Kapitel 5

Darstellungen

In der Physik treten Gruppen vorwiegend über ihre Darstellungen in Erscheinung. Eine Darstellung einer Gruppe ordnet jedem Gruppenelement eine lineare Transformation T auf einem Vektorraum V zu:

$$\begin{aligned} T: \quad G &\longrightarrow L(V) \\ g &\longrightarrow T(g). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dabei soll T die Gruppenstruktur respektieren,

$$T(e) = \mathbb{1}, \quad T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2) \Longrightarrow T(g^{-1}) = T^{-1}(g), \tag{5.2}$$

was bedeutet, dass die Abbildung T ein Gruppenhomomorphismus von G in die Gruppe $L(V)$ der linearen und invertierbaren Abbildungen $V \to V$ ist. Es gibt immer die *triviale Darstellung*, die allen Elementen der Gruppe die identische Abbildung zuordnet. Der andere Extremfall sind die *treuen Darstellungen*, für die $T(g_1) = T(g_2)$ nur für $g_1 = g_2$ möglich ist. Für eine treue Darstellung ist das Urbild der identischen Abbildung nur das neutrale Element e. Als *Dimension einer Darstellung* bezeichnet man die Dimension des Vektorraums V. Nach Wahl einer Basis in V werden die $T(g)$ zu Matrizen.

Wegen der Darstellungseigenschaft genügt es, die $T(g)$ für die erzeugenden Gruppenelemente zu kennen. Zum Beispiel wird die Permutationsgruppe S_3 von a und c erzeugt, da

$$b = a^2, \quad e = a^3, \quad d = ca \quad \text{und} \quad f = ca^2.$$

Wir haben früher a als Drehung um $2\pi/3$ und c als Spiegelung dargestellt, siehe Abbildung (4.1). Wir wählen eine kartesische Basis in $\mathbb{R}^2$ und ordnen den Drehungen und Spiegelungen Matrizen zu. Die Kolonnen der Matrizen sind die Bilder der Basisvektoren:

$$T(a) = \begin{pmatrix} \cos 120^0 & -\sin 120^0 \\ \sin 120^0 & \cos 120^0 \end{pmatrix} \quad , \quad T(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Dies ist eine treue Darstellung von S_3 und wir bezeichnen sie mit T_2. Daneben gibt es auch noch die *Einsdarstellung* T_1^1 :

$$T_1^1(a) = T_1^1(c) = 1 \Longrightarrow T_1^1(G) = 1 \tag{5.4}$$

und die *alternierende Darstellung* T_1^2 :

$$T_1^2(a) = 1,\ T_1^2(c) = -1 \Longrightarrow e, a, b \xrightarrow{T_1^2} 1, \quad c, d, g \xrightarrow{T_1^2} -1. \tag{5.5}$$

Die alternierende Darstellung ist gerade die Determinante der Darstellungsmatrizen in (5.3). Den geraden Permutationen (Drehungen) ordnet sie eine 1 und den ungeraden Permutationen (Spiegelungen) eine -1 zu.

Allgemein gilt: ist $T(g)$ eine beliebige Darstellung von G, dann ist $T'(g) = \det T(g)$ eine 1-dimensionale Darstellung:

$$T'(g_1 g_2) = \det T(g_1 g_2) = \det T(g_1) T(g_2) = \det T(g_1) \det T(g_2) = T'(g_1) T'(g_2),$$

und $T'(e) = \det \mathbb{1} = 1$. Darstellungsmatrizen, welche dieselben linearen Abbildungen bezüglich verschiedener Basen beschreiben, sollten identifiziert werden und diese Identifikation führt auf den Begriff von äquivalenten Darstellungen.

5.1 Äquivalenz von Darstellungen

Wir wechseln das Koordinatensystem zur Darstellung von S_3 als Gruppe der Drehungen und Spiegelungen. Der Übergang von der alten Basis $\{\boldsymbol{e}_i\}$ zur neuen Basis $\{\boldsymbol{f}_i\}$ werde durch eine lineare Transformation S geleistet,

$$\boldsymbol{e}_i = S^j{}_i \boldsymbol{f}_j, \tag{5.6}$$

wobei wie die Einsteinsche Summenkonvention benutzten, nach der über doppelt vorkommende Indexe summiert wird. Es sei $x^i \boldsymbol{e}_i = y^i \boldsymbol{f}_i$ ein beliebiger Vektor mit Koordinaten x^i bezüglich der alten Basis und Koordinaten y^i bezüglich der neuen Basis. Diese hängen folgendermaßen zusammen,

$$y^i = S^i{}_j x^j, \qquad x^i = (S^{-1})^i{}_j y^j. \tag{5.7}$$

Bezüglich der Basis $\boldsymbol{e}_i$ haben die $T(g)$ die Komponenten $T(g)^i{}_j$, d.h.

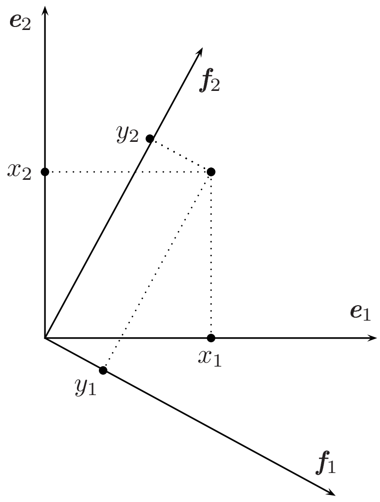

Abbildung 5.1: *Äquivalenz zweier Darstellungen*

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow T(g)\boldsymbol{x}, \qquad (T(g)\boldsymbol{x})^i = T(g)^i{}_j x^j. \tag{5.8}$$

Dann gilt

$$\boldsymbol{y} = S\boldsymbol{x} \longrightarrow ST(g)S^{-1}\boldsymbol{y} \equiv \tilde{T}(g)\boldsymbol{y}.$$

Wie erwartet, gehen die Darstellungsmatrizen $\tilde{T}(g)$ bezüglich der Basis $\boldsymbol{f}_i$ durch eine Ähnlichkeitstransformation aus denen bezüglich der Basis $\boldsymbol{e}_i$ hervor,

$$\tilde{T}(g) = ST(g)S^{-1}. \tag{5.9}$$

Weiterhin, wegen

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2) &= ST(g_1)S^{-1}ST(g_2)S^{-1} = ST(g_1)T(g_2)S^{-1} \\
&= ST(g_1g_2)S^{-1} = \tilde{T}(g_1g_2)
\end{aligned}$$

ist $g \to \tilde{T}(g)$ genauso eine Darstellung der Gruppe wie $g \to T(g)$. Diese beiden Darstellungen heißen *äquivalent*. Zwei äquivalente Darstellungen sind wirklich dieselben Darstellungen und sollten identifiziert werden. Ist umgekehrt eine Darstellung gegeben, dann können wir immer unendlich viele äquivalente Darstellungen der Form $ST(g)S^{-1}$ angeben. Bei der Klassifizierung von Darstellungen kann es sich also nur um diejenige von inäquivalenten Darstellungen handeln, also Darstellungen die nicht über eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervorgehen.

Wir geben jetzt noch eine dreidimensionale Darstellung von S_3 an. Es sei $\boldsymbol{e}_i$ eine kartesische Basis von $\mathbb{R}^3$. Auf diese Elemente wirke die Permutationsgruppe. Unter a wird $\boldsymbol{e}_1$ in $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2$

in $\boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{e}_3$ in $\boldsymbol{e}_1$ abgebildet. Dies ist eine Drehung um die Achse $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ mit 120^0 und damit eine lineare Transformation in $\mathbb{R}^3$. $T_3(c)$ vertauscht $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$ und ist eine Spiegelung an der Ebene aufgespannt durch $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$. Man erhält

$$T_3(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad T_3(c)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Die restlichen $\{T(g)\}$ können aus der Multiplikationstabelle, die ja wegen der Darstellungs-

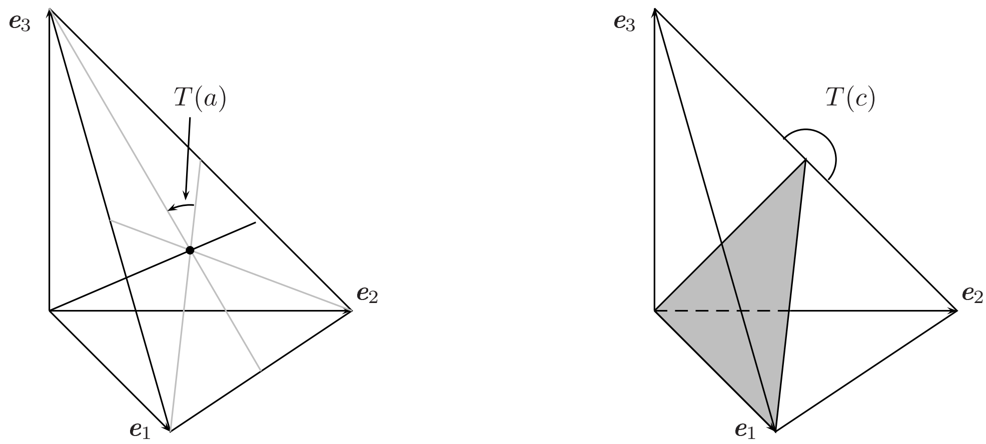

Abbildung 5.2: *Dreidimensionale natürliche Darstellung von* S_3

eigenschaft dieselbe wie diejenige der $\{g\}$ ist, abgelesen werden. Die $T(g)$ sind orthogonal und unimodular.

Damit haben wir folgende Darstellungen der Gruppe S_3 gewonnen: die Einsdarstellung T_1^1, die alternierende Darstellung T_2^1, die zweidimensionale treue Darstellung T_2 und dreidimensionale, *natürliche Darstellung* T_3.

Natürliche Darstellung:
Unter der Drehung $T_3(a)$ und Spiegelung $T_3(c)$, und damit unter allen Transformationen $T_3(g)$ ist der eindimensionale Unterraum, aufgespannt durch $\boldsymbol{f}_1=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)/\sqrt{3}$ invariant. Wir ergänzen $\boldsymbol{f}_1$ folgendermaßen zu einer orthonormierten Basis

$$\boldsymbol{f}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),\quad \boldsymbol{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3),\quad \boldsymbol{f}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

Die Basiselemente $\boldsymbol{f}_2$ und $\boldsymbol{f}_3$ liegen in der Ebene senkrecht zur Drehachse. Die explizite Form der Transformationsmatrix in $\boldsymbol{f}_i = (S^{-1})^j_{\ i}\boldsymbol{e}_j$ lautet

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow S = (S^{-1})^t.$$

Bezüglich der neuen Basis haben die Darstellungsmatrizen $\tilde{T}_3(g) = ST_3(g)S^{-1}$ die Form

$$\tilde{T}_3(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{T}_3(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neben dem von $\boldsymbol{f}_1$ aufgespannten eindimensionalen Unterraum lassen die $T_3(g)$ auch den dazu senkrechten 2-dimensionalen Unterraum, aufgespannt durch $\{\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, invariant. Auf dem ersten Unterraum ist T_3 die Einsdarstellung und auf dem zweiten Unterraum die Darstellung T_2. Man sagt, die Darstellung ist *reduzibel*. Eine Darstellung T heißt *irreduzibel*, falls V keinen echten Teilraum hat, der unter T invariant ist. T_2 ist offensichtlich irreduzibel.

Formalisiert: Der dreidimensioale Darstellungsraum V_3 von T_3 zerfällt in zwei orthogonale Teilräume der Dimensionen 1 und 2, $V = V_1 \oplus V_2$. Diese Teilräume sind invariant unter T_3, d.h. $T_3 : V_1 \to V_1$ und $T_3 : V_2 \to V_2$. Auf V_1 ist T_3 gleich T_1^1 und auf V_2 gleich T_2. Man schreibt

$$T_3 = T_1^1 + T_2, \qquad \dim T_3 = \dim T_1^1 + \dim T_2.$$

5.2 Reduzibilität von Darstellungen

Es sei T eine n-dimensionale Darstellung einer beliebigen Gruppe G (endlich oder unendlich) auf V. Sei V_1 ein m-dimensionaler echter *invarianter Teilraum* von V, d.h. jede lineare Transformation $T(g)$ bildet jeden Vektor aus V_1 wieder auf einen Vektor in V_1 ab. Wird das Koordinatensystem so gewählt, daß die ersten m Basisvektoren V_1 aufspannen, so haben die Darstellungsmatrizen die Form

$$g \longrightarrow T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & H(g) \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix},$$

wobei T_1 eine $m \times m$ und T_2 eine $(n-m)\times(n-m)$ Matrix ist. Eine Darstellung heißt *reduzibel*, falls ein echter invarianter Teilraum von V existiert. Eine nicht reduzible Darstellung heißt *irreduzibel.*

Ist speziell $H(g) = 0$ für alle Gruppenelemente, so zerfällt die Darstellung T in die Darstellungen T_1 und T_2,

$$g \longrightarrow \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt $T = T_1 + T_2$. Dieses Verfahren lässt sich möglicherweise fortsetzen, so daß die darstellenden Matrizen in einem geeigneten Koordinatensystem weiter zerfallen:

$$g \longrightarrow \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2(g) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T_k(g) \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Die Zerlegung bricht ab, wenn in keinem der invarianten Teilräume $V_1, \dots, V_k$ eine weiterer echter invarianter Teilraum existiert.

Definition: Eine Darstellung, die irreduzibel ist oder in lauter irreduzible Darstellungen zerfällt, heißt *vollreduzibel*.

Es existieren unendliche Gruppen, die nicht vollreduzibel sind, d.h. es existieren Darstellungen für welche $H(g)$ nicht verschwindet. Aber wir haben den folgenden

Satz: *Jede unitäre Darstellung auf einem Vektorraum mit Skalarprodukt ist vollreduzibel.*

Beweis: Ist T irreduzibel, so ist nichts zu beweisen. Sei also V_1 eine echter invarianter Teilraum von V und $W = V_1^\perp$ das unitär-orthogonale Komplement von V_1,

$$W = \{w \in V | (w, V_1) = 0\}.$$

V_1 und W spannen V auf. Jeder Vektor $v \in V$ läßt sich auf eindeutige Weise als Summe von $v_1 \in V_1$ und $w \in W$ schreiben, $v = v_1 + w$. Nun ist

$$(T(g)w, v_1) = (w, T^\dagger(g)v_1) = (w, T(g^{-1})v_1) = 0$$

für alle $g \in G$, da $T(g^{-1})v_1$ nach Voraussetzung in V_1 liegt. Damit liegt mit w auch $T(g)w$ im Unterraum W. Ist also V_1 ein invarianter Teilraum einer unitären Darstellung, so ist dies auch dessen Komplement W. Diese Verfahren kann nun fortgesetzt werden, falls ein echter invarianter Teilraum von W existiert. Schließlich erhält man eine Zerfällung der Darstellung in lauter irreduzible Bestandteile.

5.3 Mittelbildung und Haarsches Maß

Für jede endliche Gruppe G existiert eine Mittelung. Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion auf G. Wir definieren den *Mittelwert* $\mathcal{M}(f)$ von f durch

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g). \tag{5.12}$$

Die folgenden Eigenschaften der Mittelwertbildung evident:

1. linear: $\mathcal{M}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{M}(f_1) + \beta\mathcal{M}(f_2)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. positiv: Falls $f(g) \geq 0$ reell $\Rightarrow \mathcal{M}(f) \geq 0$ und nur $= 0$, falls $f \equiv 0$.
3. normiert: falls $f(g) = 1$ dann ist $\mathcal{M}(f) = 1$.
4. invariant gegenüber Translationen der Gruppe, d.h. ist $\tilde{f}(g) = f(\tilde{g}g)$, dann ist

$$\mathcal{M}(\tilde{f}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(\tilde{g}g) = \frac{1}{|G|}\sum_{\tilde{g}g\in G} f(\tilde{g}g) = \mathcal{M}(f). \tag{5.13}$$

Ein Mittelwert mit diesen vier Eigenschaften existiert auch für kompakte LIE-Gruppen.

5.3.1 Mittelbildung für kompakte Lie-Gruppen

Jede kompakte LIE-Gruppe hat eine invariante Mittelbildung. Dies folgt aus dem folgenden

Satz: *Zu jeder kompakten* LIE*-Gruppe gibt es ein bis auf eine multiplikative Konstante eindeutiges positives* HAAR*-Integral* $\mathcal{M} : C_0(G) \to \mathbb{C}$*, das links-und rechtsinvariant ist.*

Links- und rechtsinvariant bedeutet, daß

$$\mathcal{M}(f) \equiv \int\limits_G d\mu(g) f(g) = \mathcal{M}\big(f \circ l_{\tilde{g}}\big) = \mathcal{M}\big(f \circ r_{\tilde{g}}\big), \tag{5.14}$$

wobei $l_{\tilde{g}}(g) = \tilde{g}g$ und $r_{\tilde{g}}(g) = g\tilde{g}$ ($\tilde{g}$ fest) die *Links- bzw. Rechtstranslationen* sind. Das HAAR-Maß $d\mu(g)$ existiert auch für allgemeinere lokalkompakte Gruppen. Dann ist es aber im Allgemeinen entweder nur links- oder nur rechtsinvariant. Die Integration einer komplexwertigen Funktion mit dem HAAR-Maß ist offensichtlich eine Mittelbildung.
Die einfachste kompakte Gruppe $U(1)$ hat die Mittelbildung

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t=0}^{2\pi} dt f\big(g(t)\big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dt\, f(t), \qquad g(t) = e^{it} = g(t + 2\pi). \tag{5.15}$$

$\mathcal{M}$ erfüllt alle Eigenschaften einer Mittelbildung: Die Linearität, Positivität und Normiertheit sind evident und wegen

$$\mathcal{M}(f \circ l_{\tilde{g}}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t=0}^{2\pi} dt f\big(g(\tilde{t})g(t)\big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t=0}^{2\pi} dt f(g(\tilde{t} + t)) = \mathcal{M}(f)$$

ist die Mittelbildung auch translationsinvariant.

Wie sieht nun das invariante HAAR-Maß für $SU(2)$ aus. Dazu überlegen wir, was die Gruppenoperation $g \to l_{\tilde{g}}(g)$ auf der Gruppenmannifaltigkeit S^3 geometrisch bedeutet. Dazu parametrisieren wir die Gruppenelemente gemäß

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_1 & \alpha_2 + i\alpha_3 \\ -\alpha_2 + i\alpha_3 & \alpha_0 - i\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} \beta_0 + i\beta_1 & \beta_2 + i\beta_3 \\ -\beta_2 + i\beta_3 & \beta_0 - i\beta_1 \end{pmatrix}$$

mit $|\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| = 1$. Dann ist $g \to l_{\tilde{g}}(g)$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha} \longrightarrow O(\beta)\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 & -\beta_1 \\ \beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Wegen $\sum \beta_j^2 = 1$ ist $O(\beta)$ orthogonal, $O^t O = 1$, und damit ist $O(\beta)\boldsymbol{\alpha}$ eine Drehung von $\boldsymbol{\alpha}$. Nun ist die (induzierte) Volumenform auf S^3 drehinvariant und damit invariant unter Linkstranslationen (und Rechtstranslationen). Normieren wir die Volumenform auf 1, dann erhalten wir das eindeutige HAAR-Maß auf $SU(2) \sim S^3$. Wir parametrisieren die Punkte auf $SU(2) \sim S^3$ gemäß

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\psi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi e^{i\varphi} \\ -\sin\theta\sin\psi e^{-i\varphi} & \cos\theta - i\sin\theta\cos\psi \end{pmatrix}, \tag{5.17}$$

wobei die Winkel folgende Wertebereiche haben,

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \psi < \pi \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < 2\pi. \tag{5.18}$$

In diesen Koordinaten ist das Volumenelement gegeben durch

$$d\mu = \frac{1}{2\pi^2}\sin^2\theta \cdot \sin\psi d\theta d\psi d\varphi. \tag{5.19}$$

Für die unitären Matrizen (5.17) ist $\text{Sp}\, g = 2\cos\theta$. Wegen $\det g = 1$ sind deshalb die Eigenwerte dieser Matrizen $e^{i\theta}$ und $e^{-i\theta}$.

Es sei nun $f(g) = f(\theta, \psi, \varphi)$ eine beliebige Klassenfunktion. Klassenfunktionen sind konstant auf Konjugationsklassen, $f(aga^{-1}) = f(g)$. Nun kann aber jede unitäre Matrix mit einer unitären Matrix diagonalisiert werden, d.h. für jedes g gibt es ein a, so daß

$$aga^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in (0, \pi). \tag{5.20}$$

Deshalb hängen Klassenfunktionen nur von θ und nicht von ψ, φ ab, sind 2π-periodisch und wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

gerade in θ:

$$f \quad \text{Klassenfunktion} \quad \Longleftrightarrow f\big(g(\theta, \psi, \phi)\big) = f(\theta) = f(-\theta) = f(\theta + 2\pi). \tag{5.21}$$

Für eine Klassenfunktion ist

$$\mathcal{M}(f(g)) = \frac{1}{2\pi^2} \int \sin^2\theta \cdot \sin\psi \cdot f(\theta)\, d\theta d\psi d\varphi = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(\theta) \sin^2\theta\, d\theta. \tag{5.22}$$

Das induzierte Maß

$$d\mu_{\text{red}} = \frac{2}{\pi} \sin^2\theta\, d\theta \tag{5.23}$$

heißt *reduziertes* HAAR-Maß von $SU(2)$.

5.3.2 Unitäre und orthogonale Gruppen

In der Darstellungstheorie spielen die Darstellungen durch orthogonale oder unitäre Matrizen eine wichtige Rolle. Eine komplexe $n \times n$ Matrix U heißt unitär, falls $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$ ist. Sei $\mathbb{C}^n$ der komplexe Vektorraum mit Skalarprodukt

$$(x, y) = \sum_1^n \bar{x}_i y_i. \tag{5.24}$$

Die unitären Matrizen sind diejenigen Matrizen, die das Skalarprodukt invariant lassen,

$$(Ux, Uy) = (U^\dagger U x, y) = (x, U^\dagger U y) = (x, y). \tag{5.25}$$

Ausgeschrieben in Komponenten:

$$\sum_k \bar{U}_{ki} U_{kj} = \sum_k U_{ik} \bar{U}_{jk} = \delta_{ij}. \tag{5.26}$$

Die Zeilen und Spalten von unitären Matrizen sind zueinander unitär orthogonal. Lassen U_1 und U_2 das Skalarprodukt invariant, dann auch U_1U_2 und U_2U_1. Die Einheitsmatrix ist offensichtlich auch unitär. Schlussendlich ist auch $U^\dagger = U^{-1}$ unitär. Also bilden die unitären Matrizen ein Gruppe

$$U(n) = \{U \in L(\mathbb{C}^n) | U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}\}. \tag{5.27}$$

Eine *orthogonale Matrix* R ist reell und unitär und erfüllt daher $R^tR = RR^t = \mathbb{1}$. Die orthogonalen Matrizen bilden folgende Untergruppe von $U(n)$:

$$O(n) = \{R \in L(\mathbb{R}^n) | R^tR = RR^t = 1\}. \tag{5.28}$$

Die obigen Darstellungen T von S_3 sind alle orthogonal, d.h. alle Darstellungsmatrizen $T(g)$ sind orthogonal. Wegen

$$1 = \det(UU^\dagger) = \det U \det U^\dagger = \det U \, \overline{\det U}$$

ist die Determinante einer unitären Matrix eine Phase. Diejenigen unitären Matrizen mit $\det U = 1$ bilden eine Untergruppe von $U(n)$, die *spezielle unitäre Gruppe*,

$$SU(n) = \{U \in U(n) | \det U = 1\}. \tag{5.29}$$

Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist eine reelle Phase, also ± 1. Die Untergruppe der Matrizen mit $\det R = 1$ heißt *spezielle orthogonale Gruppe*,

$$SO(n) = \{R \in O(n) | \det R = 1.\}. \tag{5.30}$$

Nun haben wir den wichtigen

Satz: *Jede Darstellung einer Gruppe mit Mittelbildung ist zu einer unitären Darstellung äquivalent.*

In anderen Worten: Wir können in V immer eine Basis finden, bezüglich der die Matrizen $T(g)$ unitär sind.

Beweis: Die dem Beweise zugrunde liegende Idee der Summation über die Gruppe geht auf Hurwitz zurück. Wir bilden die quadratische Form

$$h(x) = \mathcal{M}\Big\{\big(T(g)x, T(g)x\big)\Big\} = \big(x, \mathcal{M}\{T^\dagger(g)T(g)\}x\big) = (x, Qx).$$

Als Summe von positiven und hermiteschen Formen ist diese Form ist positiv und hermitesch,

$$h(x \neq 0) > 0 \quad \text{und} \quad Q = Q^\dagger,$$

und invariant

$$h(T(\tilde{g})x) = \mathcal{M}\left\{\big(T(g)T(\tilde{g})x, T(g)T(\tilde{g})x\big)\right\} = \mathcal{M}\left\{\big(T(g\tilde{g})x, T(g\tilde{g})x\big)\right\} = h(x)$$

wegen der Translationsinvarianz der Mittelbildung. Nun benutzen wir noch, daß für jede positive hermitesche Form $h(x)$ ein Koordinatensystem existiert, so daß h in die Einheitsform übergeht,

$$h(y) = \sum \bar{y}_i y_i.$$

In diesem neuen Koordinatensystem geht unsere Darstellung über in eine äquivalente, welche die hermitesche Einheitsform für alle darstellenden Matrizen invariant läßt; also sind diese unitär.

5.4 Klassenfunktionen und Charaktere

Jede Darstellung einer Gruppe mit Mittelbildung ist vollreduzibel. Für endliche oder kompakte Lie-Gruppen gibt es eine Mittelbildung und jede Darstellung ist vollreduzibel. Wir wollen im Folgenden immer annehmen, daß G eine Gruppe mit Mittelbildung sei.

Sei nun $f(g)$ eine *Klassenfunktion*, d.h eine Funktion die für alle Elemente der gleichen Konjugationsklasse

$$g \sim \tilde{g} \Longleftrightarrow \tilde{g} = aga^{-1}, \quad a, g, \tilde{g} \in G$$

denselben Wert annimmt,

$$f(g) = f(aga^{-1}). \tag{5.31}$$

Zu jeder endlich-dimensionalen Darstellung $G \xrightarrow{T} L(V)$ gehört die komplexwertigen Klassenfunktion

$$\chi_T(g) = \mathrm{Sp}\, T(g). \tag{5.32}$$

Sie heißt *Charakter* der Darstellung T. Wegen

$$\chi_T(aga^{-1}) = \mathrm{Sp}\, T(aga^{-1}) = \mathrm{Sp}\, T(a)T(g)T^{-1}(a) = \mathrm{Sp}\, T(g) = \chi_T(g),$$

wobei wir $\mathrm{Sp}\, T_1T_2 = \mathrm{Sp}\, T_2T_1$ benutzten, sind die χ_T Klassenfunktionen. Die Charakteren haben die folgenden Eigenschaften:

- Äquivalente Darstellungen haben denselben Charakter. Dies folgt unmittelbar aus $\mathrm{Sp}\, \tilde{T}(g) = \mathrm{Sp}\, ST(g)S^{-1} = \mathrm{Sp}\, T(g)$.

- Die Dimension der Darstellung, oft auch Grad genannt, ist $\chi_T(e)$. Dies ist offensichtlich, da $T(e) = \mathbb{1}$ ist.
- Zerfällt eine Darstellung, so gilt dies auch für ihren Charakter:

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k \Longrightarrow \chi_T = \chi_{T_1} + \ldots + \chi_{T_k}. \tag{5.33}$$

Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß es eine Basis gibt bezüglich der die $T(g)$ blockdiagonal sind,

$$ST(g)S^{-1} = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T_2(g) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & T_k(g) \end{pmatrix},$$

und dass die Spur eine Klassenfunktion ist.

- Für jede Darstellung T mit Mittelbildung gilt: $\chi_T(g^{-1}) = \overline{\chi_T(g)}$.

Beweis: Wir dürfen annehmen, daß die $T(g)$ unitär sind. Dann gilt

$$\chi_T(g^{-1}) = \operatorname{Sp} T(g^{-1}) = \operatorname{Sp} T^{-1}(g) = \operatorname{Sp} T^\dagger(g) = \overline{\operatorname{Sp} T(g)} = \overline{\chi}_T(g).$$

Es folgt dann unmittelbar, dass für jede Gruppe G mit Mittelbildung und der Eigenschaft, daß jedes Element zu seinem Inversen ähnlich ist (d.h. für jedes $g \in G$ existiert ein $a \in G$ mit $g^{-1} = aga^{-1}$) die Charakteren *reellwertige* Klassenfunktionen sind.

5.4.1 Tensorprodukt von Darstellungen

Es seien T und $\tilde{T}$ zwei Darstellungen einer Gruppe G der Dimensionen n und $\tilde{n}$. Wir wählen Basen in diesen Räumen und charakterisieren Vektoren durch ihre Koordinatentupel. Dann transformiert ein Vektor $\boldsymbol{x}$ in V und ein Vektor $\boldsymbol{y}$ in $\tilde{V}$ gemäß

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow T(g)\boldsymbol{x} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y} \longrightarrow \tilde{T}(g)\boldsymbol{y}. \tag{5.34}$$

Nun bilden wir den zweistufigen Tensor t mit Komponenten $t_{ip} = x_i y_p$. Diese Komponenten transformieren wie folgt,

$$t_{ip} = x_i y_p \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \sum_{q=1}^{\tilde{n}} \Big(T(g)_{ij} \tilde{T}(g)_{pq} \Big) x_j y_q = \sum T(g)_{ij} \tilde{T}(g)_{pq}\, t_{jq}. \tag{5.35}$$

Dies ist eine lineare Transformation der $n \cdot \tilde{n}$ Tensorkomponenten t_{ip} von t. Diese Tensoren bilden eine $n \cdot \tilde{n}$-dimensionalen Vektorraum $V \times \tilde{V}$ und die Matrizen $T(g)_{ij}\tilde{T}(g)_{pq}$ sind die Komponenten der Tensordarstellung

$$T \times \tilde{T} : V \times \tilde{V} \longrightarrow V \times \tilde{V}. \tag{5.36}$$

Für explizite Rechnungen ist es nützlich eine Konvention für die Numerierung der Komponenten t zu treffen. Wegen

$$\begin{pmatrix} x_1'\boldsymbol{y}' \\ x_2'\boldsymbol{y}' \\ \vdots \\ x_n'\boldsymbol{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}\tilde{T} & T_{12}\tilde{T} & \dots & T_{1n}\tilde{T} \\ T_{21}\tilde{T} & T_{22}\tilde{T} & \dots & T_{2n}\tilde{T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1}\tilde{T} & T_{n2}\tilde{T} & \dots & T_{nn}\tilde{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\boldsymbol{y} \\ x_2\boldsymbol{y} \\ \vdots \\ x_n\boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

gehen die Darstellungsmatrizen $T(g) \otimes \tilde{T}(g)$ der Darstellung $T \times \tilde{T}$ auf einfache Weise aus denen der Darstellungen T und $\tilde{T}$ hervor: Man multipliziere jedes Matrixelement von $T(g)$ mit der Matrix $\tilde{T}(g)$. Aus der obigen Form von $T \otimes \tilde{T}$ folgt unmittelbar, daß

$$\chi_{T\times\tilde{T}} = \mathrm{Sp}\left(T \otimes \tilde{T}\right) = \sum T_{ii}\,\mathrm{Sp}\,\tilde{T} = \mathrm{Sp}\,T\,\mathrm{Sp}\,\tilde{T} = \chi_T \cdot \chi_{\tilde{T}}. \tag{5.38}$$

Wir üben dies am Beispiel des Tensorproduktes der Darstellung T_2 von S_3 mit sich selber:

$$T(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \qquad T(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also haben Darstellungsmatrizen der 4-dimensionalen Darstellung $T_2 \times T_2$ folgende Form:

$$\begin{aligned} (T \otimes T)(a) &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & 1 & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & 1 & \sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\ (T \otimes T)(c) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß in der Tat

$$\chi_{T_2\times T_2}(a) = 1 = \chi_{T_2}(a)\chi_{T_2}(a) \quad \text{und} \quad \chi_{T_2\times T_2}(c) = 0 = \chi_{T_2}(c)\chi_{T_2}(c)$$

ist. Wir haben damit für S_3 die folgende Charakterentabelle:

	$\chi_{T_1^1}$	$\chi_{T_1^2}$	χ_{T_2}	χ_{T_3}	$\chi_{T_2\times T_2}$
K_e	1	1	2	3	4
K_a	1	1	−1	0	1
K_c	1	−1	0	1	0

Da $T_3 = T_2 + T_1^1$ ist auch $\chi_{T_3} = \chi_{T_2} + \chi_{T_1^1}$. Falls nun $T_2 \times T_2$ reduzibel (und damit vollreduzibel) ist, muß es eine Summe der niedrig-dimensionalen Darstellungen T_1^1, T_1^2 und T_2 sein. Die Summe der Dimensionen der dabei auftretenden Darstellungen in der Zerlegung von $T_2 \times T_2$ muß gleich 4 sein. Aus der Charaktertabelle sehen wir, daß nur

$$T_2 \times T_2 = T_2 + T_1^1 + T_1^2$$

in Frage kommt. Dies ist auch die richtige Antwort. Um dies einzusehen müssen wir noch etwas mehr über den Zusammenhang zwischen Charakteren und Darstellungen wissen.

Diedergruppen: Die Diedergruppe D_n besteht aus den möglichen Deckbewegungen eines regulären n-Ecks. Betrachten wir D_6 etwas genauer: Die Drehungen a, a^2, a^3, a^4, a^5 und

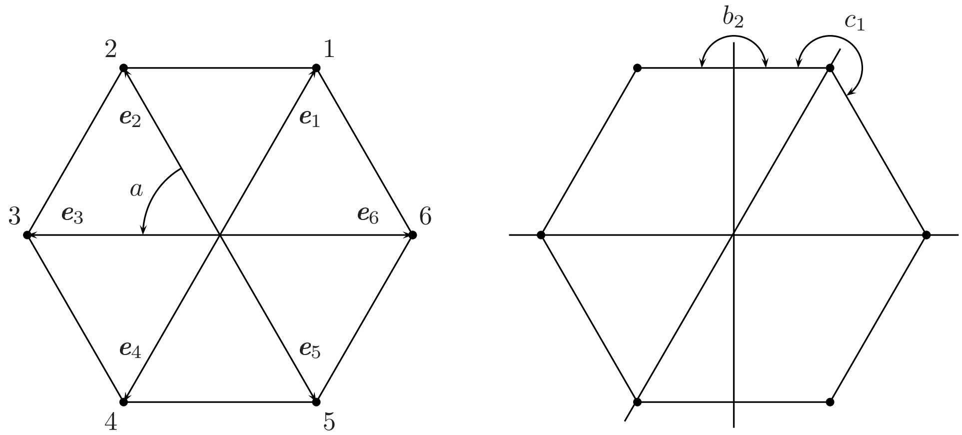

Abbildung 5.3: *Die Erzeugenden der Diedergruppe D_6.*

$a^6 = e$ bilden eine Untergruppe von D_6. Diese Untergruppe ist gerade die ABELsche zyklische Gruppe C_6 der Ordnung 6. Dann gibt es noch die Spiegelungen b_i vom Typus b und die Spiegelungen c_i vom Typus c (siehe Abb.5.3). Die Gruppe besteht also aus 12 Elementen. Wir ordnen die Elemente gemäß

$$\{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}.$$

Wie man aus der Abbildung leicht entnimmt, gelten zum Beispiel

$$\begin{array}{cccccc} ab_1 = c_1, & ac_1 = b_2, & ab_2 = c_2, & ac_2 = b_3, & ab_3 = c_3, & ac_3 = b_1 \\ b_1a = c_3, & c_1a = b_1, & b_2a = c_1, & c_2a = b_2, & b_3a = c_2, & c_3a = b_3. \end{array}$$

Die Multiplikationstabelle ist

	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
e	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b_1	b_2	b_2	c_1	c_2	c_3
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	e	c_1	c_2	c_3	b_2	b_3	b_1
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	e	a	b_2	b_3	b_1	c_2	c_3	c_1
a^3	a^3	a^4	a^5	e	a	a^2	c_2	c_3	c_1	b_3	b_1	b_2
a^4	a^4	a^5	e	a	a^2	a^3	b_3	b_1	b_2	c_3	c_1	c_2
a^5	a^5	e	a	a^2	a^3	a^4	c_3	c_1	c_2	b_1	b_2	b_3
b_1	b_1	c_3	b_3	c_2	b_2	c_1	e	a^4	a^2	a^5	a^3	a
b_2	b_2	c_1	b_1	c_3	b_3	c_2	a^2	e	a^4	a	a^5	a^3
b_3	b_3	c_2	b_2	c_1	b_1	c_3	a^4	a^2	e	a^3	a	a^5
c_1	c_1	b_1	c_3	b_3	c_2	b_2	a	a^5	a^3	e	a^4	a^2
c_2	c_2	b_2	c_1	b_1	c_3	b_3	a^3	a	a^5	a^2	e	a^4
c_3	c_3	b_3	c_2	b_2	c_1	b_1	a^5	a^3	a	a^4	a^2	e

Wir sehen, daß die Gruppenelement a und b_1 die Diedergruppe erzeugen. Deshalb genügt es, die Darstellungen der erzeugenden Elemente zu notieren.

Sind die Ecken des 6-Ecks die $C-H$'s des Benzols, so hat Hückel als Modell-Hamilton-Operator

$$H \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

vorgeschlagen: Die Energie ist gleich der Summe der Nachbarwerte. Bis auf ein Vielfaches der Identität ist H die diskretisierte zweite Ableitung. Offensichtlich vertauscht H mit allen Symmetrietransformationen des 6-Ecks, d.h. mit den Darstellungen der Diedergruppe D_6. Nun wollen wir zuerst einige spezielle Darstellungen untersuchen. Später werden wir alle Darstellungen von D_6 konstruieren.

Natürlich gibt es die Einsdarstellung T_1^1 und die alternierende Darstellung T_1^2 die $a \to 1$ und $b_1 \to -1$ zuordnet. Um eine 6-dimensionale Darstellung zu konstruieren, belegen wir die Eckpunkte des 6-Ecks mit $1, \dots, 6$ und Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \dots \boldsymbol{e}_6$. Dann dreht $T(a)$ den Vektor $\boldsymbol{e}_i$ in den Vektor $\boldsymbol{e}_{i+1}$, wobei $\boldsymbol{e}_7 \equiv \boldsymbol{e}_1$ ist. Also ist

$$T(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

Die Spiegelung $T(b_1)$ vertauscht $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_6$ etc, so daß

$$T(b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow T(c_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Offensichtlich ist Spur jeder dieser Permutationsmatrizen gleich der Anzahl *Fixelemente*.

Ausreduktion: Der Unterraum aufgespannt durch $\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_6$ ist invariant unter Drehungen und Spiegelungen. Die Darstellung auf diesem eindimensionalen Unterraum ist die Einsdarstellung T_1^1. Der Vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_5 - \boldsymbol{e}_6$ geht unter a und unter b_1 in $-\boldsymbol{x}$ über. Also definiert $\boldsymbol{x}$ einen zweiten invarianten Teilraum mit Darstellung $T(a) = T(b_1) = -1$ und dieser trägt eine eindimensionale Darstellung T_1^2.

Seien nun

$$\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{e}_4 - \boldsymbol{e}_5 + \boldsymbol{e}_6 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4 - 2\boldsymbol{e}_5 - \boldsymbol{e}_6.$$

Dann gilt:

$$T(a) : \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z} \to -\boldsymbol{y} \qquad T(b_1) : \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{z} \to \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}.$$

Also ist der von $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ aufgespannte Unterraum invariant und trägt eine 2-dimensionale Darstellung T_2^1. Diese ist äquivalent zur Darstellung die man erhält, wenn man die Deckbewegungen in einem elementaren Koordinatensystem beschreibt.

5.5 Lemma von Schur

Das Lemma von Schur: *Es seien T_1, T_2 zwei irreduzible Darstellungen einer Gruppe G vorgegeben. Die entsprechenden Darstellungsmatrizen $T_1(g)$ und $T_2(g)$ wirken in den Vektorräumen V_1 und V_2 der Dimensionen n_1 und n_2. Es sei weiterhin*

$$H : V_1 \longrightarrow V_2$$

eine lineare Abbildung, so daß gilt

$$HT_1(g) = T_2(g)H, \qquad \forall g \in G. \tag{5.42}$$

Dann ist entweder:

1. $H = 0$ *oder (im ausschließenden Sinn)*
2. $n_1 = n_2$, *H nicht singulär und $T_2(g) = HT_1(g)H^{-1}$ für alle $g \in G$. Mit anderen Worten: die Darstellungen T_1 und T_2 sind zueinander äquivalent und H ist die vermittelnde Koordinatentransformation.*

Die beim SCHURschen Lemmas vorliegende Situation ist in der folgenden Abbildung skizziert.

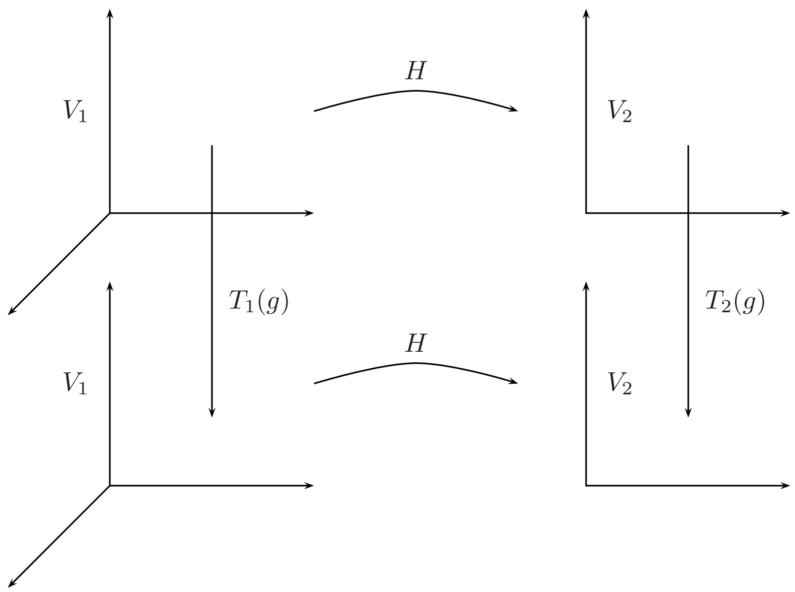

Abbildung 5.4: *$HT_1(g)$ und $T_2(g)H$ sollen dieselbe Abbildung sein.*

Beweis des Lemmas von Schur: Es sei $H(V_1) \subset V_2$ das Bild von V_1 unter H. Nach Voraussetzung gilt:

$$T_2 H(V_1) = HT_1(V_1) = H(V_1),$$

da die irreduzible Darstellung T_1 keinen echten invarianten Teilraum von V_1 hat. Also ist $H(V_1) \subset V_2$ ein invarianter Teilraum unter T_2. Da T_2 nach Voraussetzung irreduzibel ist, existieren keine echten invarianten Teilräume von V_2. Es folgt also

1. 1. Alternative: Es ist $H(V_1) = 0$. Dies führt zur ersten Behauptung des Lemmas.

2. 2. Alternative: Es ist $H(V_1) = V_2$. Dann muß die Dimension von V_1 mindestens so groß wie diejenige von V_2 sein, $n_1 \geq n_2$. Wir führen den Kern der Abbildung H ein. Nach Voraussetzung gilt offenbar

   $$HT_1\big(\text{Kern}(H)\big) = T_2 H\big(\text{Kern}(H)\big) = \emptyset.$$

   Also bilden die T_1 den Kern von H in sich ab, und $\text{Kern}(H)$ ist ein invarianter Teilraum von T_1. Da T_1 irreduzibel ist, ist entweder $\text{Kern}(H) = V_1$ oder $\text{Kern}(H) = 0$. Den ersten Fall haben wir schon abgehandelt und es verbleibt $\text{Kern}(H) = 0$. Daraus folgt $n_2 \geq n_1$.

Wir schließen, daß H eine reguläre quadratische Matrix sein muß. Damit gilt wegen der Voraussetzung des Lemmas:

$$HT_1(g)H^{-1} = T_2(g), \qquad \forall g \in G.$$

Beachte, daß das SCHURsche Lemma für reelle und komplexe Darstellungsräume V_1, V_2 gilt.

Wir wollen zwei für die Physik wichtige Schlussfolgerungen aus diesem Lemma ziehen.

Korollar: *Es sei T eine irreduzible Darstellung einer Gruppe G auf eine Vektorraum V. Der lineare Operator H vertausche mit allen darstellenden Matrizen: $HT(g) = T(g)H$, $\forall g \in G$. Dann ist die Matrix H ein Vielfaches der Identität.*

Beweis: Sei λ ein Eigenwert von H (eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von H). Mit H vertauscht auch $H - \lambda$ mit den $T(g)$. Da $\det(H - \lambda) = 0$ ist, kommt nur die 1. Alternative im Lemma von SCHUR zum Zug: Also ist $H - \lambda = 0$ und damit $H = \lambda$.

Korollar: *Es sei T eine Darstellung von G auf dem n-dimensionalen Vektorraum V. Die Darstellung zerfalle in lauter irreduzible, paarweise inäquivalente Darstellungen,*

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_m.$$

Die Matrix $H : V \to V$ einer linearen Abbildung vertausche mit allen $T(g)$:

$$[H, T(g)] = 0, \qquad \forall g \in G.$$

Dann sind die zu den irreduziblen Darstellungen gehörenden invarianten Teilräume Eigenräume des linearen Operators H.

Beweis für $m = 2$ des Korollars: In einem geeigneten Koordinatensystem haben die $T(g)$ die Gestalt

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}.$$

In Anlehnung schreiben wir H in Blockmatrix-Form

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & Q_1 \\ Q_2 & H_2 \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{pmatrix} T_1H_1 & T_1Q_1 \\ T_2Q_2 & T_2H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1T_1 & Q_1T_2 \\ Q_2T_1 & H_2T_2 \end{pmatrix}$$

also insbesondere

$$[T_1(g), H_1] = 0 \quad \text{und} \quad [T_2(g), H_2] = 0.$$

Nach dem vorherigen Korollar müssen damit H_1 und H_2 auf den Darstellungsräumen V_1 und V_2 der irreduziblen Darstellungen T_1 und T_2 proportional zur Identität sein:

$$H_i = \lambda_i \quad \text{auf} \quad V_i, \quad i = 1, 2$$

Anderseits gilt

$$T_1(g)Q_1 = Q_1 T_2(g) \quad \text{und} \quad T_2(g)Q_2 = Q_2 T_1(g), \quad \forall g \in G.$$

Da die beiden Darstellungen als inäquivalent vorausgesetzt wurden, kann die 2. Alternativen des SCHURschen Lemmas nicht eintreten. Somit folgt $Q_1 = Q_2 = 0$. Also sind die beiden Darstellungsräume V_1 und V_2 Eigenräume von H mit Eigenwerten λ_1 und λ_2.

5.5.1 Orthogonalitätsrelationen

Sei G eine Gruppe mit Mittelbildung. Die komplexwertigen Funktionen $\{f : G \to \mathbb{C}\}$ bilden einen linearen Raum und die Mittelbildung definiert ein Skalarprodukt auf diesem Raum,

$$(f_1, f_2) = \mathcal{M}\left(\bar{f}_1 \cdot f_2\right). \tag{5.43}$$

Für jede endliche Gruppe G definiert dies einen endlich-dimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt. Ist $\{g_1, \dots, g_h\}$ eine Liste aller Elemente von G, dann bilden zum Beispiel die Funktionen $\{f_1, \dots, f_h\}$, definiert durch

$$f_i(g) = \begin{cases} |G|^{1/2} & \text{für } g = g_i \\ 0 & \text{für } g \neq g_i \end{cases} \tag{5.44}$$

eine orthonormierte Basis des Vektorraums. Für kontinuierliche LIE-Gruppen stellt sich die Frage nach der Vollständigkeit des Funktionenraums. Das Skalarprodukt

$$(f_1, f_2) = \int_G d\mu(g) \bar{f}_1(g) f(g) \tag{5.45}$$

definiert eine Norm und damit einen Abstandsbegriff auf dem betrachteten Funktionenraum. Nun vervollständigt man diesen Raum bezüglich der von der Norm definierten Metrik. Dieser Raum heisst $L_2(G, d\mu)$ und spielt in der Quantenmechnik eine herausragende Rolle. Jede CAUCHY-Folge in $L_2(G, d\mu)$ konvergiert gegen eine Funktion in $L_2(G, d\mu)$. Im Folgenden werden über die Theorie der Charakteren eine orthonormierte Basis der Klassenfunktionen in $L_2(G, d\mu)$ konsturieren.

Es seien $T_i : g \to T_i(g)$, $i = 1, 2$ zwei irreduzible Darstellungen der Dimensionen n_i und $U : V_1 \to V_2$ eine Rechteck-Matrix so, daß $T_2 U T_1^{-1}$ definiert ist. Wir betrachten die Matrix

$$H = \mathcal{M}\left(T_2(g) U T_1^{-1}(g)\right).$$

Dabei ist unter der Mittelbildung von Matrizen das Mitteln über die einzelnen Matrixelemente zu verstehen. Diese definieren komplexwertige Funktionen

$$g \longrightarrow \left(T_2(g)UT_1^{-1}(g)\right)_{pj}.$$

Weiter sei

$$\tilde{T}_1 = T_1(\tilde{g}) \quad \text{und} \quad \tilde{T}_2 = T_2(\tilde{g})$$

wobei $\tilde{g} \in G$ ein festes Element ist, zwei darstellende Matrizen. Wegen der Invarianz des Mittelwertes folgt:

$$\begin{aligned} H\tilde{T}_1 &= \mathcal{M}\left(T_2(g)UT_1^{-1}(g)\tilde{T}_1\right) = \tilde{T}_2\mathcal{M}\left(\tilde{T}_2^{-1}T_2(g)UT_1^{-1}(g)\tilde{T}_1\right) \\ &= \tilde{T}_2\mathcal{M}\left(T_2(\tilde{g}^{-1}g)UT_1^{-1}(\tilde{g}^{-1}g)\right) = \tilde{T}_2\mathcal{M}\left(T_2(g)UT_1^{-1}(g)\right). \end{aligned}$$

Also haben wir

$$HT_1(\tilde{g}) = T_2(\tilde{g})H, \qquad \forall \tilde{g} \in G.$$

Damit kann das Lemma von Schur anwendet werden:

1. Alternative: T_1 und T_2 sind nicht äquivalent.

In diesem Fall ist $H = 0$ und damit

$$\mathcal{M}\left(\sum_{qi} T_2(g)_{pq}U_{qi}T_1^{-1}(g)_{ij}\right) = 0.$$

Wir wählen für U speziell eine Rechtecksmatrix, die nur an der Stelle (q, i) eine 1 enthält und sonst Nullen. Für dieses U folgt

$$\mathcal{M}\left(T_2(g)_{pq}T_1(g)^{-1}_{ij}\right) = 0 \quad \text{(keine Summe)}.$$

Jetzt wählen wir noch $p = q, i = j$ und summieren über p und i. Dann ergibt sich

$$\mathcal{M}\left(\operatorname{Sp} T_2 \operatorname{Sp} T_1^{-1}\right) = 0.$$

Da (für unitäre T) $\operatorname{Sp} T^{-1} = \operatorname{Sp} \bar{T}$ ist, folgt schließlich

$$(\chi_{T_1}, \chi_{T_2}) = \mathcal{M}\left(\bar{\chi}_{T_1}\chi_{T_2}\right) = 0, \qquad T_1, T_2 \quad \text{inäquivalent und irreduzibel.} \tag{5.46}$$

Wir haben wir den folgenden wichtigen

Satz: *Die Charaktere χ_{T_1} und χ_{T_2} von 2 inäquivalenten irreduziblen Darstellungen einer Gruppe mit invarianter Mittelbildung sind unitär orthogonal bezüglich der Mittelbildung.*

2. Alternative: Die beiden n-dimensionalen Darstellungen T_1 und T_2 sind äquivalent.

Nach Wahl eines angepassten Koordinatensystems ist $T_1 = T_2 = T$. Somit ist $T(\tilde{g})H = HT(\tilde{g})$ für alle $\tilde{g} \in G$ und nach obigem Korollar ist $H = \lambda \mathbb{1}$. Wegen

$$\operatorname{Sp} H = n\lambda = \operatorname{Sp} \mathcal{M}\left(TUT^{-1}\right) = \mathcal{M}\left(\operatorname{Sp}[TUT^{-1}]\right) = \operatorname{Sp} U,$$

wobei wir $\mathcal{M}(1) = 1$ benutzen, ist $n\lambda = \operatorname{Sp} U$ und damit

$$H_{iq} = \mathcal{M}\left(\sum_{jp} T_{ij} U_{jp} T^{-1}_{pq}\right) = \frac{\operatorname{Sp} U}{n} \delta_{iq}. \tag{5.47}$$

Die Elemente der quadratische Matrix U sollen nun alle verschwinden, bis auf $U_{jp} = 1$. Für diesen Spezialfall folgt:

$$H_{iq} = \mathcal{M}\left(T_{ij} T^{-1}_{pq}\right) = \frac{\operatorname{Sp} U}{n} \delta_{iq} = \frac{1}{n} \delta_{jp} \delta_{iq}.$$

Nun setzen wir $i = j, p = q$ und summieren über i und p. Dies führt zum

Satz: *Der Charakter jeder irreduziblen Darstellung einer Gruppe mit invarianter Mittelbildung hat die Norm* 1 *bezüglich Mittelbildung,* $\mathcal{M}\big(\bar{\chi}_T \chi_T\big) = (\chi_T, \chi_T) = 1$.

Offensichtlich sind die Charakteren orthonormale Elemente im Raum der Klassenfunktionen in $L_2(G, d\mu)$.

Es sei T eine beliebige Darstellung der Gruppe G mit Mittelbildung, d.h. sie kann als Summe von irreduziblen Darstellungen geschrieben werden,

$$T = \sum_{i=1}^{m} c_i T_i. \tag{5.48}$$

Zueinander äquivalente Darstellungen können als gleich betrachtet werden. $2T_2$ bedeutet dann, daß die irreduzible Darstellung T_2 in der Zerlegung von T zweimal vorkommt. Die $T_1, \ldots, T_m$ sei ein Liste aller möglichen irreduziblen Darstellung der betreffenden Gruppe. Offensichtlich ist

$$\chi_T(g) = c_1 \chi_{T_1}(g) + \ldots + c_m \chi_{T_m}(g). \tag{5.49}$$

Nun gilt

$$(\chi_{T_i}, \chi_T) = \mathcal{M}\left(\bar{\chi}_{T_i} \cdot \chi_T\right) = c_i \tag{5.50}$$

und wir haben das folgende Resultat gewonnen:

Satz [Ausreduktionsformel]: *Die irreduziblen Darstellung* T_i *tritt in einer Darstellung* T *einer Gruppe mit Mittelbildung genau* $c_i = (\chi_i, \chi_T)$*-mal auf und* $(\chi_T, \chi_T) = \sum |c_i|^2$.

Wir wollen noch zwei Schlussfolgerungen ziehen:

Satz: *Zwei beliebige Darstellungen einer Gruppe mit Mittelbildung sind genau dann äquivalent, wenn ihre Charaktere gleich sind.*

Sind zwei Darstellungen äquivalent, dann haben sie offensichtlich den gleichen Charakter. Die Umkehrung ist etwas schwieriger zu beweisen. Dazu brauchen wir das folgende

Lemma: *Aus den Spuren der Matrizen einer Darstellung lassen sich die charakteristischen Polynome dieser Matrizen berechnen.*

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der darstellenden Matrix $T = T(g)$. Jeder Eigenwert sei so oft aufgeführt, wie seine algebraische Vielfachheit beträgt. Für das charakteristische Polynom gilt:

$$\deg(\lambda - T) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = \lambda^n - s_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-)^n s_n$$

wobei die Koeffizienten die folgenden *elementarsymmetrischen Funktionen* der Eigenwerte sind:

$$s_1 = \sum \lambda_j \quad , \qquad s_2 = \sum_{i\neq j} \lambda_i\lambda_j$$
$$s_3 = \sum_{i\neq j\neq k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k \quad , \dots , \quad s_n = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n .$$

Anderseits sind mit T auch $T^2 = T(g^2), \dots, T^n = T(g^n)$ darstellende Matrizen. Die Spuren sind durch folgende *Potenzsummen* gegeben:

$$\sigma_p = \mathrm{Sp}\, T^p = \sum_i \lambda_i^p .$$

Mit Hilfe der Newtonschen Formeln kann gezeigt werden, daß jedes symmetrische Polynom eindeutig als Polynom von Potenzsummen dargestellt werden kann. In unserem Fall ist

$$s_1 = \sigma_1 \quad , \qquad s_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 - \sigma_2\right), \quad s_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3\right), \dots$$

Wir sehen also: Haben zwei Darstellungen T_1 und T_2 dieselben Charakteren, d.h. dieselben σ_p, dann haben die darstellenden Matrizen $T_1(g)$ und $T_2(g)$ identische charakteristische Polynome für alle $g \in G$. Dann sind diese ähnlich und damit sind T_1 und T_2 äquivalente Darstellungen.

Lemma: *Jede irreduzible Darstellung $T : g \to T(g)$ einer* ABELschen Gruppe *hat die Dimension* 1.

Sei $\tilde{T} = T(\tilde{g})$ eine beliebige, aber feste Matrix der Darstellung T. Da G ABELsch ist, gilt: $T(g)\tilde{T} = \tilde{T}T(g)$ für alle $g \in G$. Nach obigem Korollar muß also $\tilde{T} = \lambda\mathbb{1}$ sein. Somit sind alle darstellenden Matrizen diagonal. Dann kann die Darstellung nur irreduzibel sein, wenn sie die Dimension 1 hat.

5.6 Alle Darstellungen einer endlichen Gruppe

Wir wollen zuerst einmal untersuchen, wie viele inäquivalente irreduzible Darstellungen eine endliche Gruppe haben kann. Wir erinnern uns daran, daß die Charakteren Klassenfunktionen, d.h. auf den Ähnlichkeitsklassen von G konstant sind. Offensichtlich kann es höchstens so viele Charaktere geben wie die Gruppe Klassen hat. Wir werden sehen, daß die Anzahl inäquivalente irreduzible Charaktere genau mit der Anzahl Klassen übereinstimmt. Dazu die führen wir die sogenannte *reguläre Darstellung* der endlichen Gruppe G ein.

Die reguläre Darstellung einer Gruppe der Ordnung h erhält man, indem jedem Gruppenelement auf $1-1$-deutige Art ein Grundvektor in $\mathbb{R}^h$ zugewiesen wird. Jedem g ordnet man eine $h \times h$-Matrix $T_{\text{reg}}(g)$ zu, die diese Grundvektoren gemäß Multiplikationstabelle permutieren.

Bei Multiplikation der Gruppenelemente mit $\tilde{g} \neq e$ bleibt kein Element fest:

$$\tilde{g}g \neq g \quad \forall g \in G.$$

Somit gilt für den Charakter der regulären Darstellung

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} h \equiv |G| & \text{falls } g = e \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.51}$$

Zurück zur Diedergruppe D_6: Die reguläre Darstellung der Diedergruppe D_6 liefert für die erzeugenden Elemente

$$T_{\text{reg}}(a) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

und

$$
T_{\text{reg}}(b_1) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Man sieht sofort, daß $T^2_{\text{reg}}(b_1) = \mathbb{1}$ ist, wie von der Darstellungseigenschaft gefordert.

Was sind nun die irreduziblen Darstellungen. Wie immer gibt es die eindimensionale Einsdarstellung T^1_1 die jedem Gruppenelement eine 1 zuordnet und die alternierende Darstellung, die den Drehungen eine 1 und den Spiegelungen eine -1 zuordnet. Sei nun χ_j der Charakter einer *beliebigen* irreduziblen Darstellung von G der Dimension n_j. Wegen (5.51) ergibt die Ausreduktionsformel für die Vielfachheit c_j, mit der T_j in T_{reg} auftritt:

$$
c_j = (\bar{\chi}_j, \chi_{\text{reg}}) = \frac{1}{h} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_j(g) \cdot \chi_{\text{reg}}(g) = \frac{1}{h} \bar{\chi}_j(e) \cdot \chi_{\text{reg}}(e).
$$

Mit $\chi_j(e) = n_j$ und $\chi_{\text{reg}}(e) = h$ ergibt sich der

Satz: *Jede irreduzible Darstellung T_j der Dimension n_j kommt in der regulären Darstellung T_{reg} genau n_j mal vor:*

$$
T_{\text{reg}} = \sum_{j=1}^{k} n_j T_j \Longrightarrow h = |G| = \sum n_j^2. \tag{5.52}
$$

Angewandt auf D_6,

$$
12 = \sum_{1}^{k} n_j^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + \sum_{4}^{k} n_j^2 = 6 + \sum_{4}^{k} n_j^2,
$$

wobei wir benutzten, daß D_6 mindestens zwei eindimensionale Darstellungen und eine zweidimensionale Darstellung hat. Damit kann D_6 zusätzlich zu diesen bekannte Darstellungen nur entweder 6 zusätzliche eindimensionale, oder eine zweidimensionale und 2 eindimensionale irreduzible Darstellungen haben. Wir werden schlussendlich noch zeigen, daß das Letztere der Fall ist.

5.7 Die Charakterenmatrix

Es sei G eine beliebige endliche Gruppe der Ordnung h. G habe k Ähnlichkeitsklassen. Wir wollen die Ähnlichkeitsklassen der symmetrischen Gruppe S_n betrachten, da jede endliche Gruppe der Ordnung n isomorph zu einer echten Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n ist. Es ist zweckmäßig, die Zyklenschreibweise für Permutationen einzuführen. Beispiel

$$S_6 \ni g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim (\,1 \quad 4 \quad 6\,)(\,3 \quad 5\,)(\,2\,)\,.$$

Man ordnet die Zyklen nach abnehmender Länge an. Offensichtlich ist jede Permutation ein Produkt von elementfremden Zyklen und die Zerlegung einer Permutation in Zyklen ist, bis auf die Reihenfolge gleich langer Zyklen, eindeutig.

Zwei Permutationen von n Objekten heißen vom *gleichen Typus*, wenn in beiden Permutationen Zyklen der Länge l genau gleich oft auftreten. Zum Beispiel die Elemente

$$(\,1 \quad 3 \quad 8\,)(\,4 \quad 5\,)(\,2 \quad 6\,)(\,7\,) \quad \text{und} \quad (\,1 \quad 4 \quad 6\,)(\,3 \quad 5\,)(\,7 \quad 8\,)(\,2\,) \tag{5.53}$$

aus S_8 sind vom gleichen Typus. Für jede Permutation g aus S_n sei nun α_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ die Anzahl Zyklen der Länge j in der Zerlegung von g in Zyklen. Für die Permutationen in (5.53)

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_8 = 0.$$

Ohne Beweis notieren wir den

Satz: *Die Anzahl Permutationen vom Typus* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *ist*

$$\frac{n!}{\prod\limits_1^n \alpha_j! \cdot j^{\alpha_j}}. \tag{5.54}$$

Beispiel: die Klassentabelle von S_4 ist

Nr.	Partitionen	Typus	Anz.Zykl. $\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1$	Anz.Perm.
1)	$4=4$	(....)	1 0 0 0	6
2)	$4=3+1$	(...)(.)	0 1 0 1	8
3)	$4=2+2$	(..)(..)	0 0 2 0	3
4)	$4=2+1+1$	(..)(.)(.)	0 0 1 2	6
5)	$4=1+1+1+1$	(.)(.)(.)(.)	0 0 0 4	1

Es sei nun

$$g = (\,1 \quad 4 \quad 6\,)(\,3 \quad 5\,)(\,2\,) \quad \text{und} \quad a = (\,1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 6\,)(\,4\,)$$
$$\Rightarrow a^{-1} = (\,3 \quad 1 \quad 6 \quad 2 \quad 5\,)(\,4\,)\,.$$

Nun wollen wir aga^{-1} bestimmen:

$$ga^{-1} = (3 \quad 4 \quad 6 \quad 2)(5)(1), \quad aga^{-1} = (3 \quad 4 \quad 1)(2 \quad 5)(6).$$

Also ist aga^{-1} vom selben Typus wie g. Allgemein gilt

Satz: *Zwei Permutationen $g, \tilde{g}$ der symmetrischen Gruppe S_n sind genau dann zueinander ähnlich, $\tilde{g} = aga^{-1}$, wenn sie vom gleichen Typus sind. Damit haben alle Permutationen vom selben Typus denselben Charakter. Die Anzahl Ähnlichkeitsklassen ist gleich der Anzahl der geordneten Partitionen von n.*

Aus der *Charakterentabelle*

Klassen	(1)	(2)	...	...	(k)
Ordnung d.Kl.	h_1	h_2	...	...	h_k
χ_1	1	1	...	...	1
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(2)$	...	...	$\chi_2(k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	...	$\vdots$
χ_j	$\chi_j(1)$	$\chi_j(2)$	...	...	$\chi_j(k)$

können wir die sogenannte *Charakterenmatrix* konstruieren

Klassen	(1)	(2)	...	...	(k)
Ordnung d.Kl.	h_1	h_2	...	...	h_k
χ_1	$\sqrt{\frac{h_1}{h}} \cdot 1$	$\sqrt{\frac{h_2}{h}} \cdot 1$	...	...	$\sqrt{\frac{h_k}{h}} 1$
χ_2	$\sqrt{\frac{h_1}{h}} \cdot \chi_2(1)$	$\sqrt{\frac{h_2}{h}} \cdot \chi_2(2)$	...	...	$\sqrt{\frac{h_k}{h}} \cdot \chi_2(k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	...	$\vdots$
χ_j	$\sqrt{\frac{h_1}{h}} \cdot \chi_j(1)$	$\sqrt{\frac{h_2}{h}} \cdot \chi_j(2)$	...	...	$\sqrt{\frac{h_k}{h}} \cdot \chi_j(k)$

Die Faktoren wurden gerade so eingeführt, daß die Zeilen der Charakterenmatrix unitär-orthogonal zueinander sind:

$$\frac{1}{h} \sum_{\ell=1}^{k} h_\ell \, \bar{\chi}_p(\ell) \cdot \chi_q(\ell) = (\chi_p, \chi_q) = \delta_{pq}.$$

Aus dieser Tatsache folgt, daß die Anzahl zueinander inäquivalenter irreduzibler Darstellungen j kleiner gleich der Anzahl k von Äquivalenzklassen sein muß.

Nun kann man mit ähnlichen Methoden wie oben noch beweisen, daß

$$\sum_{p=1}^{j} \bar{\chi}_p(g) \chi_p(\tilde{g}) = 0$$

falls g und $\tilde{g}$ zu verschiedenen Ähnlichkeitsklassen gehören. Damit sind auch die Kolonnen der Charakterenmatrix unitär-orthogonal zueinander und die Matrix ist quadratisch und unitär. Damit haben wir den wichtigen

Satz: *Es gibt genau so viele irreduzible Darstellungen einer endlichen Gruppe, wie es Äquivalenzklassen gibt. Jede Klassenfunktion ist eine Linearkombination der orthonormierten Charakteren.*

Beispiel: S_4 hat 5 Äquivalenzklassen und damit 5 irreduzible Darstellungen. Wegen

$$\sum_{i=1}^{5} n_i^2 = 24$$

und der Existenz der Eins- und alternierenden Darstellung, ist nur

$$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (1, 1, 2, 3, 3)$$

möglich. Es gibt also neben den zwei eindimensionalen noch eine zweidimensionale und zwei dreidimensionale irreduzible Darstellung.

Die Diedergruppe D_6 hat 12 Elemente und 6 Ähnlichkeitsklassen. Also gibt es 4 eindimensionale und 2 zweidimensionale irreduzible Darstellungen.

Für jede Abelsche Gruppe ist $aga^{-1} = g$ und damit gibt es so viele Klassen wie die Gruppe Elemente hat. Wegen

$$h = \sum_{i=1}^{j} n_i^2 \quad \text{und} \quad j = h,$$

müssen alle $n_i = 1$ sein. Wir sehen (wie schon früher), daß alle Darstellungen einer Abelschen Gruppe eindimensional sein müssen.

5.8 Die Charakteren von kompakten Lie-Gruppen

In den wenigen verbleibenden Stunden wollen wir die wichtigsten gruppentheoretischen Werkzeuge bereitstellen die für ein Verständnis von kontinuierlichen Symmetrien in der Physik notwendig sind. Wir beginnen mit der einfachsten kompakten Lie-Gruppe.

5.8.1 Die Charakter von $U(1)$:

Diese Gruppe ist Abelsch, und wegen $aga^{-1} = g$ bildet jedes Element eine Äquivalenzklasse. Daher sind alle Funktionen $f : U(1) \to \mathbb{C}$, d.h. 2π-periodische Funktionen $f(t) = f(g(t))$, automatisch Klassenfunktionen.

Alle irreduziblen Darstellungen sind eindimensional und in einer adaptierten Basis unitär. Also hat jede Darstellung die Form

$$T(g(t)) = e^{ih(t)}, \quad g(t) = e^t, \quad h(t) \in \mathbb{R},$$

und die Darstellungseigenschaft impliziert

$$e^{ih(0)} = e^{ih(2\pi)} = 1 \quad \text{und} \quad e^{ih(t_1+t_2)} = e^{i(h(t_1)+h(t_2))}.$$

Also ist $h(t)$ ein lineare Funktion mit $h(t+2\pi) = h(t) + n$. Damit haben die irreduziblen Darstellungen die Form

$$T_n : e^{it} \longrightarrow T(e^{it}) = e^{int}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{5.55}$$

Da $\mathrm{Sp}\,(T(g(t)) = T(g(t)) = \exp(int)$ sind die Charakteren der irreduziblen Darstellungen der Gruppe $U(1)$

$$\chi_n(t) = \chi_{T_n}(t) = e^{int}. \tag{5.56}$$

Diese sind in der Tat unitär-orthogonal bezüglich der Mittelbildung,

$$(\chi_n, \chi_m) = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{-int} e^{imt} = \delta_{nm}, \tag{5.57}$$

wie es nach der allgemeinen Theorie über die Charakteren von Gruppen mit Mittelbildung sein muß. Jede Klassenfunktion $f(t)$, d.h. 2π-periodische Funktion, kann nach der Theorie der Fourier-Reihen nach ebenen Wellen entwickelt werden. Also haben wir genau dieselbe Situation wie für endliche Gruppen: Jede Klassenfunktion $f(t)$ kann als Linearkombination der unitär-orthogonalen Charakteren geschrieben werden,

$$f(t) = \sum_n c_n \chi_n(t), \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int e^{-int} f(t) = (\chi_j, f)\,. \tag{5.58}$$

Die Fourier-Analyse ist also ein Spezialfall der Theorie der Charakteren. In der Tat, es gilt der folgende

Satz von Peter und Weyl: *Zu jeder kontinuierlichen Gruppe G mit Mittelbildung existieren unendlich viele Charaktere, welche ein vollständiges orthogonales Funktionensystem auf den Klassenfunktionen in $L_2(G)$ bilden.*

Es gibt noch eine allgemeinere Version des Theorems von Peter und Weyl. Danach bilden die Matrixelemente aller irreduziblen Darstellungen einer kontinuierlichen Gruppe mit Mittelbildung eine othogonale Basis im Hilbert-Raum $L_2(G, d\mu)$. Im Folgenden werden wir ein vollständiges und orthonormiertes System von *Klassenfunktionen* für $SU(2)$ konstruieren.

5.8.2 Die Charakter von $SU(2)$

In diesem Abschnitt konstruieren wir alle Charakteren der quantenmechanischen Drehgruppe. Der Charakter der Einsdarstellung T_0 und der zweidimensionalen definierenden Darstellung $T_{\frac{1}{2}}$ in (5.17) sind

$$\chi_0(\theta)=1 \quad \text{und} \quad \chi_{\frac{1}{2}}(\theta)=2\cos\theta=e^{i\theta}+e^{-i\theta}. \tag{5.59}$$

Dies sind die einzigen ein- und zweidimensionalen Darstellungen von $SU(2)$ (siehe unten). Mit den Integrationsformeln

$$\int \sin^2\theta=\frac{\pi}{2},\quad \int \sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{\pi}{8} \quad \text{und} \quad \int \sin^2\theta\cos\theta=0, \tag{5.60}$$

wobei jeweils von $\theta=0$ bis π integriert wird, findet man für deren Skalarprodukte

$$(\chi_0,\chi_0)=(\chi_{\frac{1}{2}},\chi_{\frac{1}{2}})=1 \quad \text{und} \quad (\chi_0,\chi_{\frac{1}{2}})=0, \tag{5.61}$$

in Einklang mit der allgemeinen Theorie. Wir erinnern an das Skalarprodukt für zwei Klassenfunktionen auf $SU(2)$,

$$(f_1,f_2)=\frac{2}{\pi}\int d\theta\sin^2\theta\;\bar{f}_1(\theta)f_2(\theta). \tag{5.62}$$

Um die nächste irreduzible Darstellung zu gewinnen, betrachten wir die 4-dimensionale Tensorprodukt-Darstellung

$$T_{\frac{1}{2}}\times T_{\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad \chi_{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}(\theta)=\chi_{\frac{1}{2}}(\theta)\cdot\chi_{\frac{1}{2}}(\theta)=e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}.$$

Offensichtlich ist

$$\Big(\chi_0,\chi_{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}\Big)=1 \quad \text{und} \quad \Big(\chi_{\frac{1}{2}},\chi_{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}\Big)=0,$$

so daß das Tensorprodukt die Einsdarstellung einmal enthält. Also gilt

$$T_{\frac{1}{2}}\times T_{\frac{1}{2}}=T_0\oplus T_1,\quad \chi_1(\theta)=e^{2i\theta}+1+e^{-2i\theta}. \tag{5.63}$$

Da $(\chi_1,\chi_1)=1$ ist, ist T_1 eine 3-dimensionale irreduzible Darstellung Wie wir sehen werden ist es eine wohlbekannte Matrixgruppe, nämlich die 3-dimensionale Drehgruppe $SO(3)$. Um dies einzusehen, schauen wir uns die Tensordarstellung $T_{\frac{1}{2}}\times T_{\frac{1}{2}}$ etwas genauer an. Unter $T_{\frac{1}{2}}$ gehen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ in $g\boldsymbol{x}$ und $g\boldsymbol{y}$ über, so daß

$$\begin{pmatrix} x_1y_1\\ x_1y_2\\ x_2y_1\\ x_2y_2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2\\ -a\bar{b} & a\bar{a} & -b\bar{b} & b\bar{a}\\ -\bar{b}a & -\bar{b}b & \bar{a}a & \bar{a}b\\ \bar{b}^2 & -\bar{b}\bar{a} & -\bar{a}\bar{b} & \bar{a}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1y_1\\ x_1y_2\\ x_2y_1\\ x_2y_2\end{pmatrix}.$$

Benutzen wir statt x_iy_y die symmetrische bzw. antisymmetrischen Kombinationen

$$Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1y_2-x_2y_1\right),\qquad (Y_{11},Y_{10},Y_{1-1})=\left(x_1y_1,\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2-x_2y_1),x_2y_2\right)$$

dann findet man das folgende Transformationsverhalten

$$\begin{pmatrix} Y_{00} \\ Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ 0 & -\sqrt{2}a\bar{b} & a\bar{a}-b\bar{b} & \sqrt{2}b\bar{a} \\ 0 & \bar{b}^2 & -\sqrt{2}\bar{a}\bar{b} & \bar{a}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{00} \\ Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix}. \tag{5.64}$$

Der eindimensionale invariante Unterraum wird also von der antisymmetrischen Kombination Y_{00} aufgespannt und der dreidimensionale von den symmetrischen Kombinationen Y_{1m}. Setzen wir schlussendlich noch

$$(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{11} - Y_{1-1}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(Y_{11} + Y_{1-1}), Y_{10}\right), \tag{5.65}$$

dann sieht die dreidimensionale Darstellung folgendermaßen aus

$$\boldsymbol{X} \longrightarrow (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{X})\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{X} \sin 2\theta - \boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{X}) \cos 2\theta = R(2\theta, \boldsymbol{e})\boldsymbol{X}, \tag{5.66}$$

wobei θ der Winkel in der Parametrisierung (5.17) und

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} \sin\psi\cos(\pi+\varphi) \\ \sin\psi\sin(\pi+\varphi) \\ \cos\psi \end{pmatrix}$$

ein Einheitsvektor ist. Dies ist gerade eine Drehung von $\boldsymbol{X}$ um die Achse $\boldsymbol{e}$ mit Winkel 2θ. Die Matrixelemente von R sind reell und damit kann R als Transformation auf $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ angesehen werden. Damit ist $g \to R(g) \in SO(3)$ eine irreduzible Darstellung von $SU(2)$ durch 3-dimensionale Drehungen im $\mathbb{R}^3$. Beachte, daß $R(g) = R(-g)$, d.h. daß $g \to R(g)$ keine treue Darstellung ist.

Nun kann man weiterfahren und $T_1 \times T_{\frac{1}{2}}$ mit Charakter

$$\chi_{1\times\frac{1}{2}} = \chi_1 \cdot \chi_{\frac{1}{2}} = e^{3i\theta} + 2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} + e^{-3i\theta} = \chi_{\frac{1}{2}} + \chi_{\frac{3}{2}}$$

ausreduzieren. Offensichtlich enthält diese Tensordarstellung die Darstellung $T_{\frac{1}{2}}$ genau einmal. Da $(\chi_{\frac{3}{2}}, \chi_{\frac{3}{2}}) = 1$ ist, zerfällt $T_1 \times T_{\frac{1}{2}}$ in die irreduzible Darstellung $T_{\frac{1}{2}}$ und eine 4-dimensionale irreduzible Darstellung $T_{\frac{3}{2}}$. Ähnlich gewinnt man auch $T_2, T_{\frac{5}{2}}$ usf. Man findet die Charakteren

$$\chi_j = \sum_{n=-j}^{j} e^{2in\theta} = \frac{\sin(2j+1)\theta}{\sin\theta}, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots . \tag{5.67}$$

Wegen $\chi_j(e) = 2j + 1$ ist

$$\dim T_j = 2j + 1$$

und mit der Integrationsformel

$$\int_0^\pi \sin(2j+1)\theta \, \sin(2j'+1)\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{jj'} \tag{5.68}$$

sind diese Darstellungen irreduzibel und inäquivalent. Die halbganze Quantenzahl j charakterisiert in der Quantenmechanik den Spin. Da

$$\lim_{\epsilon \to 0} \chi_j(\pi - \epsilon) = (2j+1)(-)^{2j} = (-)^{2j}\chi(0)$$

sind die Darstellungen mit ganzzahligen Spin j untreu,

$$T_j(-e) = (-)^{2j}\mathbb{1}_{2j+1}. \tag{5.69}$$

Jede Klassenfunktion $f(\theta) \in L_2(SU(2))$ kann nach PETER und WEYL als Linearkombination der Charakteren geschrieben werden

$$f(\theta) = \sum_j c_j \frac{\sin(2j+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad c_j = \frac{2}{\pi}\int \sin^2\theta \, \chi_j(\theta) f(\theta) d\theta. \tag{5.70}$$

Dass die Charakteren χ_j ein vollständiges Funktionensystem auf dem HILBERT-Raum

$$L_2\left([0,\pi], \frac{2}{\pi}\sin^2\theta d\theta\right) \tag{5.71}$$

der Klassenfunktionen von $SU(2)$ bilden, kann auch anderweitig eingesehen werden. Dies zeigt dann posteriori, daß die Spin-j Darstellungen T_j *alle* irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ sind.