# Kapitel 4

# Gruppen

Die Gruppentheorie ist eine rein mathematische Disziplin ziemlich abstrakter Art. Ihre große Bedeutung für die Physik erhält sie erst, wenn man mit ihr den Begriff der Symmetrie verbindet. Die im Folgenden zu behandelnde Gruppen- und Darstellungstheorie wurde in den letzten Jahrzehnten das alltägliche Instrument der Festkörper-, Kern- und Elementarteilchenphysiker. Zum Beispiel versucht man in der modernen Theorie der Elementarteilchen mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen möglichst viele Eigenschaften der 'elementarsten Bausteine' zu erklären ohne die den Wechselwirkungen zugrunde liegenden Dynamiken zu lösen. Die Grundlagen der Gruppentheorie wurden in erster Linie von Evariste Galois (1811-1832) im Alter von 21 Jahren niedergelegt. Er untersuchte die Lösbarkeit der Gleichungen mit einer Unbekannten $n$-ten Grades mit konstanten Koeffizienten durch Radikale. Mit Einführung des Gruppenbegriffes gelang ihm die Entscheidung dieses uralten Problems. Die Gruppentheorie ist heute ein wesentlicher Bestandteil der physikalischen Forschung. Hermann Weyl, der schon früh die Relevanz dieser Theorie für die Physik erkannte, schreibt dazu[1]:

*Symmetrie, ob man ihre Bedeutung weit oder eng faßt, ist eine Idee, vermöge derer der Mensch durch Jahrtausende seiner Geschichte versucht hat, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen und zu schaffen.*

Wegen des großen Umfangs habe ich eine (natürlich subjektive) Auswahl getroffen. Viele Beweise fehlen völlig oder werden nur skizziert. Der aufmerksame Zuhörer sollte aber am Ende dieses Kapitels in der Lage sein, einfache gruppentheoretische Probleme, wie sie etwa in der Quantenmechanik, Molekülphysik, Festkörperphysik oder Teilchenphysik auftreten, selbständig zu lösen.

In meinem Skript um zur Vorlesung *Gruppentheoretische Methoden der Physik* finden Sie eine ausgewählte Liste von Büchern, Skripten und algebraische Computerprogrammen zur

[1] H. Weyl, Symmetrie, Birkhäuser, Basel (1955).

Gruppen- und Darstellungstheorie. Wir erinnern zuerst an den Begriff einer Gruppe:

**Definition:** Eine *Gruppe* $G$ besteht aus einer Menge von Elementen $\{g_1, g_2, \ldots\}$ die vier grundlegende Postulate erfüllen:

1. Durch eine Multiplikation $G \times G \to G$, $\{g_1, g_2\} \to g_1 g_2 \in G$ ist jedem Paar $g_1, g_2$ eindeutig ein Element $g_1 g_2$ der Gruppe zugeordnet. Im allgemeinen ist
$$g_1 g_2 \neq g_2 g_1 .$$
2. Diese Multiplikation ist *assoziativ*: $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$.
3. Es existiert ein *Einselement* $e \in G$ mit der Eigenschaft $eg = ge = g$ für jedes Element $g$ der Gruppe.
4. Für jedes Element $g$ existiert das *inverse Element* $g^{-1} \in G$, so daß $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Die wohl einfachste Gruppe bilden die ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfungsgesetz. Die Null ist das Einselement und das Inverse von $a$ ist $-a$. Bezüglich der Multiplikation von Zahlen bildet diese Menge aber keine Gruppe (0 hat kein Inverses).

## 4.1 Beispiele von Gruppen

Es gibt endliche, diskret-unendliche und kontinuierliche Gruppen. Die einfachsten und für uns Physiker zugleich wichtigsten Gruppen sollen hier kurz vorgestellt werden. Bei der Einführung der wichtigsten gruppentheoretischen Begriffe können wir auf die hier vorgestellten Gruppen zurückgreifen.

### 4.1.1 Endliche Gruppen, $S_N$:

Die wichtigsten endlichen Gruppen sind die symmetrischen Gruppen $S_N$, oft auch *Permutationsgruppen* genannt. Die Elemente von $S_N$ sind die *Permutationen* von $N$ Symbolen. Für 3 Elemente sind dies die Transformationen

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad d = ca = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad f = cb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $ca$ zuerst $a$ und dann $c$ ausführen. Zum Beispiel ist

$$ca = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq ac = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

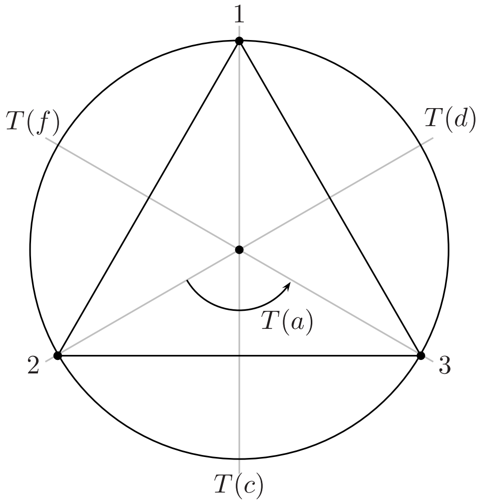


Abbildung 4.1: *Die Wirkung der Drehung $T(a)$ und Spiegelungen $T(c), T(d)$ und $T(f)$ auf die Ecken eine gleichseitigen Dreiecks.*

und die Gruppe $S_N$ ist nicht Abelsch. $S_N$ hat $N!$ Elemente. Wir können $S_3$ als Transformationsgruppe auf $V = \mathbb{R}^2$ *darstellen.* Die Wirkungsmenge von $S_3$ seien die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Dabei sei $T(a)$ die Drehung um $120^0$ und $T(c)$ die Spiegelung an der Vertikalen. Die Deckoperation sind in der folgenden Abbildung dargestellt:

*Gruppentafel:* Für kleine endliche Gruppen ist es oft sinnvoll, eine sogenannte Gruppentafel zu erstellen um sich eine Übersicht über die Gruppenstruktur erhalten. Die folgende Tabelle zeigt eine derartige Gruppentafel:

| | $e$ | $g_2$ | $g_3$ | $\dots$ | $g_n$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $g_2$ | $g_3$ | $\dots$ | $g_n$ | $\dots$ |
| $g_2$ | $g_2$ | $g_2^2$ | $g_2g_3$ | $\dots$ | $g_2g_n$ | $\dots$ |
| $g_3$ | $g_3$ | $g_3g_2$ | $g_3^2$ | $\dots$ | $g_3g_n$ | $\dots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $g_m$ | $g_m$ | $g_mg_2$ | $g_mg_3$ | $\dots$ | $g_mg_n$ | $\dots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\dots$ |

In jeder Reihe und Spalte der Gruppentafel muss jedes Element der Gruppe genau einmal auftreten. Denn aus $gg_p = gg_q$ folgt nach Multiplikation mit $g^{-1}$ von links, daß $g_p = g_q$ sein muss. Analog kann $g_pg$ nur $g_qg$ sein falls $g_p = g_q$ ist.

Die *Ordnung* $|G|$ einer Gruppe $G$ ist die Zahl der Elemente der Gruppe. Zum Beispiel ist

$|S_3| = 3! = 6$ und die Multiplikationstabelle dieser Gruppe ist wie folgt:

| $S_3$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $e$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $e$ | $a$ | $d$ | $f$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $f$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $f$ | $c$ | $b$ | $e$ | $a$ |
| $f$ | $f$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ | $e$ |

Die ausgezeichnete Rolle der Permutationsgruppen ist in dem Theorem von Cayley begründet. Nach diesem Theorem ist jede Gruppe der Ordnung $N$ eine Untergruppe der Permutationsgruppe $S_N$.

### 4.1.2 Liesche Gruppen, $SU(2)$

Während die endlichen oder diskreten Gruppen in der Festkörper und Molekülphysik von Interesse sind, spielen in der Quantenmechanik und Teilchenphysik vorwiegend die kontinuierlichen Lie-Gruppen eine wichtig Rolle. Im Allgemeinen definiert man:

*Definition:* Eine Lie-Gruppe $G$ ist eine Gruppe, die zugleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, derart daß die Multiplikation

$$G \times G \longrightarrow G, \qquad (g_1, g_2) \longrightarrow g_1 g_2$$

und die Inversenbildung

$$G \longrightarrow G, \qquad g \longrightarrow g^{-1}$$

jeweils stetige und differenzierbare Abbildungen sind.

Eine $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit kann lokal mit einer offenen Menge des $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden (siehe die einschlägigen Lehrbücher über Differentialgeometrie). Wir werden diese Begriffe für die Gruppe $SU(2)$ illustrieren. Diese Lie-Gruppe ist die wichtigste Gruppe in der Quantenmechanik. Die quantenmechanischer Zustände mit festem Drehimpuls bilden eine irreduzible Darstellung der quantenmechanischen Drehgruppe $SU(2)$.

Die Elemente $g \in SU(2)$ lassen das Skalarprodukt $(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2$ auf $\mathbb{C}^2$ invariant: $(gx, gy) = (x, y)$. Sie erfüllen $g^\dagger g = gg^\dagger = 1$ und $\det g = \mathbb{1}$. Da die Zeilen von $g$ unitär orthogonal sein müssen, ist

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\lambda\bar{b} & \lambda\bar{a} \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalität der Kolonnen fordert $|\lambda| = 1$. Die Determinantenbedingung lautet dann $\lambda(a\bar{a} + b\bar{b}) = 1$, woraus $\lambda = 1$ und $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$ resultiert. Also ist

$$SU(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}. \tag{4.1}$$

Die Zuordnung

$$\left\{ \alpha = (\Re a, \Im a, \Re b, \Im b) | \sum \alpha_i^2 = 1 \right\} \longrightarrow SU(2)$$

ist bijektiv.

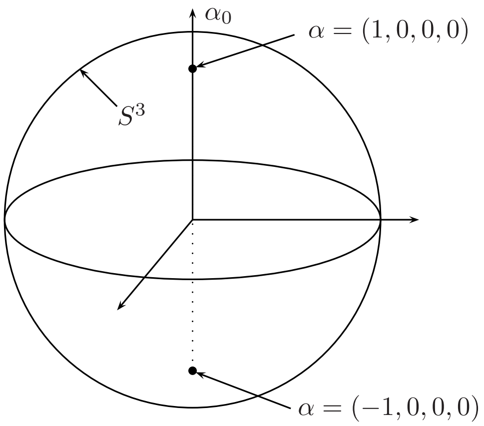


Abbildung 4.2: *Die Gruppe $SU(2)$ kann mit $S^3$ identifiziert werden.*

Die LIE-Gruppe $SU(2)$ kann also mit der 3-dimensionalen Sphäre $S^3$ identifiziert werden (siehe Abb. 4.2). Die Sphäre kann aber nicht stetig auf eine offene Umgebung in $\mathbb{R}^3$ abgebildet werden. Aber man kann mittels der stereographischen Projektionen $\phi_\pm$ vom Süd- bzw. Nordpol die nördliche und südliche Hemisphäre auf eine offene Menge des $\mathbb{R}^3$ abbilden

$$\phi_\pm : H_\pm \longrightarrow \phi_\pm(H_\pm).$$

Auf dem Überlapp $H_+ \cap H_-$ hat man die Gruppe $SU(2)$ auf zwei Arten beschreiben (siehe Abb. 4.3)

$$H_+ \cap H_- \ni p \longrightarrow x = \phi_+(p) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x} = \phi_-(p).$$

Die Koordinatentransformation

$$x = H_+(p) \longrightarrow \tilde{x} = H_-(p)$$

ist differenzierbar, wie man sich leicht überzeugt. Auch die Gruppenmultiplikation ist eine differenzierbare Abbildung, so daß $SU(2)$ in der Tat eine LIE-Gruppe ist.

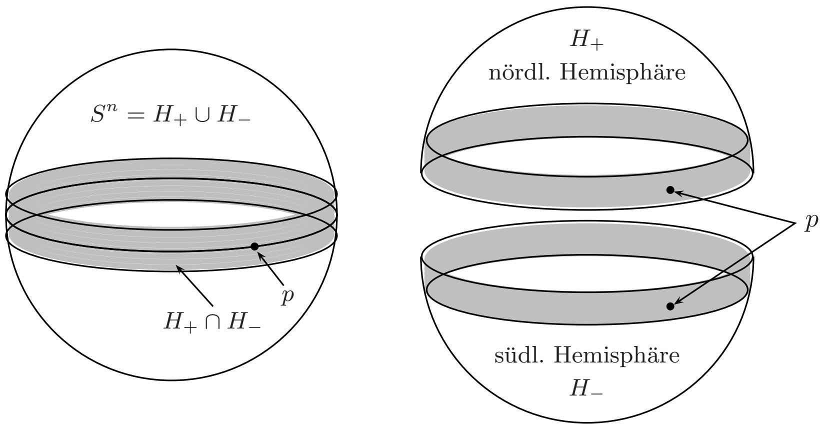


Abbildung 4.3: *Die Gruppe $SU(2)$ kann mit zwei Karten überdeckt werden.*

## 4.2 Elemente der Gruppentheorie

Wir führen nun die für uns wichtigsten Begriffe der Gruppentheorie ein und illustrieren diese anhand der endlichen Permuationsgruppen und der Lie-Gruppe $SU(2)$.

### 4.2.1 Untergruppen

Als *Untergruppe* von $G$ bezeichnet man eine Untermenge $H$ die unter der Multiplikation in $G$ abgeschlossen ist und eine Gruppe bildet. Das Einselement $e \in G$ muss immer in $H$ liegen.

**Die zyklische Gruppe $\mathbf{C}_N$** als Untergruppe der Permutationsgruppen $S_N$: Zum Beispiel bilden die zyklischen Vertauschungen $e, a, b$ eine Untergruppe von $S_3$, d.h. eine echte Teilmenge die bezüglich der Verknüpfung abgeschlossen ist. Diese Untergruppe ist gerade die zyklische Gruppe $C_3$ der Ordnung 3. Allgemeiner besteht die zyklische Gruppe $C_N$ aus den Elementen

$$C_N = \{e = a^0, a, a^2, a^3, \dots a^{N-1} | a^N = e\}.$$

Die Ordnung der Gruppe ist offensichtlich $N$. Wegen $a^n a^{N-n} = e$ hat jedes Gruppenelement ein Inverses. Die zyklische Gruppe ist kommutativ,

$$a^n a^m = a^m a^n.$$

Damit ist $C_N$ eine Abel*sche Untergruppe* der Permutationsgruppe $S_N$. Wir können $a^n$ als zyklische Vertauschung von $N$ Elementen oder äquivalent dazu als Drehung in der Ebene um den Winkel $2n\pi/N$ realisieren. Zum Beispiel für $S_3$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a^3 = e.$$

In der Tat, es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 3 und zwei Gruppen der Ordnung 4.

**Die Gruppe U**(1) tritt als Untergruppe von $SU(2)$ auf. Die Elemente von $U(1)$ sind die diagonalen Matrizen in $SU(2)$,

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} | t \in [0, 2\pi) \right\} \subset SU(2). \tag{4.2}$$

Wir dürfen die beiden Diagonalelemente getrennt betrachten und erhalten die Gruppe

$$U(1) = \{g(t) = e^{it} | 0 \leq t < 2\pi\}. \tag{4.3}$$

Die Transformation $g(t)$ transformiert $z$ in $e^{it}z$, d.h. dreht die komplexen Zahlen mit Winkel $t$ um den Ursprung. Die Gruppe ist Abelsch und isomorph zur Addition der reellen Zahlen

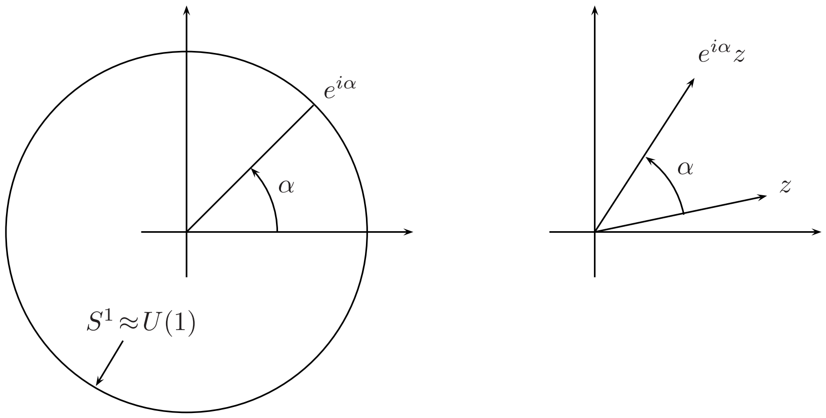


Abbildung 4.4: *Die Gruppe $U(1)$ kann mit $S^1$ identifiziert werden.*

modulo $2\pi$,

$$g(t_1) \cdot g(t_2) = e^{i(t_1+t_2)} = g(t_1 + t_2) = g(t_2) \cdot g(t_1), \qquad g(t + 2\pi) = g(t), \tag{4.4}$$

d.h. $U(1)$ ist isomorph zum Kreis $S^1$. Die ABELsche Gruppe $U(1)$ ist in gewissem Sinne der Grenzfall $U(1) \sim \lim_{N\to\infty} C_N$.

### 4.2.2 Konjugationsklassen:

Um diese Klassen einzuführen benötigen wir die

*Definition:* Zwei Elemente $a, b \in G$ heißen zueinander konjugiert, $a \sim b$, wenn es ein $g \in G$ gibt, so daß

$$gag^{-1} = b.$$

Offensichtlich gelten

$$a \sim a, \qquad a \sim b \Longrightarrow b \sim a, \quad \text{und} \quad a \sim b,\ b \sim c \Longrightarrow a \sim c.$$

Die letzte Eigenschaft folgt aus:

$$b = gag^{-1}, \quad c = \tilde{g}b\tilde{g}^{-1} \Longrightarrow c = \tilde{g}(gag^{-1})\tilde{g}^{-1} = (\tilde{g}g)a(\tilde{g}g)^{-1}.$$

Aus diesen Eigenschaften folgt unmittelbar, daß wir jede Gruppe eindeutig in disjunkte Klassen $K_i$ zerlegen können. Zwei Klassen haben entweder kein gemeinsames Element oder sie sind gleich. Die Konjugationsklasse eines Elementes $a$,

$$K_a = \{gag^{-1} | g \in G\}, \tag{4.5}$$

enthält immer das Element $a$. Die Elemente einer Klasse sind zueinander konjugiert, $gK_ig^{-1} = K_i$ und das Einselement bildet immer eine Klasse für sich. Zum Beispiel hat $S_3$ die drei Klassen,

$$S_3 = \{K_e, K_a, K_c\} = \{\{e\}, \{a, b\}, \{c, d, f\}\}, \tag{4.6}$$

und hat die Permutationsgruppe $|S_3| = 1 + 2 + 3$ Elemente.

Die Anzahl Elemente der Konjugationsklasse $K_i$ sei $n(K_i)$. Demnach gilt

$$\sum_i n(K_i) = \mathrm{Ord}(G). \tag{4.7}$$

**Satz:** *Die Anzahl Elemente $n(K_i)$ der Konjugationsklasse $K_i$ ist ein Teiler der Anzahl der Gruppenelemente. Ist $|G|$ eine Primzahl, dann ist $G$ Abelsch.*

*Beweis des Satzes:* Die zweite Aussage folgt sofort aus der Ersten. Ist nämlich die Gruppenordnung eine Primzahl, dann ist nach der ersten Aussage des Satzes die Anzahl Elemente jeder Konjugationsklasse gleich 1. Also bildet jedes Element eine Klasse für sich, d.h. es ist $gag^{-1} = a$ oder $ag = ga$ für zwei beliebige Gruppenelemente $g$ und $a$. Also ist $G$ Abelsch.
Um die erste Aussage zu beweisen braucht es einiger Vorbemerkungen. Es sei $H \subset G$ eine beliebige Untergruppe von $G$. Wir bilden die *Restklassen (Nebenklassen)* modulo $H$:

$$a \dot{\sim} b \quad \text{falls} \quad a^{-1}b \in H \Longleftrightarrow a \dot{\sim} b \quad \text{falls} \quad b \in aH.$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation[2]

$$a \dot{\sim} a, \qquad a \dot{\sim} b \Leftrightarrow b \dot{\sim} a, \qquad a \dot{\sim} b,\ b \dot{\sim} c \Rightarrow a \dot{\sim} c.$$

[2]Die Äquivalent $\dot{\sim}$ sollte nicht mit der obigen vermittels der Konjugation eingeführten Äquivalenz $\sim$ verwechselt werden!

Nun zerlegen wir die die Gruppe in disjunkte Restklassen modulo $H$,

$$eH, aH, a'H, \ldots .$$

Zwei Restklassen haben entweder kein gemeinsames Element, oder sie sind gleich. Offensichtlich ist $aH = bH$ genau dann wenn $a \dot{\sim} b$ und weiterhin ist $|aH| = |H|$. Deshalb gilt

**Lemma:** *Der Index $j = |G|/|H|$ der Untergruppe $H$ von $G$ ist immer eine natürliche Zahl.*

Nun betrachten wir spezielle Untergruppen in $G$. Für jedes $a \in G$ definieren wir den *Normalisator (Stabilisator)* $N_a$ von $a$ gemäß

$$N_a = \{g \in G | gag^{-1} = a\} \subset G. \tag{4.8}$$

Offensichtlich liegen $e$ und $a$ immer im Normalisator von $a$. Wie man leicht nachrechnet ist $N_a$ eine *Untergruppe* von $G$ und entsprechend ist $|G|/|N_a|$ eine natürliche Zahl für jedes $a \in G$. Nun ist

$$g_1 a g_1^{-1} = gag^{-1} \Leftrightarrow g^{-1} g_1 \in N_a \Leftrightarrow g_1 \in gN_a.$$

Also

$$g_1 a g_1^{-1} \neq gag^{-1} \Longleftrightarrow g_1 \notin gN_a.$$

Die Anzahl Elemente in der Konjugationsklasse von $a$ ist also gleich der Anzahl Nebenklassen des Normalisators $N_a$ von $a$, d.h. $|K_a| = j(N_a)$. Damit wäre der erste Teil des Satzes ebenfalls bewiesen.

Wie sieht das für $S_3$ aus? Die Normalisatoren

$$N_e = G, \;\; N_a = N_b = C_3, \;\; N_c = \{e, c\}, \;\; N_d = \{e, d\} \quad \text{und} \quad N_f = \{e, f\} \tag{4.9}$$

haben $6, 3$ oder 2 Elemente. Man sieht hier explizit, daß diese Zahlen die Ordnung 6 der Gruppe teilen. Die Indexe der Normalisatoren sind

$$j(N_e) = 1, \; j(N_a) = j(N_b) = 2, \quad \text{und} \quad j(N_c) = j(N_d) = j(N_f) = 3, \tag{4.10}$$

und stimmen mit der Anzahl Elemente der Konjugationsklassen $K_i$ in (4.6) überein.

Nun wollen wir noch die Frage beantworten, wann zwei Elemente in $SU(2)$ konjugiert sind. In der linearen Algebra beweist man, daß jede unitäre Matrix vermittels einer unitären Matrix diagonalisiert werden kann. Deshalb ist

$$g_1 \sim \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 \sim \begin{pmatrix} e^{i\lambda_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_2} \end{pmatrix},$$

wobei die $\exp(\pm i\lambda_i)$ die Eigenwerte von $g_i$ sind. Daher ist $g_1 \sim g_2$ falls sie dieselben Eigenwerte haben. In der Tat kommt es wegen

$$(i\sigma_1)^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda}\end{pmatrix}(i\sigma_1) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda}\end{pmatrix}, \qquad i\sigma_1 \in SU(2),$$

nicht auf die Reihenfolge der Eigenwerte an. Deshalb gilt

$$g_1 \sim g_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}\, g_1 = \mathrm{Sp}\, g_2. \tag{4.11}$$

Die Spur ist konstant auf jeder Konjugationsklasse, sie ist eine sogenannte *Klassenfunktion*. Elemente aus verschiedenen Konjugationsklassen haben verschiedene Spuren.