

Mathematische Methoden der Physik, Teil I

Prof. A. Wipf
Theoretisch-Physikalisches-Institut
Friedrich-Schiller-Universität, Max Wien Platz 1
07743 Jena

4. Auflage, SS 2005
1. Auflage, WS 1997/1998

Hinweise auf Tippfehler und andere Unzulänglichkeiten sind willkommen
(per email an: wipf@tpi.uni-jena.de)

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung, Literatur	4
2	Differentialgleichungen	6
2.1	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	6
2.1.1	Die allgemeine (formale) Lösung	7
2.1.2	Wichtige Spezialfälle	9
2.1.3	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	13
2.2	Lineare Systeme mit variablen Koeffizienten	14
2.2.1	Formale Lösung durch Dysonreihe	15
2.2.2	Inhomogene lineare Differentialgleichungen	16
2.3	Nichtlineare Differentialgleichungen	18
2.3.1	Einige einfache und exakt lösbare nichtlineare DG	19
2.3.2	Räuber-Beute Problem	20
2.3.3	Stabilität	20
2.3.4	Liapunov Funktionen	22
2.3.5	Lineare Stabilität bedingt Stabilität	24
2.4	Periodische Systeme	26
2.4.1	Mathieusche Differentialgleichung, Blochwellen und Stabilität	28
2.4.2	Feigenbaumbifurkation	30

3	Spezielle Funktionen	33
3.1	Die Legendresche Differentialgleichung	33
3.2	Orthogonale Polynome in Hilberträumen	38
3.2.1	Zugeordnete Legendrefunktionen oder Kugelfunktionen	41
3.3	Der Satz von Fuchs	41
3.4	Integraltransformationen	43
3.5	Besselfunktionen	44
3.6	Hypergeometrische Differentialgleichung	53
4	Gruppen	55
4.1	Beispiele von Gruppen	56
4.1.1	Endliche Gruppen, S_N :	56
4.1.2	Liesche Gruppen, $SU(2)$	58
4.2	Elemente der Gruppentheorie	60
4.2.1	Untergruppen	60
4.2.2	Konjugationsklassen:	61
5	Darstellungen	65
5.1	Äquivalenz von Darstellungen	66
5.2	Reduzibilität von Darstellungen	69
5.3	Mittelbildung und Haarsches Maß	70
5.3.1	Mittelbildung für kompakte Lie-Gruppen	71
5.3.2	Unitäre und orthogonale Gruppen	73
5.4	Klassenfunktionen und Charaktere	75
5.4.1	Tensorprodukt von Darstellungen	76
5.5	Lemma von Schur	80
5.5.1	Orthogonalitätsrelationen	83

5.6	Alle Darstellungen einer endlichen Gruppe	87
5.7	Die Charakterenmatrix	89
5.8	Die Charakteren von kompakten Lie-Gruppen	91
5.8.1	Die Charakter von $U(1)$:	91
5.8.2	Die Charakter von $SU(2)$	92
6	Lie-Algebren	96
6.1	Die Lie-Algebra $su(2)$	97
6.2	Lie-Algebren von Lie-Gruppen	99
6.3	Die Lie-Algebra von $SU(3)$	101
6.4	Darstellungen von Lie-Algebren	103
6.5	Wurzeln eine Lie-Algebra	105
6.6	Gewichte einer Darstellung	109

Kapitel 1

Einführung, Literatur

Diese Vorlesung richtet sich an Studenten im fünften Semester. Sie sollen hier die für das Verständnis der Physikvorlesungen notwendigen mathematischen Werkzeuge vertiefen. Die Vorlesung besteht aus vier Kapiteln:

- Differentialgleichungen und spezielle Funktionen (Wipf)
- Symmetrien und Liegruppen/Liealgebren (Wipf)
- Stochastische Prozesse (Neugebauer)
- Einführung in wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden (Neugebauer).

Dieses Skript enthält die ersten beiden Kapitel (Teil 1) der Vorlesung. Folgende *Literatur* kann für diesen Teil empfohlen werden:

Methoden der Mathematische Physik:

R. COURANT UND D. HILBERT, Methoden der Mathematischen Physik I und II; 2. Auflage, Heidelberger Taschenbücher, Springer 1968

W.I. SMIRNOV, Lehrgang der Höheren Mathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963-71

H. FISCHER UND H. KAUL, Mathematik für Physiker, Teubner Studienbücher, 1998

H. MARGENAU UND G.M. MURPHY, Die Mathematik für Physik und Chemie, Teubner 1964

Gewöhnliche Differentialgleichungen, spezielle Funktionen:

W. WALTER, Gewöhnliche Differentialgleichungen – Eine Einführung –, Heidelberger Taschenbücher, Springer 1993

- E. KAMKE, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, 7. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig, K.G., Leipzig 1961
- V.I. ARNOLD, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 1980
- V.I. ARNOLD, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer 1983
- M.W. HIRSCH UND S. SMALE, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press 1974
- H. STEPHANI, Differentialgleichungen, Spektrum 1994
- M. ABRAMOVITZ UND I.A. STEGUN, Handbook of Mathematical Functions, Dover 1970
- A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER UND F.G. TRICOMI, Higher Transcendental Functions I-III, Mc Graw-Hill Book Comp. 1953

Liegruppen, Liealgebren und Darstellungen:

- H. GEORGI, Lie Algebras in Particle Physics, Reading, Benjamin 1982
- M. HAMERMESH, Group Theory and its Application to Physical Problems, Dover 1989
- V. HEINE, Group Theory in Quantum Mechanics, Dover 1993
- W. LUDWIG UND C. FALTER, Symmetries in Physics: Group Theory Applied to Physical Problems, Springer 1996
- E. WIGNER, Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press 1959
- J. TITS, Liesche Gruppen und Algebren, Springer 1992
- H. WEYL, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel-Verlag, 1928
- M. WAGNER, Gruppentheoretische Methoden in der Physik, Vieweg 1998