

# Kapitel 2

## Differentialgleichungen

### 2.1 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Systeme von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1n}w_n \\ \dot{w}_2 &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2n}w_n \\ &\vdots \\ \dot{w}_n &= a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \dots + a_{nn}w_n \end{aligned} \iff \dot{w} = Aw \quad (2.1)$$

mit konstantem Koeffizienten  $a_{ij}$  treten in vielen Problemen auf. Einfache Ratengleichungen, Hamiltonsche Bewegungsgleichungen oder Schrödingergleichungen (mit endlich vielen Freiheitsgraden) sind Beispiele dafür. Die kovariante Form der Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen im äußeren elektromagnetischen Feld,

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu u^\nu, \quad (2.2)$$

wobei  $m$  die Masse,  $\tau$  die Eigenzeit,  $u^\mu = \dot{x}^\mu = \gamma(c, \vec{v})$  die Vierer-Geschwindigkeit des Teilchen und

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

der Feldstärketensor ist, ist für konstantes  $(\vec{E}, \vec{B})$  eine Differentialgleichungssystem mit kon-

stanten Koeffizienten. Auch bei der Untersuchung von einparametrischen Untergruppen von Lie-Gruppen werden wir diesen einfachen Differentialgleichungen wieder begegnen.

Eine Lösung des Systems

$$\dot{w} = Aw, \quad w \in V, \quad A \in L(V), \quad (2.3)$$

wobei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt ist (z.B.  $V = \mathbb{R}^n$  oder  $V = \mathbb{C}^n$ ), ist durch die Angabe des Anfangswertes

$$w(0) = w_0 \in V \quad (2.4)$$

eindeutig bestimmt. Da es  $n$  linear unabhängige Vektoren  $w(0)$  gibt und Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, gibt es  $n$  unabhängige Lösungen.

### 2.1.1 Die allgemeine (formale) Lösung

Bei der Lösungssuche wollen wir benutzen, daß  $w(t)$  genau dann eine Lösung von (2.3,2.4) ist, wenn es die Integralgleichung

$$w(t) = w_0 + \int_0^t A w(t_1) dt_1 \quad (2.5)$$

löst. Diese Integralgleichung lösen wir nun iterativ. In der nullten Näherung ist  $w_0(t) = w_0$ . Dies setzen wir in der rechten Seite in (2.5) ein und erhalten die erste Näherung

$$w_1(t) = w_0 + \int_0^t A w_0 dt_1 = w_0 + A w_0 t.$$

Nun benutzen wir  $w_1(t)$  in der rechten Seite in (2.5) und erhalten die zweite Näherung

$$w_2(t) = w_0 + \int_0^t A w_1(t_1) dt_1 = w_0 + A w_0 t + \frac{1}{2} A^2 w_0.$$

Nach  $n$  Iterationen finden wir

$$w_n(t) = \sum_{p=0}^n \frac{t^p}{p!} A^p w_0.$$

Wir wollen uns nun davon überzeugen, daß die rechte Seite konvergiert. Dazu erinnern wir uns daran, daß  $L(V)$ , versehen mit der Norm

$$\|A\| = \max_{|w|=1} |Aw|, \quad |w| = (w, w)^{1/2},$$

ein vollständiger Vektorraum ist. Wegen

$$\|A + B\| = \max |(A + B)w| \leq \max(|Aw| + |Bw|) \leq \max |Aw| + \max |Bw|$$

erfüllt die Norm die Schwartzsche Ungleichung

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (2.6)$$

und aus der Definition der Norm folgt auch ( $|w| = 1$ )

$$|ABw| = |A(Bw)| \leq \|A\| |Bw| \leq \|A\| \|B\| \implies \|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad , \quad \|A^p\| \leq \|A\|^p.$$

Damit ist

$$\sum_0^{\infty} \frac{t^p}{p!} A^p = e^{tA}$$

eine absolut konvergente Reihe für jeden linearen Operator  $A$ . Also konvergiert  $w_n(t)$  gegen die Lösung

$$w(t) = \sum_0^{\infty} \frac{t^p}{p!} A^p w_0 \equiv e^{At} w(0). \quad (2.7)$$

Durch direktes Nachrechnen kann man sich auch davon überzeugen, daß  $w(t) = \exp(tA)w(0)$  die Differentialgleichung (2.3) löst<sup>1</sup>. Wir sehen auch, daß  $w(t)$  eine in  $t$  analytische Funktion ist. In anderen Koordinaten  $\tilde{w}$ , die mit den  $w$  linear zusammenhängen,

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= s_{11}w_1 + s_{12}w_2 + \dots + s_{1n}w_n \\ \tilde{w}_2 &= s_{21}w_1 + s_{22}w_2 + \dots + s_{2n}w_n \\ &\vdots \\ \tilde{w}_n &= s_{n1}w_1 + s_{n2}w_2 + \dots + s_{nn}w_n \end{aligned} \iff \tilde{w} = Sw, \quad (2.8)$$

wobei  $S$  eine reguläre Matrix ist,  $\det S \neq 0$ , sieht das Differentialgleichungssystem folgendermassen aus:

$$\dot{\tilde{w}} = S\dot{w} = SAw = SAS^{-1}\tilde{w} = D\tilde{w}.$$

Damit ist die Lösung in den  $\tilde{w}$ -Koordinaten

$$\tilde{w}(t) = e^{Dt}\tilde{w}(0), \quad D = SAS^{-1}. \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup>Zeige, das (2.7) die Differentialgleichung (2.3) löst.

### 2.1.2 Wichtige Spezialfälle

Wir wollen jetzt einige wichtige Spezialfälle diskutieren.

**$V = C^n$  und  $A$  diagonalisierbar:** In der linearen Algebra zeigt man, daß eine Matrix  $B$  (im Komplexen) diagonalisierbar ist, wenn die Nullstellen  $\lambda_i$  des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} p(\lambda, B) &= \det(\lambda - B) = \lambda^n - \operatorname{Sp}(B)\lambda^{n-1} + \dots + (-)^n \det B \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

verschieden sind. Sind also die Nullstellen des Polynoms  $p(\lambda, A)$  verschieden, dann können wir eine Matrix  $S$  finden, so daß  $SAS^{-1} = D$  diagonal ist,  $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . In den  $\tilde{w}$ -Koordinaten ist die Lösung dann einfach

$$\tilde{w}(t) = e^{Dt}\tilde{w}(0) \iff \tilde{w}_i(t) = e^{\lambda_i t}\tilde{w}_i(0), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

Da die  $\tilde{w}_i$  vollständig entkoppeln, genügt es das Verhalten einer Komponente  $\tilde{w}_i = \tilde{w}$  zu betrachten. Zerlegen wir  $\tilde{w}$  in Real- und Imaginärteil,  $\tilde{w} = u + iv$ , so schreibt sich die Lösung wie

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{t\Re\lambda} \begin{pmatrix} \cos t\Im\lambda & -\sin t\Im\lambda \\ \sin t\Im\lambda & \cos t\Im\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die qualitativ verschiedenen Möglichkeiten etwas näher anschauen: Verschwindet der Imaginärteil des Eigenwertes, dann ist der Fixpunkt  $w = 0$  für  $\lambda > 0$  ein Quelle und für  $\lambda < 0$  eine Senke. Im ersten Fall ist  $w = 0$  ein instabiler, im zweiten Fall ein stabiler Fixpunkt der Differentialgleichung. Ist der Eigenwert dagegen rein imaginär, dann ist  $w = 0$  ein Zentrum. Die Lösungen  $w(t)$  sind periodisch mit derselben Periode und rotieren um den Fixpunkt. Ist  $\Re\lambda > 0$  und  $\Im\lambda \neq 0$  dann liegt ein auslaufender Strudel und für  $\Re\lambda < 0$  ein einlaufender Strudel vor.

Haben alle Eigenwerte  $\lambda_i$  einen negativen Realteil, dann ist  $w = 0$  ein *stabiler Fixpunkt*. Sind alle Realteile positiv, dann ist  $w = 0$  ein *instabiler Fixpunkt*. Die Punkte  $w(t)$  laufen dann von der Lösung  $w = 0$  weg.

**$V = C^n$ ,  $A$  beliebig**

Hat das charakteristische Polynom  $P(\lambda, A)$  von  $A$  mehrfache Nullstellen, dann ist  $A$  im Allgemeinen nicht diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom hat dann die Form

$$p(\lambda, A) = \det(\lambda - A) = \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschiedenen Nullstellen von  $p$  sind und die  $n_k > 0$  ihre Vielfachheiten. Wir definieren die *verallgemeinerten Eigenräume* von  $A$  zu den  $\lambda_k$  als die Unterräume

$$V_k = \operatorname{Kern}(A - \lambda_k)^{n_k} \subset V.$$

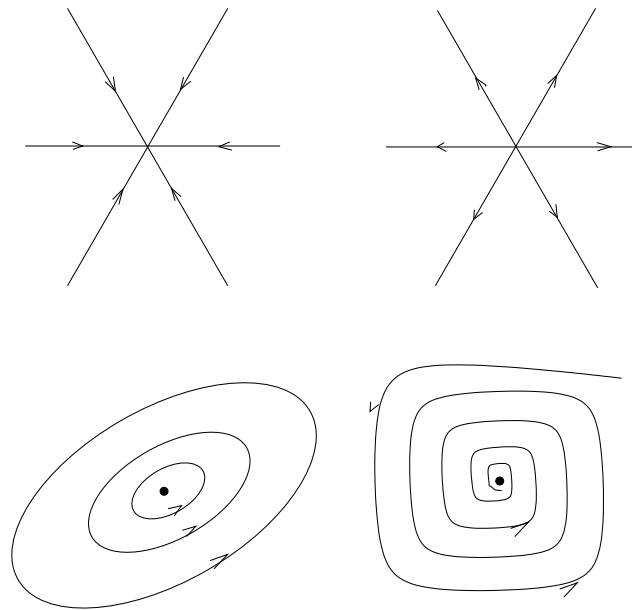


Abbildung 2.1: Senke, Quelle, Zentrum und Strudel

Ein Vektor  $w$  ist also genau in  $V_k$  falls  $(A - \lambda_k)^{n_k} w = 0$  ist. Offensichtlich ist mit  $w$  auch  $Aw$  in  $V_k$ . Damit ist  $A : V_k \rightarrow V_k$ . Nun gilt folgender Satz:

**Satz:** Sei  $A \in L(V)$ , wobei  $V$  ein komplexer Vektorraum ist. Dann ist  $V$  die direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume  $V_k$  und  $\dim V_k = n_k$ .

Wir wollen sehen, was diese Zerlegung impliziert. Wir nehmen zuerst an, daß das charakteristische Polynom von  $A$  nur eine Nullstelle  $\lambda$  der Vielfachheit  $n$  hat und setzen

$$A = \lambda + N \equiv D + N.$$

Offensichtlich gilt  $[D, N] = 0$  und  $D$  ist diagonal in jeder Basis. Wegen  $(A - \lambda) = N$  ist Kern  $N^n = V$  und damit ist  $N$  nilpotent,  $N^n = 0$ . Also gilt

$$e^{tA} = e^{t\lambda} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{N^p}{p!} t^p.$$

Daher kann das System  $\dot{w} = Aw$  leicht gelöst werden.

*Beispiel:* Sei

$$\dot{w}_1 = w_1 - w_2 \quad , \quad \dot{w}_2 = w_1 + 3w_2. \tag{2.12}$$

Die zugehörige Matrix  $A$  hat das charakteristische Polynom  $(\lambda - 2)^2$ . Damit gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda + N.$$

Man rechnet leicht nach, daß in der Tat  $N^2 = 0$  ist, so daß

$$e^{tA} = e^{2t}(1 + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$$

und damit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.12)

$$\begin{aligned} w_1(t) &= e^{2t}((1-t)w_1(0) - tw_2(0)) \\ w_2(t) &= e^{2t}(tw_1(0) + (1+t)w_2(0)). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall von mehr als einer Nullstelle von  $p(\lambda, A)$  setzen wir  $A_k = A|_{V_k}$ . Jedes  $A_k$  hat nur einen Eigenwert und damit gilt

$$A_k = D_k + N_k, \quad D_k, N_k \in L(V_k), \quad [D_k, N_k] = 0, \quad N_k^{n_k} = 0.$$

Damit gilt der

**Satz:** Jeder lineare Operator in  $A \in L(C^n)$  hat die Zerlegung

$$A = D + N, \quad D = D_1 \oplus \dots \oplus D_r, \quad N = N_1 \oplus \dots \oplus N_k.$$

Es gilt  $[D, N] = 0$ ,  $N$  nilpotent und  $D$  diagonalisierbar. Man kann zeigen, daß  $A$  die Operatoren  $D$  und  $N$  eindeutig bestimmt.

*Beispiel:* Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies p(\lambda, A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1). \quad (2.13)$$

Damit hat  $A$  den zweifachen Eigenwert  $-1$  und den einfachen Eigenwert  $1$ . Wegen

$$(A + 1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A - 1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind die verallgemeinerten Eigenräume

$$V_1 = \text{span}\{\tilde{e}_1 = e_1, \tilde{e}_2 = e_2\} \quad \text{und} \quad V_2 = \text{span}\{\tilde{e}_3 = 2e_2 + e_3\}.$$

Setzen wir  $w_i e_i = \tilde{w}_i \tilde{e}_i$  wobei  $\tilde{e}_i = S_{ji}^{-1} e_j$ , so ist  $\tilde{w} = Sw$  und damit geht  $\dot{w} = Aw$  über in

$$\dot{\tilde{w}} = (SAS^{-1})\tilde{w} = \tilde{A}\tilde{w}, \quad \text{wobei} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Nach unserem allgemeinem Theorem ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{D} + \tilde{N}$$

die Summe eines diagonalen und nilpotenten Operators. Wir schließen, daß

$$A = D + N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [D, N] = 0, \quad N^2 = 0.$$

Um  $\exp(tA)$  zu berechnen, benutzen wir, daß

$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\tilde{A}}S = S^{-1}e^{t\tilde{D}}(1 + t\tilde{N})S = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2(e^t - e^{-t}) \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Damit wäre auch die Differentialgleichung mit Matrix  $A$  in (2.13) gelöst.

**$V = R^n$  und allgemeines  $A$ :** Jeden linearen Operator  $A \in L(R^n)$  können als linearen Operator auf  $L(C^n)$  auffassen. Dort hat er die Eigenschaft  $\bar{A} = A$ . In  $C^n$  können wir obiges Resultat anwenden:

$$A = D + N \implies \bar{A} = A = \bar{D} + \bar{N}.$$

Da aber die  $(D, N)$ -Zerlegung eindeutig ist, schließen wir, daß  $\bar{D} = D$  und  $\bar{N} = N$  ist.  $A$  kann also in ein reelles und im Komplexen diagonalisierbares  $D$  und ein reelles nilpotentes  $N$  zerlegt werden. Dann gibt es eine reelle Basis in  $R^n$ , so daß

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, D(\lambda_{r+1}), \dots, D(\lambda_s)), \quad D(\lambda) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + ib,$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die reellen Eigenwerte von  $A$  und  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$  die komplexen Eigenwerte sind.  $\exp(tD)$  ist einfach zu berechnen, da

$$e^{tD(\lambda)} = e^{ta} \begin{pmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{pmatrix}$$

ist.

*Übung:* Berechne  $e^{tA}$  für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $p(\lambda, A) = 1 + 2\lambda^2 + \lambda^4$ .

**$A$  antihermitesch oder antisymmetrisch:** Ein für die Physik wichtiger Spezialfall ist gegeben, wenn  $A$  antihermitesch ist,  $A^\dagger = -A$ . In diesem Falle kann  $A$  mit einer unitären Matrix  $S$  diagonalisiert werden (da  $iA$  hermitesch ist) und alle Eigenwerte sind rein imaginär. Damit ist auch  $\exp(Dt)$  unitär und

$$w(t) = e^{At}w(0) = S^{-1}e^{Dt}Sw(0) = U(t)w(0), \quad U(t) \text{ unitär.}$$

Es sei nun  $V = R^n$  und  $A$  antisymmetrisch,  $A^t = -A$ . Wegen

$$\frac{d}{dt}(w(t), w(t)) = (Aw(t), w(t)) + (w(t), Aw(t)) = 0$$

ist  $|w(t)| = |w(0)|$ . Damit ist  $R(t) = \exp(tA)$  eine längenerhaltende lineare Abbildung, also eine Drehung. Aus (2.10) folgern wir für eine beliebiges  $B$ , daß

$$\operatorname{tr}(B) = \sum \lambda_i \quad \text{und} \quad \det B = \prod \lambda_i,$$

so daß für beliebige Operatoren  $B$  die nützliche Identität

$$\log \det(B) = \operatorname{tr} \log(B) \tag{2.14}$$

folgt. Insbesondere ist

$$\det(\exp(tA)) = \exp(t \operatorname{tr} A) = 1$$

und damit ist  $R(t)$  eine eigentliche Drehung,  $\det(R) = 1$ .

### 2.1.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir betrachten eine Differentialgleichung höherer Ordnung,

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{u} + a_n u = 0. \tag{2.15}$$

Hier soll  $u$  eine reell- oder komplexwertige Funktion sein und  $u^{(n)}$  bezeichnet die  $n$ 'te Ableitung nach  $t$ . Nun führen wir neue Variablen gemäß

$$w_1 = u \quad w_2 = \dot{w}_1 \quad \dots \quad w_n = \dot{w}_{n-1}$$

ein. Dann ist die Differentialgleichung (2.15) äquivalent zum System

$$\dot{w} = Aw, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}.$$



Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$p(\lambda, A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Mit obigen Resultaten kann man nun zum Beispiel für

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0 \tag{2.16}$$

Folgendes zeigen:

Es seien  $\lambda_1, \lambda_2$  die Nullstellen des Polynoms  $\lambda^2 + a\lambda + b$ . Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung (2.16) von einem der folgenden 3 Typen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}: & \quad u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}: & \quad u(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \\ \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = a + ib, b \neq 0: & \quad u(t) = e^{at} (C_1 \cos vt + C_2 \sin vt). \end{aligned}$$

Ist im ersten Fall  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , so liegt eine Quelle oder eine Senke (bzw. ein Knoten) vor, ist  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  dann ein Sattelpunkt. Im zweiten Fall ist  $w = 0$  ein uneigentlicher Knoten und im letzten Fall ein Zentrum (2.2).

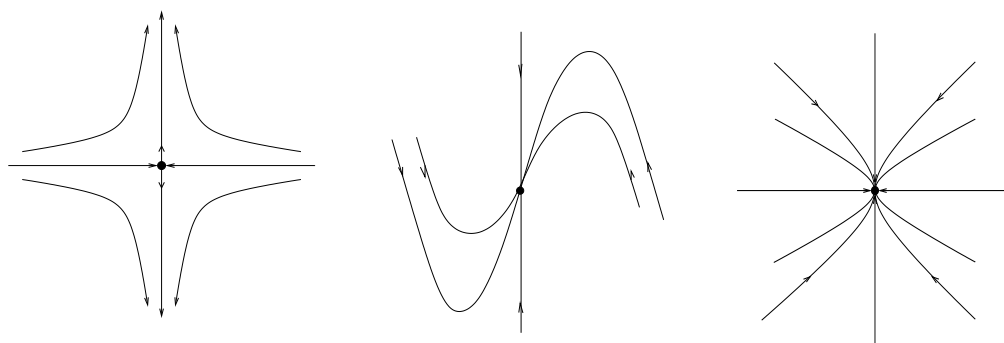


Abbildung 2.2: Sattelpunkt, uneigentlicher Knoten und Knoten.

## 2.2 Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten

Wir wollen jetzt zulassen, daß die Koeffizienten in (2.1) zeitabhängig sind. Auch in diesem Falle ist das Differentialgleichungssystem zusammen mit der Anfangsbedingung äquivalent zur Integralgleichung

$$w(t) = w(0) + \int_0^t A(t_1)w(t_1)dt_1. \quad (2.17)$$

### 2.2.1 Formale Lösung durch Dysonreihe

Genau wie früher lösen wir diese Integralgleichung mit sukzessiver Approximation. Als nullte Näherung wählen wir wieder  $x_0 = x(0)$ . Nun erhalten wir

$$\begin{aligned} w(t) = & \left( 1 + \int_0^t dt_1 A(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 A(t_1)A(t_2) \right. \\ & \left. + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 A(t_1)A(t_2)A(t_3) + \dots \right) w(0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dies kann mit Einführung des zeitgeordneten Produktes noch etwas eleganter geschrieben werden. Es sei

$$T\left(A(t_1) \cdots A(t_n)\right) = A(t_{\pi(1)}) \cdots A(t_{\pi(n)}), \quad \text{wobei } t_{\pi(1)} \geq \cdots \geq t_{\pi(n)}$$

das zeitgeordnete Produkt von  $A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_n)$ . Der Operator  $T$  der chronologischen Ordnung verändert also die Reihenfolge der Operatoren, so daß der Operator zur spätesten Zeit links steht und der zur frühesten Zeit rechts. Offensichtlich ist  $T(A(t_1) \cdots A(t_n))$  symmetrisch in  $t_1, \dots, t_n$ . In (2.18) sind die auftretenden Operatoren schon zeitgeordnet, deshalb können wir die auftretenden Produkte von Operatoren durch die zeitgeordneten Produkte ersetzen. Benutzen wir noch, daß

$$\int_0^t dt_1 \cdots dt_n f(t_1, \dots, t_n) = n! \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f(t_1, \dots, t_n)$$

für jede symmetrische Funktion  $f$ , so folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} w(t) = & \left[ 1 + \int_0^t dt_1 A(t_1) + \frac{1}{2!} \int_0^t dt_1 dt_2 T\left(A(t_1)A(t_2)\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{3!} \int_0^t dt_1 dt_2 dt_3 T\left(A(t_1)A(t_2)A(t_3)\right) + \dots \right] w(0). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wir können hier  $T$  aus der Summe 'herausziehen' und finden schlußendlich die kompakte Formel

$$w(t) = U(t, 0)w(0), \quad U(t, 0) = T \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \dots dt_n A(t_1) \cdots A(t_n) \right]. \quad (2.20)$$

Diese Reihenentwicklung für  $U(t, 0)$  ist diejenige der Exponentialfunktion und deshalb schreibt man oft formal

$$U(t, 0) = T \exp \left( \int_0^t A(s) ds \right).$$

Man soll hier die Exponentialfunktion entwickeln und auf jeden Term den Zeitordnungsoperator  $T$  anwenden.

Statt den Anfangswert  $w(0)$  zur Zeit  $t = 0$  vorzugeben, könnten wir dies auch zu jeder anderen Zeit  $t_0$  machen. Dann lautet die Lösung der Differentialgleichung mit diesem Anfangswert

$$w(t) = U(t, t_0)w(t_0) \quad \text{wobei} \quad U(t, t_0) = T \exp \left( \int_{t_0}^t A(s) ds \right)$$

$$\frac{d}{dt} U(t, t_0) = A(t)U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = 1.$$

Wegen

$$w(t) = U(t, s)w(s) = U(t, s)U(s, t_0)w(t_0) = U(t, t_0)w(t_0)$$

und der Eindeutigkeit der Lösung, ist

$$U(t, s)U(s, t_0) = U(t, t_0) \implies U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t).$$

Die  $U(t, s)$  bilden eine einparametrische Gruppe von Transformationen.

### 2.2.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Wir suchen die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung

$$\dot{w} = A(t)w + B(t). \quad (2.21)$$

Wir setzen

$$w(t) = U(t)f(t), \quad U(t) = T \exp \left( \int_0^t A(s) ds \right).$$

Wegen  $\dot{w} = Aw + U\dot{f} \equiv Aw + B$  muß offensichtlich  $\dot{f} = U^{-1}B$  gelten, bzw.

$$f(t) = \int_0^t U^{-1}(s)B(s)ds + K$$

mit konstantem  $K$ . Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.21)

$$w(t) = U(t) \left( \int_0^t U^{-1}(s) B(s) ds + w(0) \right). \quad (2.22)$$

*Beispiel:* Die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators unter dem Einfluß einer äußeren Kraft  $F$  ist

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = f(t),$$

wobei wir die Masse  $m = 1$  gesetzt haben. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\dot{w} = Aw + B, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Wegen  $A^2 = -\omega^2$  findet man

$$U(t) = e^{tA} = 1 + tA - \frac{\omega^2 t^2}{2!} - \frac{\omega^2 t^3}{3!} A - \dots = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung

$$w(t) = e^{At} \left( \int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega} \sin \omega s \\ \cos \omega s \end{pmatrix} f(s) + w(0) \right).$$

Nach einer kurzen Rechnung ergibt sich

$$u(t) = w_1(t) = u(0) \cos \omega t + \dot{u}(0) \frac{\sin \omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) f(s),$$

als allgemeine Lösung für  $u$ . Dabei sind  $w_1(0) = u(0)$  und  $w_2(0) = \dot{u}(0)$  die anfängliche Position und Geschwindigkeit des Oszillators. Ist  $f(t) = \sin \alpha t$ ,  $\alpha \neq \omega$ , d.h. ist die äußere Kraft nicht in Resonanz mit den Eigenschwingungen des harmonischen Oszillators, dann ist

$$u(t) = w_1(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \dot{u}(0) \sin \omega t + \frac{\sin \alpha t + \sin \omega t}{2(\alpha + \omega)\omega} - \frac{\sin \alpha t - \sin \omega t}{2(\alpha - \omega)\omega}.$$

Diese Lösung ist für alle Zeiten beschränkt. Der harmonische Oszillator ist stabil unter der Störung. Im *Resonanzfall*  $f = \sin \omega t$  ist die Lösung

$$u(t) = u(0) \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \dot{u}(0) \sin \omega t + \frac{\sin \omega t}{2\omega^2} - \frac{t}{2\omega} \cos \omega t.$$

Wegen des Resonanzterms  $\sim t \cos \omega t$  wächst die Amplitude an. Der Oszillator ist instabil.

## 2.3 Nichtlineare Differentialgleichungen

Es sei  $\mathcal{G}$  ein offenes und zusammenhängendes Gebiet im  $R^n$  und  $w \in \mathcal{G}$ . Gegeben sei eine Funktion

$$\begin{aligned} f &: R \times \mathcal{G} \longrightarrow R^n \\ (t, w) &\longrightarrow f(t, w). \end{aligned}$$

Wir wollen allgemeine Differentialgleichungssysteme der Form

$$\dot{w} = f(t, w) \quad \text{mit} \quad w(t_0) = w_0 \in \mathcal{G} \quad (2.23)$$

studieren. Wie im linearen Fall ist diese Differentialgleichung, zusammen mit der Anfangsbedingung, äquivalent zur Integralgleichung

$$w(t) = w_0 + \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds. \quad (2.24)$$

Wir wollen voraussetzen, daß  $f$  in  $R \times \mathcal{G}$  stetig ist und stetig differenzierbar in  $\mathcal{G}$ . Statt stetig differenzierbar kann man auch die etwas schwächere Lipschitzbedingung fordern:

$$|f(t, w) - f(t, \tilde{w})| \leq L|w - \tilde{w}| \quad \text{auf} \quad \mathcal{G}.$$

Mit diesen Voraussetzungen kann man zeigen, daß die Abbildung

$$w \longrightarrow T(w), \quad (T(w))(t) = w_0 + \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds$$

auf der Menge der stetigen Funktionen  $w : [t_0, t] \rightarrow R^n$  für genügend kleine  $t - t_0$  einen Fixpunkt hat. Solch ein Fixpunkt löst die Differentialgleichung (2.23). Auf diesem Wege gelangt man zu folgendem Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

**Satz:** Unter den obigen Voraussetzungen hat das System (2.23) lokal genau eine Lösung: *Es gibt ein Intervall  $(t_1, t_2) \ni t_0$  und genau eine differenzierbare Funktion  $w : (t_1, t_2) \rightarrow \mathcal{G}$ , so daß (2.23) für  $t \in (t_1, t_2)$  gilt.*

Aufgrund dieses Existenz und Eindeutigkeitsatzes gibt es genau eine Lösungsfunktion  $w = \mathcal{L}(t, t_0, w_0)$ , wobei  $\mathcal{L}(t_0, t_0, w_0) = w_0$  ist. Im *autonomen Fall* ist  $f$  zeitunabhängig und jede Anfangszeit ist so gut wie jede andere. Nur die Zeitdifferenz  $t - t_0$  ist von Bedeutung. Deshalb braucht man  $t_0$  nicht zu schreiben. Die Kurve  $\mathcal{L}(t, w_0)$  ist für feste Anfangsbedingung eine partikuläre Lösungskurve (Trajektorie) der Differentialgleichung. Für festes  $t$  ist die Abbildung

$$w_0 \longrightarrow \mathcal{L}(t, w_0)$$

der Fluß. Wegen

$$\mathcal{L}(t+s, w_0) = \mathcal{L}(t, \mathcal{L}(s, w_0)) \quad \text{ist} \quad \mathcal{L}_{t+s} = \mathcal{L}_t \circ \mathcal{L}_s$$

und der Fluß  $\mathcal{L}_t$  eine 1-parametrische Gruppe. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen geht durch jeden Punkt  $\in \mathcal{G}$  genau eine Lösungskurve.

### 2.3.1 Einige einfache und exakt lösbare nichtlineare DG

In seltenen Fällen kann man eine nichtlineare DG explizit lösen. Hier einige Beispiele:

*Bernoullische DG:* Ein Beispiel für eine lösbare Gleichung ist die *Bernoullische DG*

$$\dot{w} = a(t)w + b(t)w^\alpha, \quad \alpha \neq 1.$$

Ersetzt man  $w$  durch  $v = w^{1-\alpha}$  dann geht diese nämlich in die lineare DG

$$\dot{v} = \beta(a(t)v + b(t)), \quad \beta = 1 - \alpha$$

über. Mit den Resultaten des letzten Kapitels ist dann

$$v(t) = U(t) \left( \beta \int_0^t U^{-1}(s)b(s)ds + v(0) \right), \quad \text{wobei} \quad U(t) = \exp \left( \beta \int_0^t a(s)ds \right).$$

*Die Riccatische DG*

$$\dot{w} = a(t)w + b(t)w^2 + c(t),$$

ist allgemein lösbar, wenn man eine spezielle Lösung  $w^*(t)$  kennt. Dazu setzen wir  $w = w^* + 1/v$ . Benutzen wir, daß  $w^*$  die DG erfüllt, so ist  $w$  genau dann eine Lösung, wenn

$$-\dot{v} = (a + 2bw^*)v + b$$

ist. Zum Beispiel ist  $w^* = 2$  eine spezielle Lösung der *logistischen Gleichung*  $\dot{w} = w - w^2 + 2$ . Damit lautet die Gleichung für  $v$

$$\dot{v} = 3v + 1 \implies v = \frac{1}{3}(ke^{3t} - 1).$$

Damit ist die allgemeine Lösung der logistischen Gleichung

$$w = 2 + \frac{3}{ke^{3t} - 1}.$$

Das nächste Beispiel ist nicht mehr analytisch lösbar.

### 2.3.2 Räuber-Beute Problem

Es sei  $w_1$  die Anzahl Beutetiere und  $w_2$  die Anzahl Räuber. Als Modell für die Änderung der Spezies nehmen wir

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= aw_1 - cw_1w_2 \\ \dot{w}_2 &= -bw_2 + dw_1w_2, \quad a, b, c, d > 0 \end{aligned}$$

Ohne Räuber würde die Anzahl Beutetiere exponentiell zunehmen und ohne Beutetiere würde die Anzahl Räuber wegen Nahrungsmangel exponentiell abnehmen. In der Tat,

$$w(t) = \begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-bt} \end{pmatrix}$$

sind spezielle Lösungen der Differentialgleichung. Wegen dem Eindeutigkeitsatz kann deshalb keine Lösung die Achse  $w_1 = 0$  bzw.  $w_2 = 0$  schneiden.

Die quadratischen Terme modellieren die Abnahme der Beutetiere weil diese von den Räubern gefressen werden und die Zunahme der Räuber weil diese Nahrung finden. Qualitativ kann man die Lösungen diskutieren indem man das Vektorfeld

$$f(w) = \begin{pmatrix} aw_1 - cw_1w_2 \\ -bw_2 + dw_1w_2 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \dot{w} = f(w)$$

betrachtet (siehe Figur (2.3)). Zum Beispiel ist es interessant zu wissen, ob es eine Gleichgewichtslösung gibt wobei  $f(w) = 0$  und damit  $\dot{w} = 0$  ist, und wenn ja, ob diese stabil oder instabil ist. Das Räuber-Beute-Modell hat zwei Gleichgewichtslösungen, nämlich

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} b/d \\ a/c \end{pmatrix}.$$

Die linearisierten Gleichungen in der Nähe der Fixpunkte haben die Form  $w \sim (\nabla f)(w^{(i)})w = A^{(i)}w$ . Man findet

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist der Ursprung in der linearisierten Gleichung ein Sattelpunkt und damit instabil und der zweite Fixpunkt ein Zentrum und damit stabil. Diese Verhalten gilt auch für die exakten Lösungen des nichtlinearen Problems. Das Gleichgewicht mit  $b/d$  Beutetieren und  $a/c$  Räuber ist ein stabiles Gleichgewicht. Viele dieser Eigenschaften kann man schon aus dem Vektorfeld  $f(w)$  in (2.3) ablesen. Die anschauliche Vektorfeldmethode funktioniert allerdings nur schön bei *autonomen Systemen* für die  $f$  nicht explizit von der Zeit abhängt. Für nicht-autonome Systeme ändert sich das Vektorfeld  $f$  mit der Zeit.

### 2.3.3 Stabilität

Es sei  $w^*(t)$  eine Lösung von (2.23). Wir wollen Lösungen in der Nähe von  $w^*$  studieren, d.h. wir setzen

$$w = w^*(t) + \eta.$$

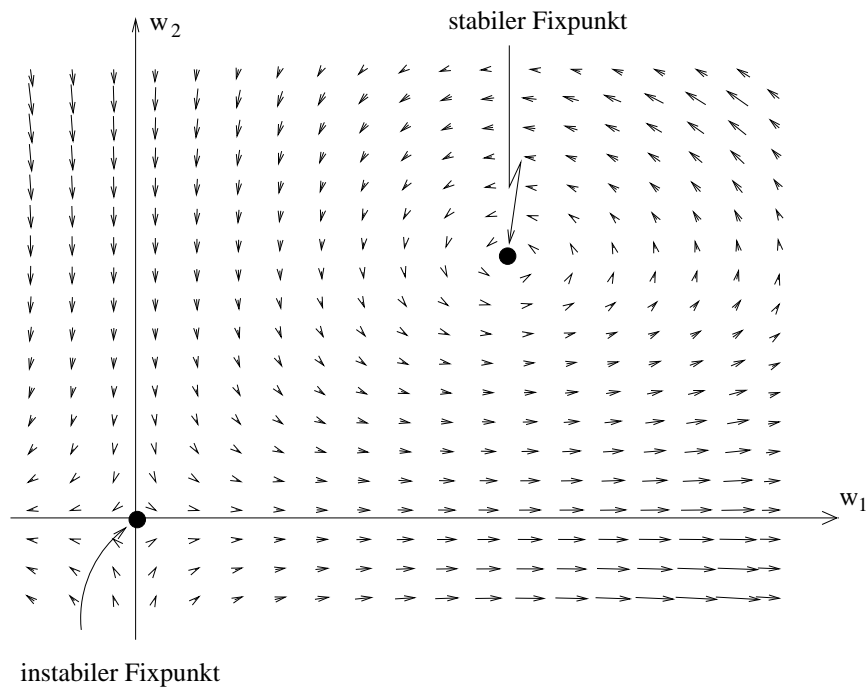


Abbildung 2.3: Vektorfeld für Räuber-Beute Problem ( $a = b = c = d = 1$ )

Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \dot{w} - \dot{w}^*(t) = f(t, w) - f(t, w^*(t)) = f(t, w^*(t) + \eta) - f(t, w^*(t)) \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial w^j}(t, w^*(t)) \eta_j + r(t, \eta) = A(t)\eta + r(t, \eta). \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir den Restterm  $r(t, \eta)$  dann lautet die linearisierte Gleichung für die Störung

$$\dot{\eta} = A(t)\eta \quad \text{mit} \quad A_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial w_j}(t, w^*(t)). \tag{2.25}$$

Eine Lösung  $w(t, t_0, w_0^*)$  heißt stabil (im Sinne von Liapunov) falls es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so daß für  $|w_0 - w_0^*| < \delta$

- 1)  $w(t, t_0, w_0)$  für  $t_0 \leq t < \infty$  existiert,
- 2)  $|w(t, t_0, w_0) - w(t, t_0, w_0^*)| < \epsilon$  für alle  $t_0 \leq t < \infty$  ist.

Eine Lösung heißt *asymptotisch stabil*, wenn zusätzlich

- 3)  $|w(t, t_0, w_0) - w(t, t_0, w_0^*)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  gilt.



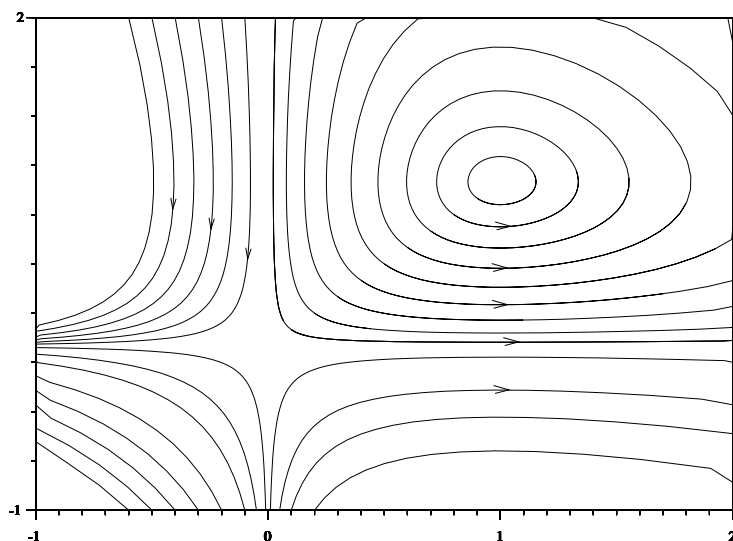


Abbildung 2.4: Die Lösungskurven für das Räuber-Beute-Modell ( $a = b = c = d = 1$ )

### 2.3.4 Liapunov Funktionen

Wir wollen zunächst ein autonomes System betrachten,

$$\dot{w} = f(w) \quad \text{mit} \quad f(0) = 0. \quad (2.26)$$

Dann ist  $w = 0$  eine Gleichgewichtslösung des autonomen Differentialgleichungssystems. In dieser Situation gibt es ein hilfreiches Kriterium von *Liapunov* für die Stabilität des Fixpunktes  $w = 0$ . Dazu brauchen wir den Begriff der Liapunov-Funktion für das System (2.26):

Eine Funktion  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Umgebung  $U$  von  $w = 0$  heißt Liapunov-Funktion bezüglich (2.26) falls

1.  $\nabla V$  auf  $U$  stetig ist,
2.  $V(0) = 0$  und  $V > 0$  auf  $U - \{0\}$
3.  $\nabla V \cdot f \leq 0$  auf  $U - \{0\}$

gelten. Nun gilt der folgende

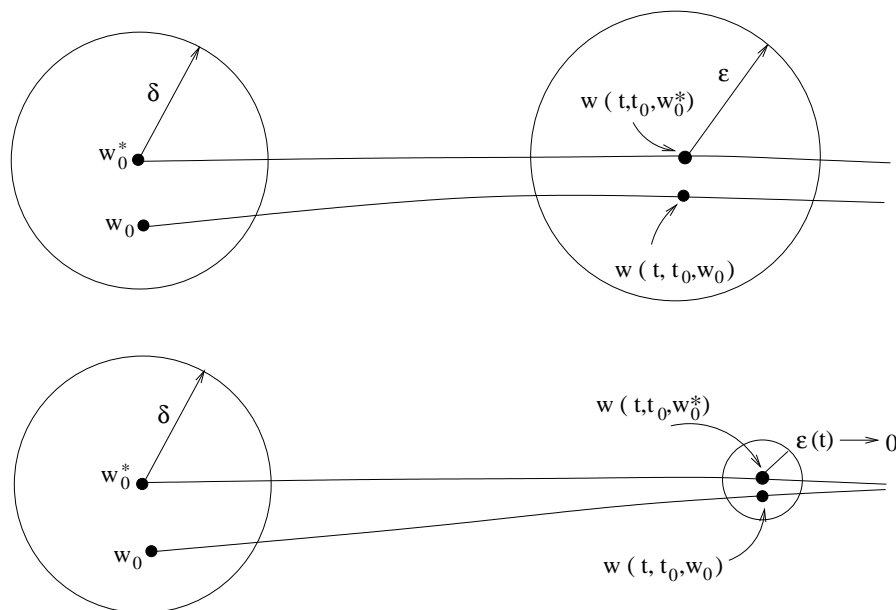


Abbildung 2.5: *Stabile und asymptotisch stabile Lösungen*

**Satz:** Existiert eine Liapunov-Funktion für (2.26), dann ist  $w = 0$  eine stabile Lösung des Systems. Ist  $\nabla V \cdot f < 0$  in  $U - \{0\}$  dann ist  $w = 0$  asymptotisch stabil.

Dieses Theorem von Liapunov kann angewandt werden ohne die Differentialgleichung zu lösen. Andererseits gibt es keine systematische Methode um eine Liapunov-Funktion zu finden. Für mechanische Systeme ist die Energie eines benachbarten Systems ein guter Kandidat für diese Funktion. Für thermodynamische Systeme ist die negative Entropiefunktion eine Liapunovfunktion.

*Beweis:* Es sei  $\epsilon$  so klein gewählt, daß die Kugel  $K_\epsilon$  mit Radius  $\epsilon$  in  $U$  liege. Es sei  $\alpha$  das Minimum von  $V$  auf der Kugeloberfläche,

$$\alpha = \min_{|w|=\epsilon} V(w) > 0.$$

Es sei weiter

$$M := \{w | V(w) \leq \frac{\alpha}{2}\} \cap K_\epsilon$$

und  $M'$  die Zusammenhangskomponente von  $M$  die  $w = 0$  enthält. Wähle nun ein  $\delta > 0$ , so daß  $K_\delta \subset M'$ . Es seien nun  $w(t, w_0)$  eine Lösung mit  $w_0 \in K_\delta$ . Nach der zweiten Eigenschaft der Liapunov Funktion ist

$$\frac{d}{dt}V(w(t, w_0)) = \nabla V \cdot \dot{w} = \nabla V \cdot f \leq 0.$$

Daraus folgt, daß  $V(w(t, w_0)) \leq \alpha/2$  ist, und damit ist  $w(t, w_0)$  in  $M'$  wegen der Stetigkeit der Lösung. Daraus folgt dann, daß  $w(t, w_0) \in K_\epsilon$ , woraus die Behauptung folgt.

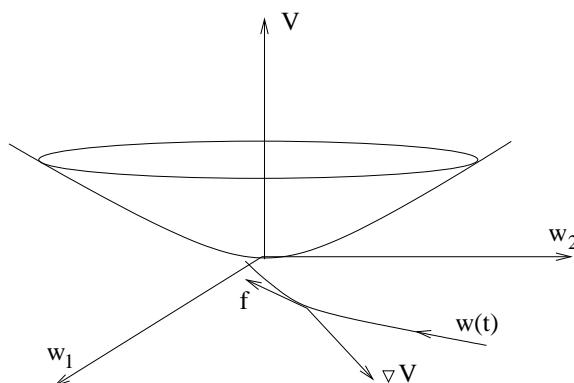


Abbildung 2.6: Liapunov Funktion für  $\dot{w} = f(w)$ .

*Beispiel:* Wir betrachten den harmonischen Oszillator mit Reibung,

$$\ddot{x} + h(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0, \quad h(x, \dot{x}) \geq 0.$$

Mit  $w_1 = x$  und  $w_2 = \dot{x}$  ist dies äquivalent zu

$$\dot{w} = f(w), \quad f = \begin{pmatrix} w_2 \\ -h(w)w_2 - w_1 \end{pmatrix}.$$

Die Energie für den Oszillator ohne Reibung,  $V = w_1^2 + w_2^2$  ist eine Liapunov Funktion. Dazu müssen wir nur die dritte Bedingung nachprüfen:

$$(\nabla V \cdot f) = \left( \frac{dV}{dw_1} f_1 + \frac{dV}{dw_2} f_2 \right) = -2h(w)w_2^2 \leq 0.$$

Damit ist auch die dritte Bedingung erfüllt. Diese bedeutet auch, daß  $\nabla V \cdot \dot{w} \leq 0$  ist. Längs der Bahnen  $w(t)$  nimmt also die Liapunov-Funktion, in unserem Beispiel also die Energie des reibungsfreien Vergleichsystems, ab. Das Pendel spiralt in den Gleichgewichtspunkt  $w = 0$  hinein.

### 2.3.5 Lineare Stabilität bedingt Stabilität

Wir wollen noch einen zweiten, wichtigen Satz behandeln.

**Satz:** Es sei  $\dot{w} = f(w)$  mit  $f(0) = 0$  ein autonomes System. Weiter sei  $f(w) = Aw + r(w)$ ,  $A = (\nabla f)(0)$ , wobei die Realteile der Eigenwerte von  $A$  alle kleiner als  $-c < 0$  seien. Dann gibt es eine Umgebung  $U \subset \mathcal{G}$  von  $w = 0$  so daß

i)  $w(t, w_0)$  definiert ist und in  $U$  bleibt für alle  $w_0 \in U, t > 0$ .

ii) Es gilt

$$|w(t, w_0)| < ae^{-ct}|w_0|$$

für alle  $w_0 \in U, t \geq 0$ . Speziell gilt  $w(t, w_0) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  für alle  $w_0 \in U$ .

Dieser Satz besagt also, daß der Fixpunkt attraktiv ist falls er bezüglich der linearisierten Differentialgleichung attraktiv ist.

Es gilt in gewissem Sinne auch die Umkehrung: Hat ein Eigenwert von  $A$  einen positive Realteil, dann ist der Fixpunkt instabil. Liegt ein Eigenwert auf der imaginären Achse, dann muß man die Methode der Zentrumsmanigfaltigkeiten anwenden.

Um zu entscheiden, ob alle Nullstellen von  $p(\lambda, A)$  negative Realteil haben kann man das Kriterium von Routh-Hurwitz benutzen:

**Kriterium von Routh-Hurwitz:** Alle Nullstellen des Polynoms

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

mit reellen Koeffizienten  $a_k$  und  $a_n > 0$  liegen genau dann in der linken offenen Halbebene von  $C$  wenn die Determinanten der Untermatrizen

$$a_1, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

( $a_m = 0$  für  $m > n$ ) positiv sind. Die Form der Matrizen wird ersichtlich, wenn man die Diagonale betrachtet.

*Beispiel:* Der Gleichgewichtspunkt  $w = 0$  der Differentialgleichung

$$\ddot{w} + 2\dot{w} + w = w^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

ist asymptotisch stabil.

*Beweis des Satzes:* Die allgemeine Lösung der linearisierten Gleichung ist  $U(t)w(0)$  und ist die Summe von Termen  $t^k \exp(\lambda_i t)$ . Damit gibt es Konstanten  $\gamma, \lambda > 0$  so daß

$$|U(t)w_0| \leq \gamma e^{-\lambda t} |w_0|$$

für alle positiven  $t$ . Nun wollen wir den Einfluß des Restterms  $r(w) = o(w)$  abschätzen. Zu jedem  $\chi > 0$  gibt es ein  $\rho > 0$  so daß

$$|w| < \rho \implies |r(w)| < \chi \cdot |w|.$$

Wie im linearen Fall ist die Differentialgleichung zusammen mit der Anfangsbedingung äquivalent zu der Integralgleichung

$$w(t, w_0) = U(t)w_0 + \int_0^t U(t-s)r[w(s, w_0)] ds.$$

Wir schätzen ab:

$$|w(t, w_0)| \leq |U(t)w_0| + \int_0^t |U(t-s)r[w(s, w_0)]| ds \leq \gamma e^{-\lambda t} |w_0| + \gamma \chi \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} |w(s, w_0)| ds.$$

Setzen wir  $y(t) = \exp(\lambda t) |w(t, w_0)|$  dann schreibt sich diese Ungleichung auch

$$y(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t y(s) ds, \quad c_1 = \gamma |w_0|, \quad c_2 = \gamma \chi.$$

Offensichtlich ist  $y(t)$  kleiner oder gleich

$$Y(t) \equiv c_1 + c_2 \int_0^t y(s) ds.$$

Wegen

$$\dot{Y} = c_2 y \quad \text{ist} \quad \frac{d}{dt} \log Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = c_2 \frac{y}{Y} \leq c_2.$$

Damit ist

$$\log Y(t) \leq c_2 t + \log Y(0) \quad \text{bzw.} \quad Y(t) \leq c_1 e^{c_2 t}.$$

Wir haben damit das Lemma von Cronwall bewiesen:

**Lemma** (Cronwall) Falls

$$y(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t y(s) ds \quad \text{dann ist} \quad y(t) \leq c_1 e^{c_2 t}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß

$$|w(t, w_0)| \leq \gamma |w_0| e^{(\gamma \chi - \lambda)t}$$

gilt. Nun ist es einfach einzusehen, daß die Lösung stabil ist. Nun wählen wir  $\chi$  so klein, daß  $\gamma \chi - \lambda$  negativ ist. Dies bedeutet eine Wahl von  $\rho$ . Als nächstes sei  $|w_0| < \delta = \epsilon / \gamma$ . Dann ist offensichtlich  $|w(t, w_0)| < \epsilon$  für alle  $t$  und strebt in der Tat gegen den Fixpunkt  $w = 0$  für große  $t$ . Damit streben Lösungen, die in der Nähe des Fixpunktes starten für große Zeiten in den Fixpunkt. Der Fixpunkt  $w = 0$  ist asymptotisch stabil.

## 2.4 Periodische Systeme

Gegeben sei ein System

$$\begin{aligned} \dot{w} = f(t, w) = A(t)w + r(t, w) \quad \text{mit periodischem } f: \\ A(t + T) = A(t), \quad r(t + T, w) = r(t, w) \end{aligned} \tag{2.27}$$

und wir wollen annehmen, daß

$$r(t, w) = o(|w|) \quad \text{gleichmäßig in } t.$$

Also ist  $w = 0$  eine Lösung der Differentialgleichung. Es sei nun  $w = \mathcal{L}(t, t_0, w_0)$  die Lösung die zur Zeit  $t_0$  bei  $w_0$  startet. Für die Stabilitätsuntersuchung von periodischen Systemen definiert man die

**Def:** *Poincare Abbildung:*

$$P : w_0 \longrightarrow \mathcal{L}(T, 0, w_0).$$

Wegen

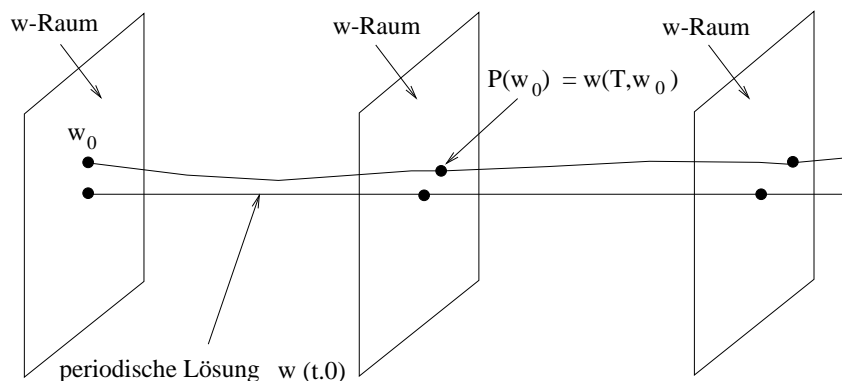


Abbildung 2.7: *Poincare Abbildung*  $P : w_0 \rightarrow P(w_0)$ .

$$\mathcal{L}(2T, 0, w_0) = \mathcal{L}(2T, T, \mathcal{L}(T, 0, w_0)) = \mathcal{L}(T, 0, \mathcal{L}(T, 0, w_0)) = (P \circ P)(w_0)$$

und der entsprechenden Relation für  $2T \rightarrow nT$  (Induktion) hat man die wichtige Eigenschaft

$$\mathcal{L}(nT, 0, w_0) = P^n(w_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.28}$$

Da  $w = 0$  eine Lösung der Differentialgleichung ist, ist  $P(0) = 0$ . Wir wollen  $P$  um 0 entwickeln:

$$P(w_0) = (\nabla P)(0) \cdot w_0 + g(w_0) \equiv Mw_0 + g(w_0).$$

Die Matrix  $M$  ist die *Monodromie-Matrix* und die Eigenwerte von  $M$  sind die *Floquet-Multiplikatoren*. Es stellt sich nun die Frage wie man  $M$  berechnet und was  $M$  über die Stabilität der Bahn  $w = 0$  besagt.

Um  $M$  zu bestimmen, stellen wir uns vor, daß  $w(t, w_0)$  eine Lösung des periodischen Systems ist,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, w_0) = A(t)w(t, w_0) + r(t, w(t, w_0))$$

und variieren die anfängliche Position  $w_0$  in dieser Gleichung. Wir differenzieren nach  $w_0$  und setzen dann  $w_0 = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial w_0}(t, 0) = A(t) \frac{\partial w}{\partial w_0}(t, 0) + \frac{\partial r}{\partial w}(t, w(t, 0)) \frac{\partial w}{\partial w_0}(t, 0).$$

Da  $w(t, 0) = 0$  ist und die Ableitung von  $r$  an der Stelle  $w = 0$  verschwindet, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t) = A(t)U(t) \quad \text{wobei} \quad U(t) = \frac{\partial w}{\partial w_0}(t, 0) \implies U(0) = 1. \quad (2.29)$$

Andererseits ist

$$P(w_0) = w(T, w_0) \implies \frac{\partial P}{\partial w_0}(0) = \frac{\partial w}{\partial w_0}(T, 0) = U(T)$$

woraus folgt, daß die Monodromiematrix gerade  $U$  zur Zeit  $T$  ist. Die lineare Differentialgleichung (2.29) haben wir bereits im vorletzten Kapitel (formal) gelöst. Damit finden wir

$$M = U(T, 0), \quad \text{wobei} \quad U(t, 0) = T \left( \exp \int_0^t A(s) ds \right). \quad (2.30)$$

### 2.4.1 Mathiesche Differentialgleichung, Blochwellen und Stabilität

Die Mathiesche Differentialgleichung ( $r = 0$ ) wird gewöhnlich in der Form

$$\ddot{w} + (a + 16b \cos 2t)w = 0$$

geschrieben;  $a$  und  $b$  sind Konstanten. Dies ist eine lineare DG mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - 16b \cos 2t & 0 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist  $w(t) = U(t, 0)w_0$ , wenn  $w(0) = w_0$  die Anfangsbedingung ist. Wegen

$$U(t + \pi, 0) = U(t + \pi, \pi)U(\pi, 0) = U(t + \pi, \pi)M.$$

Nun ist aber

$$U(t + \pi, \pi) = T \left( \exp \int_{\pi}^{\pi+t} A(s) ds \right) = T \left( \exp \int_0^t A(s) ds \right) = U(t, 0),$$

wobei wir benutzten, daß  $A(\pi + s) = A(s)$ , und damit ist

$$U(t + n\pi, 0) = U(t, 0)M^n$$

Offensichtlich hat die Mathieusche DG eine periodische Lösung, wenn  $w(\pi) = Mw(0) = w(0)$  für mindestens ein  $w(0)$  gilt, d.h. wenn die Monodromie-Matrix  $M$  einen Eigenvektor mit Eigenwert 1 hat. Im Allgemeinen kann man nicht erwarten eine periodische Lösung zu finden, wenn nicht die Konstante  $a$  bestimmten Beschränkungen unterliegt. Es stellt sich heraus, daß  $a$  eine komplizierte Funktion von  $b$  sein muß, wenn die Lösung periodisch sein soll.

Wir wollen annehmen, daß die Monodromiematrix  $M$  eines linearen Differentialgleichungssystems mit periodischen Koeffizienten diagonalisierbar sei. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms seien  $\{\lambda_i\}$ . Es sei

$$\tilde{w}_i(t) = \lambda_i^{-t/T} w_i(t) \implies \tilde{w}_i(T) = \lambda_i^{-1} w_i(T) = \lambda_i^{-1} M \tilde{w}_i(0).$$

Dann hat  $\lambda_i^{-1}M$  einen Eigenvektor mit Eigenwert 1 und der entsprechende Eigenvektor  $\tilde{w}_i(0) = w_i(0)$  ist der Startpunkt einer periodischen Lösung  $\tilde{w}_i(t)$ . Damit hat die Differentialgleichung Lösungen der Form

$$w_i(t) = \lambda_i^{t/T} \tilde{w}_i(t), \quad \tilde{w}_i \text{ periodisch.}$$

Die Mathieusche Differentialgleichung ist invariant unter  $t \rightarrow -t$ . Deshalb ist  $w(t) = \lambda^{-t/\pi} \tilde{w}(-t)$  die zweite unabhängige Lösung. Damit hat man diese Differentialgleichung im Prinzip gelöst. Dieses Ergebnis ist als *Satz von Floquet* bekannt.

Eine wichtige Anwendung dieses Ergebnisses ist die Schrödingergleichung in einem periodischen Kristall. Die Schrödingergleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [A + V(x)]\psi = 0,$$

wobei  $A$  eine Konstante und  $V$  eine periodische Funktion mit  $V(x + l) = V(x)$  ist, hat Lösungen der Gestalt

$$\psi = e^{ikx} v(x), \quad v \text{ periodisch.}$$

Dies wird verschiedentlich als *Satz von Bloch* bezeichnet. Die Lösungen sind die *Blochwellen*.

Im nichtlinearen Fall löst eine Lösung von (2.27) die Integralgleichung

$$w(t) = U(t) \left( \int_0^t U^{-1}(s) r(s, w(s)) ds + w(0) \right), \quad U(t) = U(t, 0),$$



so daß

$$w(T) = Mw(0) + M \int_0^T U^{-1}(s)r(s, w(s))ds.$$

Mit ähnlichen Methoden wie beim Beweis der asymptotischen Stabilität von linear stabilen Systemen kann die Stabilität von  $w_0 \rightarrow P^n w_0$  untersucht werden. Man findet das

**Lemma:** Liegen alle Eigenwerte der Monodromie-Matrix  $M$  innerhalb des Einheitskreises ( $|\lambda_k| < 1$ ) und ist  $\det M > 0$ , dann ist der Fixpunkt  $w = 0$  bezüglich  $P^n$  asymptotisch stabil.

## 2.4.2 Feigenbaumbifurkation

Statt des Beweises diskutieren wir ein illustratives Beispiel, nämlich die Feigenbaumbifurkation. Es sei

$$P(w) = 4\lambda w(1 - w)$$

eine Poincareabbildung mit  $\lambda \leq 1$ . Diese nicht-monotone Abbildung bildet das Intervall  $[0, 1]$  auf sich ab. Sie hat die periodischen Bahnen

$$w = 0 \quad \text{und} \quad w = 1 - \frac{1}{4\lambda} = w_1,$$

da beides Fixpunkte von  $P$  sind. Die zweite Bahn existiert nur für  $\lambda \geq \lambda_1 = 1/4$  (für kleinere  $\lambda$ 's läge sie außerhalb des Intervalls  $[0, 1]$ ). Wegen  $P' = 4\lambda(1 - 2w)$  ist

$$P'(0) = 4\lambda \quad \text{und} \quad P'(1 - 1/4\lambda) = 2 - 4\lambda.$$

Wir haben damit die folgende Situation:

- 1) Für festes  $0 < \lambda < \lambda_1$  besitzt das System genau einen Fixpunkt  $w = 0$ . Dieser ist stabil, weil  $|P'(0)| < 1$  gilt.
- 2) Für festes  $\lambda$  mit  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 = 3/4$  besitzt das System zwei Fixpunkte  $w = 0$  und  $w = w_1$ , wobei  $w = 0$  instabil und  $w = w_1$  stabil ist.

Nun wollen wir untersuchen was passiert, wenn  $\lambda > \lambda_2$  ist.

- 3) Für festes  $\lambda$  mit  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$  besitzt das System eine periodische Bewegung der Periode  $2T$  zwischen den Punkten  $w_{21}$  und  $w_{22}$ . Die Stabilität dieser periodischen Bewegung folgt daraus, daß diese Punkte stabile Fixpunkte der iterierten Poincare-Abbildung  $P^2$  ist: Wegen  $P(w_{21}) = w_{22}$  und  $P(w_{22}) = w_{21}$  gilt offensichtlich

$$P^2(w_{21}) = P(w_{22}) = w_{21} \quad \text{und} \quad P^2(w_{22}) = P(w_{21}) = w_{22}.$$

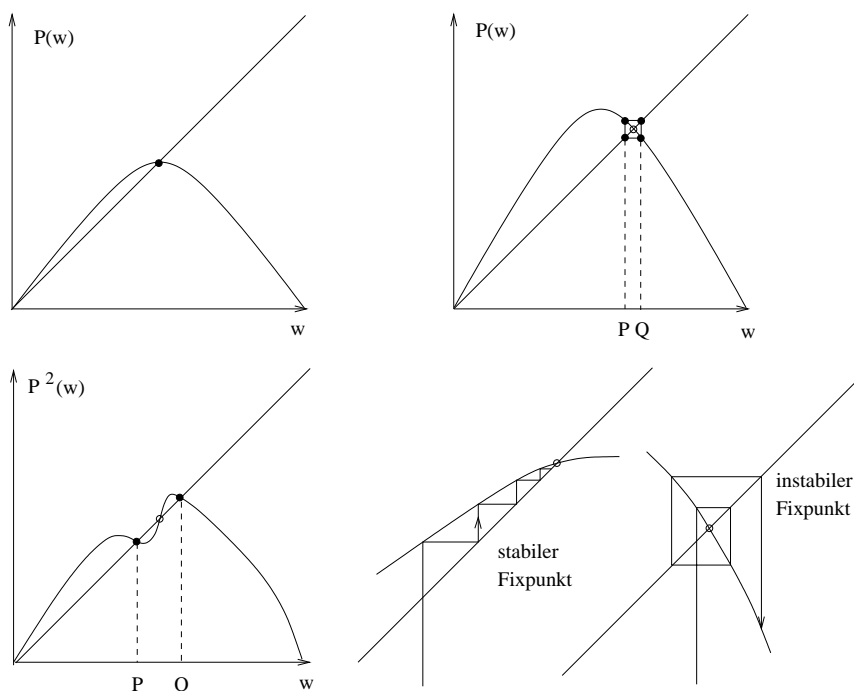


Abbildung 2.8: Feigenbaum-Bifurkation

Natürlich sind die Fixpunkte von  $P$  auch Fixpunkte der iterierten Abbildung  $P^2$ . Diese Fixpunkte von  $P$  und  $P^2$ , nämlich  $w = 0$  und  $w = w_1$ , sind instabil.

Bei weiterer Vergrößerung von  $\lambda$  werden die stabilen Fixpunkte von  $P^2$  instabil und es entstehen Bewegungen der Periode  $2T$  von  $P^2$ , d.h. Bewegungen der Periode  $4T$  von  $P$ , usw.

Wir haben also gesehen, daß ein Attraktor (stabiler Fixpunkt) der Periode  $T$  geht bei  $\lambda = 3/4$  in einen Attraktor der Periode  $2T$  über. Für  $P$  sind dies zwei oszillierende Werte  $w_{21}$  und  $w_{22}$ , für  $P^2$  entspricht dieser Orbit einem Fixpunkt. Überschreitet  $\lambda$  den Wert  $\lambda_3$ , so wird der Fixpunkt von  $P^2$  instabil. Die entsprechende Bahn der Periode  $2T$  wird zu einer oszillierenden Bahn, einer Bahn der Periode  $4T$ , usw. Das Interessante an der Feigenbaum Bifurkation ist, daß der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} = \delta \sim 4.6692$$

eine universelle Konstante ist: Für eine große Klasse von Iterationsverfahren auf  $[0, 1]$  tritt bei Übergängen zum Chaos mit Periodenverdopplung dieselbe Konstante  $\delta$  auf. Für  $\lambda > \lambda_c = 0.892486417967\dots$  tritt ein im Wesentlichen chaotisches Verhalten auf. Unabhängig von der Wahl von  $w_0$  ist die Reihe  $w_0, P(w_0), P^2(w_0), \dots$  'chaotisch': Für einige Startwerte  $w_0$  sind die Orbits  $P^n(w_0)$  aperiodisch, d.h. konvergieren gegen keinen endlichen Attraktor.

Für die meisten Startwerte sind die Orbits periodisch. Aber die Perioden sind so groß, daß sie kaum sichtbar sind. Weiterhin führen nahe beieinander liegende Startwerte zu völlig unterschiedlichen Orbits. Dies wurde zum erstenmal von P.J. Myrberg in den frühen 60'ern festgestellt. Etwa 10 Jahre später haben Metropolis, Stein und Stein die Resultate auf andere Abbildungen  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  verallgemeinert.

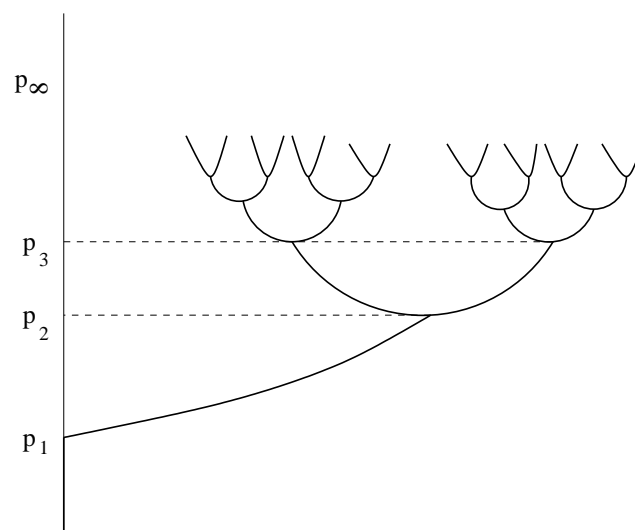


Abbildung 2.9: Feigenbaum-Bifurkation