Kapitel 5

Starre Körper

5.1 Bewegungen des starren Körpers

Wir erhalten den starren Körper aus dem im vorangehenden Kapitel behandelten System von N Massenpunkten, indem wir die Abstände zwischen den Massenpunkten festhalten und N sehr groß wählen. Für die Konstanz der Abstände sorgen geeignete innere Kräfte $\mathbf{K}_{ij}$, von denen wir annehmen, dass sie konservativ und zentral sind. Zu $\mathbf{K}_{ij}$ gehört also ein Potential $V_{ij}(r_{ij})$, welches etwa wie in Abbildung (5.1) aussehen sollte, falls es für die Konstanz des Abstands zwischen dem i-ten und j-ten Massenpunkt verantwortlich sein soll[1]. Durch das Festhalten der Abstände, $r_{ij} = a_{ij}$,

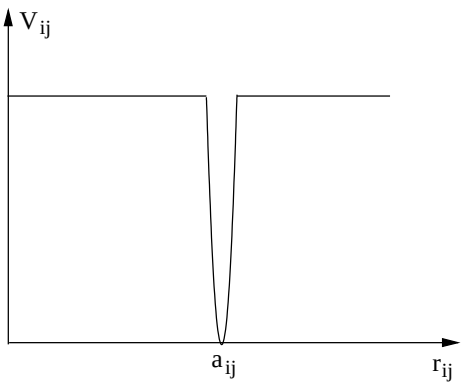

Abbildung 5.1:

wird der Körper starr und behält seine Form bei. Es wird sich herausstellen, daß unter gewissen Umständen ein ausgedehnter Körper wie ein Massenpunkt behandelt werden kann. Wir haben davon schon mehrfach Gebrauch gemacht, etwa bei der Behandlung des Keplerproblems.

Das Festhalten der Abstände der den starren Körper bildenden N Massenpunkte schränkt die Bewegungen der Massenpunkte stark ein. Für das allgemeine N-Körperproblem benötigen wir

[1] Hier sei nur bemerkt, daß es den idealen starren Körper in diesem Sinne in der Natur nicht gibt: er würde eine unendlich schnelle Signalübertragung gestatten.

$3N$ Funktionen der Zeit um die zeitliche Entwicklung des Systems im Ortsraum vollständig zu beschreiben. Für den starren Körper sind es sehr viel weniger: seine Lage ist durch die Lage dreier beliebiger seiner Punkte vollständig bestimmt, die nicht in einer Geraden liegen. Die Bedingung, daß der gegenseitige Abstand zweier Punkte je konstant sein muß, ergibt 3 Gleichungen zwischen den 9 Koordinaten der 3 Punkte. Es sind also nur 6 Koordinaten voneinander unabhängig, mit anderen Worten: *der frei bewegliche starre Körper hat* 6 *Freiheitsgrade*. Um die Lage des starren Körpers im Raum festzulegen, wählen wir zuerst im Körper einen beliebigen Punkt O'. Er besitzt 3 Freiheitsgrade. Ein anderer Punkt A kann sich nur noch auf einer Kugeloberfläche um den Punkt O' bewegen. Das ergibt zwei weitere Freiheitsgrade. Ein dritter, außerhalb der Geraden durch O' und A liegender Punkt kann nunmehr um $\overline{O'A}$ als Achse nur eine Kreisbahn beschreiben. Wird der dieser Bewegung entsprechende Winkel angegeben, so ist die Lage aller Punkte des Körpers bestimmt.

Wird der starre Körper in einem Punkt festgehalten, so sprechen wir von einem *Kreisel*; dieser besitzt nur noch die 3 Freiheitsgrade der Drehungen um den festgehaltenen Punkt. Werden zwei Punkte festgehalten, so sind nur noch Drehungen um eine die beiden Punkte verbindende Achse erlaubt. Es handelt sich dann um ein *physikalisches Pendel* mit 1 Freiheitsgrad.

5.1.1 Translationen des starren Körpers

Mit unseren Annahmen an die inneren Kräfte können wir gemäß Abschnitt (3.2) die Schwerpunktsbewegung abspalten, ähnlich wie beim 2-Körperproblem. Die Bewegung des Schwerpunktes ist gleich der Bewegung eines fiktiven Punktteilchens mit der Masse M des starren Körpers, siehe Abbildung (5.2). So ist die Impulsänderung dieses fiktiven Teilchens gleich der Summe der

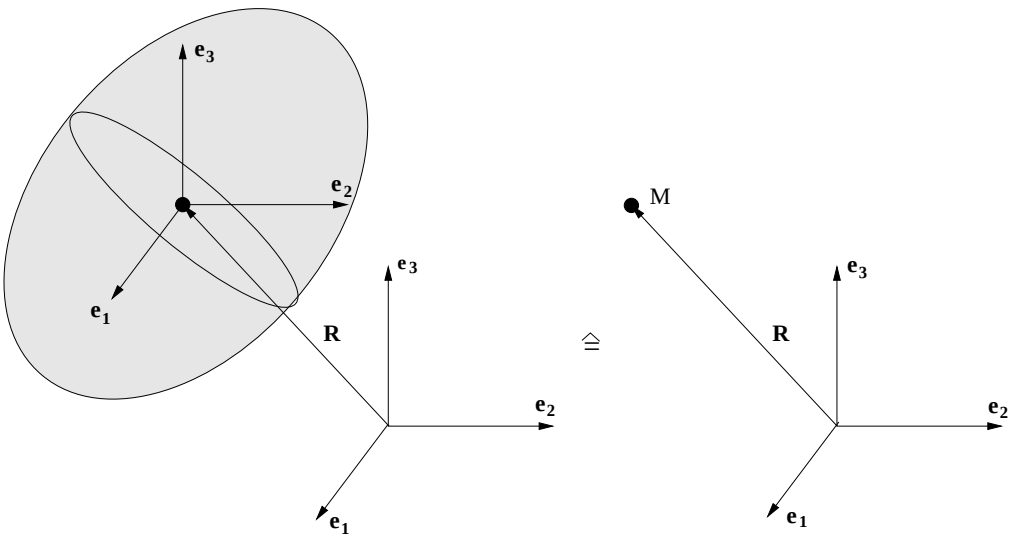

Abbildung 5.2: *Zu Bewegung des Schwerpunktes*

angreifenden äußeren Kräfte,

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{K}^{(a)}, \tag{5.1}$$

seine Drehimpulsänderung gleich dem von allen äußeren Kräften erzeugten Drehmoment,

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{trans}} \equiv \frac{d}{dt}\big(\mathbf{R} \wedge \mathbf{P}\big) = \mathbf{R} \wedge \mathbf{K}^{(a)} \tag{5.2}$$

und die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung ist

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2. \tag{5.3}$$

Kann die auf das i-te Teilchen wirkende äußere Kraft aus einem Potential abgeleitet werden, $\mathbf{K}_i^{(a)} = -\nabla_i V_i^{(a)}(\mathbf{r}_i)$, dann gilt auch der der Energieerhaltungssatz für die Schwerpunktsbewegung,

$$E_{\text{trans}} = T_{\text{trans}} + V^{(a)} = \text{const.} \quad \text{mit} \quad V^{(a)} = \sum V_i^{(a)}. \tag{5.4}$$

Ist die Summe der äußeren Kräfte Null, dann bewegt sich der Schwerpunkt gleichmäßig geradlinig.

5.1.2 Drehbewegungen

Da die Bewegung des Schwerpunktes separat behandelt werden kann, genügt es vollkommen, die Bewegung des starren Körpers im *Schwerpunktsystem* zu untersuchen. Der Ursprung dieses Systems ist der Schwerpunkt und die Achsen sind parallel zu den Achsen in einem Inertialsystem, siehe Abbildung (5.2). In Abwesenheit von äußeren Kräften ist das Schwerpunktsystem ein Inertialsystem.

Der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}$ ist gleich dem Drehimpuls $\mathbf{L}_{\text{trans}}$ der Schwerpunktsbewegung plus dem Drehimpuls $\mathbf{L}_{\text{rot}}$ relativ zum Schwerpunktsystem. Die gesamte Energie E ist die Energie E_{trans} der Schwerpunktsbewegung plus die Energie E_{rot} relativ zum Schwerpunktsystem, siehe Abschnitt (4.1).

Wegen der eingeschränkten Bewegungsmöglichkeit der Konstituenten eines starren Körpers lassen sich die Ausdrücke für die kinetische Energie und den Drehimpuls im Schwerpunktsystem vereinfachen. Starr sein heißt ja, daß wir im Körper einen Ursprung O' und eine kartesische Basis $\mathbf{e}'_a$ markieren können und das relativ zu diesem System die Koordinaten aller Teilchen des starren Körpers zeitlich konstant sind. Man läßt den Ursprung O' dieses Systems zweckmäßig mit dem Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) zusammenfallen[2]. Das so konstruierte Koordinatensystem ist das am Schwerpunkt verankerte *körperfeste System*. Es ist nicht identisch mit dem Schwerpunktsystem. Die Basisvektoren des Schwerpunktsystems sind *fest* gegenüber den Achsen eines Inertialsystems während die Achsen im körperfesten System mit dem starre Körper rotieren.

Also haben wir zwei Bezugssysteme:

- Das Schwerpunktsystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt und einem raumfesten Dreibein $\mathbf{e}_a$ als Basis. Bei Abwesenheit von äußeren Kräften ist dies ein Inertialsystem. Die kartesischen Koordinaten eines Punktes des starren Körpers sind zeitabhängig, $x_a = x_a(t)$.
- Das körperfeste Koordinatensystem mit dem Ursprung ebenfalls im Schwerpunkt und gegenüber jedem Inertialsystem oder dem Schwerpunktsystem mit-rotierenden Basisvektoren $\mathbf{e}'_a(t)$. Jeder Punkt des starren Körpers hat zeitunabhängige Koordinaten x'_a bezüglich der mitrotierenden Basis.

[2] Wird ein Punkt des starren Körpers festgehalten, so wählt man diesen als Ursprung O', siehe unten.

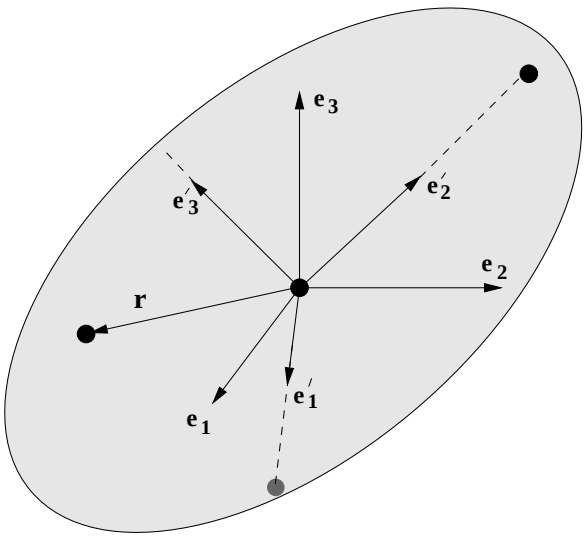

Abbildung 5.3: *Ein starrer Körper bezüglich des Schwerpunktsystems und des am Schwerpunkt verankerten körperfesten Koordinatensystems.*

Wir entwickeln den Ortsvektor eines Punktes im starren Körper bezüglich der beiden Basen,

$$\mathbf{r}(t) = x_a(t)\mathbf{e}_a = x'_a\mathbf{e}'_a(t). \tag{5.5}$$

Die Basisvektoren $\mathbf{e}'_a(t)$ des körperfesten Systems beschreiben eine Drehung im Schwerpunktsystem genauso wie die Koordinaten $x_a(t)$ im Schwerpunktsystem eine Drehung gegenüber denjenigen im körperfesten System beschreiben,

$$\mathbf{e}'_a(t) = \mathbf{e}_b\, R_{ba}(t), \quad \text{oder} \quad x_a(t) = R_{ab}(t)x'_b. \tag{5.6}$$

Wir haben früher bewiesen, daß die infinitesimalen Drehungen Ω, Ω' in

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \left[\dot{R}(t)R^{-1}(t)\right]_{ab} x_b(t) \equiv \Omega_{ab}(t)\, x_b(t) \\ \dot{\mathbf{e}}'_a(t) &= \mathbf{e}'_b(t)\left[R^{-1}(t)\dot{R}(t)\right]_{ba} \equiv \mathbf{e}'_b(t)\,\Omega'_{ba}(t) \end{aligned} \tag{5.7}$$

antisymmetrisch sind. Des weiteren ist

$$\Omega' = R^{-1}\Omega R,$$

wobei alle auftretenden Matrizen zeitabhängig sind[3]. Damit nehmen die Geschwindigkeiten bezüglich der beiden Systeme die einfache Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_a\Omega_{ab}x_b = \mathbf{e}'_a\Omega'_{ab}x'_b \tag{5.8}$$

an. Parametrisieren wir die schiefsymmetrische infinitesimale Drehung Ω wie früher gemäß $\Omega_{ab} = -\epsilon_{abc}\omega_c$, was sich in Matrixform folgendermaßen schreibt,

[3] Um die Notation einfach zu halten, werden wir diese t-Abhängigkeit nicht immer explizit machen.

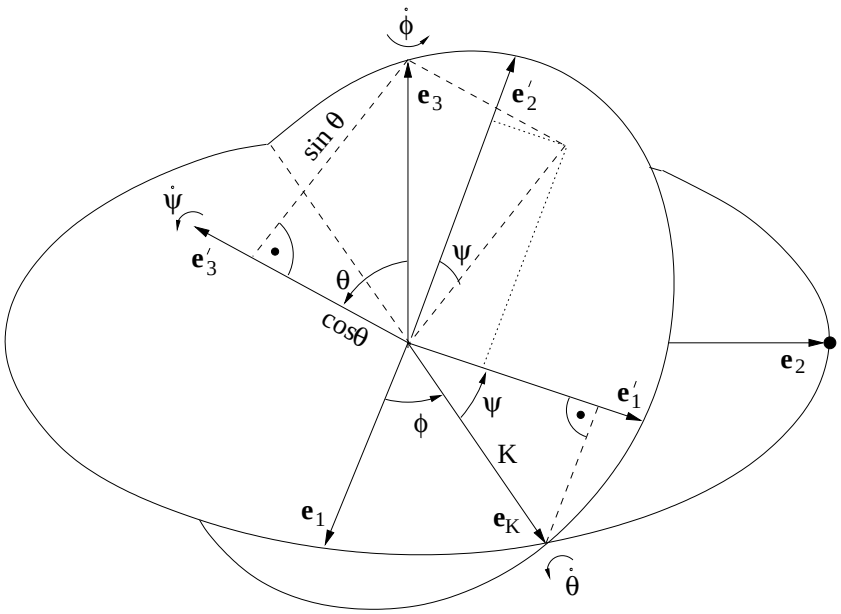

Abbildung 5.4:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \Omega' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

und führen den Drehvektor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_a \mathbf{e}_a = \omega'_a \mathbf{e}'_a, \qquad \omega_a = R_{ab}\omega'_b$$

ein, dann ergibt sich

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i \tag{5.10}$$

für die Geschwindigkeiten der Punkte des starren Körpers. Je nach Situation ist es vorteilhaft die rechte Seite im Schwerpunktsystem oder im körperfesten System auszuwerten.

5.1.3 Eulersche Winkel

Jede Drehung ist durch die drei *Eulerschen Winkel* φ, ψ und ϑ, die die Richtung der Achsen des körperfesten Systems relativ zu einem Inertialsystem festlegen, bestimmt. Zur Definition der EULERschen Winkel betrachten wir die Abbildung (5.4). Die $x_1 - x_2$-Ebene und die $x'_1 - x'_2$-Ebene schneiden sich in der Knotenlinie K; ihrer Richtung wird der Einheitsvektor $\mathbf{e}_K$ zugeordnet. Die Winkel sind dann folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \varphi &: \text{Winkel zwischen } x_1\text{-Achse und } K \\ \psi &: \text{Winkel zwischen } K \text{ und der } x_1'\text{-Achse} \\ \vartheta &: \text{Winkel zwischen } x_3 \text{ und } x_3' \text{ Achse.} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Jede Drehung der Inertialbasis in die körperfeste Basis kann also in drei Schritten vorgenommen werden: einer Drehung um die $\mathbf{e}_3$-Achse mit dem Winkel φ, einer anschließenden Drehung um die neue $\mathbf{e}_1$ Achse mit dem Winkel ϑ und einer darauf folgenden Drehung um die neue $\mathbf{e}_3$ Achse mit Winkel ψ. Die erste Drehung um $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ mit dem Winkel φ transformiert nach (2.40) die Basisvektoren gemäß

$$\mathbf{e}_1 \to \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 \to -\sin\varphi\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3 \to \mathbf{e}_3.$$

Die zweite Drehung um $\mathbf{n} = \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2$ mit Winkel ϑ gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\to \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 &\to -\sin\varphi\cos\vartheta\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\cos\vartheta\mathbf{e}_2 + \sin\vartheta\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 &\to \sin\varphi\sin\vartheta\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\sin\vartheta\mathbf{e}_2 + \cos\vartheta\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

und die dritte um $\mathbf{n} = \sin\varphi\sin\vartheta\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\sin\vartheta\mathbf{e}_2 + \cos\vartheta\mathbf{e}_3$ mit Winkel ψ

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\to \mathbf{e}_1' = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi)\mathbf{e}_1 + (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi)\mathbf{e}_2 + \sin\vartheta\sin\psi\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 &\to \mathbf{e}_2' = -(\sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)\mathbf{e}_1 + (\cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)\mathbf{e}_2 + \sin\vartheta\cos\psi\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 &\to \mathbf{e}_3' = \sin\varphi\sin\vartheta\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\sin\vartheta\mathbf{e}_2 + \cos\vartheta\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Jede dieser drei Transformationen definiert nach (5.6) eine Spalte der Drehmatrix R und führt auf

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi & -\sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi & \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Da diese Drehung als Produkt von drei Drehungen definiert wurde, gilt auch

$$\begin{aligned} R(\varphi,\vartheta,\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= R(\mathbf{e}_3,\varphi)R(\mathbf{e}_1,\vartheta)R(\mathbf{e}_3,\psi) \equiv R_3(\varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi). \end{aligned} \tag{5.13}$$

wobei die erste Drehung links, die zweite in der Mitte und die dritte rechts steht. Diese Reihenfolge kommt daher, daß in (5.6) die Drehmatrix von rechts auf die Basisvektoren wirkt.

Jede Bewegung des starren Körpers im Schwerpunktsystem ist durch die Zeitabhängigkeit der EULERschen Winkel gegeben. Zu jedem Zeitpunkt ist dies eine Drehung um die Achse, definiert durch den momentanen Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ (Vektor der Winkelgeschwindigkeit). Der Betrag ω von $\boldsymbol{\omega}$ bestimmt, wie schnell um diese Achse gedreht wird. Mit Hilfe von (5.7) können wir nun die infinitesimalen Drehungen Ω oder äquivalent dazu die Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$ im Schwerpunktsystem beziehungsweise im körperfesten System berechnen. Wir finden folgenden Zusammenhang zwischen dem Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ und den Eulerschen Winkeln,

$$(\omega_a) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\dot{\vartheta} + \sin\varphi\sin\vartheta\dot{\psi} \\ \sin\varphi\dot{\vartheta} - \cos\varphi\sin\vartheta\dot{\psi} \\ \dot{\varphi} + \cos\vartheta\dot{\psi} \end{pmatrix} \quad , \quad (\omega'_a) = \begin{pmatrix} \cos\psi\dot{\vartheta} + \sin\psi\sin\vartheta\dot{\varphi} \\ -\sin\psi\dot{\vartheta} + \cos\psi\sin\vartheta\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} + \cos\vartheta\dot{\varphi} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Die drei speziellen Drehungen, bei denen jeweils zwei EULERsche Winkel festgehalten werden, haben die Form,

$$\begin{aligned} d\varphi = d\psi = 0 \quad &: \quad \boldsymbol{\omega}_\vartheta = \dot{\vartheta}\mathbf{e}_K \\ d\psi = d\vartheta = 0 \quad &: \quad \boldsymbol{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3 \\ d\vartheta = d\varphi = 0 \quad &: \quad \boldsymbol{\omega}_\psi = \dot{\psi}\mathbf{e}'_3. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Im ersten Fall drehen wir um die Knotenlinie, also um den Vektor

$$\mathbf{e}_K = \cos\psi\mathbf{e}'_1 - \sin\psi\mathbf{e}'_2, \tag{5.16}$$

im zweiten Fall um die $\mathbf{e}_3$-Achse und im dritten um die $\mathbf{e}'_3$-Achse.

5.2 Rotationsenergie und Trägheitstensor

Es ist zu vermuten, daß das Trägheitsverhalten eines starren Körpers, der ja eine unveränderliche Gestalt hat, nicht nur von seiner Gesamtmasse M bestimmt wird, sondern auch von Größen, in die die relative Lage und die Massenzahlen der einzelnen Massenpunkte des Körpers eingehen. Wir werden sehen, daß zusätzlich zu M nur sechs solcher von der Gestalt und Massenverteilung des starren Körpers abhängigen Zahlen nötig sind, um seine Trägheitseigenschaften vollständig in einem beliebigen körperfesten Koordinatensystem zu beschreiben.

Für die kinetische Energie im Schwerpunktsystem finden wir mit (5.10) den einfachen Ausdruck

$$T_{\text{rot}} \equiv \frac{1}{2}\sum m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\big(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r}_i\big)^2. \tag{5.17}$$

Die gesamte kinetische Energie des starren Körpers ist dann die Summe aus der kinetischen Energie T_{trans} seiner Schwerpunktsbewegung und der Energie T_{rot} der Drehbewegung der Konstituenten um den gemeinsamen Schwerpunkt, $T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$. Wir werten T_{rot} im körperfesten KS mit den kartesischen Koordinaten x'_a aus. Wegen

$$(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r})^2 = \sum_{ab}\big(r^2\delta_{ab} - x'_a\,x'_b\big)\omega'_a\omega'_b,$$

schreibt sich die kinetische Energie der Rotation wie folgt

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{ab}\Theta'_{ab}\,\omega'_a\omega'_b, \quad \text{wobei} \quad \Theta'_{ab} = \sum_i m_i\big(r_i'^2\delta_{ab} - x'_{ia}\,x'_{ib}\big) \tag{5.18}$$

offenbar die Beschreibung der Trägheit des starren Körpers gegenüber Drehungen enthält. Diese Trägheit ist also nicht wie bei der Translationsbewegung einzelner Massenpunkte durch *eine* Zahl, nämlich der trägen Masse, charakterisiert, sondern man benötigt auch die Lagen der Massenpunkte

bezüglich des Ursprungs und hat die neun Größen Θ'_{ab} zu bilden, von denen allerdings nur sechs voneinander unabhängig sind. Wir nennen deshalb Θ'_{ab} den *Trägheitstensor* des starren Körpers.

Zur Verdeutlichung stellen wir den Trägheitstensor noch in Matrixschreibweise dar,

$$(\Theta'_{ab}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}', \tag{5.19}$$

wobei der Strich bedeutet, dass die Koordinaten im körperfesten System gemeint sind. Er ist ein Tensor, da er sich bei Transformationen des Koordinatensystems wie das Produkt zweier Vektoren verhält, was sich aus seiner Definition (5.18) ergibt.

Man kann die kinetischen Energie natürlich auch im Schwerpunktsystem auswerten. Das entsprechende Resultat lautet

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{ab} \Theta_{ab} \omega_a \omega_b \,, \quad \text{mit} \quad \Theta_{ab} = (R \Theta' R^T)_{ab}.$$

Wir benutzten, dass die beiden Koordinatensysteme über eine Drehung R verbunden sind. Im Schwerpunktsystem ist der Trägheitstensor zeitabhängig, da die Drehungen zeitabhängig sind. Deshalb ist meist vorteilhaft im körperfesten System zu rechnen.

Für einen Festkörper bestehend aus etwa 10^{24} Teilchen sind in einem makroskopisch kleinen aber mikroskopisch großen Volumen ΔV mit einem Durchmesser von $\sim 10^{-6}$cm etwa 10^5 Atome enthalten. Wie in Abschnitt (4.1.1) gehen wir deshalb von der diskreten zur makroskopisch kontinuierlichen Beschreibung des starren Körpers über und ersetzen die Massen im kleinen Volumen ΔV_i durch $\rho(\mathbf{r}_i)\Delta V_i$, wobei $\rho(\mathbf{r}_i)$ die mittlere Massendichte im betrachteten Volumenelement ist. Dann ist der Trägheitstensor durch folgendes Integral über das Volumen des starren Körpers gegeben,

$$\Theta'_{ab} = \int_{V'} d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \big(r'^2 \delta_{ab} - x'_a x'_b \big). \tag{5.20}$$

Das Element Θ'_{11} nennt man Trägheitsmoment der Massenverteilung um die $\mathbf{e}'_1$-Achse; entsprechend Θ'_{22} und Θ'_{33}. Für die nichtdiagonalen Elemente sind die Namen *Trägheitsprodukte, Zentrifugalmomente* oder *Deviationsmomente* im Gebrauch.

5.2.1 Eigenschaften des Trägheitstensors, Beispiele

Der Trägheitstensor hat folgende Eigenschaften:

- Es handelt sich um einen symmetrischen Tensor. Damit kann er auf *Hauptachsen* transformiert werden, d.h. es gibt ein körperfestes kartesisches Basissystem, die Hauptachsen des Tensors, in dem er Diagonalgestalt hat:

$$(\Theta'_{ab}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

  Die reellen Eigenwerte A, B und C heißen *Hauptträgheitsmomente*.

- Die Hauptträgheitsmomente sind nichtnegativ und genügen der Ungleichung

$$A + B \geq C \tag{5.22}$$

und zyklisch. Dies folgt unmittelbar nach Transformation auf die Hauptachsen,

$$A + B = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + 2z_i'^2) \quad \text{und} \quad C = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2).$$

- Der Trägheitstensor ist additiv, d.h. er ist die Summe der Trägheitstensoren seiner Teile, freilich bezogen auf den gleichen Punkt.

Oft benötigt man den Trägheitstensor $\Theta'^{\mathbf{c}}$ bezüglich eine Punktes $\mathbf{R} + \mathbf{c}$, der gegenüber dem Schwerpunkt um den Vektor $\mathbf{c}$ verschoben ist. Es gilt der *Steinersche Satz*

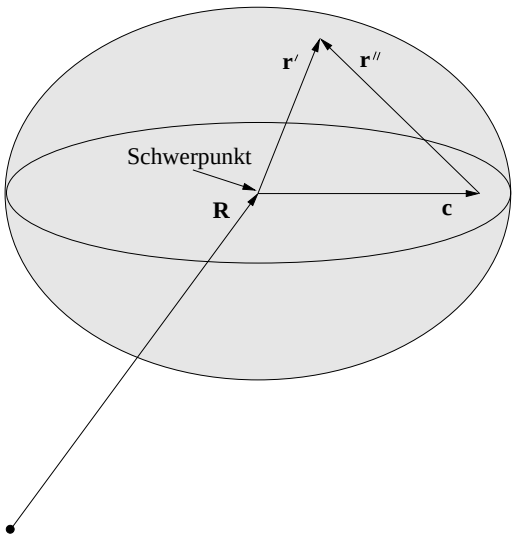

Abbildung 5.5: *Zum* STEINER*schen Satz.*

$$\Theta'^{\mathbf{c}}_{ab} = \Theta'_{ab} + M(c^2\delta_{ab} - c_a c_b). \tag{5.23}$$

Daraus folgt insbesondere, dass das Trägheitsmoment eines Körpers um eine Achse durch den beliebigen Punkt O gleich seinem Trägheitsmoment um die parallele Achse durch den Schwerpunkt ist, vermehrt um Ms^2, wo s der Abstand der beiden Achsen ist. Insbesondere wird das Trägheitsmoment bei fester Achsenrichtung minimal wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht.

Der Beweis von (5.23) ist einfach: Gemäß Abbildung (5.5) ist $x''_a = x'_a - c_a$ und entsprechend gilt

$$\Theta'^{\mathbf{c}}_{ab} = \sum m_i\big(x''_{ip}x''_{ip}\delta_{ab} - x''_{ia}x''_{ib}\big) = \sum m_i\big(x'_{ip}x'_{ip}\delta_{ab} - x'_{ia}x'_{ib}\big) + M\big(c^2\delta_{ab} - c_a c_b\big),$$

wobei wir wieder einmal von $\sum m_i x'_{ia} = 0$ Gebrauch machten. Wir legen nun $\mathbf{e}'_1$ in die Rotationsachse. Liegt der Schwerpunkt in der Rotationsachse, dann ist das Trägheitsmoment Θ'_{11}. Geht sie durch $\mathbf{R} + \mathbf{c}$, dann ist das Trägheitsmoment gleich $\Theta'_{11} + M(c_2^2 + c_3^2)$. Aber $s^2 \equiv c_2^2 + c_3^2$ ist genau das Quadrat des Abstands der beiden Drehachsen voneinander.

Für Körper mit Symmetrieachsen ist es oft möglich die Hauptachsen und Trägheitsmomente explizit anzugeben. In der folgenden Abbildung haben wir einige typische Beispiele skizziert. Die Körper haben eine homogene Massendichte ρ, eine Gesamtmasse M und die angegebenen Trägheitsmomente beziehen sich auf den Schwerpunkt. Die Größen A, B und C sind die Hauptträgheitsmomente um die in der Abbildung (5.6) eingezeichneten Achsen $1, 2$ und 3.

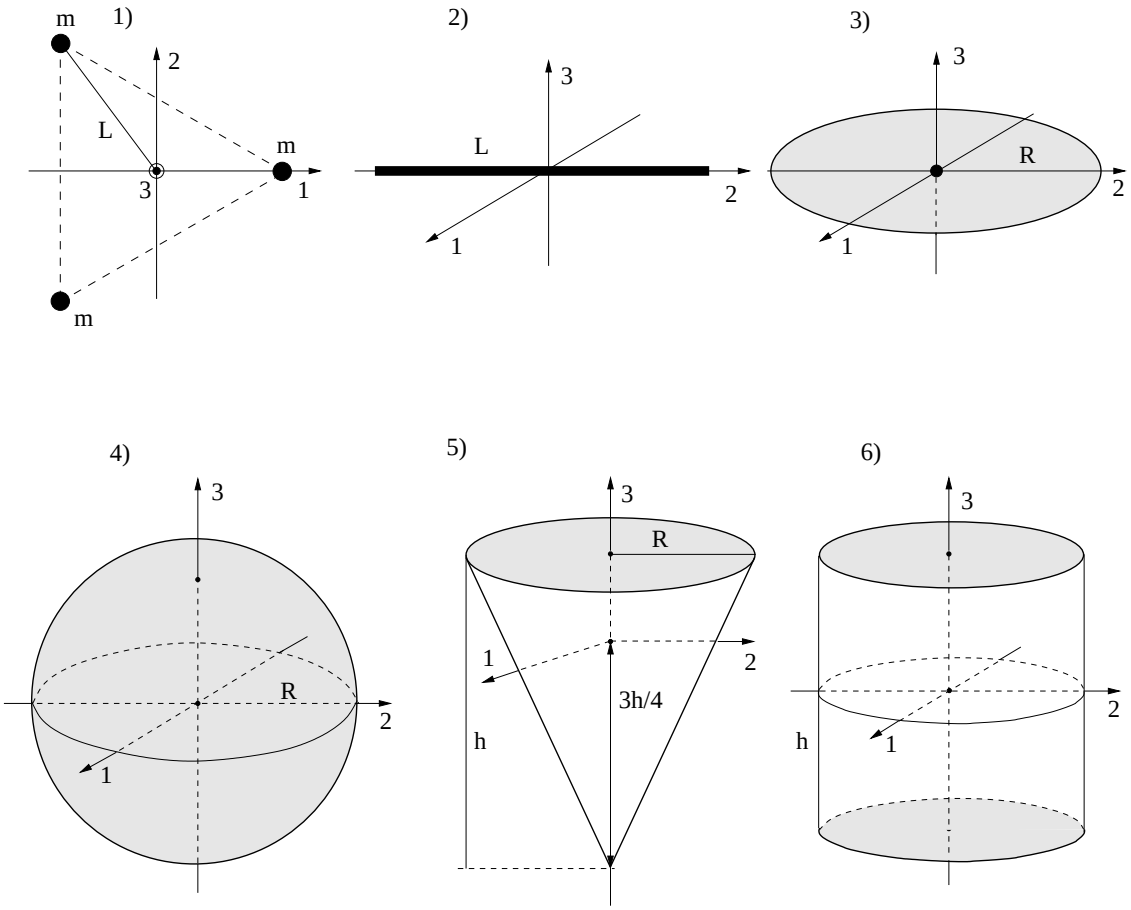

Abbildung 5.6: *Zu den Trägheitsmomenten ausgewählter Körper.*

1. Drei gleichschwere Massenpunkte an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks:

$$(A, B, C) = \frac{ML^2}{2}(1, 1, 2).$$

2. Dünner Stab der Länge L:

$$(A, B, C) = \frac{ML^2}{12}(1, 0, 1).$$

3. Dünne Scheibe mit Radius R:

$$(A, B, C) = \frac{MR^2}{4}(1, 1, 2).$$

4. Vollkugel mit Radius R:

$$(A, B, C) = \frac{2MR^2}{5}(1, 1, 1).$$

5. Gerader Kreiskegel mit Grundfläche πR^2 und Höhe h:

$$(A, B, C) = \frac{3MR^2}{20}\big(1 + \frac{h^2}{4R^2}, 1 + \frac{h^2}{4R^2}, 2\big).$$

6. Gerader Kreiszylinder mit Radius R und Höhe h:

$$(A, B, C) = \frac{MR^2}{12}\big(3 + \frac{h^2}{R^2}, 3 + \frac{h^2}{R^2}, 6\big).$$

7. Kubus mit Kantenlänge L:

$$(A, B, C) = \frac{ML^2}{6}\big(1, 1, 1\big).$$

8. Quader mit Kantenlängen L_1, L_2, L_3:

$$(A, B, C) = \frac{M}{12}\big(L_2^2 + L_3^2, L_1^2 + L_3^2, L_1^2 + L_2^2\big).$$

Wir skizzieren die Berechnung des Trägheitsmomentes A für den Kreiskegel. Wir setzen den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt, so dass die Kegeloberfläche durch die Gleichung

$$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{R}{h}\big(z + \frac{3h}{4}\big) \tag{5.24}$$

definiert ist. Bei konstanter Massenbelegung ist die Masse

$$M = \rho \cdot V = \frac{\pi}{3}\rho h R^2.$$

Wir berechnen zuerst den Beitrag einer Schicht mit konstantem z zum Trägheitsmoment A,

$$\rho \int (y^2 + z^2) r' dr' d\varphi = \rho \int (r'^2 \sin^2 \varphi + z^2) r' dr' d\varphi = \rho\pi(\frac{r^4}{4} + z^2 r^2),$$

wobei wir die obere Integrationsgrenze r aus (5.24) eingesetzt haben. Die anschließende Integration über z von $-3h/4$ bis $h/4$ ergibt

$$\rho\pi \frac{R^2 h}{80}(4R^2 + h^2).$$

Mit dem obigen Ausdruck für die Masse des Kreiskegels erhalten wir folgende Hauptträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunktes,

$$A = B = \frac{3M}{80}(4R^2 + h^2),$$

wie in der obigen Liste angegeben. Verschieben wir die Drehachse 1 parallel zu sich selber bis sie durch den Kegelspitze geht, dann ist nach dem STEINERschen Satz das entsprechende Trägheitsmoment

$$A = \frac{3MR^2}{20}\big(1 + \frac{4h^2}{R^2}\big).$$

Für alle angebenden Körper mit Ausnahme des Quaders sind mindestens zwei Hauptträgheitsmomente gleich. Solche Körper nennt man *symmetrische Kreisel*. Für einen symmetrischen Kreisel mit $A = B$ vereinfacht sich die kinetische Energie der Rotation,

$$T_{\text{rot}} = \frac{A}{2}\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right) + \frac{C}{2}\left(\dot{\psi} + \cos\vartheta\dot{\varphi}\right)^2. \tag{5.25}$$

Sind alle drei Hauptträgheitsmomente voneinander verschieden, dann spricht man vom *unsymmetrischen Kreisel*, sind dagegen alle drei gleich, dann handelt es sich um den *Kugelkreisel*. Die Vollkugel oder der Kubus sind Kugelkreisel. Für $A = B = C$ ist die Rotationsenergie

$$T_{\text{rot}} = \frac{A}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\cos\vartheta\dot{\varphi}\dot{\psi}\right) \tag{5.26}$$

5.3 Drehimpuls und kräftefreie symmetrische Kreisel

Wir müssen uns jetzt den Drehimpulssatz genauer ansehen. Im allgemeinen ist der Trägheitstensor nur im körperfesten Koordinatensystem konstant, so dass es notwendig ist, die Bewegungsgleichung, d.h. in erster Linie die Zeitableitung des Drehimpulses $\mathbf{L}_{\text{rot}}$ auf das körperfeste System umzurechnen.

Der Drehimpuls im Schwerpunktsystem lautet

$$\mathbf{L}_{\text{rot}} = \sum m_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i, \tag{5.27}$$

und kann mit Hilfe von $\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_i$ und

$$\mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) = \sum_{ab} \mathbf{e}'_a \left(r'^2\delta_{ab} - x'_a x'_b\right)\omega'_b$$

wie folgt geschrieben werden,

$$\mathbf{L}_{\text{rot}} = \mathbf{e}'_a \Theta'_{ab}\omega'_b \quad \text{oder} \quad L'_a = \Theta'_{ab}\omega'_b. \tag{5.28}$$

5.3.1 Poinsot-Darstellung der Trägheitsdrehbewegung

Wir betrachten zunächst den im Raum frei beweglichen starren Körper. Wenn $\mathbf{K}^{(a)}$ von der Winkelgeschwindigkeit und $\mathbf{M}$ von der Translationsgeschwindigkeit unabhängig ist, lassen sich Translations- und Drehbewegung gesondert behandeln. Wir beschäftigen uns hier hauptsächlich mit der letzteren. Das Moment der (konstanten) Schwerkraft bezüglich des Schwerpunktes verschwindet. Wenn wir auch den Luftwiderstand und die Reibung vernachlässigen, haben wir das Problem des *kräftefreien Kreisels vor uns*. Für einen kräftefreien Kreisel ist die kinetische Energie der Rotation konstant,

$$T_{\text{rot}} = \tfrac{1}{2}\omega_a\Theta_{ab}\omega_b = \tfrac{1}{2}\omega'_a\Theta'_{ab}\omega'_b \tag{5.29}$$

und die Spitze von $\boldsymbol{\omega}$ liegt auf dem beweglichen POINSOTschen Energieellipsoid,

$$\mathcal{E}(t) = \left\{\omega_a \middle| \omega_a \Theta_{ab}(t)\omega_b = 2T_{\text{rot}}\right\} = R(t)\mathcal{E}_0, \qquad \mathcal{E}_0 = \left\{\omega'_b \middle| \omega'_a \Theta'_{ab}\omega'_b = 2T_{\text{rot}}\right\}.$$

das kongruent zum Trägheitsellipsoid ist. Aus der Erhaltung des Drehimpulses im Schwerpunkt-

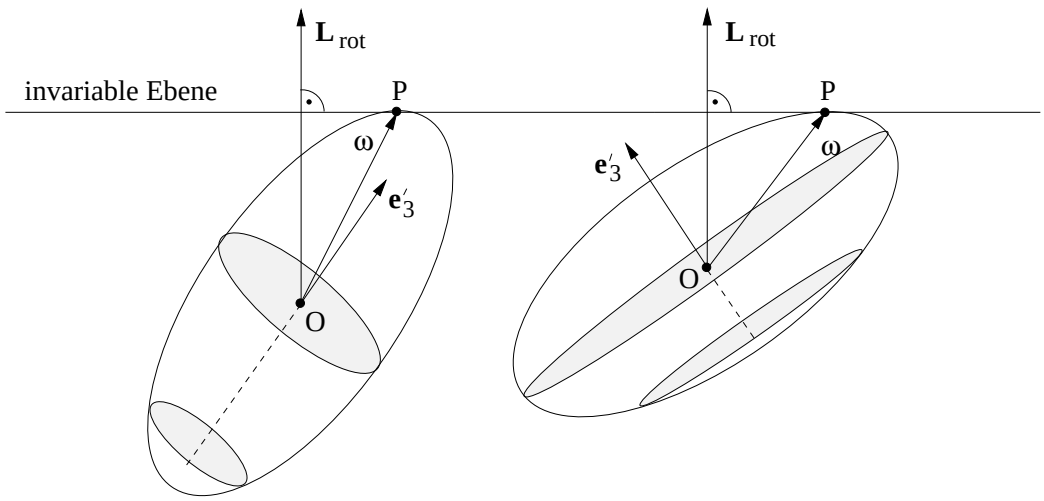

Abbildung 5.7: *Zur* POINSOT*schen Darstellung der Bewegung für den verlängerten und abgeplatteten Trägheitsellipsoid.* $\mathbf{e}'_3$ *zeigt in Richtung der Figurenachse.*

system und

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{\text{rot}} = 2T_{\text{rot}} = \text{const.}, \tag{5.30}$$

folgt, dass die Spitze von $\boldsymbol{\omega}$ auch noch in einer invariablen Ebene liegt die senkrecht zu $\mathbf{L}_{\text{rot}}$ ist.

Wir zeigen nun, dass die invariable Ebene und der POINSOTsche Ellipsoid genau einen gemeinsamen Punkt haben und sich deshalb in diesem Punkte berühren müssen. Dazu nehmen wir an, dass $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{\eta}$ beide in der Schnittmenge von Ebene und Ellipsoid liegen,

$$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta} \in \text{ invariabler Ebene} \cap \mathcal{E}(t),$$

und beweisen, dass dann $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\eta}$ gelten muß:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta}) \cdot \Theta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta}) &= \boldsymbol{\omega} \cdot \Theta\boldsymbol{\omega} - 2\boldsymbol{\omega} \cdot \Theta\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta} \cdot \Theta\boldsymbol{\eta} \\ &\overset{(5.30)}{=} 2T_{\text{rot}} - 2\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_{\text{rot}} + 2T_{\text{rot}} = 0.\end{aligned}$$

Sind alle Hauptträgheitsmomente positiv, so ist Θ invertierbar und damit folgt in der Tat $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\eta}$. Die Spitze von $\boldsymbol{\omega}$ ist der Berührpunkt zwischen invariabler Ebene und Energieellipsoid. Die Größe der Winkelgeschwindigkeit ist durch den Abstand zwischen dem festen Punkt O und dem Berührpunkt P gegeben. Der Berührpunkt hat als Punkt auf der Drehachse die Geschwindigkeit Null, und die Bewegung von $\boldsymbol{\omega}$ kann deshalb durch das Abrollen des Energieellipsoids auf der invariablen Ebene erhalten werden. Der kräftefreie Kreisel bewegt sich so, dass das körperfeste POINSOTsche Ellipsoid auf der invariablen Ebene abrollt, ohne zu gleiten. Man nennt die Bahn, welche die Spitze von $\boldsymbol{\omega}$ auf der invariablen Ebene beschreibt die *Spurbahn*, die entsprechende Bahn auf dem Energieellipsoid bezeichnet man als *Polbahn*.

Für den symmetrischen Kreisel ist das Energieellipsoid rotationssymmetrisch. Beim Abrollen des Ellipsoids auf der invariablen Ebene entstehen deshalb Kreise, d.h. $\boldsymbol{\omega}$ hat einen konstanten Betrag und beschreibt einen Kegel um $\mathbf{L}$, der als *Spurkegel* bezeichnet wird. Die Bewegung der Symmetrieachse des Kreisels nennt man *Nutation*. $\boldsymbol{\omega}$ beschreibt einen Kegel um diese Symmetrieachse, der als *Gangpolkegel* bezeichnet wird.

5.3.2 Kräftefreie symmetrische Kreisel

Für den symmetrischen Kreisel sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich, zum Beispiel $A = B$. Der körperfeste Basisvektor $\mathbf{e}'_3$ zeige in Richtung der Figurenachse des symmetrischen Kreisels, also in Richtung der dritten Hauptachse mit Hauptträgheitsmoment C. Wir wählen $\mathbf{e}_3$ in Richtung des konstanten Drehimpulses $\mathbf{L}_{\rm rot}$ im Schwerpunktsystem,

$$\mathbf{L}_{\rm rot} = \ell \mathbf{e}_3. \tag{5.31}$$

Dann finden wir für die Komponenten des Drehimpulses im körperfesten System,

$$(L'_a) = (L_b R_{ba}) \overset{(5.31)}{=} (\ell R_{3a}) = \ell \begin{pmatrix} \sin\vartheta \sin\psi \\ \sin\vartheta \cos\psi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

Der Zusammenhang zwischen den Komponenten des Drehvektors und denjenigen des Drehimpulses ist $L'_a = \Theta'_{ab}\omega'_b$ und hat ausgeschrieben folgende Form

$$\begin{aligned} \ell \sin\vartheta \sin\psi &= A\omega'_1 = A\cos\psi\dot{\vartheta} + A\sin\psi\sin\vartheta\dot{\varphi} \\ \ell \sin\vartheta \cos\psi &= A\omega'_2 = -A\sin\psi\dot{\vartheta} + A\cos\psi\sin\vartheta\dot{\varphi} \\ \ell \cos\vartheta &= C\omega'_3 = C\dot{\psi} + C\cos\vartheta\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\cos\psi$ und die zweite mit $\sin\psi$ und bilden die Differenz der entstehenden Gleichungen, so erhalten wir $A\dot{\vartheta} = 0$, oder

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}. \tag{5.34}$$

Benutzen wird dies wieder in den ersten beiden Gleichungen, so ergibt sich $\ell = A\dot{\varphi}$, also

$$\varphi = \frac{\ell}{A}t + \varphi_0. \tag{5.35}$$

Setzen wir diese Resultate für φ und ϑ in die letzte Gleichung in (5.33) ein, dann folgt

$$\psi = \ell\, t\, \cos\vartheta_0 \big(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\big) + \psi_0. \tag{5.36}$$

Deshalb sind für den kräftefreien symmetrischen Kreisel alle EULERschen Winkel, und damit die Drehung vom Schwerpunktsystem ins körperfeste System, als Funktionen der Zeit bestimmt. Das körperfeste System dreht sich um das raumfeste, wobei der Winkel ϑ_0 zwischen $\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{e}'_3$ konstant bleibt. Die Winkel φ und ψ nehmen linear mit der Zeit zu.

Wie schaut die Bewegung *im Schwerpunktsystem* aus? In diesem System sind die Komponenten

des Drehimpulses fest. Mit (5.14) erhalten wir den Drehvektor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_a \mathbf{e}_a = \ell \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0 \big(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\big)\big(\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\,\mathbf{e}_2\big) + \ell\Big(\frac{\cos^2\vartheta_0}{C} + \frac{\sin^2\vartheta_0}{A}\Big)\mathbf{e}_3, \tag{5.37}$$

wo wir (5.34-5.36) benutzten. Der Drehvektor hat die Länge

$$\omega^2 = \ell^2\big(\frac{\sin^2\vartheta_0}{A^2} + \frac{\cos^2\vartheta_0}{C^2}\big). \tag{5.38}$$

Der Drehvektor des Kreisels schließt mit der raumfesten Drehimpulsachse (hier als 3-Achse gewählt) einen konstanten Winkel ein,

$$\mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega \cos\angle(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_3) = \ell\big(\frac{\sin^2\vartheta_0}{A} + \frac{\cos^2\vartheta_0}{C}\big).$$

Das bedeutet, dass die momentane Drehachse des Körpers einen geraden Kreiskegel, den sogenannten *Rastpolkegel*, um die feste Drehimpulsachse beschreibt. Die Winkelgeschwindigkeit der momentanen Drehachse auf diesem Kegel ist $\dot\varphi = \ell/A$, wie man aus (5.37) abliest. Die körperfeste $\mathbf{e}'_3$-Achse, die Symmetrieachse des Körpers, hat im raumfesten Schwerpunktsystem die Darstellung

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_b R_{b3} = \sin\vartheta_0(\sin\varphi\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\mathbf{e}_2) + \cos\vartheta_0\mathbf{e}_3,$$

und nimmt gegen die raumfeste Drehimpulsachse den konstanten Winkel ϑ_0 ein. Sie beschreibt damit einen Kegel, den man als *Präzessionskegel* bezeichnet. Die konstante Winkelgeschwindigkeit der Figurenachse um die Drehimpulsachse ist ebenfalls $\dot\varphi = \ell/A$. Die Vektoren $\mathbf{e}'_3, \boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{L}_{\rm rot}$ liegen wegen

$$\mathbf{L}_{\rm rot} = A\boldsymbol{\omega} + (C - A)\,\omega'_3\mathbf{e}'_3$$

in einer Ebene, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ um den Drehimpulsvektor dreht. Für abgeplattete Rotationskörper mit $A > C$ liegt der Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ zwischen Drehimpulsvektor und Symmetrieachse. Für verlängerte Rotationskörper mit $A < C$ liegt Ł dagegen zwischen Figurenachse und momentaner Drehachse, siehe Abbildung (5.8).

Wie sieht nun die Bewegung *im körperfesten System* aus. Für den Drehvektor in diesem System finden wir

$$\boldsymbol{\omega} = \omega'_a\mathbf{e}'_a = \frac{\ell}{A}\sin\vartheta_0\big(\sin\psi\mathbf{e}'_1 + \cos\psi\mathbf{e}'_2\big) + \frac{\ell}{C}\cos\vartheta_0\,\mathbf{e}'_3. \tag{5.39}$$

Vom körperfesten Bezugssystem aus betrachtet, umkreist $\boldsymbol{\omega}$ die Figurenachse auf dem *Gangpolkegel* mit konstanter Kreisfrequenz $-\dot\psi$. Figurenachse und $\boldsymbol{\omega}$ schließen einen festen Winkel ein. Für den Drehimpuls erhalten wir

$$\mathbf{L}_{\rm rot} = \ell\sin\vartheta_0\big(\sin\psi\,\mathbf{e}'_1 + \cos\psi\,\mathbf{e}'_2\big) + \ell\cos\vartheta_0\mathbf{e}'_3. \tag{5.40}$$

Im köperfesten System rotiert also auch $\mathbf{L}_{\rm rot}$ mit der konstanten Kreisfrequenz $(-\dot\psi)$ auf einem Kegel, dessen Achse mit der Figurenachse $\mathbf{e}'_3$ zusammenfällt. Die einfache Bewegung der gleichförmigen Rotation um eine feste Achse tritt nur auf, wenn die Richtung von $\mathbf{L}_{\rm rot}$ mit einer Hauptachse zusammenfällt. Dagegen ist die allgemeine Bewegungsform die Präzession.

Für den kräftefreien *Kugelkreisel* ist $(\Theta'_{ab}) = A\mathbb{1}_3$, und wegen

$$\mathbf{L}_{\rm rot} = A\boldsymbol{\omega}$$

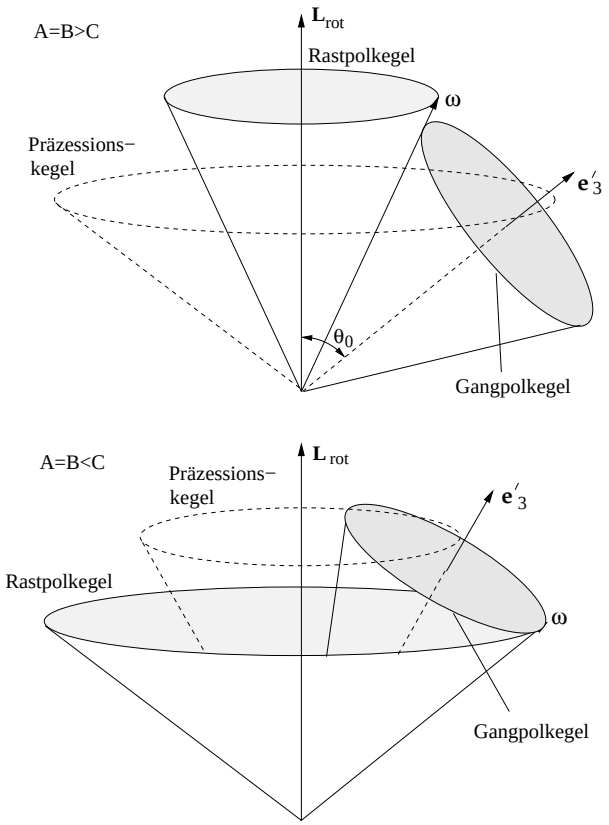

Abbildung 5.8: *Bewegungsverhältnisse des freien symmetrischen Kreisels: Die momentane Drehachse, gegeben durch die Richtung von* $\boldsymbol{\omega}$*, bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit* $\dot{\varphi}$ *auf dem Rastpolkegel um die raumfeste Drehimpulsachse, während die Figurenachse mit derselben Winkelgeschwindigkeit auf dem Präzessionskegel um die Drehimpulsachse präzediert. Im körperfesten Bezugssystem beschreibt die momentane Drehachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit* Ω *den Gangpolkegel um die Figurenachse* $\boldsymbol{e}'_3$*.*

ist $\boldsymbol{\omega}$ konstant. Die Drehachse fällt dauernd mit der festen Drehimpulsachse zusammen. Jeder Punkt des Körpers beschreibt einen Kreis mit konstanter Umlaufgeschwindigkeit.

Die obige Beschreibung der Bewegung vom Standpunkt des sich auf dem Kreisel befindlichen Beobachters ist gerade im Fall der Erde angemessen. Die momentane Rotationsachse fällt nach der besprochenen EULERschen Theorie mit der Figurenachse der Erde nicht zusammen, sondern führt eine Nutation um sie aus. Wenn man den Durchstoßpunkt der Figurenachse bzw. der Drehachse der Erde durch die Erdoberfläche *geometrischen Nordpol* bzw. *kinematischen Nordpol* nennt, so läßt sich auch sagen, der kinematische Nordpol beschreibt um den geometrischen Nordpol einen Kreis. Die (reguläre) Präzession oder Nutation erfolgt nach (5.39) mit der Winkelgeschwindigkeit

$$-\dot{\psi} = \ell \cos\vartheta_0 \big(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\big) = \omega'_3 \big(\frac{C}{A} - 1\big),$$

oder, da für die Erde

$$\frac{C-A}{A} \sim \frac{1}{300} \quad \text{und} \quad \omega_3' = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$$

ist, etwa mit der EULERschen Periode von

$$T = \frac{2\pi}{\omega_3'} \frac{A}{|C-A|} \sim 300 \text{ Tagen.}$$

Tatsächlich wandert der kinematische Nordpol mit der durchschnittlichen Umlaufzeit 433 Tage (CHANDLERsche Periode) auf einer spiralförmigen Bahn innerhalb eines Kreises von 10 m Radius im Sinne der Erddrehung. Die Verlängerung der Periode läßt sich durch die elastische Deformation der Erde (und nicht mit dem von Sonne und Mond erzeugten Drehmoment) erklären.

5.4 Eulersche Gleichungen und Stabilitätsanalyse

Im Schwerpunktsystem (dessen Achsen gegenüber denen eines Inertialsystems nicht rotieren) gilt der Drehimpulssatz,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{\text{rot}} = \mathbf{e}_a' \Theta_{ab}' \dot{\omega}_b' + \dot{\mathbf{e}}_a' \Theta_{ab}' \omega_b' = \mathbf{e}_a' \left(\Theta_{ab}' \dot{\omega}_b' + (\Omega' \Theta')_{ab} \omega_b' \right) = \mathbf{M}.$$

Entwickeln wir das Drehmoment im Schwerpunktsystem nach der körperfesten Basis, $\mathbf{M} = M_a' \mathbf{e}_a'$, und legen die $\mathbf{e}_a'$ in die Hauptachsenrichtungen, dann nehmen diese, nach EULER benannten Gleichungen folgende elegante Form an:

$$A\dot{\omega}_1' + (C-B)\omega_2'\omega_3' = M_1' \tag{5.41}$$
$$B\dot{\omega}_2' + (A-C)\omega_3'\omega_1' = M_2' \tag{5.42}$$
$$C\dot{\omega}_3' + (B-A)\omega_1'\omega_2' = M_3'. \tag{5.43}$$

Diese EULER*schen Kreiselgleichungen* sind nichts anderes als die Bilanzgleichungen für die Komponenten des Drehimpulses im mitrotierenden Hauptachsensystem des Körpers, angeheftet am Schwerpunkt. Hat man aus dem gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungssystem der EULERschen Gleichungen die zeitliche Entwicklung der Funktionen ω_a' bestimmt, so kann man im Prinzip aus ihnen die EULERschen Winkel aus

$$(\omega_a') = \begin{pmatrix} \cos\psi\dot{\vartheta} + \sin\psi\sin\vartheta\dot{\varphi} \\ -\sin\psi\dot{\vartheta} + \cos\psi\sin\vartheta\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} + \cos\vartheta\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

berechnen und die Drehung des Kreisels bestimmen.

Die gleichförmige Rotation um eine Hauptachse ist offenbar eine Lösung der EULERschen Gleichungen für den *freien Kreisel*. Wir untersuchen jetzt, ob die Lösung stabil unter kleinen Störungen ist. Seien also $\omega_2', \omega_3' \ll \omega_1'$. Nehmen wir nun an, dies sei für die gesamte Bewegung erfüllt, so können wir die kleinen Größen zweiter Ordnung in den EULERschen Kreiselgleichungen vernachlässigen. Dann folgt zunächst

$$A\dot{\omega}_1' = 0 \quad \text{oder} \quad \omega_1' = \text{const.} \tag{5.44}$$

Damit reduzieren sich die EULERschen Gleichungen für die kleinen Komponenten des Drehvektors

auf ein lineares Differentialgleichungssystem,

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_2' \\ \dot{\omega}_3' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_3' \end{pmatrix}, \quad M = \omega_1' \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{B}(C-A) \\ \frac{1}{C}(A-B) & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix M sind

$$\lambda_\pm = \pm\omega_1' \Big(\frac{(C-A)(A-B)}{BC} \Big)^{1/2}.$$

Sie sind imaginär für

$$A < B,\ A < C \quad \text{oder} \quad A > B,\ A > C \tag{5.45}$$

und reell für

$$B < A < C \quad \text{oder} \quad B > A > C. \tag{5.46}$$

Im ersten Fall ist die Drehung um die erste Hauptachse stabil, im zweiten Fall instabil. Damit haben wir den Satz:

Die Rotation eines freien Kreisels um eine Hauptträgheitsachse ist stabil, wenn es sich um eine Achse minimalen oder maximalen Trägheitsmoments handelt. Ist die Achse diejenige mit mittleren Trägheitsmoment so ist die Drehung instabil.
Insbesondere hat die Figurenachse beim symmetrischen Kreisel immer einen stabilen Charakter.

5.5 Kräftefreie unsymmetrische Kreisel

Wir legen die Basisvektoren $\mathbf{e}_a'$ in Richtung der Hauptachsen des starren Körpers. Für den kräftefreien Kreisel sind die kinetische Energie und der Drehimpuls der Drehbewegung um den Schwerpunkt konstant,

$$\begin{aligned} 2T_{\text{rot}} &= A\omega_1'^2 + B\omega_2'^2 + C\omega_3'^2 = \text{const.} \\ \ell^2 &= \mathbf{L}_{\text{rot}}^2 = A^2\omega_1'^2 + B^2\omega_2'^2 + C^2\omega_3'^2 = \text{const.} \end{aligned} \tag{5.47}$$

Stellt man die EULERschen Kreiselgleichungen für die Bewegung eines freien Kreisels (Annahme: $A < B < C$) neben die Gleichungen für Ableitungen der JACOBIschen elliptischen Funktionen

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1' + \frac{C-B}{A}\omega_2'\omega_3' = 0 \qquad & \qquad \text{cn}'(u,k) + \text{sn}(u,k)\text{dn}(u,k) = 0 \\ \dot{\omega}_2' - \frac{C-A}{B}\omega_1'\omega_3' = 0 \qquad & \qquad \text{sn}'(u,k) - \text{cn}(u,k)\text{dn}(u,k) = 0 \\ \dot{\omega}_3' + \frac{B-A}{C}\omega_1'\omega_2' = 0 \qquad & \qquad \text{dn}'(u,k) + k^2\text{sn}(u,k)\text{cn}(u,k) = 0, \end{aligned} \tag{5.48}$$

wobei $' = d/du$ ist, so liegt es nahe, folgenden Lösungsansatz für die Komponenten des Drehvektors im körperfesten System zu wählen

$$\begin{aligned}\omega_1'(t) &= \alpha_1\,\mathrm{cn}(\mu(t-t_0),k)\\ \omega_2'(t) &= \alpha_2\,\mathrm{sn}(\mu(t-t_0),k)\\ \omega_3'(t) &= \alpha_3\,\mathrm{dn}(\mu(t-t_0),k)\end{aligned} \tag{5.49}$$

Die JACOBIschen elliptischen Funktionen sind *normiert*,

$$\mathrm{sn}^2+\mathrm{cn}^2 = k^2\mathrm{sn}^2+\mathrm{dn}^2 = 1 \tag{5.50}$$

und erfüllen die Anfangsbedingungen

$$\mathrm{dn}(0,k)=\mathrm{cn}(0,k)=1 \quad \text{und} \quad \mathrm{sn}(0,k)=0. \tag{5.51}$$

Trägt man den Lösungsansatz (5.49) in die EULERschen Kreiselgleichungen ein, so erhält man folgende notwendigen Bedingungen an die Koeffizienten α_a und μ:

$$\begin{aligned}\mu\frac{\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3} &= \frac{C-B}{A}\\ \mu\frac{\alpha_2}{\alpha_3\alpha_1} &= \frac{C-A}{B}\\ \mu k^2\frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2} &= \frac{B-A}{C}.\end{aligned} \tag{5.52}$$

Multiplizieren wir je zwei dieser Gleichungen, dann finden wir

$$\alpha_1^2=\frac{\mu^2k^2\,BC}{(C-A)(B-A)} \quad , \quad \alpha_2^2=\frac{\mu^2k^2\,AC}{(C-B)(B-A)} \quad , \quad \alpha_3^2=\frac{\mu^2\,AB}{(C-A)(C-B)}. \tag{5.53}$$

Es verbleiben noch die 2 Integrationskonstanten μ und k. Wir bestimmen sie, indem wir die Erhaltungsätze für die kinetische Energie und $\mathbf{L}_{\mathrm{rot}}^2$ bei $t=t_0$ auswerten:

$$\begin{aligned}2T_{\mathrm{rot}} &\overset{(5.51)}{=} A\alpha_1^2+C\alpha_3^2=\mu^2\frac{ABC}{(C-A)(C-B)(B-A)}\Big[(C-B)k^2+(B-A)\Big]\\ \ell^2 &\overset{(5.51)}{=} A^2\alpha_1^2+C^2\alpha_3^2=\mu^2\frac{ABC}{(C-A)(C-B)(B-A)}\Big[(C-B)Ak^2+(B-A)C\Big].\end{aligned} \tag{5.54}$$

Dividiert man die erste durch die zweite Gleichung dann gewinnt man eine Gleichung nur für k^2 und findet

$$k^2=\frac{B-A}{C-B}\left[\frac{2T_{\mathrm{rot}}C-\ell^2}{\ell^2-2AT_{\mathrm{rot}}}\right] \quad , \quad \mu^2=\frac{C-B}{ABC}\Big[\ell^2-2AT_{\mathrm{rot}}\Big]. \tag{5.55}$$

$$\alpha_1^2=\frac{2T_{\mathrm{rot}}C-\ell^2}{A(C-A)} \quad , \quad \alpha_2^2=\frac{2T_{\mathrm{rot}}C-\ell^2}{B(C-B)} \quad , \quad \alpha_3^2=\frac{\ell^2-2T_{\mathrm{rot}}A}{C(C-A)}. \tag{5.56}$$

Mit den Formeln (5.47) für die Energie und den Drehimpuls folgt sofort

$$\begin{aligned} 2T_{\rm rot}C - \ell^2 &= (C-A)A\omega_1'^2 + (C-B)B\omega_2'^2 \geq 0 \\ \ell^2 - 2T_{\rm rot}A &= (B-A)B\omega_2'^2 + (C-A)C\omega_3'^2 \geq 0, \end{aligned} \tag{5.57}$$

oder dass die Quadrate k^2 und μ^2, und mit (5.53) auch die Quadrate α_a^2, positiv sind. Damit sind die Konstanten μ, k, und α_a alle reell.

Weiter unten werden wir sehen, dass $\mathrm{sn}(u)$ und $\mathrm{cn}(u)$ periodisch mit Periode $4K$ und $\mathrm{dn}(u)$ periodisch mit Periode $2K$ sind, wobei K das vollständige Integral erster Art ist,

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta.}} \tag{5.58}$$

Die Periodizität der Lösung in μt entspricht in der physikalischen Zeit t eine Periodizität der

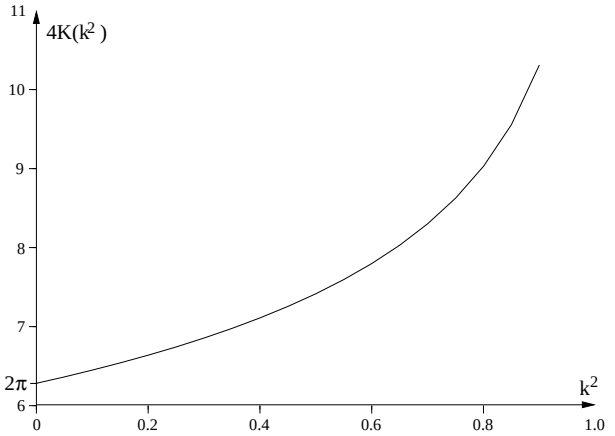

Abbildung 5.9: *Das vollständige elliptische Integral erster Art.*

Periodenlänge

$$T = \frac{4K}{\mu} = 4K\sqrt{\frac{ABC}{(C-B)(\ell^2 - 2AT_{\rm rot})}}.$$

Nach Ablauf der Zeit $T = 4K/\mu$ kehrt der Drehvektor $\boldsymbol{\omega}(t)$ im Hauptachsensystem wieder in seine Ausgangslage zur Zeit t_0 zurück. Im Fall des symmetrischen Kreisels ($A = B$) verschwindet nach (5.55) der Modul k^2 der JACOBIschen elliptischen Funktionen. Diese entarten dann zu Kreisfunktionen und wir erhalten die früheren Resultate für den kräftefreien symmetrischen Kreisel.

5.5.1 Die elliptischen Funktionen von Jacobi und Theta-Funktionen

Die elliptischen Funktionen von JACOBI sind doppelt periodische Verallgemeinerungen der trigonometrischen Funktionen. Wegen

$$\mathrm{cn}(u,k)=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(u,k)}\quad\text{und}\quad \mathrm{dn}(u,k)=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)} \tag{5.59}$$

lautet die Differentialgleichung für sn

$$\frac{d\,\mathrm{sn}}{du}=\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2)(1-k^2\mathrm{sn}^2)}\quad\text{oder}\quad du=\frac{d\,\mathrm{sn}}{\sqrt{(1-\mathrm{sn}^2)(1-k^2\mathrm{sn}^2)}}. \tag{5.60}$$

Damit ist u als Funktion von sn durch ein elliptisches Integral erster Gattung, nämlich durch

$$u=\int_0^{\mathrm{sn}(u)}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\overset{y=\sin\theta}{=}\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\qquad \mathrm{sn}(u)=\sin\phi, \tag{5.61}$$

gegeben. Dabei haben wir stillschweigend $0<k<1$ vorausgesetzt. Noch etwas expliziter: die elliptischen Funktionen von JACOBI können als Inverse des elliptischen Integrals erster Gattung,

$$u(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\quad\text{mit}\quad k\in[0,1], \tag{5.62}$$

wie folgt definiert werden:

$$\mathrm{sn}(u,k)=\sin\phi,\quad \mathrm{cn}(u,k)=\cos\phi\quad\text{und}\quad \mathrm{dn}(u,k)=\sqrt{1-(k\sin\phi)^2}. \tag{5.63}$$

Insbesondere für $k=0$ und $k=1$ sind es die wohlbekannten Kreis- und Hyperbelfunktionen,

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(u,0)=\sin u\quad&,\quad \mathrm{cn}(u,0)=\cos u\quad,\quad \mathrm{dn}(u,0)=1\\ \mathrm{sn}(u,1)=\tanh u\quad&,\quad \mathrm{cn}(u,1)=\mathrm{dn}(u,1)=1/\cosh u.\end{aligned} \tag{5.64}$$

Die Konstanten

$$K=K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\quad\text{und}\quad K'=K(k'), \tag{5.65}$$

wobei k' das Komplement des Moduls k ist, $k^2+k'^2=1$, spielen eine ähnliche Rolle wie $\pi/2$ für die Kreisfunktionen, und treten in den Verwandlungsformeln für die JACOBIschen Funktionen auf

	$u+K$	$u+iK'$	$u+K+iK'$	$u+2K$	$u+2iK'$	$u+2K+2iK'$
sn	$\mathrm{cn}\,u/\mathrm{dn}\,u$	$1/k\mathrm{sn}\,u$	$\mathrm{dn}\,u/k\mathrm{cn}\,u$	$-\mathrm{sn}\,u$	$\mathrm{sn}\,u$	$-\mathrm{sn}\,u$
cn	$-k'\mathrm{sn}\,u/\mathrm{dn}\,u$	$-i\mathrm{dn}\,u/k\mathrm{sn}\,u$	$-ik'/k\mathrm{cn}\,u$	$-\mathrm{cn}\,u$	$-\mathrm{cn}\,u$	$\mathrm{cn}\,u$
dn	$-k'/\mathrm{dn}\,u$	$-i\mathrm{cn}\,u/\mathrm{sn}\,u$	$ik'\mathrm{sn}\,u/\mathrm{cn}\,u$	$\mathrm{dn}\,u$	$-\mathrm{dn}\,u$	$-\mathrm{dn}\,u$

Die Tabelle ist so zu verstehen, dass man, um z.B. $\mathrm{cn}(u+K+iK')$ durch eine Funktion von u auszudrücken, in die zweite Zeile und dritte Spalte einzugehen hat und dann

$$\mathrm{cn}(u+K+iK')=-i\frac{k'}{k\,\mathrm{cn}\,(u)}$$

ablesen kann. Die Nullstellen, Pole und primitiven Perioden der elliptischen Funktionen von JACOBI sind

	Nullstellen	Pole	primitive Perioden
sn	$2nK + 2imK'$	$2nK + (2m+1)iK'$	$4K, 2iK'$
cn	$(2n+1)K + 2imK'$	$2nK + (2m+1)iK'$	$4K, 2K + 2iK'$
dn	$(2nK+1) + (2m+1)iK'$	$2nK + (2m+1)iK'$	$2K, 4iK'$

wobei n und m alle ganzen Zahlen durchlaufen. Diese elliptischen Funktionen erfüllen folgende Additionstheoreme,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u+v) &= \frac{\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(v)\mathrm{dn}(v) + \mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)} \\
\mathrm{cn}(u+v) &= \frac{\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v) - \mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{dn}(v)\mathrm{dn}(v)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)} \\
\mathrm{dn}(u+v) &= \frac{\mathrm{dn}(u)\mathrm{dn}(v) - k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{cn}(u)\mathrm{cn}(v)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(u)\mathrm{sn}^2(v)},
\end{aligned} \tag{5.66}$$

welche für $k = 0$ in die bekannten Additionstheoreme für die Sinus- und Cosinus-Funktionen übergehen. Die Taylorentwicklungen bei $u = 0$ bis zur Ordnung 3 lauten

$$\mathrm{sn}(u,k) = u - (1+k^2)\frac{u^3}{3!} + \ldots, \quad \mathrm{cn}(u,k) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \ldots, \quad \mathrm{dn}(u,k) = 1 - k^2\frac{u^2}{2!} + \ldots \tag{5.67}$$

Bekannter als die meromorphen JACOBIschen Funktionen sind die analytischen *Thetafunktionen*

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(v) &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1/2)^2} e^{(2n-1)i\pi v} \\
&= 2q^{1/4}\sin i\pi v \prod_1^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}e^{2i\pi v})(1-q^{2n}e^{-2i\pi v}) \qquad (5.68) \\
\vartheta_2(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1/2)^2} e^{(2n-1)i\pi v} \\
&= 2q^{1/4}\cos i\pi v \prod_1^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}e^{2i\pi v})(1+q^{2n}e^{-2i\pi v}) \qquad (5.69) \\
\vartheta_3(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2ni\pi v} \\
&= \prod_1^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}e^{2i\pi v})(1+q^{2n-1}e^{-2i\pi v}) \qquad (5.70) \\
\vartheta_0(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2ni\pi v} \\
&= \prod_1^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}e^{2i\pi v})(1-q^{2n-1}e^{-2i\pi v}) \qquad (5.71)
\end{aligned}$$

Die Verwandlungstabelle für die Thetafunktionen ist

	$v+\frac{1}{2}$	$v+\frac{\tau}{2}$	$v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$	$v+1$	$v+\tau$	$v+1+\tau$
ϑ_1	ϑ_2	$iA\vartheta_0$	$A\vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-B\vartheta_1$	$B\vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$A\vartheta_3$	$-iA\vartheta_0$	$-\vartheta_2$	$B\vartheta_2$	$-B\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_0	$A\vartheta_2$	$iA\vartheta_1$	ϑ_3	$B\vartheta_3$	$B\vartheta_3$
ϑ_0	ϑ_3	$iA\vartheta_1$	$A\vartheta_2$	ϑ_0	$-B\vartheta_0$	$-B\vartheta_0$

Dabei haben wir

$$q = e^{i\pi\tau}, \qquad A = e^{-i\pi(\tau/4+v)} \quad \text{und} \quad B = e^{-i\pi(\tau+2v)}$$

gesetzt. Die folgende Tabelle gibt die Nullstellen der Thetafunktionen und die zugehörigen Werte von $e^{2i\pi v}$; m und n durchlaufen alle ganzen Zahlen

	v	$e^{2i\pi v}$
ϑ_1	$m+n\tau$	$+q^{2n}$
ϑ_2	$(m+\frac{1}{2})+n\tau$	$-q^{2n}$
ϑ_3	$(m+\frac{1}{2})+(n+\frac{1}{2})\tau$	$-q^{2n+1}$
ϑ_0	$m+(n+\frac{1}{2})\tau$	$+q^{2n+1}$

Der Zusammenhang zwischen den Thetafunktionen und JACOBIs elliptischen Funktionen ist

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2Kv) &= \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} \\ \operatorname{cn}(2Kv) &= \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)} \\ \operatorname{dn}(2Kv) &= \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} \end{aligned} \tag{5.72}$$

Das vollständige Integral erster Gattung ist

$$K = \frac{\pi}{2}\,\vartheta_3^2(0) \quad \text{und} \quad iK' = \tau K. \tag{5.73}$$

Der Modulus und sein Komplement sind gegeben durch

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \quad \text{und} \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}, \tag{5.74}$$

so dass $k^2+k'^2 = 1$ ist. Für weitere Eigenschaften der doppelperiodischen Funktionen sn, cn und dn verweise ich auf die Literatur [5]. In den Abbildungen (5.10-5.12) sind die elliptischen Funktionen von JACOBI für einige Werte von k geplottet[4].

[4] SCILAB-CODE: `x=0:0.2:8; y=real(%sn(x,0.2)); z=(1-y.*y)**(1/2); w=(1-0.2*y.*y)**(1/2); X=[x;x;x]; Y=[y;z;w]; plot2d(X',Y');`

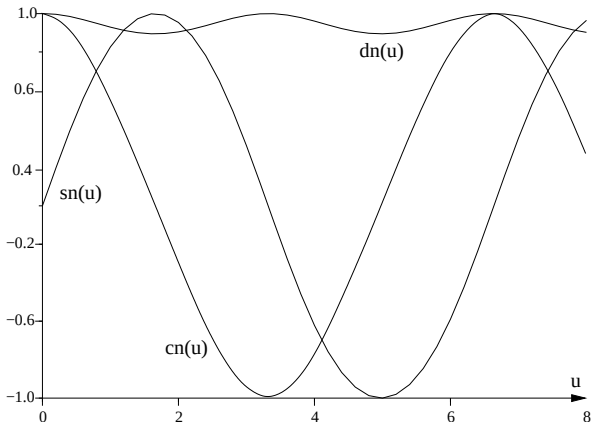

Abbildung 5.10: *Die Funktionen sn, cn und dn für* $k^2 = 0.2$ *und* $4K = 6.6385$.

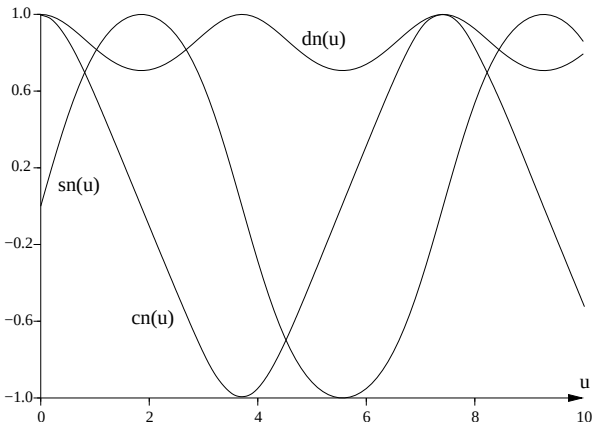

Abbildung 5.11: *Die Funktionen sn, cn und dn für* $k^2 = 0.5$ *und* $4K = 7.4163$.

5.5.2 Trägheitsdrehbewegung in den Eulerschen Winkeln

Wir wählen wieder $\mathbf{e}_3$ in Richtung des konstanten Drehimpulses, $\mathbf{L}_{\rm rot} = \ell \mathbf{e}_3$, und benutzen die Relationen (5.33), also

$$(L'_a) = \ell \begin{pmatrix} \sin\vartheta \sin\psi \\ \sin\vartheta \cos\psi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega'_1 \\ B\omega'_2 \\ C\omega'_3 \end{pmatrix} \tag{5.75}$$

zwischen den Komponenten des Drehimpulses und denjenigen des Drehvektors im körperfesten System. Wir finden

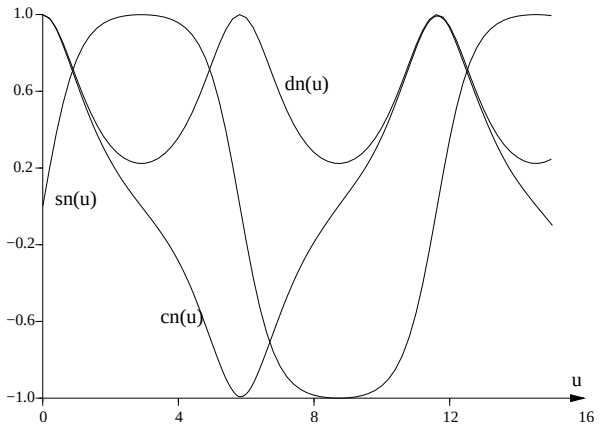

Abbildung 5.12: *Die Funktionen sn, cn und dn für* $k^2 = 0.95$ *und* $4K = 11.6333$.

$$\begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{C\omega_3'}{\ell} = \frac{C\alpha_3}{\ell}\,\mathrm{dn}\big(\mu(t-t_0),k\big) = \sqrt{\frac{C\,(\ell^2-2AT_{\mathrm{rot}})}{\ell^2(C-A)}}\,\mathrm{dn}\big(\mu(t-t_0),k\big) \\ \tan\psi &= \frac{A\omega_1'}{B\omega_2'} = \frac{A\alpha_1}{B\alpha_2}\,\frac{\mathrm{cn}\big(\mu(t-t_0),k\big)}{\mathrm{sn}\big(\mu(t-t_0),k\big)} = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\,\frac{\mathrm{cn}\big(\mu(t-t_0),k\big)}{\mathrm{sn}\big(\mu(t-t_0),k\big)}. \end{aligned} \tag{5.76}$$

Im Grenzfall $A = B$, d.h. für den symmetrischen Kreisel erhalten wir

$$\ell\cos\vartheta = \sqrt{\frac{C\,(\ell^2-2AT_{\mathrm{rot}})}{C-A}}\cos\mu(t-t_0) \quad \text{und} \quad \tan\psi = \tan\mu(t-t_0).$$

Also ist $\psi = \mu t + \psi_0$. Berücksichtigt man noch (5.55) mit $A = B$ so finden wir die früheren Resultate (5.34) und (5.36) für den symmetrischen Kreisel.

Die Funktionen auf den rechten Seiten in (5.76) sind periodisch mit der Periode $2K$. cn/sn hat Nullstellen bei $(2n+1)K$ und Pole bei $2nK$. Danach sind die EULERschen Winkel ψ und ϑ periodisch in der Zeit t. Den dritten EULERschen Winkel $\varphi(t)$ bestimmt man, indem man ω_1' in

$$(\omega_a') = \begin{pmatrix} \cos\psi\dot\vartheta + \sin\psi\sin\vartheta\dot\varphi \\ -\sin\psi\dot\vartheta + \cos\psi\sin\vartheta\dot\varphi \\ \dot\psi + \cos\vartheta\dot\varphi \end{pmatrix} \tag{5.77}$$

mit $\sin\psi$ und ω_2' mit $\cos\psi$ multipliziert und die resultierenden Gleichungen addiert,

$$\sin\psi\omega_1' + \cos\psi\omega_2' = \sin\vartheta\dot\varphi.$$

Wir lösen nach $\dot\varphi$ auf, erweitern mit $\ell^2\sin\vartheta$ und erhalten dann

$$\dot\varphi = \ell\,\frac{\ell\sin\vartheta\sin\psi\omega_1' + \ell\sin\vartheta\cos\psi\omega_2'}{\ell^2\sin^2\vartheta} \overset{(5.75)}{=} \ell\,\frac{A\omega_1'^2 + B\omega_2'^2}{A^2\omega_1'^2 + B^2\omega_2'^2} = \ell\frac{A\alpha_1^2\,\mathrm{cn}^2 + B\alpha_2^2\,\mathrm{sn}^2}{A^2\alpha_1^2\,\mathrm{cn}^2 + B^2\alpha_2^2\,\mathrm{sn}^2},$$

wobei wir bei der letzten Gleichung für die Winkelgeschwindigkeiten die Lösungen (5.49) einsetzten. Benutzen wir die Beziehung $\mathrm{sn}^2+\mathrm{cn}^2 = 1$ und die Formeln (5.53) für die Konstanten α_1 und α_2, so finden wir schlußendlich

$$\dot\varphi = \ell\frac{(C-B)+(B-A)\,\mathrm{sn}^2}{A(C-B)+C(B-A)\,\mathrm{sn}^2}. \tag{5.78}$$

Für den symmetrischen Kreisel mit $A = B$ erhalten wir wieder das Resultat $\varphi = \ell t/A + \varphi_0$ in (5.35). Für den unsymmetrischen Kreisel ergibt die unbestimmte Integration über die Zeit

$$\varphi(t) = \ell\int \frac{(C-B)+(B-A)\,\mathrm{sn}^2\big(\mu(t'-t_0),k\big)}{A(C-B)+C(B-A)\,\mathrm{sn}^2\big(\mu(t'-t_0),k\big)}dt'.$$

Der Winkel $\varphi(t)$ mit der sich die Knotenlinie in der raumfesten $1-2$-Ebene dreht kann zerlegt werden in einen konstanten Anteil φ_0, einen zeitproportionalen Anteil $\varphi_1 t$ und eine periodischen Anteil,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1\, t + \varphi_{\mathrm{per}}(t).$$

Während sich $\varphi_1 t$ in der Zeitspanne $T' = 2\pi/\varphi_1$ um den vollen Winkel 2π ändert, ist die Periode T von φ_{per} gleich derjenigen von $\dot\varphi$, also

$$T = \frac{2K}{\mu} = 2K\sqrt{\frac{ABC}{(C-B)(\ell^2-2AT_{\mathrm{rot}})}}.$$

Sie ist kommensurabel mit den Perioden der EULERschen Winkel ϑ und ψ, hingegen im allgemeinen nicht mit T'. Das hat zur Folge, dass der asymmetrische Kreisel im allgemeinen nicht mehr in eine vorgegebene Anfangslage zurückkehrt.

Wir berechnen, wie sich die Drehmatrix (5.13), welche die raumfeste in die körperfeste Basis überführt, ändert, wenn $t \to t+T$ geht. Wegen

$$\varphi \longrightarrow \varphi + T\varphi_1, \quad \vartheta \longrightarrow \vartheta \quad \text{und} \quad \psi \longrightarrow \psi - \pi$$

folgt

$$R_3(\varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi) \overset{t\to T+t}{\longrightarrow} R_3(T\varphi_1+\varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi-\pi) = -R_3(T\varphi_1)R_3(\varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi),$$

beziehungsweise

$$R(\varphi,\vartheta,\psi) \overset{t\to t+T}{\longrightarrow} -R_3(T\varphi_1)R(\varphi,\vartheta,\psi). \tag{5.79}$$

Als Beispiel betrachten wir einen Quader mit Kantenlängen $L_1 = 3\,\mathrm{cm}$, $L_2 = 2\,\mathrm{cm}$ und $L_3 = 1\,\mathrm{cm}$ und einer Massendichte von $2\mathrm{g/cm}^3$. Dieser hat die Hauptträgheitsmomente

$$(A,B,C) = \mathrm{diag}\big(5,10,13\big)\,\mathrm{g\,cm}^2. \tag{5.80}$$

Wir messen ℓ in $\mathrm{gcm}^2/\mathrm{s}$, T_{rot} in $\mathrm{gcm}^2/\mathrm{s}^2$ und t in s. Als Anfangsbedingungen wählen wir die α_a und die anfänglichen EULERschen Winkel. Die Lösungen lauten

$$\cos\vartheta = \frac{C\alpha_3}{\ell}\mathrm{dn}\,, \quad \tan\psi = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\frac{\mathrm{cn}}{\mathrm{sn}}, \quad \dot\varphi = \ell\frac{(C-B)+(B-A)\,\mathrm{sn}^2}{A(C-B)+C(B-A)\,\mathrm{sn}^2}, \tag{5.81}$$

wobei

$$\mu^2 = \frac{(C-B)(C-A)}{AB}\alpha_3^2, \quad k^2 = \frac{A}{C}\frac{B-A}{C-B}\frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2}, \quad \ell^2 = A^2\alpha_1^2 + C^2\alpha_3^2. \tag{5.82}$$

Für die Darstellung der numerischen Resultate ist es hilfreich $\mu = c \cdot K(k^2)$ zu wählen, so dass die Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$ im körperfesten System eine feste Periode haben. Wir wählen $c = 1$ und dann ist die Periode 4. In der numerischen Berechnung gibt man das Verhältnis α_1/α_2 und die Hauptträgheitsmomente an. Daraus sind (bis auf φ_0) alle Elemente der Bewegung des freien Kreisels bestimmt:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \longrightarrow k^2 \longrightarrow K(k) = \mu \longrightarrow \alpha_3 \longrightarrow \ell.$$

In der folgenden Abbildung (5.13) sind einige typische Bewegungen der EULERschen Winkel während des Zeitintervalls $[t, t+T]$ für verschiedene Parameter geplottet.

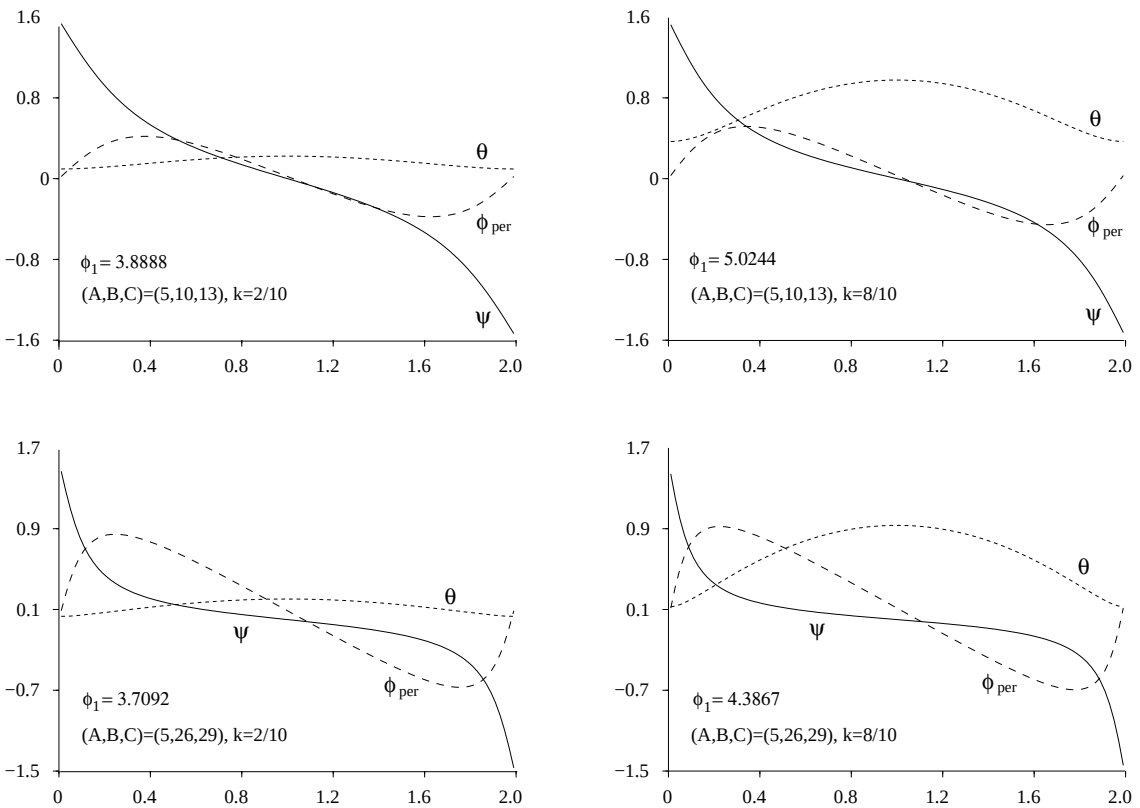

Abbildung 5.13: *Die Zeitentwicklung der Eulerschen Winkel für verschiedene Hauptträgheitsmomente und Werte von k. Die oberen zwei Abbildungen gehören zu* $(A, B, C) = (5, 10, 13)$ *und die unteren zu* $(A, B, C) = (5, 25, 29)$. *Jeweils eingetragen ist die Steigung* φ_1 *des zeitproportionalen Anteils* $\varphi_1 t$ *zu* $\varphi(t)$. *Der Winkel* ϑ *ist periodisch und* $\psi(0) - \psi(T) = \pi$.

Wie erwartet ändert sich der Winkel ϑ zwischen dem Drehimpuls und der dritten Hauptachsenrichtung $\mathbf{e}_3'$ periodisch mit der Periode T. Der Winkel ψ nimmt während der Zeitspanne T um π ab. Hätten wir $A > C$ gewählt, so würde er zunehmen.

Wenn sie Bewegungen des unsymmetrischen kräftefreien Kreisels für verschiedene Parameter studieren wollen, so dürfte der folgende SCILAB/MATLAB-CODE von Nutzen sein[5]:

```
// β = α1/α2
beta=sqrt(c*(c-b)/)(a*(b-a)))*2/10;
// Berechnung von k^2
ks=a*(b-c)/(c*(c-b))*beta**2;
// Vollständiges ell. Integral
K=%k(ks);
// α3, α1 und ℓ
aldrei=sqrt(a*b/((c-b)*(c-a)))*K;
aleins=beta*aldrei;
ell=sqrt(a**2*aleins**2+c**2*aldrei**2);
// Koeffizienten berechnen
apsi=sqrt(a*(c-b)/(b*(c-a)));
atheta=c*aldrei/ell;
// Die Zeitpunkte berechnen
x=0.01:0.03:1.99;
// elliptische Funktionen und Winkel ψ, ϑ
sn=real(%sn(K*x,ks));
cn=sign((1-x).*(3-x)).*(1-sn.*sn)**(1/2);
u=apsi*cn./sn;
psi=atan(u);
dn=(1-ks*sn.*sn)**(1/2);
w=atheta*dn;
theta=acos(w);
// Lösung der Differentialgleichung für φ
deff(''[ydot]=f(t,y)'',''ydot=ell*((c-b) +(b-a)*(real(%sn(K*t,ks)))**2)./...
(a*(c-b)+c*(b-a)*(real(%sn(K*t,ks)))**2)'');
phi=ode(0,0,x,f);
// Berechnung des periodischen Anteils von φ
[min,max]=size(x);
xmin=x(min);xmax=x(max);
phimin=phi(min);phimax=phi(max);
steigung=(phimax-phimin)/(xmax-xmin);
phip=phi-steigung*x;
// Vorbereitung der Ausgabe
X=[x;x;x];Y=[psi;theta;phip];
// Figur setzen und plotten
xsetech([0,0,0.5,0.5]);
plot2d(X',Y');
// Beschriftung
xstring(0.1,-1.2,''(A,B,C)=(5,10,13), k=8/10'');
// Zur nachträglichen Bearbeitung
xset();
```

[5] // steht vor Kommentaren.

5.6 Der schwere symmetrische Kreisel I

Als weiteres Beispiel für die Anwendung der Methoden der Dynamik starrer Körper betrachten wir die Bewegung eines symmetrischen Kreisels, der sich in einem Gravitationsfeld befindet und von dem ein Punkt auf der Symmetrieachse im Raum fixiert ist. Einen solchen schweren Kreisel bezeichnet man als LAGRANGE-*Kreisel*. Eine Vielzahl physikalischer Systeme vom Kinderkreisel bis zu komplizierten gyroskopischen Navigationsinstrumenten werden durch einen schweren symmetrischen Kreisel näherungsweise beschrieben. Sowohl wegen seiner praktischer Anwendungen als auch wegen der Illustration der entwickelten Verfahren verdient die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels eine ausführliche Erläuterung. In diesem Abschnitt werden die Konstanten der Bewegung abgeleitet. Die Bewegungformen des Kreisels werden dann später im Rahmen des LAGRANGE-Formalismus diskutiert.

Wir wählen als Urpsrung des Koordinatensystems den Stützpunkt anstelle des Schwerpunktes. Der Ortsvektor des Schwerpunktes sei

$$\mathbf{R} = s\mathbf{e}_3' \tag{5.83}$$

Wir wollen hier den symmetrischen Kreisel untersuchen mit $A = B \neq C$ wobei A, B und C die

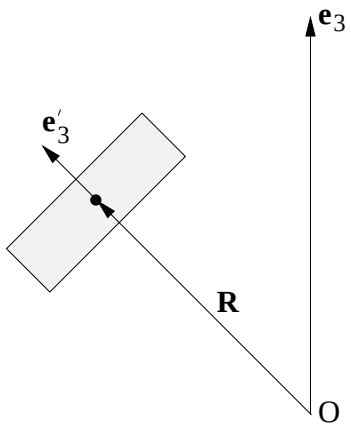

Abbildung 5.14: *Der schwere symmetrische Kreisel.*

Hauptträgheitsmomente bezüglich des Stützpunktes seien. Das Moment C bezüglich des Stützpunktes ist gleich dem Moment C bezüglich des Schwerpunktes. Die Hauptträgheitsmomente A, B sind nach dem Satz von STEINER gleich denjenigen bezüglich des Schwerpunktes plus Ms^2.

Ganz analog wie in Abschnitt (5.4) zeigt man, dass auch für den gestützten Kreisel die Eulerschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{rot}} = \mathbf{M} \tag{5.84}$$

gelten, wobei sich hier der Drehimpuls und das Drehmoment der äußeren Kräfte auf den ruhenden Stützpunkt beziehen. Der dritte Basisvektor $\mathbf{e}_3$ zeige nach oben. Dann berechnet sich das Drehmoment gemäß

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{K}_i^{(a)} = -g \sum m_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{e}_3 = -g\big(\sum m_i \mathbf{r}_i\big) \wedge \mathbf{e}_3 = -gM\mathbf{R} \wedge \mathbf{e}_3. \tag{5.85}$$

Also steht $\mathbf{M}$ senkrecht auf $\mathbf{e}_3$ und senkrecht auf $\mathbf{e}_3'$. Entsprechend ist $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L} = L_3$ eine Konstante der Bewegung,

$$\dot{L}_3 = 0 \quad \text{oder} \quad L_3 = \text{const.} \tag{5.86}$$

Für den symmetrischen Kreisel ist aber auch die Komponente des Drehimpulses in Richtung der zeitabhängigen Figurenachse $\mathbf{e}_3'$ konstant:

$$\dot{L}_3' + \underbrace{(B-A)}_{=0} \omega_1' \omega_2' = M_3' = 0.$$

Damit ergibt sich die weitere Konstante der Bewegung

$$\dot{L}_3' = 0 \quad \text{oder} \quad L_3' = \text{const.} \tag{5.87}$$

Neben L_3 und L_3' ist auch die Energie des Kreisels konstant. Diese ist die Summe der kinetischen Energie der Drehbewegung um den Stützpunkt und der potentiellen Energie im konstanten Schwerefeld,

$$\begin{aligned} E &= T + V = \text{const.} \\ T &= \frac{1}{2}\{A(\omega_1'^2 + \omega_2'^2) + C\omega_3'^2\} \\ V &= g \sum m_i \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{r}_i = gM\,\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{R} = Mgs\,\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3'. \end{aligned} \tag{5.88}$$

Wiederum benutzen wir EULERwinkel, um die Orientierung des körperfesten Systems $\mathbf{e}_a'$ bezüglich des Raumfesten Systems $\mathbf{e}_a$ festzulegen. Mit $L_3' = C\omega_3'$ schreibt sich mit (5.14) die erste Konstante der Bewegung gemäß

$$L_3' = C(\dot{\psi} + \cos\vartheta\dot{\varphi}). \tag{5.89}$$

Die zweite Konstante der Bewegung kann wie folgt berechnet werden,

$$L_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{L} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_a' L_a' = R_{3a} L_a' = A(R_{31}\omega_1' + R_{32}\omega_2') + C\omega_3' R_{33}.$$

Der letzte Term ist proportional zu L_3' und der erste ist leicht zu berechnen, wenn man $AR_{33}\omega_3'$ addiert und wieder subtrahiert. Man findet

$$L_3 = A\omega_3 + (C-A)\cos\vartheta\omega_3' = A\sin^2\vartheta\dot{\varphi} + L_3'\cos\vartheta. \tag{5.90}$$

Die kinetische Energie des symmetrischen Kreisels haben wir früher in (5.25) berechnet. Mit $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3' = \cos\vartheta$ ist auch die potentielle Energie als Funktion des EULERwinkels ϑ bekannt, so dass

$$E = \frac{A}{2}\big(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\big) + \frac{C}{2}\big(\dot{\psi} + \cos\vartheta\dot{\varphi}\big)^2 + Mgs\cos\vartheta. \tag{5.91}$$

Für die weitere Diskussion des schweren symmetrischen Kreisels ist es vorteilhaft, den LAGRANGEschen Formalismus zu benutzen, den wir uns im folgenden Kapitel erarbeiten wollen.