**Friedrich-Schiller-Universität Jena** Sommersemester 2005
Prof. Dr. Andreas Wipf

# Übungen zu MMP: Blatt 4

**1. Kern eines Homomorphismus**

Es seien $G$ und $G'$ Gruppen und $\varphi : G \longrightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, d.h.

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \qquad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Der Kern und das Bild von $\varphi$ sind

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g) = e'\} \subset G \quad , \quad \mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) | g \in G\} \subset G',$$

wobei $e'$ das Einselement in $G'$ bezeichnet. Weiter sei $H \subset G$ eine Untergruppe von $G$. Beweise die folgenden Aussagen:

- $\mathrm{Im}(\varphi)$ ist Untergruppe von $G'$.
- $\varphi(H)$ ist eine Untergruppe von $G'$.
- $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ist Untergruppe von $G$.
- K=Kern($\varphi$) ist eine Normalteiler von $G$, d.h. $gKg^{-1} = K$ für alle $g \in G$.

**2. Diedergruppe**

Die Decktransformationen des gleichseitigen $n$-Ecks bilden die Diedergruppe $\mathcal{D}_n$. Im Folgenden betrachten wir die Decktransformationen des gleichseitigen Vierecks (siehe Abbildung).

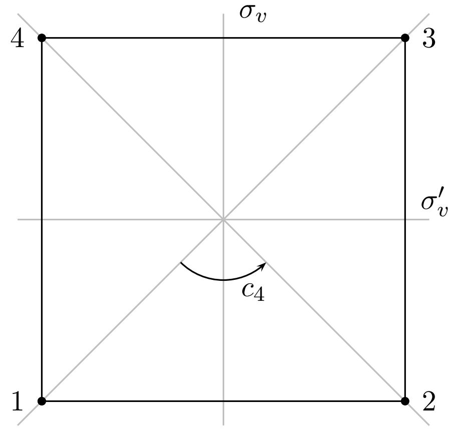


Abbildung 1: *Symmetrien des gleichseitigen Vierecks.*

- Bestimme die Ordnung der Diedergruppe $\mathcal{D}_4$.
- Berechne die Gruppentafel.
- Finde erzeugende Elemente.
- Finde die Normalisatoren der erzeugenden Elemente.
- Gebe zwei 1-dimensionale, eine 2-dimensionale und eine 4-dimensionale Darstellung an.
- Welche dieser Darstellungen sind reduzibel, welche irreduzibel?

**3. Adjungierte Darstellung von SU(2)**

Man ordnet jedem Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ eineindeutig eine hermitesche und spurfreie $2 \times 2$ Matrix

$$\vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{k=1}^{3} x_k \sigma_k = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

zu, wobei

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Spinmatrizen sind. Nun betrachtet man für jede Matrix $g \in SU(2)$ die folgende Abbildung $T(g)$:

$$\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \xrightarrow{T(g)} g\,(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})\,g^{-1}.$$

1. Zeige, dass das Bild von $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ unter $T(g)$ wieder die Form
$$\vec{y} \cdot \vec{\sigma} \quad \text{mit} \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^3$$
hat und man $T(g)$ daher als lineare Abbildung des $\mathbb{R}^3$ auf sich auffassen kann, d.h.
$$T(g)\vec{x} = \vec{y}.$$
2. Zeige, dass $T(g)$ eine Darstellung von $SU(2)$ ist, d.h. zeige
$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2).$$
3. Zeige, dass die Determinante der Matrix $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ gleich der Länge des Vektors $\vec{x}$ ist. Benutze dieses Resultat, um zu zeigen, dass $T(g)$ längenerhaltend und daher eine orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^3$ ist. Kann man folgern, dass $T(g)$ eine Drehung und keine Spiegelung darstellt, d.h. dass die Determinante der Matrix gleich $+1$ ist?
4. (fakultative Aufgabe) Wiederhole die Diskussion für $\vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ ersetzt durch $(x, \sigma) = x^\mu \sigma_\mu$ mit $(\sigma_\mu) = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, wobei $\sigma_0$ die $2 \times 2$ Einheitsmatrix und $(x^\mu) \in \mathbb{R}^4$ ist. Die Elemente $g$ dürfen dann aus der Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ der komplexen $2 \times 2$-Matrizen mit Determinante 1 sein.