann

$$[A_i(\mathbf{x}), E_j(\mathbf{y})] = -i \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.20)$$

Im letzten Kapitel zeigten wir, dass  $\mathbf{E}$  das zu  $\mathbf{A}$  konjugierte Impulsfeld ist. Wir hätten also die Kommutationsregeln  $[A^i(\mathbf{x}), E_j(\mathbf{y})] = i\delta_j^i \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  erwartet. Diese sind aber weder mit dem Gaußschen Gesetz  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  noch mit der Coulomb-Eichbedingung  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  verträglich. Dagegen verschwinden die Divergenzen der rechten Seite von (4.20) bezüglich der Koordinaten  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ . Damit sind die Kommutationsregeln (4.20) mit der Zwangs- und Eichbedingung verträglich.

Wir berechnen nun die Kommutatoren der elektrischen Feldkomponenten zu verschiedenen Zeiten,

$$[E_i(x), E_j(y)] = \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial y^0} [A_i(x), A_j(y)] = -\partial_0^2 [A_i(x), A_j(y)], \quad (4.21)$$

wobei wir im letzten Schritt benutzten, dass der letzte Kommutator nur von der Zeitdifferenz abhängt. Die Ableitungen nach  $x^\mu$  bezeichnen wir mit  $\partial_\mu$ . Mit der Pauli-Jordan Funktion für das masselose Feld,

$$\Delta_0(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \sin \omega_k t \implies \square D(x) = 0, \quad (4.22)$$

und der Identität

$$\hat{k}_i \hat{k}_j \partial_0^2 (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \sin \omega_k t) = \partial_i \partial_j (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \sin \omega_k t).$$

findet man für den Kommutatoren (4.21) der elektrischen Feldkomponenten das Resultat

$$[E_i(x), E_j(0)] = -i (\delta_{ij} \partial_0^2 - \partial_i \partial_j) \Delta_0(x) \quad (4.23)$$

Mit  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  gewinnen wir ebenfalls durch Ableiten der Kommutatoren (4.19) die Vertauschsrelationen für die restlichen Komponenten des elektromagnetischen Feldes,

$$\begin{aligned} [B_i(x), B_j(0)] &= -i (\delta_{ij} \Delta - \partial_i \partial_j) \Delta_0(x) \\ [E_i(x), B_j(0)] &= -i \epsilon_{ijk} \partial_0 \partial_k \Delta_0(x). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Da  $\Delta_0$  die Wellengleichung erfüllt, gehorchen die Komponenten des elektrischen und ma-

gnetischen Feldes denselben Vertauschungsregeln

$$[E_i(x), E_j(y)] = [B_i(x), B_j(y)]. \quad (4.25)$$

Für  $L \rightarrow 0$  muß  $\Delta_0$  mit dem Limes von (4.13) für verschwindende Masse, also mit der Funktion in (4.16), übereinstimmen. Dies wollen wir nachprüfen. Im Minkowski-Raum wird die Riemann-Summe in (4.22) zu einem Integral. Zur Berechnung des Integrals führen wir im  $\mathbf{k}$ -Raum Kugelkoordinaten  $(|\mathbf{k}|, \theta, \varphi)$  ein,

$$\begin{aligned} \Delta_0(t, \mathbf{x}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sin \omega_k t \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \sin \omega_k t \int_{-1}^1 e^{i|\mathbf{k}|r \cos \theta} d(\cos \theta) \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}|t) \sin(|\mathbf{k}|r) = -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dy (e^{iy(t-r)} - e^{i(t+r)}). \end{aligned}$$

Das letzte Integral führt auf die Summe von zwei  $\delta$ -Distributionen in (4.16)

$$\Delta_0(x) = \Delta_0(t, r) = -\frac{1}{4\pi r} (\delta(t-r) - \delta(t+r)). \quad (4.26)$$

Hier sieht man nochmals, dass  $\Delta_0$ -Funktion eine Lösung der Wellengleichung ist,

$$\square \Delta_0(t, r) = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Delta_0(t, r) = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right) \Delta_0(t, r) = 0. \quad (4.27)$$

Sie hat ihren Träger auf dem Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel. Deshalb vertauschen die Komponenten des elektromagnetischen Feldes an zwei Raumzeitpunkten  $x$  und  $y$ , wenn diese nicht durch einen Lichtstrahl verbunden werden können, d.h. wenn ihr Differenzvektor  $x - y$  nicht lichtartig ist,

$$(x - y)^2 \neq 0 \implies [F_{\mu\nu}(x), F_{\alpha\beta}(y)] = 0. \quad (4.28)$$

Dies ist das Kausalitätsprinzip für das freie elektromagnetische Feld. Die Tatsache, dass alle Kommutatoren für Punktepaare verschwinden, die nicht durch Lichtstrahlen verbunden werden können ist eine Konsequenz aus der verschwindenden Ruhemasse des Photons oder der Tatsache, dass die Lösungen der Maxwell-Gleichungen mit Lichtgeschwindigkeit propagieren. Für Theorien die massive Teilchen beschreiben, zum Beispiel massive skalare Teilchen oder massive  $Z^0$ -Bosonen der elektroschwachen Wechselwirkung, sind die Kommutatoren auch für zeitartig getrennte Punktepaare ungleich Null.

Von besonderem Interesse sind die Kommutatoren für Observablen im Heisenbergbild

und zur gleichen Zeit. Diese werden zur Präparation (Festlegung) eines Zustandes in der quantisierten Elektrodynamik benötigt.  $\Delta_0(t, r)$  ist eine in der Zeit ungerade Funktion, so dass gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Delta_0(t, r) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_0(t, r) = 0. \quad (4.29)$$

Daraus folgt sofort

$$[E_i(t, \mathbf{x}), E_j(t, \mathbf{y})] = [B_i(t, \mathbf{x}), B_j(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (4.30)$$

Im Kommutator von elektrischem und magnetischem Feld erscheint nur die erste Zeitableitung und

$$[E_i(t, \mathbf{x}), B_j(t, \mathbf{y})] \neq 0 \quad \text{nur für } i \neq j, \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (4.31)$$

Zu einer festen Zeit können wir entweder das elektrische Feld  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  oder das magnetische Feld  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$  im ganzen Raum scharf vorgeben, nicht aber beide. Es sind zwei komplementäre Feldvariablen, ähnlich dem Ort und Impuls eines Teilchens.

## 4.1.2 Unbestimmtheitsrelationen

Die Unbestimmtheitsrelationen folgen aus der allgemeinen Beziehung zwischen dem Produkt von Unschärfen zweier Observablen und ihrem Kommutator: Für zwei Observablen  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  und irgendeinen Zustand gilt

$$\Delta \mathcal{A}_1 \Delta \mathcal{A}_2 \geq \frac{1}{2} |\langle [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] \rangle|. \quad (4.32)$$

Wir betrachten den über ein kleines Raumzeitvolumen  $\mathcal{O}$  gemittelten Feldoperator

$$\mathbf{E}(\mathcal{O}) = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} d^4x \mathbf{E}(x). \quad (4.33)$$

Es liege nun  $\mathcal{O}_1$  in der Zukunft von  $\mathcal{O}_2$ . Dann gilt mit (4.23) und (4.26)

$$\Delta E_x(\mathcal{O}_1) \Delta E_y(\mathcal{O}_2) \geq \frac{\hbar}{8\pi} \left| \int_{\mathcal{O}_1} \frac{d^4x}{|\mathcal{O}_1|} \int_{\mathcal{O}_2} \frac{d^4y}{|\mathcal{O}_2|} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} \frac{\delta(ct - r)}{r} \right|. \quad (4.34)$$

Ähnlich wie für Impuls und Ort finden wir eine zustandsunabhängige untere Schranke für das Produkt der beiden Unschärfen.

## 4.2 Greenfunktionen

Die Amplitude für die Propagation eines Teilchens von  $y$  nach  $x$  ist durch die nach ARTHUR WIGHTMAN benannte Zweipunkt-Funktion

$$\mathcal{W}(x, y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = W(x - y) \quad (4.35)$$

gegeben. Im letzten Schritt nahmen wir an, dass der Grundzustand translationsinvariant ist, so dass die Wightman-Funktion nur von  $x - y$  abhängt. Oft bezeichnet man  $W(x)$  auch mit  $i\Delta_+(x)$ . Neben der Zweipunkt-Funktion benötigen wir später noch weitere Erwartungswerte von Produkten des Quantenfelds. Für das freie Feld können diese aus  $W(x)$  berechnet werden.

Das Feld  $\phi$  ist eine Summe von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren, aber nur Terme der Form  $a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')$  in  $\phi(x)\phi(y)$  tragen zur Zweipunkt-Funktion bei. Es folgt die Darstellung

$$W(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{k}) e^{-ik(x-y)} \Big|_{k^0=\omega_k}. \quad (4.36)$$

Bei der Diskussion des invarianten Masses haben wir folgende Identität bewiesen,

$$\frac{1}{2\omega_k} = \int dk^0 \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0). \quad (4.37)$$

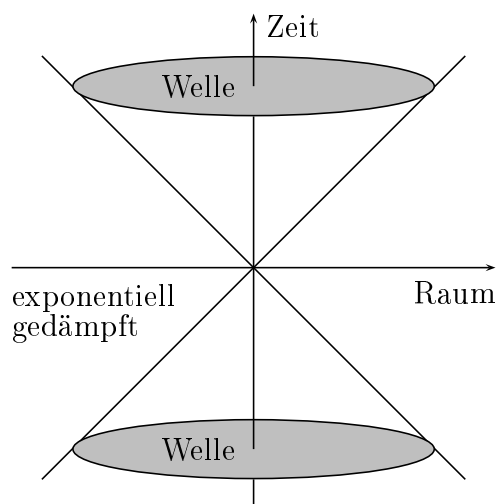
Damit lässt sich die Zweipunkt-Funktion umschreiben,

$$W(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx}. \quad (4.38)$$

Hierbei wird über alle 4 Komponenten des relativistischen Impulses integriert. Die letzte Darstellung macht deutlich, dass  $W(x)$  eine lorentzinvariante Distribution ist, da  $k^2$ ,  $d^4k$  und  $kx$  lorentzinvariant sind und die Bedingung  $k_0 \geq 0$  eine lorentzinvariante Forderung ist (solange wir die Zeitumkehr ausschließen). Eine etwas längere Rechnung führt auf den expliziten Ausdruck

$$W(x) = \frac{1}{4\pi i} \epsilon(x^0) \delta(x^2) + \frac{m^2}{8\pi} \left( \theta(x^2) \frac{N_1(a) + i\epsilon(x^0)J_1(a)}{a} + \frac{2}{\pi} \theta(-x^2) \frac{K_1(a)}{a} \right), \quad (4.39)$$

mit  $a = m\sqrt{t^2 - r^2}$  für zeitartiges  $x$  und  $a = m\sqrt{r^2 - t^2}$  für raumartiges  $x$ .



Längs der Zeitachse und in der Raumebene findet man die Formeln

$$\begin{aligned}
 W(t, \mathbf{x} = 0) &= \frac{m}{8\pi|t|} (N_1(m|t) + i\epsilon(t)J_1(m|t)) \xrightarrow{m|t| \gg 1} c \frac{e^{-im|t|}}{(m|t|)^{3/2}} \\
 W(t = 0, \mathbf{x}) &= \frac{m}{4\pi^2 r} K_1(mr) \xrightarrow{mr \gg 1} c \frac{e^{-mr}}{(mr)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Im räumlich Unendlichen verschwindet die Zweipunktsfunktion für Abstände größer als die Compton-Wellenlänge exponentiell schnell. Für Zeiten groß verglichen mit der Compton-Zeit finden wir eine harmonische Schwingung mit der Compton-Frequenz. Außerhalb der Lichtkegels verschwindet die Amplitude nicht, ist aber exponentiell klein.

### 4.2.1 Klein-Gordon Propagator

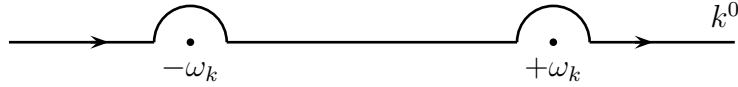
Wir betrachten den Kommutator  $[\phi(x), \phi(y)]$  noch aus einem etwas anderem Blickwinkel. Sein Vakuum-Erwartungswert kann als 4-dimensionales Integral geschrieben werden

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | [\phi(x), \phi(0)] | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{k}) (e^{-ikx} - e^{ikx}) \Big|_{k^0 = \omega_k} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left( \frac{1}{2\omega_k} e^{-ikx} - \frac{1}{2\omega_k} e^{ikx} \right) \Big|_{k^0 = \omega_k}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Für  $x^0 > 0$  können wir den Kommutator wie folgt schreiben,

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(0)] | 0 \rangle = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^0}{2\pi i} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2},$$

wobei die  $k^0$ -Integration in der komplexen Ebene entlang des eingezeichneten Weges zu berechnen ist.



In der Tat, für  $x^0 > 0$  können wir den Weg in der unteren komplexen  $k^0$ -Ebene schliessen, so dass die einfachen Pole des Integranden bei  $\pm\omega_k$  im negativen Sinn umschlossen werden. Nach dem Residuensatz finden wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0 x^0}}{k^2 - m^2} = -\frac{1}{2\omega_k} \left( e^{-i\omega_k x^0} - e^{i\omega_k x^0} \right) \quad (4.42)$$

Ist dagegen  $x^0 < 0$ , dann können wir den Weg in der oberen komplexen  $k^0$ -Ebene schließen und erhalten Null. Also ergibt sich

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} e^{-ikx} = \theta(x^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(0)] | 0 \rangle \equiv i\Delta_{\text{ret}}(x). \quad (4.43)$$

Um  $\Delta_{\text{ret}}$  besser zu verstehen, wenden wir den Klein-Gordon-Operator darauf an,

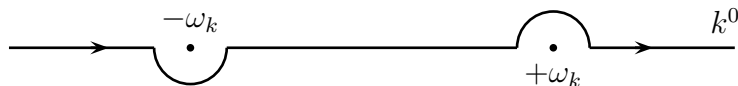
$$(\square + m^2)\Delta_{\text{ret}}(x) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} = -\delta^4(x). \quad (4.44)$$

Man erhält natürlich dasselbe Resultat, wenn man mit  $\square + m^2$  auf die mittlere Darstellung in (4.43) operiert und dabei

$$\theta'(x^0) = \delta(x^0), \quad [\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{und} \quad (\square + m^2)\phi(x) = 0$$

benutzt. Die reelle Distribution  $\Delta_{\text{ret}}(x)$  ist die *retardierte* Green-Funktion des Klein-Gordon Operators, da sie für negative Zeiten verschwindet.

Das  $k^0$ -Integral in (4.42) kann längs von vier natürlichen Wegen ausgewertet werden. Später werden wir sehen, dass die folgende Polvorschrift sehr nützlich ist:



Es ist die Feynmansche Vorschrift. Für positive  $x^0$  können wir den Weg in der unteren  $k^0$ -Halbebene schliessen und für negative  $k^0$  in der oberen Halbebene. In beiden Fällen



trägt je ein Pol zum  $k^0$ -Integral in (4.42) bei und wir finden

$$\frac{1}{2\pi i} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0 x^0}}{k^2 - m^2} = -\frac{e^{-i\omega_k |x^0|}}{2\omega_k}. \quad (4.45)$$

Damit finden wir die Green Funktion

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} e^{-ik(x-y)} = \begin{cases} W(x-y) & \text{für } x^0 > y^0 \\ W(y-x) & \text{für } x^0 < y^0. \end{cases} \quad (4.46)$$

Schon in der Quantenmechanik benutzt man bei der Diskussion der Zeitentwicklungsoperators oft die Zeitordnung von Operatoren. Der Zeitordnungsoperator  $T$  ordnet ein Produkt von Feldoperatoren derart um, dass im geordneten Produkt die Zeiten von links nach rechts zunehmen. Der Operator zu spätesten Zeit steht dann ganz links. Zum Beispiel

$$T\phi(x)\phi(y) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y) & \text{für } x^0 > y^0 \\ \phi(y)\phi(x) & \text{für } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (4.47)$$

Damit schreibt sich der Feynman-Propagator für das Skalarfeld wie folgt,

$$i\Delta_F(x-y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle. \quad (4.48)$$

Ausgedrückt durch die Wightman Zweipunktfunktion,

$$i\Delta_F(x) = \theta(x^0)W(x) + \theta(-x^0)W(-x). \quad (4.49)$$

Dieser Propagator wird in der Störungstheorie eine zentrale Rolle einnehmen. Jeder inneren Linie, die die Propagation eines virtuellen Teilchens beschreibt, wird ein Feynman-Propagator zugeordnet. Neben den retardierten und Feynman-Propagatoren gibt es noch den avancierten und Anti-Feynman-Propagator. Wir fassen zusammen: Bezeichnet  $i\Delta_+(x) = W(x)$  den positiven Frequenzanteil des Propagators, und entsprechend  $\Delta_-(x) = \bar{\Delta}_+(x)$  den negativen Frequenzanteil, dann unterscheiden wir 4 Lösungen von

$$(\square + m^2)G(x) = -\delta^{(4)}(x). \quad (4.50)$$

Den retardierten und avancierten Propagator

$$\Delta_{\text{ret}}(x) = \theta(x^0)\Delta_m(x) \quad \text{und} \quad \Delta_{\text{av}}(x) = -\theta(-x^0)\Delta_m(x). \quad (4.51)$$

Den Feynman-Propagator

$$\Delta_F(x) = \theta(x^0)\Delta_+(x) + \theta(-x^0)\Delta_-(x). \quad (4.52)$$

Den anti-Feynman Propagator

$$\Delta_{\bar{F}}(x) = \bar{\Delta}_F(x). \quad (4.53)$$

Die Trägergebiete der retardierten und avancierten Propagatoren sind der abgeschlossene Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel.

### 4.2.2 Zusammenfassung

Es gibt verschiedene Lösungen der homogenen Klein-Gordon Gleichung  $(\square + m^2)G = 0$ . Die *Wightman- oder Zweipunktsfunktion*  $W(x) = \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle$  hat die Darstellung

$$W(x) = i\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) e^{-ikx} \quad (4.54)$$

Die *Pauli-Jordan Kommutatorfunktion*  $\Delta_m(x) = i[\phi(x), \phi(0)]$  ist

$$\Delta_m(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{k}) (e^{-ikx} - e^{ikx}) \quad (4.55)$$

Greenfunktionen (Elementarlösungen) lösen die inhomogene Gleichung  $(\square + m^2)G = \delta^{(4)}(x)$ . Es traten folgende Distributionen auf:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ret}}(x) &= \theta(x^0)\Delta_m(x) = \theta(x^0)\langle 0|[\phi(x), \phi(0)]|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} \\ i\Delta_F(x) &= \langle 0|T\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} e^{-ikx} \end{aligned}$$

# Kapitel 5

## Diracfeld

Fermionen erfüllen das Pauli-Prinzip und genügen der Fermi-Statistik. Sie werden durch Spinorfelder beschrieben. Im Gegensatz zu Skalar- und Vektorfelder transformieren Spinorfelder nicht nach Darstellungen der Lorentzgruppe sondern nach Darstellungen der quantenmechanischen Lorentz-Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ . Bosonen haben ganzzahlige und Fermionen halbganze Spins.

### 5.1 Diracgleichung

Ich gehe davon aus, dass sie die Diracgleichung aus der Vorlesung QM II kennen und erinnere hier nur an die wichtigsten Eigenschaften der Spinorfelder und Diracgleichung. Spin- $\frac{1}{2}$  Felder werden durch vierkomponentige Spinoren  $\psi(x)$  beschrieben deren Lagrangedichte und Feldgleichung 4-dimensionale  $\gamma$ -Matrizen  $\gamma^\mu$  enthalten. Diese gehorchen den algebraischen Beziehungen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathbb{1}_4, \quad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0. \quad (5.1)$$

Die letzte Beziehung bedeutet, dass  $\gamma_0$  hermitesch und  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  antihermitesch sind. Wegen  $\gamma_0^2 = \mathbb{1}$  hat  $\gamma_0$  die Eigenwerte  $\pm 1$  und wegen  $\gamma_i^2 = -\mathbb{1}$  sind die Eigenwerte von  $\gamma_i$  gleich  $\pm i$ . Die von den  $\gamma_\mu$  erzeugte Algebra mit Relationen (5.1) heißt *Clifford-Algebra*. Es existiert nur eine nicht-triviale irreduzible Darstellung dieser Algebra und diese ist 4-dimensional.

Unter orthochronen eigentlichen Poincare-Transformationen transformiert ein Spinorfeld  $\psi(x)$  wie folgt

$$\psi'(x') = S\psi(x), \quad x' = \Lambda(S)x + a \quad (5.2)$$

Darin ist die Spintransformation gegeben durch

$$S = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\right) \quad \text{mit} \quad \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{4i}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta], \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Die Indizes der Gamma-Matrizen werden mit der Metrik nach oben oder unten gezogen,

$$\gamma^\mu = g^{\mu\nu}\gamma_\nu \quad , \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu. \quad (5.4)$$

Die Lorentztransformation  $\Lambda$  berechnet sich aus der Spintransformation gemäß

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad (\Lambda^\mu{}_\nu) = \exp(\omega), \quad \omega = (\omega^\mu{}_\nu). \quad (5.5)$$

Jeder Spintransformation ist eine eindeutige Lorentz-Transformation zugeordnet. Umgekehrt gibt es zu jeder Lorentztransformation zwei Spintransformationen mit  $S^{-1}\gamma S = \Lambda\gamma$ . Die Spingruppe ist die doppelte Überlagerung der Lorentzgruppe, ähnlich wie die quantenmechanische Drehgruppe  $SU(2)$  die doppelte Überlagerung der Drehgruppe  $SO(3)$  ist. Spintransformationen sind nicht unitär, erfüllen aber die Bedingung

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}. \quad (5.6)$$

Deshalb ergibt sich für den *Dirac-konjugierten Spinor* das Transformationsgesetz

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0. \quad (5.7)$$

Im Gegensatz zu Tensorfeldern, deren Komponenten beim Wechsel des Inertialsystems wie die Komponenten eines Vektorfeldes transformieren, transformieren die vier Komponenten eines Spinorfeldes mit der Spintransformation  $S$ . Aber die folgenden 16 Felder sind (Pseudo)Tensorfelder:

$S(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$	Skalarfeld	1
$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$	Vektorfeld (Strom)	4
$T^{\mu\nu}(x) = \bar{\psi}(x)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi(x)$	antisymm. Tensorfeld	6
$A^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)$	Pseudovektorfeld (Axialstrom)	4
$P(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$	Pseudoskalarfeld	1

(5.8)

Hier tritt die hermitesche Matrix  $\gamma_5$  auf,

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \text{mit} \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}, \quad \gamma_5 = \gamma_5^\dagger, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (5.9)$$

Die letzte Gleichung bedingt die Spurfreiheit der Gamma-Matrizen,  $\text{tr} \gamma_\mu = 0$ .

Die lorentzinvariante Lagrangedichte für das freie Spin- $\frac{1}{2}$  lautet

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\rlap{\not{D}} - m) \psi, \quad \rlap{\not{D}} = \gamma^\mu \partial_\mu, \quad (5.10)$$

und die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung ist die kovariante freie Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \iff -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\dagger\mu} - m\psi^\dagger = 0. \quad (5.11)$$

Die Wirkung ist invariant unter Translationen in Raum und Zeit. Der zugehörige Noetherstrom ist der kanonische Energie-Impuls Tensor des freien Dirac-Feldes,

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (5.12)$$

Die erhaltenen Ladungen bilden den 4-er Impuls

$$P^\nu = \int_{x^0=0} d^3x T^{0\nu} = \int_{x^0=0} d^3x (i\bar{\psi}\gamma^0\partial^\nu\psi - g^{0\nu}\mathcal{L}). \quad (5.13)$$

Der kanonische Energie-Impuls Tensor ist unsymmetrisch und muss als Quelle des Gravitationsfeldes verbessert werden. Die erhaltenen Größen  $P^\mu$  ändern dabei aber nicht und wir dürfen zu ihrer Berechnung die Formel (5.13) benutzen. Insbesondere lautet die Energie des Dirac-Feldes

$$H = P^0 = \int d^3x \psi^\dagger h \psi, \quad h = -i\gamma^0\gamma^i\partial_i + \gamma^0 m \equiv \alpha^i\partial_i + \beta m. \quad (5.14)$$

Die Lagrangedichte ist auch invariant unter globalen  $U(1)$ -Phasentransformationen

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\lambda}\psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow e^{-i\lambda}\bar{\psi}(x), \quad (5.15)$$

und diese innere Symmetrie führt auf den erhaltenen Noetherstrom

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (5.16)$$

mit zugehöriger zeitunabhängiger Noetherladung

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger\psi. \quad (5.17)$$

Das Vektorfeld  $j^\mu$  wird mit der elektrischen 4-er Stromdichte identifiziert und  $Q$  mit der elektrischen Ladung.

## 5.2 Lösungen der freien Diracgleichung

Zur Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung  $(i\not{p} - m)\psi = 0$  setzen wir eine ebene Welle an,

$$\psi(x) = e^{-ipx}u \quad \text{mit konstantem } u \in \mathbb{C}^4. \quad (5.18)$$

Dies ist eine Lösung der Dirac-Gleichung, falls

$$(\not{p} - m)u = 0 \implies (\not{p} + m)(\not{p} - m)u = (p^2 - m^2)u \quad (5.19)$$

gilt. Die letzte Gleichung hat nur eine Lösung für  $p^2 = m^2$  und dies ist gerade die Bedingung dafür, dass jede Komponente von  $\psi$  die Klein-Gordon-Gleichung mit Masse  $m$  erfüllt. Also liegt der 4-er Impuls auf dem Massenhypersboloid im Vorwärts- beziehungsweise Rückwärtslichtkegel,

$$p \in V_m = V_m^+ \cup V_m^- \quad \text{mit} \quad V_m^\pm = \{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = m^2, \pm p^0 > 0\} \quad (5.20)$$

Liegt  $p$  auf dem Hyperboloid  $V_m^-$  im Rückwärtslichtkegel dann liegt  $-p$  auf dem Hyperboloid  $V_m^+$  im Vorwärtslichtkegel. Deshalb haben die Lösungen die Form

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{-ipx}u, & (\not{p} - m)u &= 0, & p &\in V_m^+, \\ \psi(x) &= e^{+ipx}v, & (\not{p} + m)v &= 0, & p &\in V_m^-. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Wegen  $p^2 = m^2$  hat  $\not{p}$  die Eigenwerte  $\pm m$ . Die Eigenräume zu den Eigenwerten  $\pm m$  sind je 2-dimensional, da  $\text{tr } \not{p} = p_\mu \text{tr } \gamma^\mu = 0$  ist. Wir bezeichnen die entsprechenden Eigenvektoren, die sogenannten *Polarisationsvektoren*, mit

$$u(p, \sigma) \quad \text{und} \quad v(p, \sigma), \quad \sigma = 1, 2. \quad (5.22)$$

Diese sind wie folgt normiert: im Ruhesystem mit  $p = (m, \mathbf{0})$  lauten Gleichungen (5.21) für die konstanten Spinoren  $u$  und  $v$

$$(\gamma^0 - 1)u = 0 \quad \text{und} \quad (\gamma^0 + 1)v = 0. \quad (5.23)$$

Da  $\gamma^0$  hermitesch ist, können wir die Eigenvektoren bezüglich dem Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^4$  orthogonal wählen. Deshalb gilt im *Ruhesystem* des Elektrons

$$\begin{aligned} u^\dagger(p, \sigma)u(p, \sigma') &= v^\dagger(p, \sigma)v(p, \sigma') = 2m\delta_{\sigma\sigma'} \\ u^\dagger(p, \sigma)v(p, \sigma') &= v^\dagger(p, \sigma)u(p, \sigma') = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Der Faktor  $2m$  ist Konvention. Die Eigenvektoren von  $\gamma^0$  definieren auch die Projektoren auf die entsprechenden Eigenräume von  $\gamma^0$  zu den Eigenwerten  $\pm 1$ ,

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma=1,2} u(p, \sigma) u^\dagger(p, \sigma) &= 2m \frac{1 + \gamma^0}{2} \\ \sum_{\sigma=1,2} v(p, \sigma) v^\dagger(p, \sigma) &= 2m \frac{1 - \gamma^0}{2}.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Diese Relationen gelten im Ruhesystem des Elektrons. Für den Übergang in andere Inertialsysteme schreiben wir sie in kovarianter Form. Dazu benutzen wir, dass wegen (5.23) im Ruhesystem die Beziehungen in (5.24) wie folgt geschrieben werden können,

$$\begin{aligned}\bar{u}(p, \sigma) u(p, \sigma') &= 2m \delta_{\sigma\sigma'} \quad , \quad \bar{v}(p, \sigma) v(p, \sigma') = -2m \delta_{\sigma\sigma'} \\ \bar{u}(p, \sigma) v(p, \sigma') &= 0 = \bar{v}(p, \sigma) u(p, \sigma')\end{aligned}\quad (5.26)$$

und diejenigen in (5.25) gemäß

$$\sum_{\sigma=1,2} u(p, \sigma) \bar{u}(p, \sigma) = \not{p} + m \quad , \quad \sum_{\sigma=1,2} v(p, \sigma) \bar{v}(p, \sigma) = \not{p} - m.\quad (5.27)$$

Wir machten von der speziellen Form des 4-er Impulses im Ruhesystem Gebrauch. Beim Übergang in ein beliebiges Inertialsystem benutzen wir (5.5) mit dem Resultat

$$S(\not{p} \pm m) = (\not{p}' \pm m)S, \quad p' = \Lambda(S)p,\quad (5.28)$$

Die Spinoren im Impulsraum transformieren unter Lorentz-Transformationen gemäß

$$u(p', \sigma) = Su(p, \sigma) \quad \text{und} \quad v(p', \sigma) = Sv(p, \sigma).\quad (5.29)$$

Nun sei  $S$  so gewählt, dass  $\Lambda(S)$  den Impuls  $p$  im Ruhesystem in einen beliebigen anderen Impuls auf  $V_m^+$  abbildet. Dann ist

$$\bar{u}(p', \sigma) u(p', \sigma') = \bar{u}(p, \sigma) S^{-1} S u(p, \sigma') = 2m \delta_{\sigma\sigma'}$$

und analog

$$\sum_{\sigma} u(p', \sigma) \bar{u}(p', \sigma) = S \sum_{\sigma} u(p, \sigma) \bar{u}(p, \sigma) S^{-1} \stackrel{(5.28)}{=} \not{p}' + m.$$

Ganz analog verfährt man mit den entsprechenden Ausdrücken für  $v(p, \sigma)$ . Dies beweist, dass Orthogonalitätsrelationen (5.26) und Vollständigkeitsrelationen (5.27) in beliebigen

Inertialsystemen, als für beliebige Teilchenimpulse, gültig sind. In den folgenden Rechnungen sind die weiteren Identitäten

$$\bar{u}(p, \sigma)\gamma^\mu u(p, \sigma') = \bar{v}(p, \sigma)\gamma^\mu v(p, \sigma') = 2p^\mu \delta_{\sigma\sigma'} \quad (5.30)$$

hilfreich. Auf beiden Seiten stehen Vektoren und es genügt, diese vektorielle Beziehung im Ruhesystem des Elektrons nachzuprüfen. Im Ruhesystem ist wegen  $\gamma^0 u(p, \sigma) = u(p, \sigma)$  und  $\bar{u}(p, \sigma)\gamma^0 = \bar{u}(p, \sigma)$

$$\bar{u}(p, \sigma)\gamma^\mu u(p, \sigma') = \bar{u}(p, \sigma)\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 u(p, \sigma').$$

Deshalb erhalten wir Null für  $\mu = 1, 2, 3$  und mit (5.26) das Resultat  $2p^0 \delta_{\sigma\sigma'}$  für  $\mu = 0$ . Dies ist aber gerade die Relation (5.30) im Ruhesystem des Elektrons.

Die allgemeine klassische Lösung der Dirac-Gleichung lautet somit

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_{\sigma} (u(p, \sigma) a_{\sigma}(p) e^{-ipx} + v(p, \sigma) b_{\sigma}^{\dagger}(p) e^{ipx}) \quad (5.31)$$

mit  $p \in V_m^+$  und beliebigen Amplituden  $a_{\sigma}(p)$  und  $b_{\sigma}(p)$ . Der konjugierte Spinor hat die Zerlegung

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_{\sigma} (\bar{v}(p, \sigma) b_{\sigma}(p) e^{-ipx} + \bar{u}(p, \sigma) a_{\sigma}^{\dagger}(p) e^{ipx}) \quad (5.32)$$

Mit Hilfe von (5.30) findet man für den 4-er Impuls (5.13) des Feldes

$$P^{\nu} = \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_{\sigma} p^{\nu} (a_{\sigma}^{\dagger}(p) a_{\sigma}(p) - b_{\sigma}(p) b_{\sigma}^{\dagger}(p)). \quad (5.33)$$

Insbesondere finden wir für die Energie des Dirac-Feldes den Ausdruck

$$H = \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_p \sum_{\sigma} (a_{\sigma}^{\dagger}(p) a_{\sigma}(p) - b_{\sigma}(p) b_{\sigma}^{\dagger}(p)), \quad \omega_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (5.34)$$

Sie ist nicht positiv definit wie für skalare oder vektorielle Teilchen.

## 5.3 Quantisierung des Diracfeldes

Bei der Quantisierung werden das Dirac-Feld  $\psi$  und seine Fourier-Koeffizienten  $a_{\sigma}, b_{\sigma}$  zu Operatoren auf einem Hilbert-Raum. Würden wir Vertauschungsrelationen für diese Operatoren fordern dann wäre die Energie nach unten unbeschränkt, im Widerspruch zur



Forderung, dass in einer relativistischen Feldtheorie das Spektrum von  $P^\mu$  im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel liegen muß. Die Energie wird (bis auf eine Konstante) positiv, wenn wir *kanonische Antivertauschungsrelationen* postulieren:

$$\{a_\sigma(p), a_{\sigma'}^\dagger(p')\} = \{b_\sigma(p), b_{\sigma'}^\dagger(p')\} = 2\omega_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma\sigma'} \quad (5.35)$$

$$\{a_\sigma^\#(p), a_{\sigma'}^\#(p')\} = \{b_\sigma^\#(p), b_{\sigma'}^\#(p')\} = 0. \quad (5.36)$$

Hier steht  $a^\#$  für  $a$  oder für  $a^\dagger$ . Der Übergang von Kommutations- zu Antikommutationsregeln wird auch für die Einhaltung des Pauliprinzipis führen. Zum Beispiel verschwindet  $a_\sigma^\dagger(p)a_\sigma^\dagger(p)$  aufgrund der Antikommutationsregeln, so dass man mit  $a_\sigma^\dagger(p)$  nicht zwei Teilchen mit denselben Quantenzahlen  $\sigma$  und  $p$  aus einem Fock-Vakuum erzeugen kann.

In der Tat wählen wir als Hilbert-Raum den Fock-Raum über einem invarianten Vakuumzustand  $|0\rangle$ , der von den Vernichtungsoperatoren annihilert wird,

$$a_\sigma(p)|0\rangle = b_\sigma(p)|0\rangle = 0. \quad (5.37)$$

Man definiert nun das normalgeordnete Produkt von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren so, dass alle Vernichtungsoperatoren rechts und alle Erzeugungsoperatoren links stehen. Ist die Permutation der Umordnung ungerade, dann wird wegen der Antivertauschungsrelationen noch mit  $-1$  multipliziert. Mit  $\langle 0|a_\sigma(p)a_{\sigma'}^\dagger(p')|0\rangle = \{a_\sigma(p)a_{\sigma'}^\dagger(p')\}$  gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} :a_\sigma(p)a_{\sigma'}^\dagger(p') : &= a_\sigma(p)a_{\sigma'}^\dagger(p') - \langle 0|a_\sigma(p)a_{\sigma'}^\dagger(p')|0\rangle = -a_{\sigma'}^\dagger(p')a_\sigma(p) \\ :b_\sigma(p)b_{\sigma'}^\dagger(p') : &= b_\sigma(p)b_{\sigma'}^\dagger(p') - \langle 0|b_\sigma(p)b_{\sigma'}^\dagger(p')|0\rangle = -b_{\sigma'}^\dagger(p')b_\sigma(p). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Der normal-geordnete Hamilton-Operator

$$:H: = \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_p \sum_\sigma (a_\sigma^\dagger(p)a_\sigma(p) + b_\sigma^\dagger(p)b_\sigma(p)) \quad (5.39)$$

ist nicht-negativ und annihilert den Vakuumzustand. Mit den nützlichen Identitäten

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \quad \text{und} \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (5.40)$$

folgen die Kommutationsregeln

$$\begin{aligned} [a_\sigma^\dagger(p)a_\sigma(p), a_{\sigma'}^\dagger(q)] &= 2\omega_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma\sigma'} a_\sigma^\dagger(p) \\ [a_\sigma^\dagger(p)a_\sigma(p), a_{\sigma'}(q)] &= -2\omega_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma\sigma'} a_\sigma(p). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Benutzen wir diese Regeln im Kommutator der Impulse mit dem Feld so ergibt sich

$$\begin{aligned} i[P^\mu, \psi(x)] &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) p^\mu \sum_{\sigma} (-u(p, \sigma) a_{\sigma}(p) e^{-ipx} + v(p, \sigma) b_{\sigma}^{\dagger}(p) e^{ipx}) \\ &= \partial_{\mu} \psi(x) \end{aligned} \quad (5.42)$$

und wie erwartet erzeugen die hermiteschen  $P^\mu$  Verschiebungen in Raum und Zeit. Die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren haben die Zeitentwicklungen

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\sigma}(p) &= i[H, a_{\sigma}(p)] = -i\omega_p a_{\sigma}(p) \Rightarrow a_{\sigma}(t, p) = e^{-i\omega_p t} a_{\sigma}(p) \\ \dot{b}_{\sigma}^{\dagger}(p) &= i[H, b_{\sigma}^{\dagger}(p)] = i\omega_p b_{\sigma}^{\dagger}(p) \Rightarrow b_{\sigma}^{\dagger}(t, p) = e^{i\omega_p t} b_{\sigma}^{\dagger}(p), \end{aligned} \quad (5.43)$$

in Übereinstimmung mit der klassischen Lösung (5.31) für das Dirac-Feld.

### 5.3.1 Zweipunktfunktionen

Wir berechnen die relevanten Zweipunktfunktion des quantisierten Diracfeldes. Das Diracfeld hat die Entwicklung (5.31) und sein konjugiertes Feld die Entwicklung (5.32). Dabei sind die Fourierkoeffizienten Operatoren im Fockraum mit den Antivertauschungsrelationen (5.35) und (5.36). Die Zweipunkt-Funktion ist der Vakuum-Erwartungswert

$$\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{p}) d\mu(\mathbf{q}) e^{-ipx} e^{iqy} \sum_{\sigma, \sigma'} u(p, \sigma) \bar{u}(q, \sigma') \langle 0 | a_{\sigma}(p) a_{\sigma'}^{\dagger}(q) | 0 \rangle.$$

Im letzten Erwartungswert dürfen wir das Produkt von  $a$  und  $a^{\dagger}$  durch ihren Antikommutator ersetzen und dies führt auf den Faktor  $2\omega_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma\sigma'}$ . Wir erhalten mit (5.27)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{p}) e^{-ip(x-y)} (\not{p} + m) \\ &= (i\not{\partial}_x + m) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{p}) e^{-ip(x-y)}. \end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck steht die Zweipunktfunktion  $W(x-y) = i\Delta_+(x-y)$  des Skalarfeldes, und deshalb ist

$$iS_+(x-y) \equiv \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = (i\not{\partial}_x + m) i\Delta_+(x-y). \quad (5.44)$$

Die andere nicht-verschwindende Zweipunkt-Funktionen ist

$$\langle 0 | \bar{\psi}_j(x) \psi_i(y) | 0 \rangle = (i\not{\partial}_x - m)_{ij} i\Delta_+(x-y). \quad (5.45)$$

Dagegen verschwinden die Vakuumerwartungswerte von zwei  $\psi$  oder zwei  $\bar{\psi}$ ,

$$\langle 0|\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle = \langle 0|\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_j(y)|0\rangle = 0. \quad (5.46)$$

Wegen (5.35) ist der Antikommutator zweier Fermionfelder proportional zum Einheitsoperator,

$$\begin{aligned} \{\psi_i(x), \bar{\psi}_j(y)\} &= \langle 0|\{\psi_i(x), \bar{\psi}_j(y)\}|0\rangle \\ &= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} i\Delta_+(x-y) + (i\cancel{\partial}_y - m)_{ij} i\Delta_+(y-x) \\ &= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} i\Delta(x-y) = iS(x-y), \end{aligned} \quad (5.47)$$

wobei die Pauli-Jordansche Kommutatorfunktion  $\Delta(\xi) = \Delta_+(\xi) - \Delta_+(-\xi)$  benutzt wurde. Insbesondere ist

$$\{\psi_i(x), \bar{\psi}_j(y)\} = 0 \quad \text{für} \quad (x-y)^2 < 0. \quad (5.48)$$

Diese ungewohnte Form der *Kausalitätsbedingung* ist physikalisch sinnvoll, sind doch die eichabhängigen  $\psi(x)$  und  $\bar{\psi}(y)$  selbst keine Observablen. Nur eichinvariante gerade Produkte des Diracfeldes kommen als Observable in Betracht. Hätten wir  $\psi$  *bosonisch* quantisiert, so wäre der Antikommutator (5.47) nicht ein Vielfaches von  $\mathbb{1}$  und würde für raumartig getrennte  $x$  und  $y$  auch nicht verschwinden. Der Kommutator

$$[\psi_i(x), \bar{\psi}_j(y)] = (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} i(\Delta_+(x-y) + \Delta_+(y-x))$$

würde dann für raumartig separierte Argumente ebenfalls nicht verschwinden. Die Stabilitäts- und Kausalitäts-Forderungen führen relativ zwangsläufig auf fermionische Antikommutationsregeln für die Fourier-Koeffizienten des Quantenfeldes  $\psi$ .

Das zeitgeordnete Produkt

$$T\psi_i(x)\bar{\psi}_j(y) = \theta(x^0 - y^0)\psi_i(x)\bar{\psi}_j(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}_j(y)\psi_i(x) \quad (5.49)$$

liefert den *Feynman-Propagator* für das Dirac-Feld,

$$\langle 0|T\bar{\psi}_i(x)\psi_j(y)|0\rangle = iS_F(x-y)_{ij}. \quad (5.50)$$

Die Rechnung führt auf

$$iS_F(z) = \theta(z^0)(i\cancel{\partial}_z + m) i\Delta_+(z) + \theta(-z^0)(i\cancel{\partial}_z + m) i\Delta_+(-z)$$

und auf der rechten Seite dürfen wir wegen  $\delta(z^0)(\Delta_+(z) - \Delta_+(-z)) = 0$  die Stufen-

funktion „durch die Ableitung ziehen“. Wir erinnern uns an die Definition des Feynman-Propagators für das skalare Feld,

$$\Delta_F(z) = \theta(z^0)\Delta_+(z) + \theta(-z^0)\Delta_+(-z),$$

und erhalten

$$S_F(z) = (i\rlap{\not{\partial}}_z + m) \Delta_F(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\rlap{\not{p}} + m}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ipz}. \quad (5.51)$$

Die Vakuumerwartungswerte der zeitgeordneten Produkte von  $\bar{\psi}\psi$  sind deshalb

$$\langle 0|T\bar{\psi}_i(x)\psi_j(y)|0\rangle = iS_F(x-y)_{ij}, \quad (5.52)$$

während diejenigen von  $\psi\psi$  und  $\bar{\psi}\bar{\psi}$  verschwinden,

$$\langle 0|T\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle = \langle 0|T\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_j(y)|0\rangle = 0.$$

Schlussendlich betrachten wir noch die kovariant erhaltene Stromdichte

$$j^\mu(x) =: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) :, \quad (5.53)$$

welche auf die erhaltene Ladung

$$Q = \int_{x^0=t} d^3x : \psi^\dagger(x)\psi(x) : \quad (5.54)$$

führt. Die Rechnung ergibt

$$Q = \sum_\sigma \int d\mu(\mathbf{p}) (a_\sigma^\dagger(\mathbf{p})a_\sigma(\mathbf{p}) - b_\sigma^\dagger(\mathbf{p})b_\sigma(\mathbf{p})), \quad (5.55)$$

wobei das Minus von der Normalordnung von  $b_\sigma(\mathbf{p})b_\sigma^\dagger(\mathbf{p})$  herrührt. Offensichtlich erhöhen die  $a^\dagger$  die Ladung um eine Einheit und die  $b^\dagger$  erniedrigen sie um eine Einheit,

$$[Q, a_\sigma^\dagger(\mathbf{p})] = a_\sigma^\dagger(\mathbf{p}) \quad \text{und} \quad [Q, b_\sigma^\dagger(\mathbf{p})] = -b_\sigma^\dagger(\mathbf{p}). \quad (5.56)$$

Damit erzeugt  $a_\sigma^\dagger(\mathbf{p})$  ein Teilchen mit Quantenzahlen  $(\mathbf{p}, \sigma)$  und Ladung +1 (Elektron) und  $b_\sigma^\dagger(\mathbf{p})$  ein Antiteilchen mit Quantenzahlen  $(\mathbf{p}, \sigma)$  der Ladung -1 (Positron). Die Ladung  $Q$  ist erhalten,  $[Q, H] = 0$ , und erzeugt Eichtransformationen

$$e^{i\lambda Q}\psi(x)e^{-i\lambda Q} = e^{-i\lambda}\psi(x). \quad (5.57)$$

# Kapitel 6

## Streumatrix

Die nicht-quadratischen Terme in der Lagrangedichte bedingen eine Wechselwirkung der mit dem Feld assoziierten Teilchen. Dies führt zu Emission, Absorption und Streuung von Teilchen und diese Effekte sollen im Folgenden untersucht werden. Zur Vorbereitung berechnen wir die Teilchenproduktion induziert von einer zeitabhängigen äußeren Quelle.

### 6.1 Teilchenproduktion durch eine klassische Quelle

Wir koppeln das reelle Klein-Gordon Feld an eine äußere klassische Quelle. Die vorgegebene Quelle  $q(x)$  in der Feldgleichung

$$(\square + m^2)\phi(x) = q(x), \quad (6.1)$$

wirke nur während einer endlichen Zeitspanne. Befindet sich das Quantensystem zu frühen Zeiten im Vakuumzustand, dann wird es (im Schrödingerbild) im Allgemeinen nach dem Ein- und wieder Ausschalten der Quelle nicht mehr in diesem Zustand sein. Die folgenden Rechnungen sind im Heisenberg-Bild.

Bevor die Quelle wirken konnte lautet die Lösung der Feldgleichung

$$\phi_{\text{ein}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) (a(\mathbf{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}). \quad (6.2)$$

Bei Anwesenheit der Quelle kann die Lösung zu beliebigen Zeiten mit Hilfe der retardierten Green-Funktion konstruiert werden,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_{\text{ein}}(x) - \int d^4y \Delta_{\text{ret}}(x-y)q(y) \\ &= \phi_{\text{ein}}(x) + \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4y \int d\mu(\mathbf{p}) \theta(x^0 - y^0) (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) q(y). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Nun warten wir, bis die Quelle wieder aus ist. Dann ist  $x^0 > y^0$  im ganzen Integrationsgebiet und die Stufenfunktion kann durch 1 ersetzt werden. Die Lösung enthält die Fourier-Transformierte der äußeren Quelle für Impulse auf dem Vorwärts-Massenhyperboloid,

$$f(\mathbf{p}) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4y e^{ipy} q(y) \Big|_{p^0=E_p(\mathbf{p})}. \quad (6.4)$$

Wir fassen die Anteile mit positiven und negativen Frequenzen in der Lösung (6.3) zusammen und finden

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \{ (a(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})) e^{-ipx} + (a^\dagger(\mathbf{p}) + f^*(\mathbf{p})) e^{ipx} \} \Big|_{p^0=E_p}. \quad (6.5)$$

Also erhält man den Hamilton-Operator im Heisenberg-Bild nach Ausschalten der Quelle aus demjenigen des freien Feldes durch die Ersetzung  $a(\mathbf{p}) \rightarrow a(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})$ ,

$$H = \int d\mu(\mathbf{p}) E_p (a^\dagger(\mathbf{p}) + f^*(\mathbf{p})) (a(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})). \quad (6.6)$$

Die Energie des Quantenfeldes im Grundzustand des freien Feldes  $|0\rangle$  ist dann

$$\langle 0|H|0\rangle = \int d\mu(\mathbf{p}) E_p |f(\mathbf{p})|^2 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{p} |f(\mathbf{p})|^2. \quad (6.7)$$

Nur Fourierkoeffizienten von  $q(x)$  mit Impuls  $p$  auf der Massenschale  $V_m^+$ , also in Resonanz mit den Moden des Quantenfeldes, tragen zum Integral (6.7) bei. Wir interpretieren das Resultat als *Teilchenproduktion* durch die zeitabhängige äußere Quelle  $q(x)$ . Diese führt dem System Energie zu und regt Teilchenzustände an. Die Wahrscheinlichkeit dafür, Zustände im (invarianten) Element  $d\mu(\mathbf{p})$  zu produzieren ist gleich  $|f(\mathbf{p})|^2$ . Die Gesamtzahl der produzierter Teilchen ist

$$N = \int d\mu(\mathbf{p}) |f(\mathbf{p})|^2. \quad (6.8)$$

Der entsprechende Prozess der *Photonenerzeugung* durch ein beschleunigtes Elektron, modelliert durch einen zeitabhängigen äußeren Strom  $j^\mu(x)$ , heißt in der Quantenelektrodynamik *Bremsstrahlung*.

Die allgemeine Lösung (6.3) der inhomogenen Feldgleichung (6.1) ist die Summe aus einer Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir bezeichnen die homogene Lösung mit  $\phi_{\text{ein}}$ . Für ein in Raum und Zeit lokalisierte Quelle  $q(y)$  konvergiert die Lösung  $\phi$  gegen das *einlaufende freie Feld*  $\phi_{\text{ein}}$ .

Ähnlich berührt die Lösung

$$\phi(x) = \phi_{\text{aus}}(x) - \int d^4y \Delta_{\text{av}}(x-y)q(y) \quad \text{mit} \quad \Delta_{\text{av}}(x) = -\theta(-x^0)\Delta(x) \quad (6.9)$$

die freie Lösung  $\phi_{\text{aus}}$  zu sehr späten Zeiten. Wir nennen  $\phi_{\text{aus}}$  das *auslaufende freie Feld*. Für sehr späte Zeiten konvergiert  $\phi$  gegen das *auslaufende freie Feld*  $\phi_{\text{aus}}$ . Mit  $\Delta_{\text{ret}} - \Delta_{\text{av}} = \Delta$  folgt unmittelbar

$$\phi_{\text{aus}}(x) = \phi_{\text{ein}}(x) - \int d^4y \Delta(x-y)q(y). \quad (6.10)$$

Die Pauli-Jordan Funktion vermittelt zwischen der ein- und auslaufenden freien Lösung. Jeder der drei Terme in (6.10) ist eine Lösung der Klein-Gordon Gleichung. Wir fassen die beiden asymptotischen freien Felder als Operatoren in einem *gemeinsamen* Hilbertraum  $\mathcal{H}$  auf. Demzufolge kann  $\mathcal{H}$  auf zwei Weisen als Fock-Raum geschrieben werden, wobei eine unitäre Transformation, der *Streupoperator*  $S$ , zwischen diesen beiden Darstellungen vermittelt. Wir konstruieren nun  $S$  für das betrachtete Modell.

Wir zerlegen die asymptotischen Felder in ihre Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren oder in die positiven und negativen Frequenzanteile,

$$\phi_{\text{ein}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_{\text{ein}}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a_{\text{ein}}^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right) \quad (6.11)$$

$$\phi_{\text{aus}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_{\text{aus}}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a_{\text{aus}}^{\text{aus}\dagger}(\mathbf{p}) e^{ipx} \right) \quad (6.12)$$

und definieren das ein- und aus-Vakuum,

$$a_{\text{ein}}(\mathbf{p})|0\rangle_{\text{ein}} = 0 \quad \text{und} \quad a_{\text{aus}}(\mathbf{p})|0\rangle_{\text{aus}} = 0. \quad (6.13)$$

Darauf aufbauend konstruieren wir die entsprechenden Mehrteilchenzustände,

$$|\mathbf{p}\rangle_{\text{ein}} = a_{\text{ein}}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle_{\text{ein}}, \quad |\mathbf{p}, \mathbf{p}'\rangle_{\text{ein}} = a_{\text{ein}}^\dagger(\mathbf{p})a_{\text{ein}}^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle_{\text{ein}}, \dots, \quad (6.14)$$

und analoge Zustände über dem Vakuum des auslaufenden freien Feldes  $|0\rangle_{\text{aus}}$ . Wir interpretieren sie als  $n$ -Teilchenzustände *vor* bzw. *nach* dem Streuprozess. Wir werden zeigen, dass es einen eindeutigen unitären Operator  $S$  gibt, der das einlaufende und auslaufende freie Feld verbindet,

$$\phi_{\text{aus}} = S^{-1}\phi_{\text{ein}}S \quad \text{und} \quad |0\rangle_{\text{aus}} = S^{-1}|0\rangle_{\text{ein}}. \quad (6.15)$$

Die erste Eigenschaft ist äquivalent zu

$$a_{\text{aus}}(\mathbf{p}) = S^{-1} a_{\text{ein}}(\mathbf{p}) S, \quad a^{\text{aus}\dagger}(\mathbf{p}) = S^{-1} a_{\text{ein}}^{\dagger}(\mathbf{p}) S. \quad (6.16)$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Irreduzibilität der Fock-Darstellung.

Bei einer Konstruktion der Streumatrix  $S$  benutzt man die Fourierdarstellung der homogenen Lösung,

$$\int d^4y \Delta(x-y) q(y) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) (e^{-ipx} f(\mathbf{p}) + e^{ipx} f^*(\mathbf{p})). \quad (6.17)$$

Ein Vergleich mit (6.10) führt auf die *Bogoliubov-Transformation*

$$a_{\text{aus}}(\mathbf{p}) = a_{\text{ein}}(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}) \quad \text{und} \quad a^{\text{aus}\dagger}(\mathbf{p}) = a_{\text{ein}}^{\dagger}(\mathbf{p}) + f^*(\mathbf{p}). \quad (6.18)$$

Wir setzen hier voraus, dass

$$N = \int d\mu(\mathbf{p}) |f(\mathbf{p})|^2 < \infty \quad (6.19)$$

gilt, damit die Funktion  $f(\mathbf{p})$  im Hilbertraum der Einteilchen-Zustände liegt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann sind die beiden mit „ein“ und „aus“ bezeichneten Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen inäquivalent zueinander und es existiert keine unitäre Streumatrix die zwischen den beiden Darstellungen vermittelt.

Wir führen einen unitären Operator

$$S = e^B \quad \text{mit} \quad B + B^{\dagger} = 0 \quad (6.20)$$

ein und machen Gebrauch von der Formel

$$S^{-1} a_{\text{ein}}(\mathbf{p}) S = a_{\text{ein}}(\mathbf{p}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \text{ad}^n(B) a_{\text{ein}}(\mathbf{p}), \quad (6.21)$$

wobei  $\text{ad}(B)$  folgende lineare Abbildung auf dem Raum der linearen Operatoren ist,

$$\text{ad}(B)A \equiv [B, A], \quad \text{so dass} \quad \text{ad}^2(B)A = [B, [B, A]]. \quad (6.22)$$

Der anti-hermitesche Operator  $B$  soll so gewählt werden, dass die Reihe in (6.21) gleich  $f(\mathbf{p})$  ist, damit die rechte Seite in dieser Formel gleich  $a_{\text{aus}}(\mathbf{p})$  in (6.18) ergibt. Wenn wir

$$[B, a_{\text{ein}}(\mathbf{p})] = -f(\mathbf{p})\mathbb{1}$$



fordern, dann bricht die Reihe nach dem ersten Glied ab und wir erhalten das gewünschte Ergebnis. Offensichtlich müssen wir

$$B = a_{\text{ein}}^\dagger(f) - a_{\text{ein}}(f) = -B^\dagger, \quad a_{\text{ein}}^\dagger(f) = \int d\mu(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) a_{\text{ein}}^\dagger(\mathbf{p}) \quad (6.23)$$

wählen, damit gilt

$$S^{-1} a_{\text{ein}}(\mathbf{p}) S = a_{\text{ein}}(\mathbf{p}) - [a_{\text{ein}}^\dagger(f), a_{\text{ein}}(\mathbf{p})] = a_{\text{ein}}(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}) = a_{\text{aus}}(\mathbf{p}). \quad (6.24)$$

Aus den Kommutationsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgt

$$[a_{\text{ein}}(f), a_{\text{ein}}^\dagger(f)] = \int d\mu(\mathbf{p}) |f(\mathbf{p})|^2 \equiv \|f\|^2 \quad (6.25)$$

und deshalb können wir mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel den (inversen) Streuoperator umschreiben,

$$\begin{aligned} S &= e^{a_{\text{ein}}^\dagger(f) - a_{\text{ein}}(f)} = e^{a_{\text{ein}}^\dagger(f)} e^{-a_{\text{ein}}(f)} e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \\ S^{-1} &= e^{a_{\text{ein}}(f) - a_{\text{ein}}^\dagger(f)} = e^{-a_{\text{ein}}^\dagger(f)} e^{a_{\text{ein}}(f)} e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Deshalb sind die beiden Vakua wie folgt verbunden,

$$|0\rangle_{\text{aus}} = S^{-1} |0\rangle_{\text{ein}} = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} e^{-a_{\text{ein}}^\dagger(f)} |0\rangle_{\text{ein}}. \quad (6.27)$$

Also ist der Grundzustand des auslaufenden Feldes ein *kohärenter Zustand* für das einlaufende Feld.

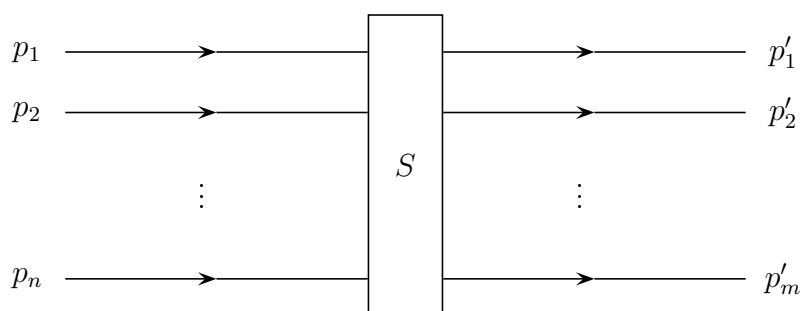
Hier sind einige Bemerkungen angebracht: Einfache Größen wie zum Beispiel die Teilchenzahl tritt in *zwei* Bedeutungen auf: einmal in Bezug auf das einlaufende Feld und einmal in Bezug auf das auslaufende Feld. Dies gilt im Prinzip für jede *Observable* wie zum Beispiel Impuls, Energie oder Ladung. Handelt es sich aber um eine *Erhaltungsgröße*, so fallen die beiden Versionen zusammen.

Ähnlich ist die Situation bei den *Zuständen*. A priori ist nicht klar, was wir meinen, wenn wir von einem Teilchenzustand mit Impuls  $p$  sprechen, da er in zwei Versionen auftritt, als einlaufender oder als auslaufender Zustand. Wir sagen, er ist in Bezug auf das einlaufende oder auslaufende Feld definiert.

Unabhängig vom gewählten Bild gelingt es aber, die Charakterisierung von Observablen und Zuständen allein in Bezug auf das einlaufende Feld vorzunehmen. Nach den Prinzipien der Quantenmechanik sind nur Erwartungswerte entscheidend, und die Vorschrift für ihre Berechnung muss eindeutig sein. Wie sieht dies in den beiden Bildern nun konkreter aus:

- Im Heisenbergbild ist der Zustand vor und nach dem Wechselwirkungsprozess der gleiche. Er kann durch einen Vektor  $|\Phi\rangle$  des Fock-Raumes für das *einlaufende* Feld charakterisiert werden. Ist  $O$  eine Observable in Bezug auf das einlaufende Feld, so gehört dazu die Observable  $S^{-1}OS$  nach dem Wechselwirkungsprozess. Anfänglich war der Erwartungswert  $\langle\Phi|O|\Phi\rangle$  und danach ist er  $\langle\Phi|S^{-1}OS|\Phi\rangle$ .
- Im Schrödingerbild ist eine Observable vor und nach dem Wechselwirkungsprozess die gleiche. Die konkrete Festlegung geschieht in bezug auf das einlaufende Feld. Ist  $|\Phi\rangle$  der Zustand vor dem Prozess und in bezug auf das einlaufende Feld definiert, so ist  $S\Phi$  der Zustand danach. Aus dem anfänglichen Erwartungswert  $\langle\Phi|O|\Phi\rangle$  wird wie im Heisenbergbild  $\langle\Phi|S^{-1}OS|\Phi\rangle$ .

Obwohl beide Bilder zur Beschreibungen eines Quantensystems benutzt werden dürfen, sie sind ja äquivalent, wird das Schrödingerbild bei der Beschreibung von Streuexperimenten bevorzugt. Haben die beteiligten Teilchen feste Impulse, so charakterisiert man ein solches Experiment dann durch das folgende Diagramm



Hier ist  $|p_1 p_2 \dots p_n\rangle^{\text{ein}}$  der *einlaufende* und  $S|p_1 p_2 \dots p_n\rangle^{\text{ein}}$  der *auslaufende Zustand*. Im Experiment wird der auslaufende Zustand nach möglichen Endzuständen  $|p'_1 p'_2 \dots p'_m\rangle$  von  $m$  Teilchen analysiert. Die naheliegende Frage ist diejenige nach der Wahrscheinlichkeit für eine bestimmten Endzustand von  $m$  Teilchen bei einem gegebenen Anfangszustand von  $n$  Teilchen. Im Streuexperiment misst man jedoch nicht direkt diese Wahrscheinlichkeiten, sondern die Zahl der Ereignisse pro Zeit und Stromdichte der einfallenden Teilchen (Wirkungsquerschnitte). Die entscheidende Größe ist dabei die *Übergangsamplitude*

$$\begin{aligned} {}^{\text{aus}}\langle p'_1, \dots, p'_m | p_1, \dots, p_n \rangle^{\text{ein}} &= {}^{\text{aus}}\langle p'_1, \dots, p'_m | S | p_1, \dots, p_n \rangle^{\text{aus}} \\ &= {}^{\text{ein}}\langle p'_1, \dots, p'_m | S | p_1, \dots, p_n \rangle^{\text{ein}} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Wir kehren zu unserem lösbaren System zurück und beantworten die Frage, was die Quelle  $q(x)$  an Teilchen abstrahlt. Wir wollen also annehmen, dass anfänglich keine Teilchen

vorhanden waren. Also berechnen wir

$$\begin{aligned} \text{ein}\langle p'_1, \dots, p'_m | S | 0 \rangle^{\text{ein}} &= \frac{(-1)^m}{m!} e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} \text{ein}\langle p'_1, \dots, p'_m | (a^{\text{ein}\dagger}(f))^m | 0 \rangle^{\text{ein}} \\ &= (-1)^m e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} f(\mathbf{p}'_1) \cdots f(\mathbf{p}'_m), \end{aligned} \quad (6.29)$$

und diese Amplituden beschreiben die *Emission von Teilchen*. Für die *Absorption von  $n$  Teilchen* mit gegebenen Impulsen finden wir die Amplitude

$$\text{aus}\langle 0 | p_1, \dots, p_n \rangle^{\text{ein}} = e^{-\frac{1}{2}\|f\|^2} f^*(\mathbf{p}_1) \cdots f^*(\mathbf{p}_n). \quad (6.30)$$

Schliesslich gibt

$$|\text{aus}\langle 0 | 0 \rangle^{\text{ein}}|^2 = e^{-\|f\|^2} \quad (6.31)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass weder Emission noch Absorption beobachtet wird.

## 6.2 Streuoperator im allgemeinen Fall

Wir betrachten ein wechselwirkenden Skalarfeld  $\phi(x)$  und leiten einen allgemeinen Ausdruck für den Streuoperator ab. Wir setzen die Gültigkeit der kanonischen Vertauschungsrelationen voraus:

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}. \quad (6.32)$$

Motiviert durch unsere Betrachtungen im letzten Abschnitt machen wir im weiteren Vorgehen folgende *drei Annahmen*:

1. Es existieren asymptotische freie Felder  $\phi_{\text{ein}}$  und  $\phi_{\text{aus}}$  und ihre kanonisch konjugierten Impulsfelder  $\pi_{\text{ein}}$  und  $\pi_{\text{aus}}$ . Die freien Felder erfüllen die Vertauschungsrelation (6.32).
2. Es existiert ein gemeinsamer Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , auf dem alle Felder als Operatoren wirken. Die Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen für die wechselwirkenden und asymptotischen Felder sind unitär äquivalent, d.h. zu jeder Zeit  $t$  existiert eine unitärer Operator  $U(t)$  mit

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U^{-1}(t)\phi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x})U(t) \quad (6.33)$$

$$\pi(t, \mathbf{x}) = U^{-1}(t)\pi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x})U(t). \quad (6.34)$$

Es existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = S. \quad (6.35)$$

Der eingeführte *Streuoperator*  $S$  ist unitär. d.h. jeder Operator, der zu einer festen Zeit mit  $\phi_{\text{ein}}$  und  $\pi_{\text{ein}}$  vertauscht, ist ein Vielfaches des Einheitsoperators.

Hier sind einige Bemerkungen angebracht:

1. Die Gültigkeit der kanonischen Vertauschungsrelationen (6.32) für wechselwirkende Felder ist ungeklärt und wurde von führenden Quantenfeldtheoretikern wie A. WIGHTMAN und R. STREATER in Frage gestellt.
2. Für Theorien mit Confinement mag die letzte Annahme zu stark sein. So treten weder Quarks noch Gluonen als asymptotische Zustände der Quantenchromodynamik auf.

Ausgehend von den Heisenberg-Gleichungen für das wechselwirkende Feld

$$i\dot{\phi} = [\phi, H], \quad i\dot{\pi} = [\pi, H] \quad \text{mit} \quad H = H[\pi, \phi] \quad (6.36)$$

und für das einlaufende freie Feld

$$i\dot{\phi}_{\text{ein}} = [\phi_{\text{ein}}, H_0], \quad i\dot{\pi}_{\text{ein}} = [\pi_{\text{ein}}, H_0] \quad \text{mit} \quad H_0 = H_0[\pi_{\text{ein}}, \phi_{\text{ein}}] \quad (6.37)$$

mit den entsprechenden Lösungen

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= e^{iH\Delta t} \phi(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH\Delta t} \\ \phi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x}) &= e^{iH_0\Delta t} \phi_{\text{ein}}(t_0, \mathbf{x}) e^{-iH_0\Delta t}, \end{aligned}$$

wobei  $\Delta t = t - t_0$  die Zeitdifferenz bezeichnet, findet man die folgende Beziehung zwischen dem wechselwirkenden und freien einlaufenden Feld,

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U^\dagger(\Delta t) \phi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x}) U(\Delta t) \quad \text{mit} \quad U(\Delta t) = e^{iH_0\Delta t} e^{-iH\Delta t}.$$

Der Zeitentwicklungsoperator  $U$  erfüllt folgende Schrödingergleichung

$$i\dot{U}(t) = e^{iH_0 t} (H - H_0) e^{-iH t} = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} U(t) \equiv V_I(t) U(t), \quad (6.38)$$

wobei das Potential im Wechselwirkungsbild auftritt,

$$V_I(t) = \int d^3x \mathcal{V}(\phi_{\text{ein}}(x)) \quad \text{mit} \quad \mathcal{V} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_0. \quad (6.39)$$

Hier erscheint das freie Feld  $\phi_{\text{ein}}$ , das zur frühen Zeit  $t_0$  mit  $\phi$  übereinstimmt, als Argument. Die formale Lösung der Schrödingergleichung (6.38) für den Evolutionsoperator im

Wechselwirkungsbild lautet

$$U(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' V_I(t') \right\}. \quad (6.40)$$

Damit  $\phi$  in der asymptotischen Vergangenheit gegen  $\phi_{\text{ein}}$  konvergiert, muss  $t_0$  gegen  $-\infty$  streben. In Einklang mit unseren Annahmen soll der Grenzwert

$$U(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) \quad (6.41)$$

existieren. In der asymptotischen Zukunft konvergiert das Feld dann gegen

$$\phi(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi_{\text{aus}}(x) = S \phi_{\text{ein}}(x) \quad (6.42)$$

mit unitärem *Streuoperator*

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} U(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int d^4x \mathcal{V}(x) \right\}, \quad \mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(\phi_{\text{ein}}(x)), \quad (6.43)$$

wobei im letzten Intergral über alle Raumzeitpunkte im Minkowski-Raum zu integrieren ist. Anstelle von  $\mathcal{V}$  findet man in der Literatur das Symbol  $\mathcal{H}_I$  oder wegen  $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$  auch

$$S = T \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi_{\text{ein}}) \right\}. \quad (6.44)$$

Ohne Wechselwirkung gibt es natürlich keine Streuung,

$$S = \mathbb{1} \quad \text{für} \quad \mathcal{V} = 0. \quad (6.45)$$

### 6.2.1 Eigenschaften der $S$ -Matrix

Wichtige allgemeine Eigenschaften der Streumatrix (des Streuoperators), wie zum Beispiel die Lorentz-Invarianz, die Unitarität und das daraus abgeleitete optische Theorem folgen aus den allgemeinen Prinzipien einer relativistischen Quantenfeldtheorie und sollen hier besprochen werden.

- **Lorentzinvarianz:**

Der Term  $n$ 'ter Ordnung in der Entwicklung

$$S = \mathbb{1} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots \quad (6.46)$$

nach Potenzen des Potentials lautet

$$S^{(n)} = \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n T \mathcal{V}(x_1) \cdots \mathcal{V}(x_n). \quad (6.47)$$

Da  $\mathcal{V}(x)$  ein skalare Feld ist wäre (6.47) ohne Zeitordnung offensichtlich eine lorentz-invariante Größe. Aber hier kommt uns zugute, dass  $\phi_{\text{ein}}$  ein *kausales Feld* ist, und deshalb  $\mathcal{V}$  an raumartig getrennten Punkten kommutiert,

$$[\mathcal{V}(x), \mathcal{V}(y)] = 0 \quad \text{für} \quad (x - y)^2 < 0. \quad (6.48)$$

Andererseits kann eine eigentliche Lorentztransformation die Zeitordnung von zeit- oder lichtartig getrennten Ereignissen nicht umkehren, da eine derartige Transformation den abgeschlossenen Vorwärts- bzw. Rückwärtslichtkegel in sich abbildet. Also ist (6.47) auch mit Zeitordnung lorentz-invariant.

- **Unitarität:**

Der Streuoperator ist der asymptotische Limes des unitären Entwicklungsoperators im Wechselwirkungsbild und sollte deshalb unitär sein,

$$S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}. \quad (6.49)$$

Sind  $|i\rangle$  und  $|j\rangle$  zwei Anfangszustände mit  $|i'\rangle = S|i\rangle$  und  $|j'\rangle = S|j\rangle$ , dann gilt

$$\langle i'|j'\rangle = \langle i|S^\dagger S|j\rangle = \sum_f \langle i|S^\dagger|f\rangle \langle f|S|j\rangle = \sum_f \bar{S}_{fi} S_{fj} = \langle i|j\rangle = \delta_{ij}. \quad (6.50)$$

Diese Identität drückt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit bei einem Streuprozess aus.

- **T-Matrix:**

Um triviale Übergänge  $|i\rangle \rightarrow |i\rangle$ , bei denen nichts geschieht, unberücksichtigt zu lassen definiert man die *Übergangsmatrix*  $T$  durch

$$S = \mathbb{1} + iT. \quad (6.51)$$

Die Unitarität der Streumatrix impliziert

$$\mathbb{1} = (\mathbb{1} - iT^\dagger)(\mathbb{1} + iT) = \mathbb{1} + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T,$$

oder auch

$$\frac{1}{i}(T - T^\dagger) = T^\dagger T. \quad (6.52)$$

Für die diagonalen Matrixelemente der beiden Seiten dieser Operatorgleichung folgt

$$\frac{1}{i}(\langle i|T|i\rangle - \langle i|T^\dagger|i\rangle) = 2\Im(T_{ii}) = \langle i|T^\dagger T|i\rangle = \sum_f \langle i|T^\dagger|f\rangle \langle f|T|i\rangle,$$

oder auch

$$2\Im(T_{ii}) = \sum_f |T_{fi}|^2. \quad (6.53)$$

Diese Identität verbindet die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von  $|i\rangle$  in irgend einen anderen Zustand  $|f\rangle$  mit dem Imaginärteil der Amplitude für den Übergang des Zustandes  $|i\rangle$  in sich selbst. Es ist die Verallgemeinerung des aus der Potentialstreuung oder Optik bekannten *optischen Theorems*, nachdem der totale Streuquerschnitt proportional zum Imaginärteil der Streuamplitude in Vorwärtsrichtung ist. Deshalb bezeichnet man zurecht die Beziehung (6.52) als *Operatorversion des optischen Theorems*. Da die linke Seite dieser Beziehung linear und die rechte Seite quadratisch in der Übergangsmatrix  $T$  ist, verbindet das optische Theorem verschiedene Ordnungen der Störungsreihe miteinander.

### 6.3 Streuamplituden und Wirkungsquerschnitte

Die Streuamplituden sind die Matrixelemente der Übergangsmatrix  $T$ . Speziell erhalten wir die *invariante Amplituden*

$$\langle \{\mathbf{p}_f\} | T | \{\mathbf{p}_i\} \rangle \equiv T_{fi} \equiv (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi} \quad (6.54)$$

wobei  $P_i$  die Summe der 4-er Impulse aller einlaufenden und  $P_f$  aller auslaufenden Teilchen bezeichnet,

$$P_i = \sum p_i \quad \text{und} \quad P_f = \sum p_f, \quad (6.55)$$

und  $\mathcal{M}_{fi}$  das Matrixelement

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \{\mathbf{p}_f\} | \mathcal{M} | \{\mathbf{p}_i\} \rangle. \quad (6.56)$$

Beim Übergang von den  $T$ -Matrix- zu den  $\mathcal{M}$ -Matrixelementen wurde die Erhaltung von Energie und Impuls in jedem Streuprozess berücksichtigt.  $P_i$  ist der gesamte 4-er Impuls im Anfangszustand und  $P_f$  im Endzustand.

In einem Experiment werden aber (differentielle) *Wirkungsquerschnitte* gemessen. Eine wirklich befriedigende Behandlung dieser wichtigen Grösse ist nicht ganz einfach und wird hier auch nicht angestrebt. Wir geben nur die Vorschriften zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten. Für eine ausführlichere Diskussion verweise ich auf die im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher.

Die Einführung des differentiellen Wirkungsquerschnitts setzt einige formale Definitionen voraus: *Übergangswahrscheinlichkeit*, *Übergangsrate*, *differentielle Übergangsrate* und *Stromdichte*.

Die *Übergangswahrscheinlichkeit* von einem Anfangszustand  $|i\rangle$  in einen Endzustand  $|f\rangle$  ist gegeben durch

$$p_{fi} = |T_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) V_4 |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (6.57)$$

Hier erscheint das (unendliche) Volumen  $V_4$  der Raumzeit. Dieser Faktor kommt vom Quadrieren der Delta-Distribution in der Definition (6.54) der  $\mathcal{M}$ -Matrix. Quantisieren wir ein Feld im endlichen Volumen  $V_4$ , zum Beispiel mit periodischen Randbedingungen, dann ist

$$V_4 \delta_P = \int_{V_4} d^4x e^{iPx},$$

wobei  $P$  einer der erlaubten 4-er Impulse im betrachteten Quantisierungsvolumen ist und  $\delta_P$  das Kronecker-Symbol bezeichnet. Strebt  $V_4$  gegen den Minkowski-Raum, dann strebt die rechte Seite gegen  $(2\pi)^4 \delta^4(P)$ . In diesem Sinne ist die Ersetzung

$$(2\pi)^8 \delta(P) \delta(P) = (2\pi)^4 V_4 \delta_P \delta^4(P) = (2\pi)^4 V_4 \delta^4(P)$$

zu verstehen. Der Volumenfaktor verschwindet, wenn wir die *Übergangsrate* berechnen,

$$R_{fi} = |T_{fi}|^2 / V_4 = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (6.58)$$

In einem Streuexperiment ist der Endzustand kein gebundener Zustand. Man sagt, er liegt im Kontinuum und meint damit, dass die Eigenwerte  $P_f$  im kontinuierlichen Spektrum des 4-er Impulsoperators liegen. Deshalb führt man die sogenannte *differentielle Übergangsrate*

$$dR = R_{fi} dN_f = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 dN_f \quad (6.59)$$



ein. Hier ist  $dN_f$  die Anzahl Endzustände in einem Detektorelement und ist gegeben durch das Produkt der Lorentz-invarianten Elemente im Impulsraum der auslaufenden Teilchen,

$$dN_f \equiv \prod_f d\mu(\mathbf{p}_f) = \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{2E_{p_f}}. \quad (6.60)$$

Die im Detektor gemessene Rate hängt noch vom Fluss der einlaufenden Teilchen ab. Deshalb müssen wir noch durch den entsprechenden Flussfaktor dividieren. Für den Übergang von 2 in  $N$  Teilchen ist der Fluss gleich

$$F \equiv \rho_1 \rho_2 v_{12}, \quad (6.61)$$

wobei  $\rho_1, \rho_2$  die Stromdichten der einlaufenden Teilchen und  $v_{12}$  ihre relative Geschwindigkeit bezeichnet. Der Faktor kann folgenermassen bestimmt werden: Für die Einteilchen-Wellenfunktion

$$\phi_{\mathbf{p}}(x) \equiv \langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = e^{-ipx}$$

ist der Wahrscheinlichkeitsstrom  $j^\mu = 2 \operatorname{Im}(\phi_{\mathbf{p}} \partial^\mu \phi_{\mathbf{p}}^*) = 2p^\mu$ , oder in der  $3 + 1$  Zerlegung

$$j^0 = \rho = 2E_{\mathbf{p}} = 2\gamma m, \quad (6.62)$$

wobei  $\gamma$  den relativistischen Faktor bezeichnet. Mit  $\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i/E_i$  finden wir den Flussfaktor

$$F = 2E_1 2E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = 4|E_2 \mathbf{p}_1 - E_1 \mathbf{p}_2|. \quad (6.63)$$

Der interessierende *differentielle Wirkungsquerschnitt* ist nun das Verhältnis von differentieller Übergangsrate und Flussfaktor,

$$d\sigma \equiv \frac{dR}{F}. \quad (6.64)$$

Sammeln wir unsere Resultate, dann ergibt sich der folgende Ausdruck für diese wichtige Grösse

$$d\sigma = \frac{1}{2E_1 2E_2 v_{12}} \left( \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{2E_{p_f}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (6.65)$$

Sind die  $N$  auslaufenden Teilchen ununterscheidbar, dann müssen wir auf der rechten Seite auch noch durch den Faktor  $N!$  dividieren.

# Kapitel 7

## Quantenelektrodynamik

Nachdem wir freie Spin- $\frac{1}{2}$  und Spin-1 Felder untersucht haben, können wir uns nun der quantisierten Elektrodynamik, kurz Quantenelektrodynamik oder QED, zuwenden. Unser Ziel ist ein Verständnis von ausgewählten Streuprozessen in dieser höchst erfolgreichen Theorie. In der betrachteten störungstheoretischen Entwicklung geht man von den ungestörten freien Zuständen aus. Da aber die elektromagnetische Wechselwirkung immer wirkt und sich nicht ausschalten läßt, sind diese Zustände unphysikalisch.

### 7.1 Lagrangedichte

Wir beginnen mit der Lagrangedichte und den Feldgleichungen der Elektrodynamik für wechselwirkende Photonen, Elektronen und Positronen. Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen ergibt sich durch Ersetzen der gewöhnlichen durch die kovariante Ableitung

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (7.1)$$

so dass in Anwesenheit von elektromagnetischen Feldern die Dirac-Gleichung folgendermaßen aussieht:

$$(i\mathcal{D} - m)\psi = 0 \quad , \quad \mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu. \quad (7.2)$$

Die kovariante Ableitung und der Diracoperator  $\mathcal{D}$  transformieren kovariant unter Eichtransformationen

$$\mathcal{D}_{A'} = e^{ie\lambda} \mathcal{D}_A e^{-ie\lambda}, \quad \text{wobei} \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda \quad (7.3)$$

ist. Falls also  $\psi$  die Dirac-Gleichung im Potential  $A$  löst, so löst  $\psi' = e^{ie\lambda}\psi$  die Dirac-Gleichung im eichtransformierten Potential  $A'$ . Offensichtlich ist die lokale Feldtransfor-

mation

$$(A, \psi) \longrightarrow (A', \psi') = (A - d\lambda, e^{ie\lambda}\psi) \quad (7.4)$$

die Eichsymmetrie der Dirac-Gleichung. Der zugehörige erhaltener Noetherstrom ist die elektrische Stromdichte der Elektronen und Positronen

$$j^\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (7.5)$$

Der Kommutator zweier kovarianter Ableitungen ist proportional zum Feldstärketensor,

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \quad (7.6)$$

Die eichinvariante Lagrangedichte der wechselwirkenden Felder gewinnt man aus derjenigen für die freien Felder

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\cancel{D} - m)\psi(x) \quad (7.7)$$

ebenfalls durch die minimale Kopplung  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ , und hat deshalb hat die Form

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_1(x) = -A_\mu(x)j^\mu(x). \quad (7.8)$$

Sie hat also die im Abschnitt 2.1.3 über klassische Felder diskutierte Form (2.62). Das Hamiltonsche Wirkungsprinzip für die lorentzinvariante Wirkung  $S_{\text{QED}} = \int \mathcal{L}_{\text{QED}}$  führt auf die Diracgleichung

$$(i\cancel{D} - m)\psi = 0 \quad (7.9)$$

und die inhomogene Maxwellgleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{mit} \quad j^\nu = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \quad (7.10)$$

Wie im Abschnitt 2.1.3 bereits diskutiert, ist die Elektrodynamik aufgrund der Eichinvarianz ein singuläres System – der zu  $A_0$  konjugierte Impuls verschwindet. Für dieses System mit Zwangsbedingungen werden wir eine Eichbedingung auferlegen müssen. Eine beliebige Eichung ist die kovariante Lorenzeichung. Hier ist die relativistische Kovarianz in jedem Schritt gewährleistet. Wir arbeiten aber zunächst in der Coulomb-Eichung. Diese ist nicht manifest kovariant, führt aber relativ schnell zu interessanten Resultaten.

## 7.2 QED in der Coulombeichung

Durch Wahl einer geeigneten Eichfunktion  $\lambda$  in (7.4) kann man immer die transversale Eichung erreichen,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \lambda \stackrel{!}{=} 0. \quad (7.11)$$

Im Gegensatz zum freien Fall kann man aber nicht simultan  $A_0 = 0$  fordern. Aber  $A_0$  wird zu einer abhängigen Variablen, die über die Feldgleichungen eliminiert werden kann. Das Gauß-Gesetz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \text{mit} \quad \rho = e\psi^\dagger\psi, \quad \mathbf{E} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.12)$$

impliziert in der transversalen Eichung

$$\Delta A_0 = -\rho \quad (7.13)$$

Die Lösung dieser Poissongleichung kennen wir aus der Elektrostatik

$$A_0(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(t, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y, \quad (7.14)$$

also wird  $A_0$  ein Funktional von  $\rho = e\psi^\dagger\psi$ . Wir zerlegen das elektrische Feld in einen transversalen und longitudinalen Anteil

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0 \equiv \mathbf{E}_{tr} + \mathbf{E}_l. \quad (7.15)$$

Allgemein nennt man ein Gradientenfeld *longitudinal* und ein quellenfreies nennt man *transversal*. Transversale und longitudinale Felder sind senkrecht in  $L_2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3$ ,

$$\int d^3x \mathbf{V}_{tr} \cdot \mathbf{V}_l = \int d^3x \mathbf{V}_{tr} \cdot \nabla \varphi = - \int d^3x (\nabla \cdot \mathbf{V}_{tr}) \varphi = 0$$

und entsprechend kann die Lagrangedichte für das Photonenfeld durch

$$\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{tr}^2 + \mathbf{E}_l^2 - \mathbf{B}^2) \quad (7.16)$$

ersetzt werden. Da der Diracterm keine Zeitableitungen des Potentials enthält, sind die zu den Potentialen  $A_0$  und  $\mathbf{A}$  konjugierten Impulsfelder  $\pi^0 = 0$  und  $\pi^i = E_i$ . Das zu  $\psi$  konjugierte Impulsfeld ist genauso wie in der freien Diractheorie proportional zum

adjungierten Feld,  $\pi_\psi = i\psi^\dagger$ . Deshalb ergibt sich die Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{A}^i + \pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L} = -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{A}} + i\psi^\dagger \dot{\psi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{int} \quad (7.17)$$

Führt man die aus der Diractheorie bekannten Matrizen  $\beta = \gamma^0$  und  $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$  ein und setzt  $\alpha^i \partial_i = \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla$ , dann schreiben sich die drei Beiträge zur Hamiltondichte wie folgt,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\gamma &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_{tr}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \\ \mathcal{H}_e &= \psi^\dagger (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi \\ \mathcal{H}_{int} &= j^\mu A_\mu - \frac{1}{2} \mathbf{E}_l^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Es sind die Dichten für das Photonfeld in der Coulombbeichung, für das Diracfeld und der Wechselwirkungsterm. Die zum Wechselwirkungsterm gehörige Energie kann mit Hilfe von  $\nabla \cdot \mathbf{E}_l = \rho$  noch umgeformt werden. Wir beachten

$$\int d^3x \rho A^0 = \int (\nabla \cdot \mathbf{E}_l) A^0 = - \int \mathbf{E}_l \cdot \nabla A^0 = \int \mathbf{E}_l^2 \equiv 2H_{coul},$$

und deshalb ist

$$H_{int} = H_{coul} - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad H_{coul} = \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{\rho(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3x d^3y. \quad (7.19)$$

Das longitudinale Feld  $\mathbf{E}_l$  oder letztlich das Potential  $A_0$  bestimmt die instantane Coulomb-Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen. Da  $\mathbf{A}$  in  $H_{int}$  transversal ist, ist in der Form (7.19) das longitudinale Feld vollständig eliminiert zugunsten der instantanen Coulomb-Wechselwirkung.

Quantisiert wird durch Übergang zu Feldoperatoren und durch Weglassen der Nullpunktsenergien. Letzteres kann mit Hilfe des Normalproduktes von  $H$  erreicht werden,

$$H = \int : \mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{int} : d^3x. \quad (7.20)$$

Die auftretenden Divergenzen bei der Berechnung von beobachtbaren Größen können durch eine Redefinition der Masse, Ladung und Felder absorbiert werden.

## 7.3 Streuung am äußeren Potential

Wir betrachten zunächst die Streuung eines Elektrons an einem äußeren elektrostatischen Potential ( $A^0, \mathbf{A} = 0$ ), welches durch das Elektron nicht beeinflusst wird. Das Elektron

wird als Probeteilchen im gegebenen klassischen Feld betrachtet. Seine Rückwirkung auf das Potential wird vernachlässigt.

Nach den Überlegungen von Abschnitt 7.2 ist die Hamiltondichte gegeben durch

$$H_{int} = \int \rho A_{ext}^0 d^3x, \quad (7.21)$$

wobei  $\rho = e : \psi_{ein}^\dagger \psi_{ein} :$  die gestreuten Teilchen beschreibt. Wir benutzen, dass im Wechselwirkungsbild das freie einlaufende Feld in  $H_{int}$  auftritt. Im Gegensatz zu (7.19) tritt hier kein Faktor 1/2 auf, weil es sich um Streuung an einem *äußeren Feld* handelt und nur der Term  $j_\mu A_{ext}^\mu$  einen veränderlichen Beitrag zur Energiedichte liefert. Die S-Matrixelemente für den Übergang vom Anfangszustand  $|i\rangle$  in den Endzustand  $|f\rangle \neq |i\rangle$  ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f | T \exp \left\{ -ie \int d^4x : \psi_{ein}^\dagger(x) \psi_{ein}(x) : A_{ext}^0(x) \right\} | i \rangle \\ &= -ie \langle f | \int d^4x : \psi_{ein}^\dagger(x) \psi_{ein}(x) : A_{ext}^0(x) | i \rangle + O(e^2) \end{aligned} \quad (7.22)$$

Dabei sind die Anfangs- und Endzustand Einelektronenzustände mit festen Impulsen und Helizitäten,

$$|i\rangle = a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle \quad \text{und} \quad |f\rangle = a_{\sigma'}^\dagger(p')|0\rangle. \quad (7.23)$$

Das in erster Ordnung Störungstheorie auftretende Matrixelement lautet damit

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int d^4x \langle 0 | a_{\sigma'}(p') : \psi_{ein}^\dagger(x) \psi_{ein}(x) : a_\sigma^\dagger(p) | 0 \rangle A_{ext}^0(x).$$

Zur Berechnung der auftretenden Vakuumamplitude setzen wir die Modenentwicklung für das einlaufende Feld ein. Wir unterdrücken dabei den Index „ein“ an den Operatoren. Es lohnt sich hier, das Diracfeld in seinen positiven und negativen Energieanteil zu zerlegen,

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^+ + \psi^- \quad \text{mit} \quad \psi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_\sigma u(p, \sigma) a_\sigma(p) e^{-ipx} \\ \psi^-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_\sigma v(p, \sigma) b_\sigma^\dagger(p) e^{ipx}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Der Teil  $\psi^+$  enthält nur Vernichtungsoperatoren und  $\psi^-$  nur Erzeugungsoperatoren. Wir erinnern uns an die Antikommutationsregeln (5.35, 5.36) für die Koeffizienten des einlaufenden Feldes und daran, dass das Vakuum von den  $a$  und  $b$  annihiliert wird. Daraus folgt

unmittelbar

$$\begin{aligned} \langle 0|a_{\sigma'}(p'):\psi^\dagger(x)\psi(x):a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle &= \langle 0|a_{\sigma'}(p'):\psi^{+\dagger}(x)\psi^+(x):a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle \\ &+ \langle 0|a_{\sigma'}(p'):\psi^{-\dagger}(x)\psi^-(x):a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{q}')d\mu(\mathbf{q}) \sum_{\rho',\rho} u^\dagger(q',\rho')u(q,\rho)e^{i(q'-q)x} \langle 0|a_{\sigma'}(p')a_{\rho'}^\dagger(q')a_\rho(q)a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle$$

Wegen  $a_\rho(q)|0\rangle = 0$  dürfen wir die beiden letzten Operatoren im Vakuum-Erwartungswert durch ihren Antikommutator ersetzen. Dasselbe gilt dann auch für die beiden ersten Operatoren und wir erhalten

$$\langle 0|a_{\sigma'}(p')a_{\rho'}^\dagger(q')a_\rho(q)a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle = 2E_p 2E_{p'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \delta_{\sigma\rho} \delta_{\sigma'\rho'}$$

Die Integrationen und Summationen können leicht ausgeführt werden und der erste Term auf der rechten Seite von (7.25) lautet

$$\frac{1}{(2\pi)^3} e^{i(p'-p)x} u^\dagger(p',\sigma')u(p,\sigma) \quad (7.26)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite in (7.25) verschwindet,

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{q}')d\mu(\mathbf{q}) \sum_{\rho',\rho} v^\dagger(q',\rho')v(q,\rho)e^{i(q-q')x} \langle 0|a_{\sigma'}(p'):b_{\rho'}(q')b_\rho^\dagger(q):a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle = 0,$$

da wegen der Normalordnung  $b_{\rho'}(q')$  direkt auf das Vakuum wirkt. Damit finden wir das Matrixelement

$$S_{fi}^{(1)} = -\frac{ie}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{i(p'-p)x} A_{ext}^0(x) u^\dagger(p',\sigma')u(p,\sigma). \quad (7.27)$$

In erster Ordnung Störungstheorie werden die S-Matrixelemente durch die Fouriertransformierte des äußeren Potentials bestimmt. Wählen wir die Streuung am Kern mit Coulombpotential

$$A_{ext}^0(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{Ze}{|\mathbf{x}|}, \quad (7.28)$$

dann erhält man

$$\int d^4x A_{ext}^0(x) e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})x} = -\frac{Ze}{2} \delta(E - E') \int \frac{e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}')x}}{|\mathbf{x}|} = -2\pi \delta(E' - E) \frac{Ze}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2},$$

und entsprechend das S-Matrixelement

$$S_{fi} = \frac{ie}{(2\pi)^2} \delta(E' - E) \frac{Ze}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2} u^\dagger(\mathbf{p}', \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma). \quad (7.29)$$

Die  $\delta$ -Distribution besagt, daß das gestreute Elektron die gleiche Energie wie das einlaufende Elektron haben muß, da das statische Potential weder Energie aufnehmen noch abgeben kann.

Die *Übergangsrate* ist gegeben durch  $|S_{fi}|^2$ , dividiert durch die Dauer der Wechselwirkung. Diese kann man über folgende Betrachtung einführen,

$$\delta(E' - E) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E - E')t} dt \xrightarrow{E \rightarrow E'} \frac{T}{2\pi}. \quad (7.30)$$

Also nehmen wir beim quadrieren der Amplitude folgende Ersetzung vor,

$$|\delta(E' - E)|^2 \longrightarrow \frac{T}{2\pi} \delta(E' - E) \quad (7.31)$$

und finden die Übergangsrate

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{4Z^2 \alpha^2}{(2\pi)^3} \frac{|u^\dagger(\mathbf{p}', \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma)|^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4} \delta(E' - E) \quad (7.32)$$

Den Wirkungsquerschnitt für die Streuung erhält man durch Multiplikation mit dem Phasenraumelement  $d\mu(\mathbf{p}')$  der Endzustände und Division durch den einfallenden Fluß  $(2\pi)^{-3} |\mathbf{p}|/E$ . Dann erhalten wir für die Übergangswahrscheinlichkeit in die Endzustände in das Impulsintervall  $d\mathbf{p}'$  um  $\mathbf{p}'$  den Ausdruck

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2 (2\pi)^3 E}{T |\mathbf{p}|} d\mu(\mathbf{p}') = 4Z^2 \alpha^2 \frac{|u^\dagger(\mathbf{p}', \sigma') u(\mathbf{p}, \sigma)|^2 E}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4 |\mathbf{p}|} d\mu(\mathbf{p}') \delta(E' - E). \quad (7.33)$$

Den differentiellen Wirkungsquerschnitt bezüglich des Raumwinkels  $\Omega$  des gestreuten Elektrons erhält man nach Integration über  $|\mathbf{p}'|$ . Mit

$$d\mu(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} |\mathbf{p}| dE d\Omega \quad (7.34)$$



ergibt die Integration über  $|\mathbf{p}'|$  als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2Z^2\alpha^2 E \frac{|u^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')u(\mathbf{p}, \sigma)|^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4} \Big|_{E'=E} \quad (7.35)$$

Wir wollen annehmen, daß das einlaufende Elektron unpolarisiert ist und daß wir die Polarisation der gestreuten Teilchen nicht beobachten. Dann müssen wir über die Polarisationsrichtungen der einlaufenden Elektronen mitteln und über die Polarisationsrichtungen im Endzustand summieren.

Wir sehen uns die Mittelung bzw. Summation über die Spinfreiheitsgrade an. Mit Hilfe von (5.27) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} |u^\dagger(\mathbf{p}', \sigma')u(\mathbf{p}, \sigma)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\gamma^0 u(\mathbf{p}, \sigma)\bar{u}(\mathbf{p}, \sigma)\gamma^0 u(\mathbf{p}', \sigma') \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma'} \bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\gamma^0(\not{\mathbf{p}} + m)\gamma^0 u(\mathbf{p}', \sigma') \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} (u(\mathbf{p}', \sigma')\bar{u}(\mathbf{p}', \sigma')\gamma^0(\not{\mathbf{p}} + m)\gamma^0) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} (\not{\mathbf{p}}' + m)\gamma^0(\not{\mathbf{p}} + m)\gamma^0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Hier treten erstmalig Spuren von Produkten von Gamma-Matrizen auf. Bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsraten in der QED stößt man immer auf derartige Spuren. Inzwischen gibt es Computerprogramme, die uns die Arbeit abnehmen. Trotzdem sollte man die Spuren der einfachen Produkte von Gamma-Matrizen kennen. Hier einige ausgewählte Resultate:

$$\text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (7.37)$$

$$\text{tr} (\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0 \quad \text{für ungerade } n \quad (7.38)$$

$$\text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}) \quad (7.39)$$

Die erste Beziehung folgt aus der definierenden Relation der Cliffordalgebra. Zum Beweis der zweiten Identität benutzen wir die mit allen  $\gamma^\mu$  antikommutierende hermitesche Matrix  $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . Wegen der Zyklizität der Spur und mit  $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$  folgt

$$\text{tr} (\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = \text{tr} (\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \gamma^{\mu_2} \dots \gamma_5 \gamma^{\mu_n} \gamma_5) = (-1)^n \text{tr} (\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}).$$

Also verschwindet die Spur für ungerade  $n$ . Zum Beweis der letzten Identität formen wir  $\text{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$  um, indem wir  $\gamma^\mu$  zyklisch nach rechts vertauschen und dann mit Hilfe der

Antivertauschungsrelationen durch die anderen  $\gamma$ -Matrizen „durchziehen“,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta &= \mathrm{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 2g^{\beta\mu} \mathrm{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha - \mathrm{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \\ &= 2g^{\beta\mu} \mathrm{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha - 2g^{\alpha\mu} \mathrm{tr} \gamma^\nu \gamma^\beta + \mathrm{tr} \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \\ &= 2g^{\beta\mu} \mathrm{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha - 2g^{\alpha\mu} \mathrm{tr} \gamma^\nu \gamma^\beta + 2g^{\nu\mu} \mathrm{tr} \gamma^\alpha \gamma^\beta - \mathrm{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta.\end{aligned}$$

Diese Identität lösen wir nach  $\mathrm{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$  und berechnen die Spuren der Produkte von zwei  $\gamma$ -Matrizen mit Hilfe von (7.37). Es ergibt sich die Formel (7.39). Nun berechnen wir die Spur in (7.36). Es ist

$$\mathrm{tr} (\not{p}' \gamma^0 \not{p} \gamma^0) = p'_\mu p_\nu \mathrm{tr} \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 = 8EE' - 4pp' \quad (7.40)$$

und damit folgt, wenn wir noch die Energieerhaltung ausnutzen,

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} |u^\dagger(p', \sigma') u(p, \sigma)|^2 = 4E^2 - 2pp' + 2m^2 = 2(E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2). \quad (7.41)$$

Wir führen den Streuwinkel ein,

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}'| |\mathbf{p}|}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi. \quad (7.42)$$

Damit vereinfacht sich die Spinsumme zu

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} |u^\dagger(p', \sigma') u(p, \sigma)|^2 = 2(2m^2 + \mathbf{p}^2(1 + \cos \vartheta)) = 4 \left( m^2 + \mathbf{p}^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (7.43)$$

Mit Hilfe von  $|\mathbf{p}|/E = \beta$  und  $E = \gamma m$  kann der Klammerausdruck vereinfacht werden,

$$m^2 + \mathbf{p}^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = E^2 \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

Beachten wir noch, daß

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = 2\mathbf{p}^2 - 2\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} = 2\mathbf{p}^2(1 - \cos \vartheta) = 4\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (7.44)$$

dann vereinfacht sich die Formel für den Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte Streuung,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{unpol}} = \frac{Z^2 \alpha^2}{2} \frac{E^3}{|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \vartheta/2} \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \quad \left( \frac{E^2}{4} \text{ statt } \frac{E^3}{2} \right) \quad (7.45)$$

Die ist die *Mottsche Streuformel*. Im nichtrelativistischen Grenzfall sind die Impulse klein

gegenüber der Ruhemasse des Elektrons und die Mottsche Streuformel geht in die Rutherford'sche Formel über.

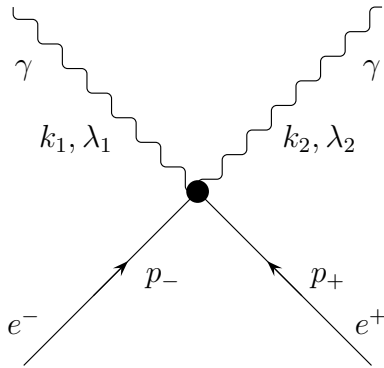
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{unpol}} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{E_{\text{kin}}^2} \frac{1}{16 \sin^4 \vartheta/2}, \quad E_{\text{kin}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (|\mathbf{p}| \ll m). \quad (7.46)$$

Im extrem relativistischen Grenzfall ergibt sich dagegen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{\text{unpol}} = \left(\frac{Ze^2}{4\pi}\right)^2 \frac{\cos^2 \vartheta/2}{4\mathbf{p}^2 \sin^4 \vartheta/2}, \quad (|\mathbf{p}| \gg m). \quad (7.47)$$

## 7.4 Paarvernichtung

Die Paarvernichtung (Annihilation) von Materie mit Antimaterie führt auf eindruckliche Weise die Äquivalenz von Masse und Energie vor. Die Elektron-Positron Paarvernichtung wurde bereits 1928 von P. Dirac im Rahmen seiner Löchertheorie berechnet. Hier geben wir eine systematische feldtheoretische Ableitung des zugehörigen Wirkungsquerschnitts<sup>1</sup>



Die Impulse und Polarisationen der am Prozess beteiligten Teilchen sind in der nebenstehenden Abbildung angedeutet. Die Anfangs- und Endzustände sind

$$\begin{aligned} |e^-e^+\rangle &= a_{\sigma_1}^\dagger(p_1)b_{\sigma_2}^\dagger(p_2)|0\rangle \\ |\gamma\gamma\rangle &= a_{\lambda_1}^\dagger(k_1)a_{\lambda_2}^\dagger(k_2)|0\rangle \end{aligned}$$

In führende Ordnung der Störungstheorie trägt nur der zweite

Term in der Wechselwirkung  $H_{int}$  in (6.46) bei und

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 \int_{x_1^0 > x_2^0} d^4x_1 d^4x_2 \langle j^i(x_1)j^j(x_2)|e^-e^+\rangle \langle \gamma\gamma|A^i(x_1)A^j(x_2)|0\rangle. \quad (7.48)$$

mit  $j^i = :\bar{\psi}\gamma^i\psi:$ . Das Photonmatrixelement ist nach Einsetzen von

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{k}) \left( a_{\lambda}(\mathbf{k})\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)e^{-ikx} + a_{\lambda}^\dagger(\mathbf{k})\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)e^{ikx} \right) \quad (7.49)$$

<sup>1</sup>Wir folgen N. Straumann, [5].

schnell berechnet. Dazu bestimmen wir in

$$\begin{aligned}\langle \gamma\gamma | A^i(x_1)A^j(x_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{q})d\mu(\mathbf{q}') \langle 0 | \dots | 0 \rangle \epsilon^i(\mathbf{q}, \lambda) \epsilon^j(\mathbf{q}', \lambda') e^{iqx_1 + iq'x_2} \\ \langle 0 | \dots | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) a_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) a_{\lambda}^\dagger(\mathbf{q}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{q}') | 0 \rangle\end{aligned}$$

das Matrixelement des Produkts der  $a$  und  $a^\dagger$ ,

$$\begin{aligned}\langle 0 | \dots | 0 \rangle &= 2\omega_{k_1} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \langle 0 | a_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2)(\mathbf{q}) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{q}') | 0 \rangle \delta_{\lambda_1, \lambda} \\ &\quad + \langle 0 | a_{\lambda_2}(\mathbf{k}_2) a_{\lambda}^\dagger(\mathbf{q}) a_{\lambda_1}(\mathbf{k}_1) a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{q}') | 0 \rangle \\ &= 2\omega_{k_1} 2\omega_{k_2} \{ \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}') \lambda_{\lambda_1, \lambda} \delta_{\lambda_2, \lambda'} + (1 \leftrightarrow 2) \}\end{aligned}$$

Die Integration über die Impulse ergibt für den photonischen Faktor

$$\langle \gamma\gamma | A^i(x_1)A^j(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \{ e^i(\mathbf{k}_1, \lambda_1) e^{ik_1x_1} e^j(\mathbf{k}_2, \lambda_2) e^{ik_2x_2} + (1 \leftrightarrow 2) \}. \quad (7.50)$$

Setzt man  $e^\mu := (0, \boldsymbol{\epsilon})$  für beide Photonen, dann findet man

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^3} \int_{x_1^0 > x_2^0} d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) :: \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) | e^- e^+ \rangle \\ &\quad \times \{ e_\mu(\mathbf{k}_1, \lambda_1) e^{ik_1x_1} e_\nu(\mathbf{k}_2, \lambda_2) e^{ik_2x_2} + (1 \leftrightarrow 2) \}\end{aligned} \quad (7.51)$$

Nun bestimmen wir das verbleibende Matrixelement des Produkts von fermionischen Operatoren. Wie bei der Streuung im äußeren Potential zerlegen wir das Elektron-Positron Feld in seine positiven und negativen Frequenzanteile,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu \sum_{\sigma} (u(p, \sigma) a_{\sigma}(p) e^{-ipx} + v(p, \sigma) b_{\sigma}^\dagger(p) e^{ipx}) = \psi^+(x) + \psi^-(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu \sum_{\sigma} (\bar{v}(p, \sigma) b_{\sigma}(p) e^{-ipx} + \bar{u}(p, \sigma) a_{\sigma}^\dagger(p) e^{ipx}) = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x)\end{aligned} \quad (7.52)$$

Im Teilchenbild wirken sie wie folgt:

$$\begin{aligned}\psi^+ &\text{ vernichtet Elektronen,} \\ \psi^- &\text{ erzeugt Positronen,} \\ \bar{\psi}^+ &\text{ vernichtet Positronen} \\ \bar{\psi}^- &\text{ erzeugt Elektronen.}\end{aligned}$$

Nach der Normalordnung stehen die positiven Frequenzanteile mit den Vernichtungsoperatoren rechts,

$$\begin{aligned} :\bar{\psi}\gamma^\mu\psi: &= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\bar{\psi}_\alpha^+\psi_\beta^+ + \bar{\psi}_\alpha^-\psi_\beta^+ + \bar{\psi}_\alpha^+\psi_\beta^- + \bar{\psi}_\alpha^-\psi_\beta^-) \\ &= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\bar{\psi}_\alpha^+\psi_\beta^+ + \bar{\psi}_\alpha^-\psi_\beta^+ - \psi_\beta^-\bar{\psi}_\alpha^+ + \bar{\psi}_\alpha^-\psi_\beta^-) \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Zustand  $|\Phi\rangle$  gilt

$$\langle 0|:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi:|\Phi\rangle = \langle 0|\bar{\psi}^+\gamma^\mu\psi^+|\Phi\rangle, \quad (7.53)$$

und damit die rechte Seite nicht verschwindet, muss  $\Phi$  ein Elektron-Positron Zustand sein. Deshalb tragen im Matrixelement in (7.51) nur zwei Terme bei,

$$\begin{aligned} &\langle 0|:\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)::\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2):|e^-e^+\rangle \\ &= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\beta^+(x_1)\bar{\psi}_\gamma^-(x_2)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle \\ &\quad - (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\beta^+(x_1)\psi_\delta^-(x_2)\bar{\psi}_\gamma^+(x_2)|e^-e^+\rangle \end{aligned} \quad (7.54)$$

Wir betrachten zuerst das erste Matrixelement auf der rechten Seite. Wir bringen  $\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)$  rechts von  $\bar{\psi}_\gamma^-(x_2)$ . Dabei treten weder Vorzeichenwechsel noch zusätzliche Terme auf, da die Komponenten von  $\bar{\psi}^+$  nur mit denjenigen von  $\psi^-$  nicht antikommutieren. Der erste Term in (7.54) wird somit

$$\begin{aligned} &(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\psi_\beta^+(x_1)\bar{\psi}_\gamma^-(x_2)\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle \\ &= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\psi_\beta^+(x_1)\bar{\psi}_\gamma^-(x_2)|0\rangle\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Im zweiten Term in (7.54) vertauschen wir

$$\mu \leftrightarrow \nu, \quad (\alpha, \beta) \leftrightarrow (\gamma, \delta), \quad x_1 \leftrightarrow x_2.$$

Der Photonenfaktor in (7.51) bleibt dabei invariant aber in (7.51) müssen wir nun über das Gebiet  $x_2^0 > x_1^0$  integrieren. Nach den Vertauschungen bringen wir den zweiten Operator an die letzte Stelle. Dabei ändert das Vorzeichen nicht, und der zweite Term in (7.54) lautet

$$\begin{aligned} &(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\bar{\psi}_\gamma^+(x_2)\psi_\beta^-(x_1)\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle \\ &= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\bar{\psi}_\gamma^+(x_2)\psi_\beta^-(x_1)|0\rangle\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Das letzten Matrixelemente in (7.55) und (7.56) sind gleich und mit Hilfe von (7.52) problemlos zu berechnen. Das Elektron habe Quantenzahlen  $(p_1, \sigma_1)$  und das Positron die

Quantenzahlen  $(p_2, \sigma_2)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{p})d\mu(\mathbf{p}')\bar{v}_\alpha(p, \sigma)u_\delta(p', \sigma')e^{-ipx_1-ip'x_2}\langle 0|\dots|0\rangle \\ \langle 0|\dots|0\rangle &= \langle 0|b_\sigma(p)a_{\sigma'}(p')a_{\sigma_1}^\dagger(p_1)b_{\sigma_2}^\dagger(p_2)|0\rangle \\ &= 2\omega_{p_1}2\omega_{p_2}\delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}')\delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p})\delta_{\sigma',\sigma_1}\delta_{\sigma,\sigma_2}\end{aligned}$$

und deshalb gilt

$$\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\bar{v}_\alpha(p_2, \sigma_2)u_\delta(p_1, \sigma_1)e^{-ip_2x_1-ip_1x_2}. \quad (7.57)$$

In den Vakuumerwartungswerten in den rechten Seiten von (7.55) und (7.56) können wir die Indizes  $(\pm)$  wieder weglassen,

$$\begin{aligned}\langle 0|\psi_\beta^+(x_1)\bar{\psi}_\gamma^-(x_2)|0\rangle &= \langle 0|\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)|0\rangle \\ \langle 0|\bar{\psi}_\gamma^+(x_1)\psi_\beta^-(x_1)|0\rangle &= \langle 0|\bar{\psi}_\gamma(x_2)\psi_\beta(x_1)|0\rangle\end{aligned} \quad (7.58)$$

Nun können wir (7.58,7.57) in (7.55,7.56) einsetzen. Dies führt zu folgender Darstellung von (7.51)

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^6} \int d^4x_1d^4x_2\{e_\mu(\mathbf{k}_1, \lambda_1)e^{ik_1x_1}e_\nu(\mathbf{k}_2, \lambda_2)e^{ik_2x_2} + (1 \leftrightarrow 2)\} \\ &\quad \times \bar{v}_\alpha(p_2, \sigma_2)e^{-ip_2x_1}\gamma_{\alpha\beta}^\mu \left[ \langle 0|\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)|0\rangle\theta(x_1^0 - x_2^0) \right. \\ &\quad \left. - \langle 0|\bar{\psi}_\gamma(x_2)\psi_\beta(x_1)|0\rangle\theta(x_2^0 - x_1^0) \right] e^{-ip_1x_2}\gamma_{\gamma\delta}^\nu u_\delta(p_1, \sigma_1).\end{aligned} \quad (7.59)$$

Zwischen den eckigen Klammern steht der Feynman-Propagator  $iS_F(x_1 - x_2)_{\beta\gamma}$ , so dass

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^6} \int d^4x_1d^4x_2\{e_\mu(\mathbf{k}_1, \lambda_1)e^{ik_1x_1}e_\nu(\mathbf{k}_2, \lambda_2)e^{ik_2x_2} + (1 \leftrightarrow 2)\} \\ &\quad \times \bar{v}(p_2, \sigma_2)\gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2)\gamma^\nu u(p_1, \sigma_1)e^{-ip_2x_1-ip_1x_2}\end{aligned} \quad (7.60)$$

Setzen wir die Fourierdarstellung des Feynman-Propagators ein, dann können die Integrationen über  $x_1$  und  $x_2$  ausgeführt werden,

$$\begin{aligned}&\int d^4x_1d^4x_2e^{ix_1(k_1-p_2)+ix_2(k_2-p_1)}S_F(x_1 - x_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x_1d^4x_2d^4p e^{ix_1(k_1-p_2-p)+ix_2(k_2-p_1+p)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (2\pi)^8 \delta^4(k_1 - p_2 - p) \delta^4(k_2 - p_1 + p) \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \frac{\not{k}_1 - \not{p}_2 + m}{(k_1 - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon}
\end{aligned}$$

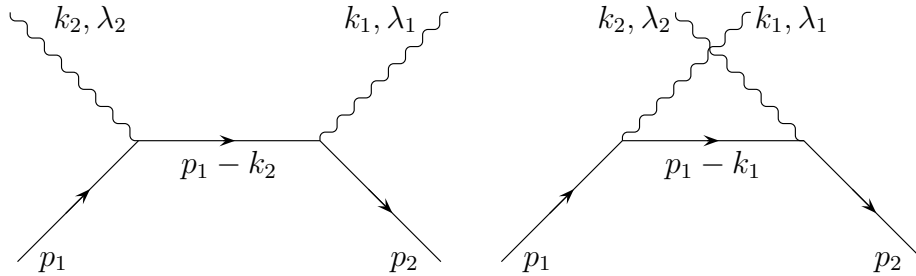
Eingesetzt in (7.60) ergibt sich

$$S_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) T_{fi} \quad (7.61)$$







mit dem  $T$ -Matrixelement

$$\begin{aligned}
T_{fi} = \frac{e^2}{(2\pi)^6} \bar{v}(p_2, \sigma_2) &\left\{ \not{\epsilon}(k_1, \lambda_1) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}(k_2, \lambda_2) \right. \\
&\left. + \not{\epsilon}(k_2, \lambda_2) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 + m}{(p_1 - k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}(k_1, \lambda_1) \right\} u(p_1, \sigma_1) \quad (7.62)
\end{aligned}$$

Dieses Resultat stellen wir graphisch dar. Der erste Term in (7.62) entspricht dem linken Diagramm und der zweite Term dem rechten Diagramm.



Anhand der bei der Berechnung der Paarvernichtung gemachten Manipulationen kann man folgende partielle Regeln für die Berechnung von  $T$ -Matrixelementen aufstellen.

1. Äussere Linien:	Faktor
	einlaufendes Elektron $u(p)$
	einlaufendes Positron $\bar{v}(p)$
	auslaufendes Elektron $\bar{u}(p)$
	auslaufendes Positron $v(p)$
	einlaufendes Photon $\epsilon_\mu(k, \lambda)$
	auslaufendes Photon $\epsilon_\mu(k, \lambda)$

2. Vertizes: An jedem Vertex ist ein Faktor  $e\gamma^\mu$  anzubringen und an jedem Vertex gilt der Energie-Impulssatz, d.h. die Summe aller an einem Vertex einlaufenden 4-er Impulse ist Null.

3. Innere Elektronenlinie: Für eine innere Elektronenlinie setze man den Faktor

$$\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.63)$$

4. Faktoren: Hinzu kommen noch Faktoren  $(2\pi)^\#$ ,  $(-1)^\#$ ,  $(i)^\#$ , die wir später angeben werden.

Die verschiedenen Faktoren sind von rechts nach links zu notieren, in dem man der Pfeilrichtung folgt. Die Pfeilrichtung gibt den Fluss der negativen elektrischen Ladung an.

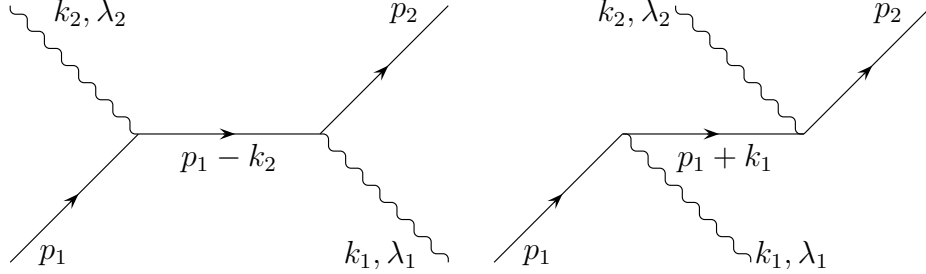
## 7.5 Compton-Streuung und Eichinvarianz

Die Compton-Streuung

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^- \quad (7.64)$$

ist mit der Paarvernichtung verwandt: eine äußere Photonlinie und ein äußeres Elektron vertauschen ihre Rollen. Damit haben die beiden auftretenden Feynman-Diagramme folgende Gestalt:





Die Feynman-Regeln führen für diesen Prozess auf das folgende  $T$ -Matrixelement in tiefer nichtverschwindender Ordnung der Störungstheorie

$$T_{fi} = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \bar{u}(p_2, \sigma_2) \left\{ \not{\epsilon}(k_1, \lambda_1) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}(k_2, \lambda_2) + \not{\epsilon}(k_2, \lambda_2) \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}(k_1, \lambda_1) \right\} u(p_1, \sigma_1) \quad (7.65)$$

Die Herleitung dieser Amplitude ist eine lehrreiche Übungsaufgabe. Wir wollen stattdessen die Eichinvarianz der Compton-Streuamplitude beweisen. Bei einer Umeichung  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$  des Photonfeldes ändert der Polarisationsvektor  $\epsilon_\mu(k)$  einer ebenen Welle  $\epsilon_\mu e^{-ikx}$  gemäß

$$\epsilon_\mu(k) \rightarrow \epsilon_\mu(k) + ak_\mu. \quad (7.66)$$

In der Coulomb-Eichung ist  $k^\mu \epsilon_\mu = -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$  und diese Eigenschaft bleibt wegen  $k^2 = 0$  bei einer Umeichung erhalten.

Wir werden nun beweisen, dass das  $T$ -Matrixelement (7.65) eichinvariant ist. Wir benutzen in

$$T_{fi} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \bar{u}(p_2, \sigma_2) \left\{ \not{\epsilon}_2 \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{p_1 k_1} \not{\epsilon}_1 - \not{\epsilon}_1 \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{p_1 k_2} \not{\epsilon}_2 \right\} u(p_1, \sigma_1)$$

die Identität  $\not{p}\not{\epsilon} = -\not{\epsilon}\not{p} + 2(p, \epsilon)$  und die Diracgleichung  $\not{p}u = mu$ , um die Zähler umzuformen,

$$T_{fi} = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \bar{u}(p_2, \sigma_2) \left\{ \not{\epsilon}_2 \frac{2(p_1, \epsilon_1) + k_1 \not{\epsilon}_1}{p_1 k_1} - \not{\epsilon}_1 \frac{2(p_1, \epsilon_2) - k_2 \not{\epsilon}_2}{p_1 k_2} \right\} u(p_1, \sigma_1). \quad (7.67)$$

Bei einer Eichtransformation (7.66) treten folgende Zusatzterme zwischen den geschweiften Klammern auf,

$$ak_2 \left( \frac{2p_1 \cdot \epsilon_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{k_1 \not{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_1} \right) + 2a \not{\epsilon}_2 - ak_1 \left( \frac{2p_1 \cdot \epsilon_2}{p_1 \cdot k_2} - \frac{k_2 \not{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_2} \right) - 2a \not{\epsilon}_1 + 2a^2(k_2 - k_1). \quad (7.68)$$

Mit der Energie-Impulserhaltung  $k_2 - k_1 = p_1 - p_2$  ist der letzte Term gleich  $2a^2(\not{p}_1 - \not{p}_2)$ . Zwischen  $\bar{u}(p_2)$  und  $u(p_1)$  gibt er aufgrund der Diracgleichung  $\not{p}u(p) = mu(p)$  und der adjungierten Diracgleichung  $\bar{u}(p)\not{p} = \bar{u}(p)m$  keinen Beitrag. Die Terme kubisch in den  $\gamma$ -Matrizen können mit Energie-Impulserhaltung und Diracgleichung weiter vereinfacht werden,

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2)\not{k}_2\not{k}_1\not{\epsilon}_1 u(p_1) &= \bar{u}(p_2)(\not{p}_1 - \not{p}_2 + \not{k}_1)\not{k}_1\not{\epsilon}_1 u(p_1) = \bar{u}(p_2)(\not{p}_1 - m)\not{k}_1\not{\epsilon}_1 u(p_1) \\ &= 2\bar{u}(p_2) (p_1 \cdot k_1 \not{\epsilon}_1 - \epsilon_1 \cdot p_1 \not{k}_1) u(p_1). \end{aligned}$$

Analog finden wir

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2)\not{k}_1\not{k}_2\not{\epsilon}_2 u(p_1) &= \bar{u}(p_2)(\not{p}_2 - \not{p}_1 + \not{k}_2)\not{k}_2\not{\epsilon}_2 u(p_1) = \bar{u}(p_2)(\not{p}_1 - m)\not{k}_1\not{\epsilon}_2 u(p_1) \\ &= 2\bar{u}(p_2) (p_1 \cdot \epsilon_2 \not{k}_2 - p_1 \cdot k_2 \not{\epsilon}_2) u(p_1). \end{aligned}$$

Nun setzen wir die beiden letzten Resultate in den in  $a$  linearen Term in (7.68) ein,

$$2 \left( \frac{p_1 \cdot \epsilon_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{p_1 \cdot \epsilon_2}{p_1 \cdot k_2} \right) (k_2 - k_1).$$

Dieser Ausdruck verschwindet zwischen den Diracspinoren  $\bar{u}(p_2)$  und  $u(p_1)$  und dies beweist die Eichinvarianz der Amplitude  $T_{fi}$ .

## 7.6 Møller-Streuung und Photonpropagator

Wir betrachten hier die elastische Streuung von zwei Elektronen. Der einlaufende und auslaufende Zustand sind

$$\begin{aligned} |\text{ein}\rangle &= |p_1\sigma_1, p_2\sigma_2\rangle = a_{\sigma_1}^\dagger(p_1)a_{\sigma_2}^\dagger(p_2)|0\rangle \\ |\text{aus}\rangle &= |p'_1\sigma'_1, p'_2\sigma'_2\rangle = a_{\sigma'_1}^\dagger(p'_1)a_{\sigma'_2}^\dagger(p'_2)|0\rangle \end{aligned} \quad (7.69)$$

Wir schreiben im Folgenden die Spinquantenzahlen meistens nicht mehr. Zur Ordnung  $e^2$  trägt die Kopplung des Elektron-Positron-Feld an das transversale Photonfeld und die

instantane Coulombwechselwirkung in (7.19) bei,

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= (-i)^2 e^2 \int_{x_1^0 > x_2^0} d^4 x_1 d^4 x_2 \langle p'_1 p'_2 | \mathbf{j}(x_1) \dot{\mathbf{A}}(x_1) \mathbf{j}(x_2) \cdot \mathbf{A}(x_2) | p_1 p_2 \rangle \\
&\quad + (-i)^2 \frac{e^2}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \delta(x_1^0 - x_2^0) \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \langle p'_1 p'_2 | \rho(x_1) \rho(x_2) | p_1 p_2 \rangle \\
&= S^{\text{trans}} + S^{\text{coul}}
\end{aligned} \tag{7.70}$$

Wir betrachten die beiden Anteile nun getrennt.

### Transversaler Anteil

$$\begin{aligned}
S^{\text{trans}} &= (-i)^2 e^2 \int_{x_1^0 > x_2^0} d^4 x_1 d^4 x_2 \langle p'_1 p'_2 | : \bar{\psi}(x_1) \gamma^i \psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_2) \gamma^j \psi(x_2) : | p_1 p_2 \rangle \\
&\quad \times \langle 0 | A^i(x_1) A^j(x_2) | 0 \rangle.
\end{aligned}$$

Das fermionische Matrixelement ist

$$\begin{aligned}
\langle p'_1 p'_2 | \dots | p_1 p_2 \rangle &= \gamma_{\alpha\beta}^i \gamma_{\gamma\delta}^j \langle p'_1 p'_2 | \bar{\psi}_{\alpha}^{+}(x_1) \psi_{\beta}^{+}(x_1) \bar{\psi}_{\gamma}^{-}(x_1) \psi_{\delta}^{-}(x_2) \\
&\quad + \bar{\psi}_{\alpha}^{-}(x_1) \psi_{\delta}^{+}(x_1) \bar{\psi}_{\gamma}^{-}(x_2) \psi_{\delta}^{+}(x_2) | p_1 p_2 \rangle
\end{aligned}$$

Die Rechnung ist ähnlich wie für die Paarvernichtung und führt auf

$$\begin{aligned}
S^{\text{trans}} &= -(-i)^2 \frac{e^2}{(2\pi)^6} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \left[ \bar{u}(p'_1) \gamma^i u(p_1) e^{ip'_1 x_1} e^{-ip_1 x_1} \right. \\
&\quad \left. \times \bar{u}(p'_2) \gamma^j u(p_2) e^{ip'_2 x_2} e^{-ip_2 x_2} - (1' \leftrightarrow 2') \right] \\
&\quad \times \left[ \langle 0 | A^i(x_1) A^j(x_2) | 0 \rangle \theta(x_1^0 - x_2^0) + \langle 0 | A^j(x_2) A^i(x_1) | 0 \rangle \theta(x_2^0 - x_1^0) \right]
\end{aligned} \tag{7.71}$$

Der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer ist gleich dem Feynman-Propagator für das transversale Photonfeld,

$$i (D_F^{\perp}(x - y))_{ij} = \langle 0 | T A_i(x) A_j(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik(x-y)} \frac{\delta_{ij} - k_i k_j / |\mathbf{k}|^2}{k^2 + i\epsilon}. \tag{7.72}$$

Setzen wir die Fourierdarstellung von  $D_F^{\perp}$  in (7.71) ein und integrieren über  $x$ , dann finden wir das  $T$ -Matrixelement

$$T^{\text{trans}} = -\frac{e^2}{(2\pi)^6} \left[ \bar{u}(p'_1) \gamma^i u(p_1) \frac{\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p'_2) \gamma^j u(p_2) - (1' \leftrightarrow 2') \right] \tag{7.73}$$

Im diesen nicht kovarianten Resultat ist im ersten Term ist  $q = p_1 - p_2 = p_2 - p'_2$  und im zweiten  $q = p'_2 - p_1 = p_2 - p'_1$ .

**Coulombanteil** Setzen wir  $\rho(x) = :\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x):$  in den Ausdruck für  $S^{\text{coul}}$  in (7.70) ein, dann findet man

$$S^{\text{coul}} = ie^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta(x_1^0 - x_2^0)}{4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \frac{1}{(2\pi)^6} \left[ \bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2) \right. \\ \left. \times e^{ip'_1x_1} e^{-ip_1x_1} e^{ip'_2x_2} e^{-ip_2x_2} - (1' \leftrightarrow 2') \right]$$

Die Integration über  $x_1$  und  $x_3 := x_2 - x_1$  von

$$e^{i(p'_1x_1 - p_1x_1 + p'_2x_2 - p_2x_2)} = e^{i(p'_2 - p_2)x_3} e^{-i(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)x_1}$$

führt einerseits auf die Energie-Impulserhaltung und mit Hilfe von

$$\int d^3x_3 e^{-i(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}_3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}_3|} = \frac{1}{|\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2|} \quad (7.74)$$

auf das  $T$ -Matrixelement

$$T^{\text{coul}} = -\frac{e^2}{(2\pi)^6} \left[ \bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1) \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2) - \frac{(1' \leftrightarrow 2')}{|\mathbf{q}'|^2} \right]. \quad (7.75)$$

wobei  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2$  und  $\mathbf{q}' = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1$  ist. Dieser Coulombterm ist ebenfalls nicht kovariant, die Summe  $T^{\text{trans}} + T^{\text{coul}}$  wird aber explizit kovariant sein.

**Kovarianter Photonpropagator** Hier werden wir zeigen, dass die Beträge der transversalen Photonen und des instantanen Coulombterms zu einem lorentzkovarianten Ausdruck addieren. Dazu formen wir den Coulomb-Term um, so dass der gleiche Nenner auftritt wie in  $T^{\text{trans}}$ . Wir führen dies für den ersten Term in (7.75) explizit durch:

$$\frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{\mathbf{q}^2} = \frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{\mathbf{q}^2 + i\epsilon} \frac{\mathbf{q}_0^2 - \mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2} \\ = -\frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{\mathbf{q}^2 + i\epsilon} + \frac{\mathbf{q}_0^2}{\mathbf{q}^2} \frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{\mathbf{q}^2 + i\epsilon} \quad (7.76)$$

Wegen  $q = p_2 - p'_2 = p'_1 - p_1$  führt die Diracgleichung auf

$$\bar{u}(p'_1)\not{q}u(p_1) = 0 = \bar{u}(p'_2)\not{q}u(p_2).$$

Die führt auf

$$\begin{aligned} q^0 \bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) &= \bar{u}(p'_1) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} u(p_1) \\ q^0 \bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2) &= \bar{u}(p'_2) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} u(p_2) \end{aligned}$$

Damit lautet der letzte Term in (7.76)

$$\frac{q_0^2}{\mathbf{q}^2} \frac{\bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2)}{q^2 + i\epsilon} = \frac{\bar{u}(p'_1) \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u(p_1) \bar{u}(p'_2) \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u(p_2)}{q^2 + i\epsilon}$$

und entsprechend schreibt sich der Coulomb-Anteil gemäß

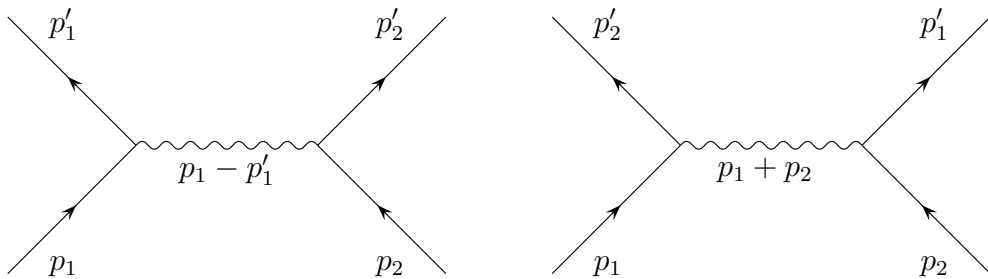
$$\begin{aligned} T^{\text{coul}} &= -\frac{e^2}{(2\pi)^6} \left[ -\frac{\bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2)}{q^2 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{u}(p'_1) \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u(p_1) \bar{u}(p'_2) \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u(p_2)}{q^2 + i\epsilon} - (1' \leftrightarrow 2') \right]. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Addiert man nun  $T^{\text{coul}}$  zu  $T^{\text{trans}}$ , dann heben sich die Terme mit  $\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}}$  in (7.77) gegen die Terme mit  $\hat{q}_i \hat{q}_j$  in (7.73) weg und wir erhalten

$$\begin{aligned} T = T^{\text{coul}} + T^{\text{trans}} &= \frac{e^2}{(2\pi)^6} \left[ \frac{\bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma_\mu u(p_2)}{(p'_1 - p_1)^2 + i\epsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{u}(p'_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p'_1) \gamma_\mu u(p_2)}{(p'_2 - p_1)^2 + i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Dies ist ein manifest kovarianter Ausdruck. Weder der transversale noch der Coulombanteil ins kovariant, nur ihre Summe ist es. Dies ist ein allgemeines Resultat, das nicht nur für die Møllerstreuung gilt.

Das Resultat (7.78) stellen wir durch die folgenden beiden Diagramme dar:



Die Wellenlinie in den Diagrammen bedeutet dabei den sogenannten kovarianten Photon-

propagator, der im Impuls durch

$$\text{~~~~~} \quad \text{Photonpropagator} \quad = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

gegeben ist.

## 7.7 Wirkungsquerschnitte

Leider reicht die Zeit nicht mehr für Details, deshalb werde ich hier nur kurz die Resultate für Comptonstreuung und Paarvernichtung mit Ihnen diskutieren. Der Wirkungsquerschnitt für Comptonstreuung wurde erstmalig von KLEIN und NISHINA abgeleitet. Für Photonenergien klein mit der Ruhenergie des Elektrons geht die Formel von Klein-Nishina in den klassischen Wirkungsquerschnitt für Thomsonstreuung über.

..... Sollte noch geschrieben werden.....

Für mehr Details verweise ich auf das schöne Buch „Relativistische Quantentheorie“ von Norbert Straumann, [5]. Aus dieser Quelle sind auch die Rechnungen ab Abschnitt 7.4.

# Literaturverzeichnis

- [1] P.A.M. Dirac, *The quantum theory of emission and absorption of radiation*, Roc. Roy. Soc. London **A 114** (1927) 243.
- [2] S. Schweber, *QED and the Men who made it*, Princeton University Press, 1994.
- [3] M.J. Stefan, *Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur*, Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe der Kaiserlichen AdW, 391 - 428, Wien 1879; L. Boltzmann, *Ableitung des Stefanschen Gesetzes, betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie*, Annalen der Physik **22** (1884) 291.
- [4] J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 4. Auflage, de Gruyter, 2006.
- [5] N. Straumann, *Relativistische Quantentheorie, Einführung in die QFT*, Springer, 2005.

# Index

- Übergangsmatrix, 67
- Übergangsrate, 69, 77
  - differentielle, 69
- Übergangswahrscheinlichkeit, 69
- 4-er Stromdichte, 15
  
- Absorption von Teilchen, 64
- Anzahloperator, 25
- auslaufende Feld, 60
  
- Bogoliubov-Transformation, 61
- Bremsstrahlung, 59
  
- Casimir-Effekt, 24
- Clifford-Algebra, 48
- Comptonstreuung, 85
- Coulombbeziehung, 27
  
- Dirac-konjugierter Spinor, 49
  
- Eichtransformation
  - in Diractheorie, 72
- Eichttransformation, 15
- Einheiten, 2
- einlaufende Feld, 59
- Einstein-Hilbert-Wirkung, 6
- Einsteinsche Summenkonvention, 3
- elektromagnetisches Feld, 14
- Emission von Teilchen, 64
- Energie
  - des Strahlungsfeldes, 26, 32
- Energie-Impuls Beziehung, 2
- Energie-Impuls Tensor, 11
- Energiedichte
  - spektrale, 33
- Erhaltungsgroßen, 10
- Euler-Lagrange-Gleichung, 8
  
- Feinstrukturkonstante, 1
- Feldenergie, 11
  - des elektromagnetischen Feldes, 17
- Felder
  - klassische, 6
- Feldimpuls, 11
  - des elektromagnetischen Feldes, 17
- Feldstärketensor, 15
- Feldstarkentensor, 5
- Feldtheorie, 4
- Feynman-Propagator
  - im Ortraum, 46
- Fock-Zustand, 26, 31
- Funktional, 6
- Funktionalableitung, 7
  
- Gauss-Gesetz, 17
  
- Hamiltonfunktion, 9
  - der Elektrodynamik, 17
- Hamiltonsche Bewegungsgleichungen, 9
- Hamiltonsches Variationsprinzip, 8
- Heisenberg-Gleichungen, 22
- Helizität eines Photons, 32
  
- Impuls
  - des Strahlungsfeldes, 26, 32
- Impulsfeld, 9
- innere Symmetrien, 10



- invariante Amplitude, 68
- kanonische Quantisierung, 19
  - Skalarfeld, 19
- kausales Feld, 67
- Kausalität, 35
- Klein-Gordon Gleichung, 12
- kohärenter Zustand, 62
- Kontinuitätsgleichung, 16
  
- Lagrangedichte, 8
- Lagrangedichte der QED, 71
- Lagrangefunktion, 8
- Lagrangesche Feldtheorien, 7
- lokale Observablen, 35
- Lorentzzeichnung, 15
- Lorentzinvarianz
  - der S-Matrix, 66
  
- Maxwellgleichungen
  - homogene, 14
  - inhomogene, 15
- Mottscche Streuformel, 79
- Møller-Streuung, 87
  
- Noether Theorem, 10
- Noether-Strom, 10
- Normalordnung, 24
- Nullpunktsenergie, 24
  - des elektromagnetischen Feldes, 30
  
- Orthogonalitätsrelationen, 53
  
- Paarvernichtung, 80
- Photon, 31
- Poisson-Klammer, 9
- Polarisation
  - des elektromagnetischen Feldes, 32
- Propagator
  - für Klein-Gordon Feld, 44
  
- QED
  - in Coulombbeziehung, 73
- Quantenelektrodynamik, 71
  
- retardierte Greenfunktion
  - für Klein-Gordon Operator, 45
  
- Skalarfeld, 12
  - komplexes, 13
- Spektraldichte, 32
- spektrale Energiedichte, 33
- Streu matrix, 58
- Streuoperator, 60, 66
- Streuung
  - am auseren Potential, 74
- Strom
  - in Diractheorie, 72
- Symmetriegruppe, 10
- Symmetrien, 10
  
- T-Matrix, 67
- Teilchenproduktion, 59
  - von Skalarteilchen, 58
- Tensorfeld
  - bilinear in  $\psi$ , 49
  
- Unbestimmtheit
  - für elektromagnetische Felder, 35
- Unitarität
  - der S-Matrix, 67
  
- Verjungung, 4
- Vollständigkeitsrelationen, 53
  
- Wellengleichung, 16
- Wirkung, 8
- Wirkungsquantum, 2
- Wirkungsquerschnitt, 91
  
- zeitgeordnetes Produkt, 46
- Zweipunktsfunktion
  - für Skalarfeld, 43