Kapitel 6

Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Für viele mechanische Systeme sind die Newtonschen Axiome nicht unmittelbar anwendbar, da Zwangsbedingungen zu Zwangskräften führen, welche die (naiven) Newtonschen Bewegungsgleichungen modifizieren. Das Problem besteht darin, dass wir in der Regel die Zwangsbedingungen, nicht aber die Zwangskräfte kennen. Die Zwangskräfte können wir im allgemeinen nicht explizit angeben, da sie von der tatsächlichen Bewegung abhängen. In diesem Kapitel geben wir ein Verfahren an, durch das die Zwangskräfte bei gegebenen Zwangsbedingungen bestimmt werden können.

6.1 Zwangskräfte und sphärisches Pendel

Die Bewegungen der Massenpunkte eines *idealen* starren Körpers sind räumlich eingeschränkt. Die relativen Abstände von je zwei Massenpunkten sind konstant. Diese Einschränkung der Bewegung wird durch ein (unrealistisches) Potential wie in (5.1) mit unendlich tiefer und unendlich schmaler Potentialmulde erreicht. Die mathematischen Gleichungen $r_{ij} = a_{ij} = \text{const.}$, welche die Einschränkung der Bewegung der Punkte eines starren Körpers ausdrücken, nennt man *Nebenbedingungen* (NB). Allgemeiner nennt man Bedingungen, die dem Bewegungsablauf eines Systems von Massenpunkten oder Körpern geometrische Einschränkungen auferlegen, Zwangs- oder Nebenbedingungen. Systeme mit Zwangsbedingungen sind z.B. das Fadenpendel, bei dem der Abstand der Pendelmasse vom Aufhängepunkt fixiert ist, eine auf einem Draht gleitende Perle oder eine auf einer Fläche rollende Kugel.

Für die Einschränkung der Bewegung sorgt eine Kraft, die man *Zwangskraft* nennt. Sie ist für die Bindung des Massenpunktes oder Körpers an eine bestimmte Fläche oder Kurve im Raum verantwortlich. Beispielsweise tritt beim Rollen einer Kugel auf einem waagrechten Tisch eine der Schwerkraft entgegengerichtete, betragsmäßig aber gleich große Zwangskraft auf, welche die Schwerkraft kompensiert und die Bewegung auf die Tischebene einschränkt. Die Zwangskraft steht senkrecht auf der Fläche oder Kurve, an welche die Bewegung gebunden ist[1]. Sie kann bei starren, unveränderlichen Bindungen keine Arbeit leisten, und dies wird beim *Prinzip der virtuellen Arbeit*

[1] Diese plausible Annahme folgt nicht aus den Axiomen.

ausgenutzt. In Körpern können neben den *äußeren Zwangsbedingungen* noch zusätzliche Bindungen der Massenpunkte untereinander auftreten, wie im starren Körper, die zu *inneren Zwangskräften* führen.

Es ist zu beachten, dass auch die Anfangsbedingungen im Einklang mit den Beschränkungen gestellt werden müssen. Mathematisch bedeutet dies, dass die $6N$ Anfangsgrößen $\mathbf{r}_i(0)$ und $\mathbf{v}_i(0)$ nicht mehr unabhängig voneinander frei wählbar sind.

6.1.1 Das sphärische Pendel

Auf einen Massenpunkt der Masse m wirke die Schwerkraft $\mathbf{K} = m\mathbf{g}$ mit $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$. Als *Nebenbedingung* sei vorgeschrieben, dass sich der Massenpunkt auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R bewege.

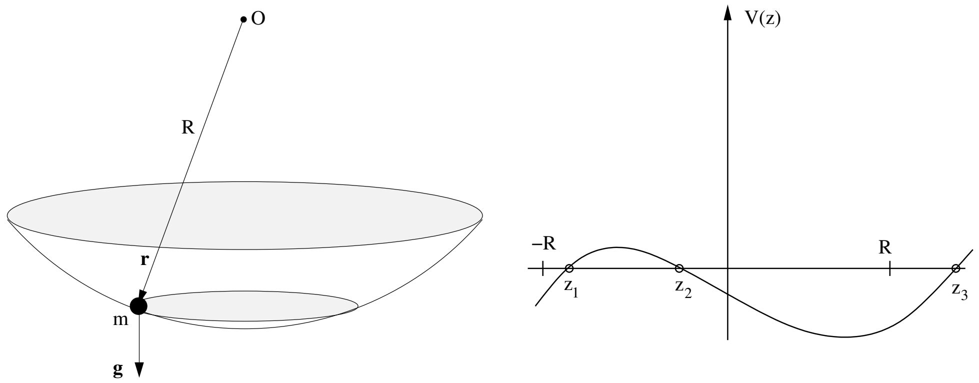


Abbildung 6.1:

Wir haben es also mit einem sphärischen Pendel zu tun, d.h. der Bewegung eines Pendels mit einem 'masselosen' Stab der Länge R. Als Koordinatenursprung wählen wir den Aufhängepunkt des Pendels, so dass die (idealisierte) Nebenbedingung

$$F(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 - R^2 = 0 \tag{6.1}$$

vorliegt. Es gilt also für die gesuchte Bahnkurve

$$F\big(\mathbf{r}(t)\big) = \mathbf{r}^2(t) - R^2 = 0. \tag{6.2}$$

Wir leiten die Nebenbedingung einmal beziehungsweise zweimal nach der Zeit ab,

$$\dot{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) = 2\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(r) = 0 \tag{6.3}$$

$$\ddot{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) = 2\dot{\mathbf{r}}^2(t) + 2\mathbf{r}(t) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0. \tag{6.4}$$

Aus (6.2) und (6.3) ergeben sich für die Anfangsbedingungen $\mathbf{r}_0$ und $\mathbf{v}_0$ folgende Bedingungen

$$\mathbf{r}_0^2 - R^2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 0. \tag{6.5}$$

Das sind zwei unabhängige Beziehungen zwischen zunächst 6 freien Anfangswerten $\mathbf{r}_0$ und $\mathbf{v}_0$. Die

Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ hängt also nur von 4 der 6 Anfangswerte ab. Die beiden Bedingungen (6.5) drücken aus, dass zur Zeit $t = 0$ der Massenpunkt auf der Kugeloberfläche liegt und im Punkt $\mathbf{r}_0$ eine zu $\mathbf{r}_0$ senkrechte Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ hat, welche also tangential zur Kugeloberfläche gerichtet ist. Da die Lösung

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

der Newtonschen Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}$ im konstanten Schwerefeld im Widerspruch zu (6.2) ist, muß diese Bewegungsgleichung so abgeändert werden, dass die Lösung der neuen, noch zu findenden Bewegungsgleichung mit der NB (6.2) verträglich ist. Dazu schreiben wir vorläufig

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{Z} \tag{6.6}$$

mit Zwangskraft $\mathbf{Z}$. Die Zwangskraft ist die von von der Stange auf den Körper ausgeübte Kraft und zeigt in Richtung des Kugelursprungs,

$$\mathbf{Z} = 2\lambda(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\,\mathbf{r} = \lambda(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\nabla F.$$

Hier ist λ eine noch unbekannte Funktion, die für den richtigen Betrag von $\mathbf{Z}$ sorgen muß, so das die Lösung von

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + 2\lambda\mathbf{r} \tag{6.7}$$

mit (6.2) verträglich ist. Wir erwarten, dass für das sphärischen Pendel λ negativ sein wird, da die Zwangskraft von m nach O zeigt. $\lambda(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ heißt LAGRANGE*scher Multiplikator*.

Wir multiplizieren diese Bewegungsgleichung skalar mit $\mathbf{r}$ und benutzen die aus der Nebenbedingung folgende Beziehung (6.4) zwischen Beschleunigung, Geschwindigkeit und Ort, um die Beschleunigung in der resultierenden Gleichung zu eliminieren,

$$m\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r}\cdot\mathbf{g} + 2\lambda\mathbf{r}^2 = -m\dot{\mathbf{r}}^2.$$

Diese Gleichung kann nach dem Multiplikator aufgelöst werden. Da $\mathbf{r}^2$ aber konstant ist finden wir

$$2\lambda = -\frac{m}{R^2}\big(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{g}\big) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Z} = -\frac{m}{R^2}\big(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{g}\big)\mathbf{r}. \tag{6.8}$$

Die Zwangskraft hängt von der tatsächlichen Bewegung und der trägen Masse des Pendels ab. Sie kompensiert die Komponente der Schwerkraft in Fadenrichtung und wirkt der Zentrifugalkraft entgegen. Setzt man die Zwangskraft wieder in (6.6) ein, so entsteht die λ-freie Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} - \frac{1}{R^2}\big(\dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{g}\big)\mathbf{r}. \tag{6.9}$$

Für eine weitere Reduktion des Systems kann man versuchen, Konstanten der Bewegung zu finden. Da die Zwangskraft senkrecht zur Kugeloberfläche und damit senkrecht zur Geschwindigkeit steht, leistet sie keine Arbeit am Pendel und es ist zu erwarten, dass für das System (6.9) die Energie erhalten ist. Zum Beweis multiplizieren wir (6.7) skalar mit $\dot{\mathbf{r}}$ und erhalten

$$m\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} = \dot{T} = m\mathbf{g}\cdot\dot{\mathbf{r}} + 2\lambda\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}.$$

Wegen der Nebenbedingungen (6.2), aus welcher (6.3) folgt, verschwindet der letzte Term und es gilt

$$E = T + V = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 - m\mathbf{g}\cdot\mathbf{r} = \text{const.} \tag{6.10}$$

In (6.9) können wir damit die Geschwindigkeit durch die Energie und den Ort des Pendels ersetzen, und dies führt auf die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{Z}, \qquad \mathbf{Z} = -\frac{m}{R^2}\Big(\frac{2E}{m} + 3\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}\Big)\mathbf{r}. \tag{6.11}$$

Die Zwangskraft hängt bei festen Anfangswerten also nur noch von $\mathbf{r}$ ab.

Ohne Schwerkraft wäre die dann alleine wirkende Zwangskraft zentral und der Drehimpuls erhalten. Das Drehmoment der Schwerkraft hat keine Komponente in die Richtung von $\mathbf{g}$, also in Richtung von $\mathbf{e}_3$, und wir erwarten, dass die dritte Komponente ℓ des Drehimpulses erhalten ist. In der Tat, wegen

$$\dot{\ell} = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{L}) = \mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{p}}) = m\mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{r}\wedge\mathbf{g}) = -mg\mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{r}\wedge\mathbf{e}_3) = 0$$

ist

$$\ell = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const.} \tag{6.12}$$

Nach Wahl von Kugelkoordinaten (2.101) nehmen die beiden Erhaltungssätze (6.10) und (6.12) folgende einfache Form an,

$$\begin{aligned} E &= \frac{mR^2}{2}\big(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\big) + gmR\cos\theta \\ \ell &= mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Es ist zweckmäßig, anstatt θ die Veränderliche z einzuführen:

$$z \equiv R\cos\theta \quad \text{mit} \quad dz = -R\sin\theta\, d\theta = -\sqrt{R^2 - z^2}\, d\theta.$$

Folglich ist der erhaltene Drehimpuls

$$\ell = m(R^2 - z^2)\dot{\varphi}, \quad \text{und damit} \quad \dot{\varphi} = \frac{\ell}{m(R^2 - z^2)}. \tag{6.14}$$

Eliminieren wir $\dot{\varphi}$ in der Energie (6.13), so ergibt sich

$$\frac{2E}{m} = \frac{R^2}{R^2 - z^2}\Big(\dot{z}^2 + \frac{\ell^2}{m^2R^2}\Big) + 2gz$$

und daher

$$R^2\dot{z}^2 = \big(\frac{2E}{m} - 2gz\big)\big(R^2 - z^2\big) - \frac{\ell^2}{m^2} \equiv V(z). \tag{6.15}$$

Aus dieser Differentialgleichung für $z(t)$ läßt sich auf eine nun schon vertraute Art die Zeit t als Funktion von z berechnen,

$$t = R\int^z \frac{du}{\sqrt{V(u)}} = t(z). \tag{6.16}$$

Die Umkehrfunktion ergibt $z(t)$ und damit die Zeitabhängigkeit von θ in $z = R\cos\theta$. Nun lässt sich auch φ als Funktion der Zeit berechnen, da gemäß (6.14) und (6.15) gilt

$$\frac{d\varphi}{dz} = \dot{\varphi}\,\frac{dt}{dz} = \frac{\ell}{m(R^2 - z^2)}\frac{R}{\sqrt{V(z)}}, \quad \text{also} \quad \varphi = \frac{\ell R}{m}\int^z \frac{du}{R^2 - u^2}\,\frac{1}{\sqrt{V(u)}}. \tag{6.17}$$

Die Gleichungen (6.16) und (6.17) geben die Lösung des Problems, da sie die Winkel θ und φ als Funktionen der Zeit bestimmen. Natürlich treten in der Lösung noch zwei Integrationskonstanten auf, entsprechend den in diesen Formeln auftretenden unbestimmten Integralen. Diese Integrale sind, da $V(z)$ ein Polynom dritten Grades ist, elliptische Integrale.

Nur für positive V ist $\sqrt{V}$ reell. Wenn die Konstanten der Bewegung einer wirklichen Bewegung entsprechen sollen, so muß es im Intervall $[-R, R]$ zwei Werte $z_1 < z_2$ geben, zwischen denen V positiv ist. Da für $\ell \neq 0$ das Potential bei $\pm R$ negativ ist, kann das Pendel die Pole nicht erreichen, wenn der Drehimpuls ungleich Null ist. Es gilt

$$-R < z_1 \leq z \leq z_2 < R \qquad (\ell \neq 0).$$

Für $z_1 = R\cos\theta_1$ und $z_2 = R\cos\theta_2$ verschwindet V und diese Werte definieren zwei Breitenkreise, zwischen denen der Massenpunkt hin und her pendelt. Wenn die Integration in (6.16) oder (6.17) an eine dieser Grenzen gelangt, dann muß sie zugleich mit dem Vorzeichen von $\sqrt{V}$ umkehren, um im Reellen und Positiven zu bleiben. Zwischen zwei aufeinander folgenden Umkehrstellen vergeht je ein Viertel der vollen Schwingungsdauer [2]

$$\frac{T}{4} = R\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{V(z)}}. \tag{6.18}$$

Die Schwingung ist aber keine räumlich periodische wie beim ebenen Pendel, sondern eine mit einer langsamen Präzession. Da $\dot{\varphi}$ nach (6.14) nie verschwinden kann[3] ändert sich φ nur in eine Richtung: es nimmt entweder stets zu oder ab.

Die Bewegung ist im allgemeinen nicht periodisch. Der Winkel θ_1 kehrt nach der Zeit T zwar wieder zurück, aber φ ändert sich nicht um 2π sondern um

$$2\pi + \Delta\varphi = \frac{4\ell R}{m}\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(R^2 - z^2)\sqrt{V(z)}}. \tag{6.19}$$

Der Präzessionswinkel $\Delta\varphi$ verschwindet im allgemeinen nicht.

6.2 Holonome und anholonome Nebenbedingungen

Der Massenpunkt hat einen Freiheitsgrad, wenn er an eine Gerade oder eine Kurve gebunden ist, zwei Freiheitsgrade, wenn er gezwungen ist, in einer Ebene oder Fläche zu bleiben; der im Raum

[2] Dass es nicht die Hälfte sein kann, sieht man sofort im Grenzfall $\ell = 0$ des ebenen Pendels.

[3] Wir wollen $\ell \neq 0$ annehmen. Für $\ell = 0$ ist die Schwingungsebene des Pendels fest und wir haben es mit dem einfacheren ebenen Pendel zu tun.

frei bewegliche Massenpunkt hat drei Freiheitsgrade. Zwei Massenpunkte, die über eine starre Stange verbunden sind haben fünf Freiheitsgrade und die Massenpunkte eines starren Körpers haben 6 Freiheitsgrade. Allgemeiner haben N Massenpunkte, die durch s Bedingungen zwischen ihren Koordinaten gekoppelt sind, $f = 3N - s$ Freiheitsgrade. Wir wollen nun die möglichen Formen von zulässigen Nebenbedingungen untersuchen und mathematische Voraussetzungen für sie formulieren.

Nebenbedingungen, die als Einschränkungen der Koordinaten in Form von impliziten Gleichungen

$$F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, s < 3N, \tag{6.20}$$

vorliegen, heissen *holonom*. Alle anderen Zwangsbedingungen heißen *anholonom*. Ist beispielsweise ein Massenpunkt dadurch in seiner Bewegung eingeschränkt, dass er sich im Innern einer Kugel vom Radius R aufhalten muß, gilt die Zwangsbedingung

$$\mathbf{r}^2 \leq R^2.$$

Hierbei handelt es sich um eine anholonome Zwangsbedingung, da die Einschränkung der Koordinaten durch eine Ungleichung gegeben ist. Neben holonomen Zwangsbedingungen können Zwangsbedingungen auch in einer differentiellen Form

$$\mathbf{A}_1(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{A}_N(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) d\mathbf{r}_N = \mathbf{A}_i d\mathbf{r}_i \equiv A = 0 \tag{6.21}$$

vorliegen. Hierbei müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Wenn die linke Seite von (6.21) das vollständige Differential einer Funktion F ist,

$$A = dF = \nabla_1 F \cdot d\mathbf{r}_1 + \ldots + \nabla_N F \cdot d\mathbf{r}_N,$$

dann können wir (6.21) sofort integrieren,

$$A = dF = 0$$

und erhalten eine holonome Bedingung der Form (6.20),

$$dF = 0 \Longleftrightarrow F - \text{const.} = 0. \tag{6.22}$$

Ist die linke Seite von (6.21) kein vollständiges Differential, so kann sie erst integriert werden, wenn das Problem schon gelöst ist. Die Zwangsbedingung (6.21) ist dann anholonom.

Wir können leicht ein notwendiges Kriterium für die Holonomität der differentiellen Zwangsbedingung (6.21) angeben, da die Bedingung A genau dann holonom ist, wenn A ein Potential F besitzt. Hier dürfen wir unsere früheren Resultate in Abschnitt (4.1.3) benutzen, nach denen A ein Potential besitzt, wenn die Komponenten von $\mathbf{A}_i$ die Integrabilitätsbedingungen

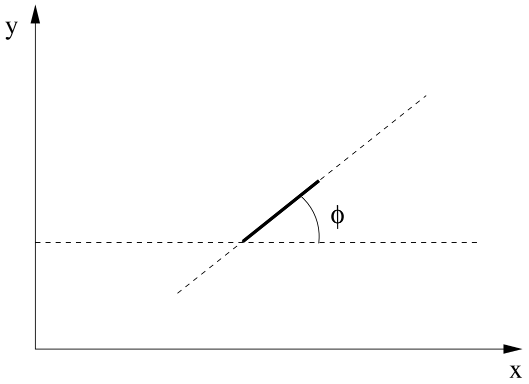
$$\frac{\partial A_{ai}}{\partial x_{bj}} = \frac{\partial A_{bj}}{\partial x_{ai}}$$

erfüllen. Erfüllt A diese Bedingungen nicht, so ist die Zwangsbedingung anholonom.

Ein typisches Beispiel für eine nicht-holonome oder anholonome Bedingung ist die Bedingung für die Bewegung eines Schlittschuhs auf einer ebenen Eisfläche. Als vereinfachtes Modell für den Schlittschuh nehmen wir eine (kurze) Gerade, die wir als Massenpunkt mit einem inneren Freiheitsgrad, dem Einstellwinkel φ der Kufe, ansehen können. Die Bewegung des Schlittschuhs ist offensichtlich dadurch eingeschränkt, dass sie nur in Kufenrichtung erfolgen kann,

$$\dot{y} - \tan\varphi\dot{x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad dy - \tan\varphi dx = 0, \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

Diese Bedingung ist anholonom, da $\partial_y \tan\varphi$ nicht Null ist.



Eine weitere Unterscheidung der Zwangsbedingungen wird nach ihrer Zeitabhängigkeit vorgenommen. Ist die Zwangsbedingung eine explizite Funktion der Zeit, so heisst sie *rheonom*, andernfalls *skleronom*. Beispielsweise handelt es sich bei (6.1) um eine skleronome, holonome Zwangsbedingung, während ein mathematisches Pendel mit zeitlich veränderlicher Fadenlänge eine rheonome, holonome Zwangsbedingung beinhaltet.

Einen wichtigen Unterschied zwischen holonom-skleronomen und holonom-rheonomen Nebenbedingungen sieht man wie folgt: Für Bahnkurven eines Massenpunktes, welcher eine holonome Bedingung (6.20) erfüllt, gilt

$$\frac{dF}{dt} = \nabla F \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{6.23}$$

für $\mathbf{r}(t)$ identisch in t. Für holonom-skleronome Nebenbedingungen fehlt der letzte Term und die Geschwindigkeit des Teilchen ist immer orthogonal zu der Normalenrichtung ∇F, also tangential zu der *zeitunabhängigen* Niveaufläche $F(\mathbf{r}) = 0$ der die Nebenbedingung definierenden Funktion F. Für rheonome holonome Nebenbedingungen braucht die Geschwindigkeit nicht tangential zur Niveaufläche von $F(t, \mathbf{r})$ zu sein. Analoge Aussagen gelten auch für Mehrteilchensysteme.

Jetzt müssen wir uns noch Gedanken machen, wann s holonome Nebenbedingungen $F_1, \ldots, F_s$ unabhängig sind. Für stetig differenzierbare F_α ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Unabhängigkeit, dass

$$\text{Rang}\Big(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_{ai}}\Big)_{\alpha=1,\ldots,s;\; \substack{i=1,\ldots N \\ a=1,2,3}} = s$$

ist, also dürfen nicht alle s-reihigen Unterdeterminanten der $3N \times s$-Funktionalmatrix identisch verschwinden.

6.3 Lagrange-Gleichungen erster Art und d'Alembert-Prinzip

Wir fassen unsere bisherige Diskussion zu folgendem Ergebnis zusammen: Liegen s *unabhängige* holonome Nebenbedingungen der Form

$$F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, s < 3N, \tag{6.24}$$

vor, so bewegen sich die N Massenpunkte auf einer durch diese Bedingungen definierte $(3N - s)$-dimensionalen, im $\mathbb{R}^{3N}$ eingebetteten Hyperfläche. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen für die N Massenpunkte lauten

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{K}_i(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_N) + \mathbf{Z}_i(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_N), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6.25}$$

wo die Zwangskräfte

$$\mathbf{Z}_i = \sum_\alpha \lambda_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_N)\, \nabla_i F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \tag{6.26}$$

zu den eingeprägten Kräften $\mathbf{K}_i$ zu addieren sind. Die Funktionen λ_α sind LAGRANGESCHE Multiplikatoren. Demnach sind die $3N + s$ Funktionen x_{ai}, λ_α aus den s Zwangsbedingungen (6.24) und den $3N$ Bewegungsgleichungen (6.25,6.26), d.h. den LANGRANGE-Gleichungen *erster Art*,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{K}_i + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \nabla_i F_\alpha \tag{6.27}$$

zu bestimmen. Auch in einem lokalen Inertialsystem können die Zwangskräfte (im Gegensatz zu den $\mathbf{K}_i$) von den Massen m_i abhängen.

Wie bei den Kräften kann man wieder zwischen äußeren und inneren Nebenbedingungen unterscheiden. Eine äußere Nebenbedingung hängt nur von den Koordinaten *eines* Massenpunktes ab, $F_\alpha = F_\alpha(t, \mathbf{r}_i)$, eine innere Nebenbedingung ist eine Bedingung an die relativen Positionen der Massenpunkte und hängt von deren Koordinaten ab, $F = F(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$. Entsprechend unterscheidet man dann auch zwischen äußeren und inneren Zwangskräften.

Wir führen nun eine *virtuelle Verrückung* $\delta\mathbf{r}_i$ der Teilchenpositionen ein, bei denen sich die Kräfte und Zwangsbedingungen nicht ändern. Virtuelle Verrückungen bewirken demnach, dass eine kinematisch mögliche Bahn in eine andere überführt wird. Die virtuellen Verrückungen müssen in der durch die holonomen Zwangsbedingungen definierten Fläche bleiben, also muß gelten

$$0 = F_\alpha(t, \mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N + \delta\mathbf{r}_N) = \underbrace{F}_{=0} + \sum_i \nabla_i F_\alpha \cdot \delta\mathbf{r}_i \Longrightarrow \sum_i \mathbf{Z}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \tag{6.28}$$

Die Zwangskräfte leisten keine Arbeit bei virtuellen Verrückungen. Somit folgt aus (6.27) das D'ALEMBERTsche Prinzip der virtuellen Verrückung

$$\sum_i \left(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{K}_i \right) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \tag{6.29}$$

Die Summe aus der äußeren Kraft $\mathbf{K}_i$ und der Trägheitskraft $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ leisten bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit. Die Zwangskräfte treten indirekt in Erscheinung, da sie die virtuellen Verrückungen gemäß (6.28) einschränken.

6.3.1 Energiesatz

Wir nehmen an, dass die eingeprägten Kräfte konservativ sind, so dass sie sich als Gradient eines Potentials $V(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ darstellen lassen,

$$\mathbf{K}_i = -\nabla_i V.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen erster Art lauten dann

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla_i V + \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla_i F_\alpha. \tag{6.30}$$

Die skalare Multiplikation mit $\dot{\mathbf{r}}_i$ mit anschließender Summation über i führt dann auf

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = -\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i V + \sum_i \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla_i F_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Betrachten wir in einer Nebenrechnung die Ableitung der Zwangsbedingung $F_\alpha = 0$ bezüglich der Zeit,

$$\frac{dF_\alpha}{dt} = \sum_i \nabla_i F_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = 0,$$

so ergibt eine Multiplikation mit λ_α und eine Summation über alle α

$$\sum_i \sum_\alpha \lambda_\alpha \nabla_i F_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}.$$

Benutzen wir noch

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \nabla_i V \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial V}{\partial t}$$

so finden wir den Energiesatz

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial t}. \tag{6.31}$$

Die Energie ist demnach erhalten, wenn das Potential V nicht explizit von der Zeit abhängt und die holonomen Zwangsbedingungen skleronom sind.

Wir wollen ein illustratives und nur scheinbar paradoxes Beispiel diskutieren[4]. Dazu betrachten wir zwei Massenpunkte, die über eine Feder mit Federkonstante $k > 0$ verbunden sind. Beide Massenpunkte bewegen sich auf einer in einem Inertialsystem I ruhenden Kugel mit Radius R. Dann gelten in diesem Bezugssystem die skleronom holonomen äußeren Nebenbedingungen

$$F_1 = \mathbf{r}_1^2 - R^2 = 0 \quad \text{und} \quad F_2 = \mathbf{r}_2^2 - R^2 = 0.$$

[4]Aus M. Heil und F. Kitzka, Grundkurs Theoretische Mechanik, Teubner Studienbücher Physik, 1984.

Mit

$$\nabla_1 F_1 = 2\mathbf{r}_1, \quad \nabla_2 F_2 = 2\mathbf{r}_2$$

sind die Zwangskräfte

$$\mathbf{Z}_1 = 2\lambda_1 \mathbf{r}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{Z}_2 = 2\lambda_2 \mathbf{r}_2.$$

Damit lauten die LAGRANGEschen Gleichungen erster Art

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + 2\lambda_1\mathbf{r}_1 \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= -k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + 2\lambda_2\mathbf{r}_2. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Ein Beobachter, der von einem Inertialsystem I', das sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ bezüglich I bewegt, die beiden Massenpunkte beobachtet, stellt fest, dass die beiden Massenpunkte den rheonomen Nebenbedingungen

$$F_1' = (\mathbf{r}_1' + \mathbf{u}t)^2 - R^2 = 0 \quad \text{und} \quad F_2' = (\mathbf{r}_2' + \mathbf{u}t)^2 - R^2 = 0$$

unterliegen, d.h. er findet die Zwangskräfte

$$\mathbf{Z}_1' = \lambda_1'\nabla_1' F_1' = 2\lambda_1'(\mathbf{r}_1' + \mathbf{u}t) \quad \text{und} \quad \mathbf{Z}_2' = \lambda_2'\nabla_2' F_2' = 2\lambda_2'(\mathbf{r}_2' + \mathbf{u}t).$$

Entsprechend sind seine um die Zwangskräfte erweiterten Newtonschen Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1' &= -k(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2') + 2\lambda_1'(\mathbf{r}_1' + \mathbf{u}t) \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2' &= -k(\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1') + 2\lambda_2'(\mathbf{r}_2' + \mathbf{u}t). \end{aligned} \tag{6.33}$$

Der Beobachter im Inertialsystem I stellt fest, dass der Energieerhaltungsatz $T + V = \text{const.}$ gilt, in Übereinstimmung mit (6.31). Dagegen findet der Beobachter in I', obwohl sein System ebenfalls ein Inertialsystem ist,

$$\frac{d}{dt}\big(T' + V'\big) = -2\lambda_1'\mathbf{u}\cdot(\mathbf{r}_1' + \mathbf{u}t) - 2\lambda_2'\mathbf{u}\cdot(\mathbf{r}_2' + \mathbf{u}t) \neq 0, \tag{6.34}$$

wiederum in Übereinstimmung mit (6.31). Offensichtlich haben wir ein mathematisch korrektes Ergebnis erhalten. Anderseits sollte der Energieerhaltungssatz in jedem Inertialsystem gelten, wenn er in einem Inertialsystem gilt. Wo liegt die Auflösung dieses scheinbaren Widerspruchs?

6.3.2 Elimination der Lagrangeschen Multiplikatoren

Die rheonomen, holonomen Zwangsbedingungen und LAGRANGEschen Gleichungen erster Art seien vorgegeben. Um die λ_α zu eliminieren bilden wir die zweite Zeitableitung der Nebenbedingungen,

$$\frac{d^2 F_\alpha}{dt^2} = 0.$$

Hierbei entstehen Gleichungen, in denen die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{r}}_i$ nur linear vorkommen,

$$0 = \dot{F}_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \nabla_i F_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \nabla_i F_\alpha \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = f_\alpha. \tag{6.35}$$

wobei die rechte Seite gemäß

$$f_\alpha = -\sum_{i,a,j,b} \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x_{ia} \partial x_{jb}} \dot{x}_{ia} \dot{x}_{jb} - 2 \sum_{i,a} \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial t \partial x_{ia}} \dot{x}_{ia} - \frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial t^2}$$

von der Zeit, sowie den Orten und Geschwindigkeiten der Massenpunkte abhängt. Nun setzen wir für die Beschleunigungen in (6.35) die Bewegungsgleichungen (6.27) ein

$$\sum_i \nabla_i F_\alpha \frac{1}{m_i} \Big(\mathbf{K}_i + \sum_{\beta=1}^{s} \lambda_\beta \nabla_i F_\beta \Big) = f_\alpha. \tag{6.36}$$

Wir erhalten ein lineares, inhomogenes Gleichungssystem für die LAGRANGEschen Multiplikatoren λ_β, dessen Koeffizienten von den Orten und Geschwindigkeiten der Teilchen, aber nicht von deren Beschleunigungen abhängen. Die Anzahl Gleichungen ist gleich der Anzahl von Unbekannten λ_β. Da für unabhängige Nebenbedingungen die quadratische Matrix

$$a_{\alpha\beta} = \sum_i \nabla_i F_\alpha \nabla_i F_\beta$$

den Rang s hat und damit invertierbar ist, können aus (6.36) die

$$\lambda_\alpha(t, \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i), \qquad \alpha = 1, \ldots, s, \tag{6.37}$$

berechnet werden. Die so bestimmten Multiplikatoren können nun in die rechte Seite von (6.27) eingesetzt werden, so dass wir die Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{K}_i + \sum_{\alpha=1}^{f} \lambda_\alpha \nabla_i F_\alpha \tag{6.38}$$

erhalten. Sie werden mit den üblichen Verfahren untersucht, wobei die auftretenden Integrationskonstanten durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Es ist jedoch darauf zu achten, dass die gewählten Anfangsbedingungen mit den Nebenbedingungen verträglich sind. Zur Anfangszeit (die wir willkürlich als 0 wählen) muß gelten

$$\begin{aligned} &F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)\big|_{t=0} = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, s \\ &\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)\big|_{t=0} + \frac{\partial F_\alpha(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)}{\partial t}\big|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Ist die Lösung bekannt, so können die LAGRANGEschen Muliplikatoren und damit auch die Zwangskräfte nachträglich berechnet und diskutiert werden.