

Kapitel 4

Mehrkörpersysteme

Die für den einzelnen Massenpunkt aufgestellte dynamische Grundgleichung kann auf mehrere Massenpunkte erweitert werden. Ist der Ortsvektor des i -ten Teilchens in einem Inertialsystem \mathbf{r}_i , seine Masse m_i , sein Impuls $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ und die Resultante aller an ihm angreifenden Kräfte \mathfrak{F}_i , dann gilt nach dem zweiten Axiom

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathfrak{F}_i, \quad \mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Sind die Kräfte \mathfrak{F}_i als Funktionen der Orte und Geschwindigkeiten der Massenpunkte sowie der Zeit bekannt, so ist die Bewegung der Punktteilchen durch ihre anfänglichen Orte und Geschwindigkeiten und die Lösung des obigen Gleichungssystems eindeutig bestimmt. Das System enthält $3N$ skalare Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die $3N$ Koordinaten der N Teilchen. Das mathematische Problem der Punktmechanik besteht in der Integration dieses im Allgemeinen gekoppelten nichtlinearen *Differentialgleichungssystems*.

Für ein nicht abgeschlossenes System teilt man die Kräfte in zwei Gruppen auf: in die von Teilchen außerhalb des untersuchten Systems wirkenden *äußeren Kräfte* und die zwischen den Teilchen des Systems wirkenden *inneren Kräfte*. Dabei wird die *Rückwirkung* der Systemteilchen auf die äußeren Teilchen vernachlässigt. Diese Aufteilung ist natürlich etwas willkürlich. Vergrößern wir das System und schließen die vorher als äußere Teilchen betrachteten Massenpunkte ein, so werden äußere Kräfte zu inneren. Verkleinern wir hingegen das System, so können innere Kräfte in äußere übergehen.

Bezeichnet man die Resultante der auf den Massenpunkt i des Systems wirkenden äußeren Kräfte mit $\mathfrak{F}_i^{(a)}$, und die vom Massenpunkt j auf das Teilchen i wirkende Kraft mit \mathfrak{F}_{ij} , so ist die auf i wirkende Gesamtkraft

$$\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1}^N \mathfrak{F}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

In der Summe wird das Glied $j = i$ fortgelassen oder \mathfrak{F}_{ii} Null gesetzt, da der Massenpunkt auf sich selbst keine Kraft ausübt. Die äußeren Kräfte werden in der Regel als gegeben vorausgesetzt. Die Grundgleichungen der *Punktmechanik* sind somit die folgenden:

Die NEWTONschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1}^N \mathfrak{F}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.3)$$

und das Reaktionsprinzip, nach dem

$$\mathfrak{F}_{ij} = -\mathfrak{F}_{ji} \quad (4.4)$$

gilt. Neben der Einteilung in äußere und innere Kräfte wird oft auch zwischen Zwangskräften und eingepprägten Kräfte unterschieden. Wir werden später darauf eingehen.

4.1 Erhaltungssätze der Punktmechanik

Ähnlich wie in Abschnitt (3.2) leiten wir hier Bilanzgleichungen für Impuls, Drehimpuls und Energie ab. Für idealisierte abgeschlossene Systeme ohne äußere Kräfte sind diese Größen zeitlich konstant.

4.1.1 Der Impulssatz oder der Schwerpunktsatz

Nach Addition der NEWTONschen Bewegungsgleichungen (4.3) erhalten wir

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_{ij} \mathfrak{F}_{ij} \quad (\mathfrak{F}_{ij} = -\mathfrak{F}_{ji}). \quad (4.5)$$

Wegen Actio = Reactio verschwindet die Doppelsumme. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ den *Gesamtimpuls* des Systems, dann finden wir den *Impulssatz*

$$\dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{F}^{(a)}, \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{F}^{(a)} = \sum_i \mathfrak{F}_i^{(a)} \quad (4.6)$$

die Resultante der auf das System wirkenden äußeren Kräfte ist, die äußere Gesamtkraft. Also gilt der

Impulssatz: *Die zeitliche Ableitung des Gesamtimpulses des Systems ist gleich der Summe der auf das System wirkenden äußeren Kräfte.*

Greifen keine äußeren Kräfte an, dann ist der Gesamtimpuls erhalten. Um zu einer anschaulicheren Form des Satzes zu gelangen, führen wir den *Schwerpunkt*¹ ein,

$$\mathfrak{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (4.7)$$

wobei M die Gesamtmasse des Systems bezeichnet.

Für konstante Massen m_i ist $\mathfrak{P} = M\dot{\mathfrak{R}}$ und es gilt

$$M\ddot{\mathfrak{R}} = \mathfrak{F}^{(a)}. \quad (4.8)$$

¹ Der Begriff Schwerpunkt, oft auch Massenmittelpunkt genannt, geht auf Archimedes zurück.

Schwerpunktsatz: *Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten mit konstanten Massen bewegt sich so, als ob in ihm die Gesamtmasse des Systems konzentriert wäre und als ob auf ihn die Resultierende der äußeren Kräfte wirke.*

Dieser Satz berechtigt uns, einen ausgedehnten Körper als Massenpunkt zu betrachten, denn der Schwerpunkt des Körpers bewegt sich wie ein Partikelchen der Masse M unter der Wirkung der von außen angreifenden Gesamtkraft. Bei der Bewegung des Schwerpunktes spielen die inneren Kräfte keine Rolle. Kompensieren sich die äußeren Kräfte gegenseitig, so folgt aus (4.6) und (4.8) der Satz von der

Impulserhaltung: *Verschwindet die Resultierende der äußeren Kräfte, dann ist der Gesamtimpuls des Systems konstant. Für konstante Massen bewegt sich dann (in einem Inertialsystem) der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig.*

Bei vielen Rechnungen ist es vorteilhaft, ein *Schwerpunktsystem* als Koordinatensystem zu wählen, d.h. ein Koordinatensystem dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfällt und dessen Achsen gegenüber denen eines Inertialsystems nicht rotieren. Für abgeschlossene Systeme ist ein Schwerpunktsystem ein Inertialsystem. Für zwei Massenpunkte m_1 und m_2 teilt der Schwerpunkt die Strecke zwischen den beiden Punkten im umgekehrten Verhältnis zu ihren Massen in zwei Teile, d.h. wegen

$$(m_1 + m_2)\mathfrak{R} = m_1\mathfrak{r}_1 + m_2\mathfrak{r}_2 \implies m_1(\mathfrak{R} - \mathfrak{r}_1) = m_2(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{R})$$

gilt

$$\frac{\|\mathfrak{R} - \mathfrak{r}_1\|}{\|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{R}\|} = \frac{m_2}{m_1},$$

siehe die folgende Abbildung (4.1). Bei einem Körper von kontinuierlicher Massenverteilung

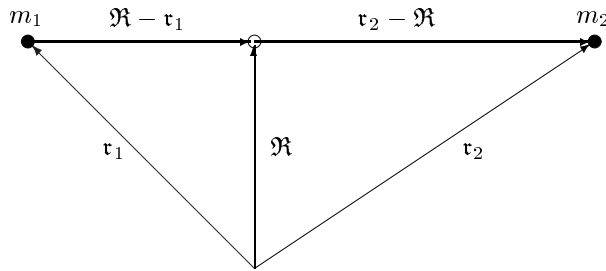


Abbildung 4.1: *Der Schwerpunkt liegt näher bei der größeren Masse.*

denkt man sich diesen in sehr kleine Teile mit Volumen ΔV_i und Massen Δm_i zerlegt. Man kann dann in dem Ausdruck (4.7) für den Schwerpunkt statt der Summe das entsprechende Integral schreiben,

$$\mathfrak{R} = \frac{\sum \mathfrak{r}_i \Delta m_i}{\sum \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\int \mathfrak{r} dm}{\int dm}.$$

Dieses läßt sich nach Einführung der *Massendichte* ρ gemäß

$$dm = \rho dV \tag{4.9}$$

in Volumenintegrale umformen,

$$\mathfrak{R} = \frac{\int \rho \mathbf{r} dV}{\int \rho dV}. \quad (4.10)$$

Sind \mathbf{r}_i und \mathbf{r}'_i die Koordinatentripel des i 'ten Teilchens bezüglich zweier kartesischer Basen in IS und IS' , dann sind diese durch eine Galileitransformation verbunden,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{a} + \mathbf{u}t + R\mathbf{r}'_i \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{u} + R\dot{\mathbf{r}}'_i,$$

so dass die Koordinaten des Schwerpunktes und Gesamtimpulses folgendermaßen transformieren

$$\mathbf{R} = (\mathbf{a} + \mathbf{u}t) + R\mathbf{R}' \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = M\mathbf{u} + R\mathbf{P}'.$$

4.1.2 Der Drehimpulssatz

Multiplizieren wir die Bewegungsgleichung (4.3) des i -ten Massenpunktes vektoriell mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_i und summieren über alle Teilchen, dann finden wir

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \left(\sum_j \mathfrak{F}_{ij} \right). \quad (4.11)$$

Wegen $\dot{\mathbf{r}}_i \wedge \mathbf{p} = 0$ können wir die linke Seite in der Form

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \mathfrak{L}_i,$$

schreiben, wobei \mathfrak{L}_i der Drehimpuls des i 'ten Teilchens ist. Fassen wir nun die Summe der Drehimpulse zum *Gesamtdrehimpuls* zusammen,

$$\mathfrak{L} = \sum_i \mathfrak{L}_i, \quad \mathfrak{L}_i = \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i, \quad (4.12)$$

dann ist die linke Seite von (4.11) die Zeitableitung von \mathfrak{L} . In der Doppelsumme gibt es zu jedem Term $\mathbf{r}_i \wedge \mathfrak{F}_{ij}$ auch den Term $\mathbf{r}_j \wedge \mathfrak{F}_{ji}$. Die Summe beider Terme ist wegen $\mathfrak{F}_{ij} = -\mathfrak{F}_{ji}$ gleich $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathfrak{F}_{ij}$.

Die inneren Kräfte für Punktteilchen sind meistens *Zentralkräfte*. Dann zeigt die vom Massenpunkt j auf den Massenpunkt i wirkende Kraft \mathfrak{F}_{ij} in Richtung der Verbindungslinie der beiden Massenpunkte,

$$\mathfrak{F}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j),$$

und das Vektorprodukt $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathfrak{F}_{ij}$ verschwindet. Damit ergibt (4.11) den

Drehimpulssatz: *Für Zentralkräfte ist die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpuls gleich der Summe der Drehmomente der äußeren Kräfte,*

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} \equiv \sum_i \mathfrak{M}_i. \quad (4.13)$$

Bei der Ableitung des Drehimpulssatzes setzten wir voraus, dass die inneren Kräfte zentral sind. Der Satz kann aber im Rahmen der LAGRANGESchen Formulierung der Mechanik unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bewiesen werden. Er folgt bereits aus der Isotropie des Euklidischen Raumes, siehe unten. Der Drehimpulssatz ist ein Naturgesetz, dessen Gültigkeitsbereich weit über die NEWTONSche Mechanik hinausgeht.

In einem abgeschlossenen System wirken keine äußeren Kräfte und es gilt der *Drehimpulserhaltungssatz*

$$\dot{\mathcal{L}} = 0, \quad (4.14)$$

die Verallgemeinerung des Flächensatzes auf mehrere Punktteilchen. Bei nicht abgeschlossenen Systemen ist das Schwerpunktsystem im allgemeinen kein Inertialsystem. Trotzdem ist es in Anwendungen oft nützlich, den Drehimpulssatz im Schwerpunktsystem aufzuschreiben. Dabei wollen wir annehmen, dass die Basen im Inertial- und Schwerpunktsystem übereinstimmen. Dann rotieren die Achsen des Schwerpunktsystems nicht und es treten keine Zentrifugal- und Corioliskräfte auf. Im Schwerpunktsystem hat der i 'te Massenpunkt den Ortsvektor \mathbf{r}'_i ,

$$\mathbf{r}_i = \mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i \quad \text{mit} \quad \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = M \mathfrak{R}' = \mathbf{0}. \quad (4.15)$$

Ersetzen wir im Drehimpuls

$$\mathcal{L} = \sum m_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i$$

überall \mathbf{r}_i durch $\mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i$, multiplizieren aus und benutzen $\sum m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$, dann finden wir

$$\mathcal{L} = \sum_i (\mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i) \wedge (m_i \dot{\mathfrak{R}} + m_i \dot{\mathbf{r}}'_i) = M \mathfrak{R} \wedge \dot{\mathfrak{R}} + \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \wedge \dot{\mathbf{r}}'_i$$

oder folgende einfache Beziehung zwischen den Drehimpulsen bezüglich der beiden Systeme,

$$\mathcal{L} = \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{P} + \mathcal{L}'. \quad (4.16)$$

Mit $\mathfrak{P} = M \dot{\mathfrak{R}}$ und dem Impulssatz (4.6) folgt dann

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathfrak{R} \wedge \dot{\mathfrak{P}} + \dot{\mathcal{L}}' = \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{F}^{(a)} + \dot{\mathcal{L}}', \quad \mathfrak{F}^{(a)} = \sum_i \mathfrak{F}_i^{(a)}. \quad (4.17)$$

Im Inertialsystem gilt der Drehimpulssatz

$$\dot{\mathcal{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} = \sum (\mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i) \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} = \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{F}^{(a)} + \sum \mathbf{r}'_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)}. \quad (4.18)$$

Aus dem Vergleich der letzten beiden Gleichungen ergibt sich

$$\dot{\mathcal{L}}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)}. \quad (4.19)$$

Wir haben somit den folgenden wichtigen Satz bewiesen: *Der Drehimpulssatz gilt auch im Schwerpunktsystem, d.h. wenn man als Bezugspunkt den Schwerpunkt des Systems wählt und die Achsen parallel den Achsen eines Inertialsystem sind.*

4.1.3 Der Energiesatz

Ähnlich wie beim 1-Körperproblem multiplizieren wir die Bewegungsgleichung (4.3) skalar mit $\dot{\mathbf{r}}_i$ und summieren über alle Massenpunkte,

$$\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathfrak{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{ij} \mathfrak{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \mathfrak{F}_i^{(a)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Für konstante träge Massen ist die linke Seite die Zeitableitung der kinetischen Energie,

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2. \quad (4.20)$$

Für die LORENTZkraft ist \mathfrak{F}_i senkrecht zu $\dot{\mathbf{r}}_i$ und entsprechend ist die kinetische Energie konstant. Wir werden diesen Spezialfall von geschwindigkeitsabhängigen konservativen Kräften später behandeln und ihn vorerst ausschließen.

Nun wollen wir versuchen, auch die rechte Seite als Zeitableitung zu schreiben. Kräfte, für die dies möglich ist, besitzen ein *Potential* $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$, das der Gleichung

$$\sum_i \mathfrak{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = -\frac{dV}{dt} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{F}_i = -\nabla_i V, \quad (4.21)$$

genügt, und diese Kräfte heißen *Potentialkräfte*². Der Index i am Gradienten bedeutet, dass die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten des i -ten Massenpunktes zu bilden sind. Notwendig und hinreichend für die (lokale) Existenz eines Potentials sind die Bedingungen an die Kraftkomponenten, die aus der Gleichheit aller gemischten Ableitungen des Potentials folgen. Bezeichnen $\{x_{ai}\}$, $a = 1, 2, 3$, die kartesischen Koordinaten des i -ten Teilchens, dann bedeutet dies

$$\frac{\partial F_{ai}}{\partial x_{bj}} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_{bj} \partial x_{ai}} = \frac{\partial F_{bj}}{\partial x_{ai}} \quad (\mathfrak{F}_i = F_{ai} \mathbf{e}_a). \quad (4.22)$$

Diese Bedingungen bedeuten starke Einschränkungen an die mögliche Form der auf das i 'te Teilchen wirkenden Kraft

$$\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i^{(a)}(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} \mathfrak{F}_{ik}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k).$$

Die auf das Teilchen i wirkende äußere Kraft $\mathfrak{F}_i^{(a)}$ ist unabhängig vom Ort der anderen Teilchen. Sie ist eine Potentialkraft wenn sie wirbelfrei ist, also wenn

$$\nabla_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} = 0 \quad (\text{keine Summe über } i) \quad (4.23)$$

gilt. Die zwischen zwei Massenpunkten i und k wirkenden inneren Kräfte \mathfrak{F}_{ik} und \mathfrak{F}_{ki} hängen nur von den Ortsvektoren \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_k der beiden Teilchen ab, und damit bedeutet (4.22)

$$\frac{\partial}{\partial x_{bj}} \sum_{k \neq i} F_{aik} = \frac{\partial}{\partial x_{ai}} \sum_{k \neq j} F_{bjk}.$$

² Potentialkräfte leisten keine Arbeit und sind deshalb immer konservativ. Die Umkehrung gilt aber nicht: Die Lorentzkraft ist konservativ obwohl sie aus keinem Potential im Ortsraum $V(\mathbf{r})$ abgeleitet werden kann, d.h. sie ist keine Potentialkraft.

Insbesondere für $i = j$ folgt daraus

$$\nabla_i \wedge \mathfrak{F}_{ik} = 0, \quad k \neq i \quad (\text{keine Summe!}) \quad (4.24)$$

und für $i \neq j$

$$\frac{\partial F_{bji}}{\partial x_{ai}} = \frac{\partial F_{aij}}{\partial x_{bj}} \stackrel{A=R}{=} - \frac{\partial F_{aji}}{\partial x_{bj}} \stackrel{(4.24)}{=} - \frac{\partial F_{bji}}{\partial x_{aj}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_{ai}} + \frac{\partial}{\partial x_{aj}} \right) F_{bji} = 0,$$

wobei wir Actio = Reactio und (4.24) benutzten. Die letzte Differentialgleichung impliziert, dass \mathfrak{F}_{ij} folgende Form haben muß

$$\mathfrak{F}_{ij} = \mathfrak{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) = -\mathfrak{F}_{ji}(\mathbf{r}_{ji}), \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j. \quad (4.25)$$

Fassen wir zusammen: die am Teilchen i angreifende äußere Kraft $\mathfrak{F}_i^{(a)}$ kann aus einem Potential abgeleitet werden wenn sie wirbelfrei ist. Die inneren Kräfte \mathfrak{F}_{ij} besitzen ein Potential wenn \mathfrak{F}_{ij} nur von der Differenz $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \equiv \mathbf{r}_{ij}$ abhängt und als Funktion dieser Variable wirbelfrei ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, dann gibt es ein Potential

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \sum_{\text{Paare}(i,j)} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) + \sum_i V_i^{(a)}(\mathbf{r}_i), \quad (4.26)$$

so dass (4.21) gilt. Die *Gesamtenergie* des Systems,

$$E = T + V = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{\text{Paare}(i,j)} V_{ij}(\mathbf{r}_{ij}) + \sum_i V_i^{(a)}(\mathbf{r}_i), \quad (4.27)$$

ist dann eine Konstante der Bewegung, $E = \text{const.}$

Im Allgemeinen ist ein System aber nicht konservativ. Ähnlich wie für das einzelne Teilchen teilen wir die Kräfte dann auf in *Potentialkräfte* $\mathfrak{F}_{\text{Kons}}$, die ein Potential besitzen, und *dissipative Kräfte* $\mathfrak{F}_{\text{Diss}}$, für die dies nicht der Fall ist, auf. Damit erhalten wir den

Energiesatz: *Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie eines Systems von Massenpunkten ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte,*

$$\frac{d}{dt}(T + V) = \sum_i \mathfrak{F}_{i \text{ Diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4.28)$$

In der Abwesenheit von dissipative Kräften gilt der Energieerhaltungssatz (4.27).

Die gesamte kinetische Energie kann in zwei Teile zerlegt werden. Bezeichnet \mathfrak{R} den Ort des Schwerpunktes und \mathbf{r}'_i den Ortsvektor des i 'ten Teilchens im Schwerpunktsystem, so ist

$$\mathbf{r}_i = \mathfrak{R} + \mathbf{r}'_i \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathfrak{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i.$$

Damit schreibt sich die kinetische Energie gemäß

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i \dot{\mathbf{r}}'_i{}^2 + m_i \dot{\mathfrak{R}}^2 + 2m_i \dot{\mathfrak{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i)$$

Da das letzte Glied der rechten Seite wegen (4.15) offensichtlich verschwindet, folgern wir:

Die gesamte kinetische Energie des Systems setzt sich aus der kinetischen Energie $\frac{1}{2}M\dot{\mathfrak{K}}^2$ der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Gesamtmasse M und der Energie der Bewegung der Teile des Systems relativ zum Schwerpunkt zusammen.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\mathfrak{K}}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\dot{\mathfrak{r}}_i'^2.$$

Schlussendlich wollen wir noch die Bedingungen an die Potentiale V_{ij} ableiten, so dass neben dem Energiesatz auch noch der Drehimpulssatz gilt.

In der Zeitableitung des Gesamtdrehimpulses

$$\dot{\mathfrak{L}} = \sum_i \mathfrak{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} + \sum_{ij} \mathfrak{r}_i \wedge \mathfrak{F}_{ij} = \sum_i \mathfrak{r}_i \wedge \mathfrak{F}_i^{(a)} - \sum_{i<j} \mathfrak{r}_{ij} \wedge \nabla_i V_{ij}(\mathfrak{r}_{ij}),$$

worin wir Actio = Reactio setzten, tragen die inneren Kräfte nicht bei, wenn

$$0 = \mathfrak{r}_{ij} \wedge \nabla_i V_{ij}(\mathfrak{r}_{ij}) \quad \text{für alle } i, j$$

gilt. Also muß der Gradient von V_{ij} in Richtung von \mathfrak{r}_{ij} zeigen, was bedeutet, dass die Niveauflächen von $V_{ij}(\mathfrak{r}_{ij})$ Kugeloberflächen um $\mathfrak{r}_{ij} = 0$ sind. Deshalb kann V_{ij} nur eine Funktion von $r_{ij} = \|\mathfrak{r}_{ij}\|$ sein. Für ein System mit inneren Potentialkräften gilt also der Drehimpulssatz (4.13), wenn

$$\mathfrak{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(r_{ij}) = -\hat{\mathfrak{r}}_{ij} V'_{ij}(r_{ij}), \quad (4.29)$$

wobei

$$\nabla V(r) = \frac{dV(r)}{dr} \nabla r = \hat{\mathfrak{r}} V'(r)$$

benutzt wurde. Actio = Reactio ist erfüllt, falls noch zusätzlich gilt

$$V_{ij}(r) = V_{ji}(r). \quad (4.30)$$

Bezüglich der *Integrale der Bewegungsgleichungen* können wir zusammenfassend folgendes sagen. Unter den drei Integralsätzen für ein abgeschlossenes mechanisches System mit Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = - \sum_j \hat{\mathfrak{r}}_{ij} V'_{ij}(r_{ij}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.31)$$

ergibt der Erhaltungssatz des Schwerpunktes 6 Integrale, der Erhaltungssatz des Drehimpulses 3 Integrale und der Energiesatz 1 Integral. Die maximale Anzahl der allgemein angebbaren Integrale ist 10,

$$\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{L} \quad \text{und} \quad E.$$

Ein System aus N Punktteilchen hat $6N$ Freiheitsgrade, $3N$ Koordinaten und $3N$ Impulse (oder Geschwindigkeiten) und eine Lösung ist nach Angabe von $6N$ Anfangsbedingungen (lokal) eindeutig bestimmt. Für ein abgeschlossenes 2-Körpersystem, für welches alle Erhaltungssätze gelten, verbleiben nach Berücksichtigung der Integrale der Bewegung effektiv 2 Freiheitsgrade.

4.2 Gekoppelte Pendel

In Abschnitt (3.4) haben wir die Lösungsmethoden für allgemeine lineare Systeme diskutiert, aber bisher nur auf Schwingungen *eines* Massenpunktes angewandt. Wir behandeln jetzt Schwingungen von *zwei* schwingungsfähigen Massen, die miteinander gekoppelt sind. Derartige Schwingungen spielen auch bei elektrischen Messanordnungen eine wichtige Rolle. Man spricht dort von einem primären und einem sekundären Kreis. Der primäre Kreis wird angeregt, der sekundäre schwingt mit, besonders stark dann, wenn *Resonanz* vorliegt. Hier beschäftigen wir uns natürlich mit gekoppelten mechanischen Schwingungen, die vielfach als Modelle für die elektrischen Schwingungen herangezogen werden.

Wir betrachten zwei schwingende Massenpunkte wie in Abbildung (4.2) dargestellt. Es wir-

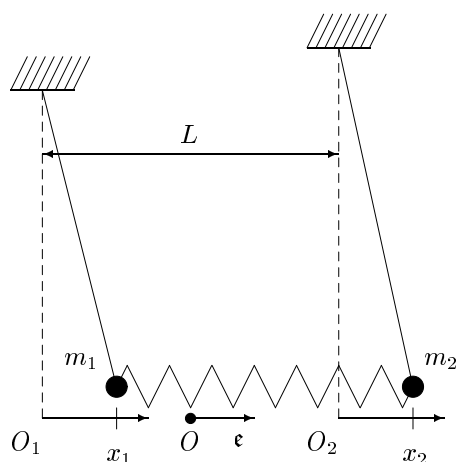


Abbildung 4.2: Zwei gekoppelte Pendel.

ke auf den von der Gleichgewichtslage O_1 in der Entfernung x_1 befindliche Punkt m_1 die harmonische *Rückstellkraft* $-m_1\omega_1^2x_1$ und auf den von O_2 in der Entfernung x_2 befindlichen Punkt m_2 die *Rückstellkraft* $-m_2\omega_2^2x_2$. Dies sind äußere Kräfte, die vom Schwerfeld der Erde herrühren (die Erde wird als nicht zum System gehörend angesehen). Die beiden Massenpunkte seien durch eine Spiralfeder miteinander verbunden, die im ungedehnten Zustand sein soll, wenn m_1 in O_1 und m_2 in O_2 ist. Dieses System können wir annähernd durch zwei lange, über einer Feder verbundene Pendel mit kleinen Auslenkungen verwirklichen. Ist die Federkraft pro Dehnung um eine Längeneinheit gleich k , dann wirkt die Feder auf m_1 mit der Kraft $k(x_2 - x_1)$ und auf m_2 mit $k(x_1 - x_2)$. Diese inneren Kräfte erfüllen das Actio = Reactio Gesetz.

Also lauten die NEWTONschen Bewegungsgleichungen für das gekoppelte System

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -m_1\omega_1^2x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -m_2\omega_2^2x_2 - k(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Je nachdem ob der Kopplungskoeffizient k groß oder klein verglichen mit den $m_i\omega_i^2$ ist, spricht man von starker oder schwacher Kopplung. Die wirkenden Kräfte sind konservativ,

$\partial_1 K_2 = \partial_2 K_1 = k$, mit Potential

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(m_1 \omega_1^2 x_1^2 + m_2 \omega_2^2 x_2^2 + k(x_1 - x_2)^2).$$

Entsprechend ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant,

$$E = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + V = \text{konstant.}$$

Bei der Lösungssuche machen wir den üblichen Lösungsansatz

$$x_1 = Ae^{\lambda t} \quad \text{und} \quad x_2 = Be^{\lambda t},$$

welcher, nach Einsetzen in die Bewegungsgleichungen, auf folgende Gleichungen führt,

$$A(\lambda^2 + \omega_1^2 + k/m_1) = Bk/m_1 \quad \text{und} \quad B(\lambda^2 + \omega_2^2 + k/m_2) = Ak/m_2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{B}{A} = \frac{\lambda^2 + \omega_1^2 + k/m_1}{k/m_1} = \frac{k/m_2}{\lambda^2 + \omega_2^2 + k/m_2}$$

und damit die *Säkulargleichung*

$$(\lambda^2 + \omega_1^2 + k/m_1)(\lambda^2 + \omega_2^2 + k/m_2) - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0. \quad (4.33)$$

Wir beschränken nun auf den *sympathischen Pendel* zweier gleich langer und gleich schwerer Pendel. Für den sympathischen Pendel gilt

$$\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega_0 \quad \text{und} \quad \frac{k}{m_1} = \frac{k}{m_2} \equiv \kappa. \quad (4.34)$$

Die Lösungen sind einfacher zu konstruieren, wenn wir die neuen Koordinaten

$$R = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad x = x_2 - x_1. \quad (4.35)$$

eingeführen. R ist der Ort des Schwerpunktes im System (O, \mathbf{e}) in der Abbildung (4.2) und $L + x$ der Abstand zwischen den schwingenden Massenpunkten.

Nach Addition beziehungsweise Subtraktion der beiden Gleichungen in (4.32) ergeben sich die *entkoppelten Gleichungen*

$$\ddot{R} + \omega_0^2 R = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{x} + (\omega_0^2 + 2\kappa)x = 0. \quad (4.36)$$

Der Schwerpunkt der beiden Pendel schwingt mit der Kreisfrequenz ω_0 und ihr Abstand mit der Kreisfrequenz $\omega = (\omega_0^2 + 2\kappa)^{1/2}$,

$$R(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad , \quad x(t) = a \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.37)$$

Wir bringen anfänglich m_2 aus seiner Ruhelage nach $x_2 = c$ und lassen beide Pendel ohne Anfangsgeschwindigkeit los,

$$\begin{aligned} x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = c \quad , \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \quad \text{bzw.} \\ R(0) = \frac{1}{2}c, \quad x(0) = c \quad , \quad \dot{R}(0) = \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$

Für diese Anfangsbedingungen verschwinden die Phasenverschiebungen und $2A = a = c$. Für die Positionen der Pendel bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{c}{2}(\cos \omega_0 t - \cos \omega t) = c \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t \\ x_2 &= \frac{c}{2}(\cos \omega_0 t + \cos \omega t) = c \cos \frac{\omega - \omega_0}{2} t \cos \frac{\omega + \omega_0}{2} t. \end{aligned}$$

Die ersten Faktoren auf den rechten Seiten sind für schwache Kopplung $\kappa \ll \omega_0^2$ langsam veränderlich mit der Zeit und die beiden Pendel führen eine *Schwebung* aus: hat die Amplitude von m_1 ihren größten Wert, dann ist diejenige von m_2 Null und umgekehrt, siehe Abbildung (4.3).

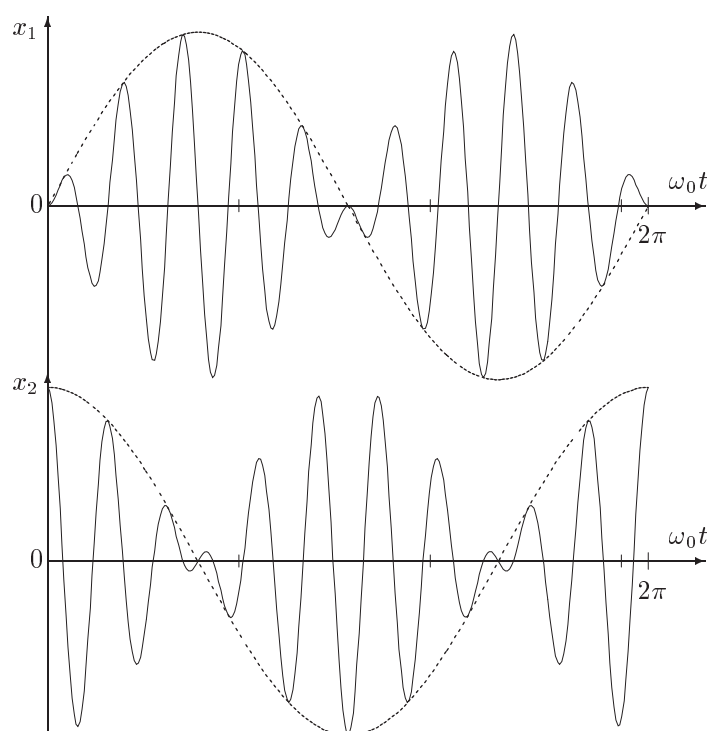


Abbildung 4.3: Die Amplituden des sympathischen Pendels für schwache Kopplung.

Die Energie wechselt periodisch von dem einen zu dem anderen Pendel hinüber.

Werden anfänglich beide Pendel gleich stark im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne aus der Ruhelage entfernt, d.h. wählt man folgende Anfangsbedingungen für $t = 0$

$$\begin{aligned} a) \quad & x_1 = c, \quad x_2 = c, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad R = c, \quad x = 0, \quad \dot{R} = \dot{x} = 0, \\ b) \quad & x_1 = c, \quad x_2 = -c, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad R = 0, \quad x = -2c, \quad \dot{R} = \dot{x} = 0, \end{aligned}$$

dann findet kein Schweben der Energie statt. Im Fall a) ist $x = 0$ und die beiden Pendel schwingen synchron mit der Kreisfrequenz ω_0 ,

$$x_1 = x_2 = c \cos \omega_0 t.$$

Im Fall b) ruht der Schwerpunkt, $R = 0$, und die Pendel schwingen entgegengesetzt mit der Kreisfrequenz $\omega > \omega_0$,

$$x_1 = -x_2 = c \cos \omega t.$$

Die zwei Schwingungszustände a) und b) heißen *Normalschwingungen* oder *Eigen-* oder *Fundamentalschwingungen* unseres gekoppelten Systems von zwei Freiheitsgraden. Die Frequenzen $\omega_0/2\pi$ und $\omega/2\pi$ sind die zugehörigen *Eigenfrequenzen*. Wir haben früher gesehen, dass ein schwingungsfähiges System von N Freiheitsgraden genau N Fundamentalschwingungen hat.

Nicht ganz so einfach ist die Theorie, wenn die beiden Pendel gegeneinander verstimmt sind, wenn sie also nicht genau gleich lang oder nicht genau gleich schwer sind. Es findet zwar auch Energieaustausch statt, doch derart, dass das angeregte Pendel ein von Null verschiedenes Minimum hat. Nur das ursprünglich ruhende Pendel kommt dann im Verlauf der Bewegung wieder zur Ruhe. Die Energieübertragung ist als Folge der Verstimmung unvollkommen.

4.3 Das Zweikörperproblem

Das Zweikörperproblem ist: Wie bewegen sich zwei Massenpunkte - zum Beispiel die Sonne und die Erde - in ihrem gegenseitigen Kraftfeld. Wir betrachten also das *abgeschlossene* Zweikörperproblem mit zentralen inneren Potentialkräften, so dass Drehimpuls und Energie erhalten sind. In einem Inertialsystem lauten dann die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\nabla_1 V(r_{12}) = -\hat{\mathbf{t}}_{12} V'(r_{12}) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\nabla_2 V(r_{12}) = -\hat{\mathbf{t}}_{21} V'(r_{12}), \end{aligned} \quad (4.38)$$

wobei r_{12} der Abstand zwischen den beiden Teilchen ist. Nach Addition dieser Gleichungen erhalten wir den gekannten *Schwerpunktsatz*,

$$M \ddot{\mathfrak{R}} = 0, \quad M \mathfrak{R} = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2, \quad M = m_1 + m_2, \quad (4.39)$$

nach dem sich der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig bewegt oder ruht,

$$\mathfrak{R}(t) = \mathfrak{R}(0) + \dot{\mathfrak{R}}(0)t. \quad (4.40)$$

Dividiert man die Bewegungsgleichung für \mathbf{r}_1 durch m_1 und diejenige für \mathbf{r}_2 durch m_2 und subtrahiert die entsprechenden Differentialgleichungen, dann findet man für die Beschleunigung der Relativkoordinate $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{t}} V'(r) \quad (4.41)$$

wobei die *reduzierte Masse* der beiden Körper auftritt,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.42)$$

Damit ist das Zweikörperproblem auf das Einkörperproblem für die Relativbewegung reduziert. Aus der Lösung $\mathbf{r}(t)$ für die Relativbewegung und $\mathfrak{R}(t)$ in (4.40) können dann mit Hilfe die Umkehrtransformationen

$$\mathbf{r}_1 = \mathfrak{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \mathfrak{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \quad (4.43)$$

die Bahnkurven $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)$ berechnet werden.

Auch für allgemeinere Zentralkräfte der Form

$$\mathfrak{F}_{12} = \hat{\mathbf{t}}_{12} K(\mathbf{r}_{12}, \dot{\mathbf{t}}_{12}) = -\mathfrak{F}_{21}, \quad (4.44)$$

kann man das 2-Körperproblem auf ein 1-Körperproblem für die Relativbewegung reduzieren, wie sich leicht zeigen läßt. Dann lautet die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{t}} K(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{t}}), \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_{12}. \quad (4.45)$$

In den meisten physikalisch wichtigen Anwendungen sind die inneren Kräfte aber Potentialkräfte, und wir haben es mit der Gleichung (4.41) zu tun.

Mit (4.43) schreibt sich der erhaltene Gesamtdrehimpuls gemäß

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{P} + \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{t}} = M \mathfrak{R}(0) \wedge \mathfrak{R}(0) + \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{t}}. \quad (4.46)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist der Drehimpuls der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse und der zweite Term der *relative Drehimpuls* $\mathfrak{L}^{\text{rel}} = \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{t}}$. Ein Vergleich mit (4.16) oder eine einfache Rechnung zeigen, dass $\mathfrak{L}^{\text{rel}}$ gleichzeitig der Drehimpuls im Schwerpunktsystem ist. Er ist eine Konstante der Bewegung und damit liegt $\mathbf{r}(t)$ in der Ebene durch $\mathbf{r} = 0$ und senkrecht zum relativen Drehimpuls.

Wir legen \mathbf{e}_3 in Richtung von $\mathfrak{L}^{\text{rel}}$, so dass der Ortsvektor der Relativbewegung $\mathbf{r}(t)$ für alle Zeiten in der $x_1 - x_2$ -Ebene liegt. Wir wählen Kugelkoordinaten, wobei $\theta = \pi/2$ und entsprechend $\sin \theta = 1$ zu setzen ist. Aus (2.109) entnehmen wir

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r, \quad \dot{\mathbf{t}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \ddot{\mathbf{t}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi.$$

Die Bewegungsgleichungen (4.41) schreiben sich dann folgendermaßen,

$$\mu(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = -V'(r) \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (4.47)$$

Die erhaltene Energie und der erhaltene Drehimpuls der Relativbewegung sind

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}^{\text{rel}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \mathbf{e}_z \equiv \ell \mathbf{e}_z. \quad (4.48)$$

Die zweite Bewegungsgleichung in (4.47) ist gerade der Flächensatz für die Relativbewegung. Damit können wir $\dot{\varphi}$ in der ersten Differentialgleichung in (4.47) eliminieren und erhalten folgende Bewegungsgleichung für den Abstand der beiden Partikel,

$$\mu \ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} - V'(r) = -V'_{\text{eff}}(r) \quad \text{mit} \quad V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}. \quad (4.49)$$

V_{eff} heißt *effektives Potential*. Für positives V'_{eff} ist \ddot{r} negativ und die beiden Teilchen ziehen sich an. Für negatives V'_{eff} haben wir es mit einer *Abstoßung* zu tun.

Diese Bewegungsgleichung hat als Integral die konstante Energie der Relativbewegung (4.48),

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r). \quad (4.50)$$

Da das effektive Potential für einen Relativdrehimpuls $\ell \neq 0$ bei $r \rightarrow 0$ über alle Massen anwächst, können sich die beiden Teilchen nicht zu nahe kommen. Man spricht von der *Zentrifugalbarriere*. Bei fester Energie und bei festem Drehimpuls ist der minimale Abstand der beiden Teilchen r_{\min} der kleinste Radius für den

$$E = V_{\text{eff}}(r_{\min}) = V(r_{\min}) + \frac{\ell^2}{2\mu r_{\min}^2}, \quad (4.51)$$

gilt, siehe Abbildung (4.4). Ob es noch weitere Umkehrpunkte gibt, an denen die Geschwin-

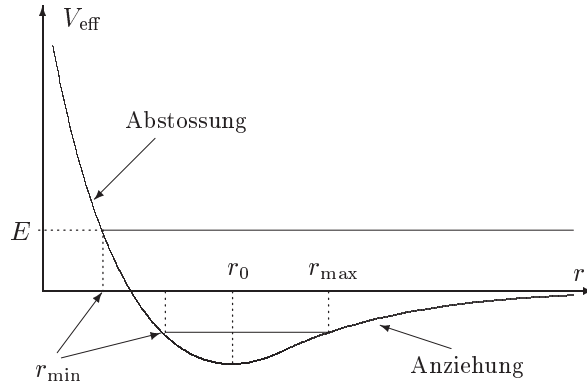


Abbildung 4.4: Für $\ell \neq 0$ können sich die beiden Teilchen nicht beliebig nahe kommen.

digkeit verschwindet, hängt vom Potential $V(r)$ ab. Für ein für große Abstände anwachsendes Potential wird es immer einen größten Abstand zwischen den Teilchen geben. Die beiden Teilchen sind dann aneinander gebunden. Besitzt das effektive Potential ein Extremum bei r_0 , $V'_{\text{eff}}(r_0) = 0$, dann ist $r(t) = r_0$ eine Lösung der Bewegungsgleichung (4.49) mit konstantem Radius und beschreibt eine *Kreisbahn* mit Relativenergie und Relativdrehimpuls

$$E = V_{\text{eff}}(r_0) \quad \text{und} \quad \ell = \mu r_0^2 \dot{\varphi}. \quad (4.52)$$

Die Kreisbahn ist stabil wenn r_0 ein Minimum von V_{eff} ist und andernfalls instabil.

Die Auflösung von (4.50) nach \dot{r} ergibt dann die schon bei der eindimensionalen Bewegung gefundene Lösung,

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - V_{\text{eff}}(r')}} \quad (4.53)$$

allerdings mit einem drehimpulsabhängigen effektiven Potential V_{eff} . Im Schwerpunktsystem ist $\mathfrak{R} = 0$ und entsprechend

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{m_2}{M} \mathfrak{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_2 = \frac{m_1}{M} \mathfrak{r}, \quad (4.54)$$

und die Bahnen beider Teilchen liegen in ein und derselben Ebene durch den Schwerpunkt mit dem konstanten Normalenvektor $\mathfrak{L}^{\text{rel}}$.

4.3.1 Kepler- und Coulomb-Problem

In der Absicht, die schon bekannten KEPLERSchen Gesetze zu beweisen, postulierte NEWTON sein allgemeines, dem Actio = Reactio-Prinzip genügendes Anziehungsgesetz zwischen je zwei massiven Körpern, gemäß dem der Betrag der Kraft auf jeden der beiden Körper umgekehrt proportional zum Quadrat ihres gegenseitigen Abstands und die Richtung der Kraft längs der Verbindungslinie der beiden Körper ist. Die Kräfte sind also zentrale Zweiteilchenkräfte,

$$\mathfrak{F}_{12} \sim \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}.$$

Das Besondere an diesem Gesetz ist, dass die Kraft auf einen Körper proportional zu dessen (schweren) Masse sein soll,

$$\mathfrak{F}_{12} = -m_1\beta_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (4.55)$$

Kein anderes Kraftgesetz hat diese Eigenschaft. Das Phänomen der universellen Anziehung von massiven Körpern heißt *Gravitation*. Die Konstante β_2 muß positiv sein, damit der Körper m_1 von Körper m_2 angezogen wird. Das Actio = Reactio - Gesetz verlangt, dass

$$m_1\beta_2 = m_2\beta_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\beta_1}{m_1} = \frac{\beta_2}{m_2} \equiv \gamma,$$

eine universelle Konstante ist. Damit ergibt sich die folgende Form für die *Newtonsche Gravitationskraft*,

$$\mathfrak{F}_{12} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (4.56)$$

Die positive universelle Konstante γ heißt *Gravitationskonstante*.

Auch zwischen elektrisch geladenen Körpern wirken Kräfte, die vom Ladungszustand der Körper abhängen. Ladungen mit entgegengesetzten Vorzeichen ziehen sich an, solche mit gleichen Vorzeichen stoßen sich ab. Für zwei kleine Körper, deren Durchmesser klein relativ zu ihrem Abstand ist, ist das Kraftgesetz besonders einfach. Die Experimente zeigen, dass die Kraft zwischen zwei elektrisch geladenen kleinen Teilchen proportional zu den elektrischen Ladungen q_1, q_2 und invers proportional zum Quadrat des Abstands r_{12} der beiden Ladungen ist. Diese *COULOMBkraft* wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Damit ergibt sich das folgende Kraftgesetz für zwei Punktladungen

$$\mathfrak{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}. \quad (4.57)$$

Die *Dielektrizitätskonstante* des Vakuums ϵ_0 bestimmt die Stärke der Wechselwirkung; ihr numerischer Wert hängt von der gewählten Maßeinheit für die Ladungen ab³. Im Gegensatz zur Gravitationskraft kann die elektrische Kraft anziehend oder abstoßend sein, je nach relativem Vorzeichen der beiden Ladungen. Während die Gravitation *universell* auf jede Form von Masse und/oder Energie wirkt, erfährt ein neutrales Teilchen keine COULOMBkraft.

Die NEWTONSche Gravitationskraft und die COULOMBkraft haben dieselbe funktionale Form: beide sind Zentralkräfte und invers proportional zum Quadrat des gegenseitigen Abstand der beiden Teilchen,

$$\mathfrak{F}_{12} = -\alpha_{12} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \alpha_{12} = \gamma m_1 m_2 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{12} = -q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0. \quad (4.58)$$

³Dies wird im nächsten Semester detailliert erklärt werden.

Also finden wir folgende NEWTONSchen Bewegungsgleichungen für gravitativ und elektrisch wechselwirkende Körper,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_{ij} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}, \quad \alpha_{ij} = \gamma m_i m_j - \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0}. \quad (4.59)$$

Links stehen die trägen Massen und rechts die schweren Massen und elektrischen Ladungen. Wir werden wieder annehmen, dass das Äquivalenzprinzip gilt und entsprechend träge und schwere Massen gleichsetzen. Es handelt sich hier um Potentialkräfte, da

$$\mathfrak{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} \quad \text{mit} \quad V_{ij} = -\frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}} \quad (4.60)$$

gilt. Für zwei ungeladene Körper ist

$$V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad (4.61)$$

das NEWTONSche *Potential*. In der Laborphysik können wir für elektrisch geladene Teilchen die gravitative Kraft vernachlässigen und dann heißt das Potential

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (4.62)$$

COULOMB*potential*. Die NEWTONSche Gravitationskraft und die COULOMBkraft sind konservativ und zentral. Entsprechend sind die Gesamtenergie

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}} \quad (4.63)$$

und der Gesamtdrehimpuls

$$\mathfrak{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4.64)$$

Konstanten der Bewegung.

Für das N -Körperproblem ist für $N > 2$ keine geschlossene Lösung von (4.59) angebar⁴, so dass man auf numerische und/oder Näherungsmethoden angewiesen ist. Bei den Näherungsmethoden geht man davon aus, dass der Hauptbeitrag der Wechselwirkung durch das zunächst als abgeschlossen betrachtete exakt lösbare Zweikörperproblem, zum Beispiel Sonne - Planet (oder Komet), gegeben ist, während die Kräfte der anderen Körper als äußere Störungen betrachtet werden, von denen man die dominanten berücksichtigt.

Die Gleichung für die Relativbewegung des Zweiteilchensystems hat mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2, \quad (4.65)$$

und $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ als Relativvektor von Teilchen 1 zu Teilchen 2 die Form

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.66)$$

⁴ Abgesehen von einigen sehr speziellen und symmetrischen Konfigurationen, siehe Übungen.

Wir legen ϵ_3 wieder in Richtung des erhaltenen Relativdrehimpulses. Die erhaltene Energie der Relativbewegung ist dann

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad \text{wobei} \quad V_{\text{eff}} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (4.67)$$

ist. Wir könnten nun versuchen, das Integral in (4.53) für das NEWTONsche oder COULOMBpotential zu berechnen, um die Bewegungsgleichungen zu lösen.

Wir schlagen einen direkteren Weg zur Lösungssuche ein. Für eine Anfangsbedingung $\dot{\varphi}_0 = 0$ verschwindet der erhaltene Drehimpuls $\ell = \mu r^2 \dot{\varphi}$ und $\varphi = \text{const}$ für alle Zeiten. Dann beschreibt die Relativkoordinate eine radiale Bahn. Für $\ell \neq 0$ ist dagegen $\dot{\varphi} = \ell/\mu r^2$ nie Null und $\varphi(t)$ ist eine monotone Funktion der Zeit. Damit dürfen wir φ anstelle von t als neuen Parameter einführen. Dabei ist es bequem den inversen Radius $u = 1/r$ als abhängige Funktion zu betrachten. In den folgenden Formeln bezeichnet der Punkt die Ableitung nach der Zeit und der Strich die Ableitung nach φ . Mit den Identitäten

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{u'}{u^2}\dot{\varphi} = -\frac{\ell}{\mu}u' \quad \text{und} \quad \ddot{r} = \dot{r}'\frac{d\varphi}{dt} = -u''\frac{\ell^2}{\mu^2}u^2$$

kann die Bewegungsgleichung (4.49) für den Abstand wie folgt umgeformt werden,

$$-\frac{\ell^2}{\mu}u^2u'' = \frac{\ell^2}{\mu}u^3 - \alpha u^2 \quad \text{bzw.} \quad u'' + u = \frac{\alpha\mu}{\ell^2}. \quad (4.68)$$

Eine spezielle Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung ist $u = \alpha\mu/\ell^2$ und die *allgemeine Lösung* hat damit die Form

$$u(\varphi) = \frac{\alpha\mu}{\ell^2}\{1 - \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)\}. \quad (4.69)$$

Die erhaltene *Gesamtenergie* der Bewegung ist

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu}(u'^2 + u^2) - \alpha u \stackrel{(4.69)}{=} \frac{\alpha^2\mu}{2\ell^2}(\epsilon - 1). \quad (4.70)$$

Wir lösen nach ϵ auf,

$$\epsilon = \left(1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}\right)^{1/2}. \quad (4.71)$$

Es genügt eine Lösung der quadratischen Gleichung für ϵ zu berücksichtigen, da ein Vorzeichenwechsel von ϵ durch eine Verschiebung von φ_0 um π erreicht werden kann. Eingesetzt in (4.69) erhalten wir

$$u(\varphi) = \frac{1}{p}\left[1 - \epsilon \cos \varphi\right], \quad \frac{1}{p} = \frac{\alpha\mu}{\ell}, \quad (4.72)$$

wobei wir φ_0 so gewählt haben, dass für $\alpha > 0$ der Radius für $\varphi = \pi$ minimal wird und für $\alpha < 0$ für $\varphi = 0$. Um dies einzusehen berücksichtige man, dass für $\alpha < 0$ auch p negativ ist.

Kegelschnittgeometrie:

Da es vermutlich schon einige Zeit her ist, dass Sie sich mit Kegelschnitten beschäftigt haben, erinnere ich hier an die Parameterdarstellungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

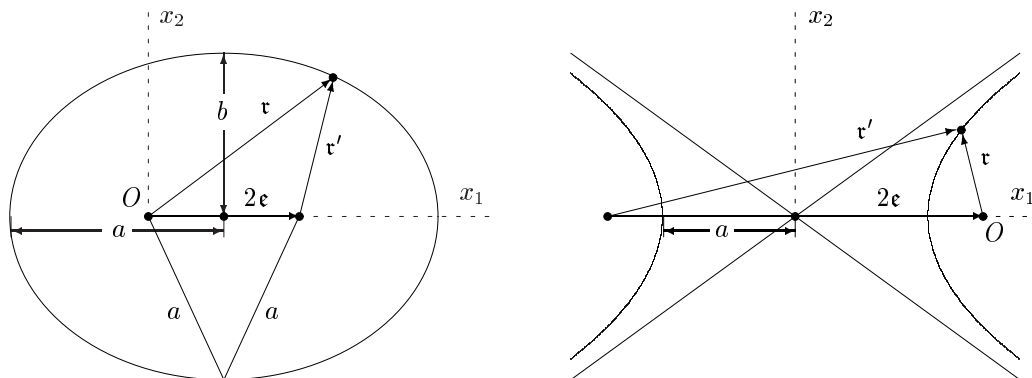


Abbildung 4.5: Zur Beschreibung von Ellipsen und Hyperbeln.

Ellipse: Wir wählen den linken Brennpunkt in Abbildung (4.5) als Koordinatenursprung. Aus der Figur liest man ab:

$$\mathbf{r} = 2\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{r}',$$

Da die Ellipse der geometrische Ort aller Punkte mit $r' + r = 2a$ ist, haben wir ferner

$$r' + r = 2a.$$

Durch Auflösen dieser beiden Gleichungen nach \mathbf{r}' beziehungsweise r' und quadrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 + 4\epsilon^2 - 4\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \\ r'^2 &= r^2 + 4a^2 - 4ar, \end{aligned}$$

wobei die *lineare Exzentrizität* $e = \|\boldsymbol{\epsilon}\| < a$ als Länge des Vektors $\boldsymbol{\epsilon}$ auftritt. Zieht man diese Gleichungen voneinander ab, so finden wir nach Einführung der *numerischen Exzentrizität* ϵ in $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$,

$$0 = 4 \underbrace{(a^2 - \epsilon^2)}_{= b^2} = 4a(r - \epsilon \mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}),$$

beziehungsweise die Formel

$$r - \epsilon \mathbf{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{b^2}{a} \equiv p, \quad \text{wobei } 0 \leq \epsilon < 1$$

ist. Der positive Parameter p heißt *Halbparameter*. Damit erhalten wir schlussendlich

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit } p = (1 - \epsilon^2)a > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = r\epsilon \cos \varphi. \quad (4.73)$$

Hyperbel: Wir wählen als Koordinatenursprung den rechten Brennpunkt in der Abbildung (4.5) und beschreiben den *rechten Ast* der Hyperbel. Aus der Figur liest man ab:

$$\mathbf{r}' = 2\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{r},$$

Dieser Ast der Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte mit

$$r' - r = 2a.$$

Damit ergeben sich nach Einführung der *linearen Exzentrizität* $e = \|\mathbf{e}\| > a$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 + 4e^2 + 4\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} \\ r'^2 &= r^2 + 4a^2 + 4ar. \end{aligned}$$

Zieht man diese Gleichungen voneinander ab und eliminiert r , so erhalten wir wieder nach Einführung der *numerischen Exzentrizität* $\epsilon = e/a$ die Formel

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad p = (\epsilon^2 - 1)a \equiv \frac{b^2}{a} > 0. \quad (4.74)$$

Wählen wir als Koordinatenursprung den linken Brennpunkt, so findet man ganz analog für denselben *rechten Hyperbelast* die Darstellung

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad p = -(\epsilon^2 - 1)a = -\frac{b^2}{a} < 0. \quad (4.75)$$

Offensichtlich ist $0 \leq \epsilon < 1$ für die Ellipse und $\epsilon > 1$ für die Hyperbel. Für $\epsilon = 1$ ergibt sich eine Parabel und für $\epsilon = 0$ ein Kreis.

Gebundene Bahnen

Nun können wir mit den Bahnen (4.72) im NEWTONSchen oder COULOMBpotential vergleichen. Die Relativkoordinate der Bewegung beschreibt einen Kegelschnitt relativ zu einem seiner Brennpunkte. Für eine anziehende Kraft ($\alpha > 0$) ist die Bahn zum Brennpunkt hin gekrümmt und für eine abstoßende Kraft ($\alpha < 0$) vom Brennpunkt weg gekrümmt. Wegen

$$p = \frac{\ell^2}{\alpha\mu} \quad \text{und} \quad \epsilon = \left(1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}\right)^{1/2} \quad (4.76)$$

ist die Bahn eine *Ellipse* für $E < 0$ und eine *Hyperbel* für $E > 0$. Dies bestätigt die frühere Überlegung, nach der gebundene Bewegungen in einem Potential mit $V(r) \leq 0$ negative Energien haben. Für $\alpha < 0$ ist $E > 0$ und es gibt keine gebundenen Bahnen. Für $E = 0$ ist $\epsilon = 1$ und der Relativvektor beschreibt eine *parabolische Bahn*. Für $\epsilon = 0$ verschwindet die Exzentrizität der Ellipse und wir erhalten eine *Kreisbahn*.

Für Ellipsenbahnen gilt das dritte KEPLERSche Gesetz wie man leicht einsieht: Aus der Konstanz des Relativdrehimpulses folgt, dass die von $\mathbf{r}(t)$ pro Zeiteinheit überstrichene Fläche konstant gleich $\ell/2\mu$ ist. Bezeichnet A die Ellipsenfläche und T die Umlaufzeit, dann ist

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\ell}{2\mu}.$$

Mit $p = b^2/a$ folgt

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{\ell}{2\mu} \stackrel{(4.76)}{=} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha p}{\mu}} = \sqrt{\frac{\alpha b}{\mu a^2}}.$$

Der Flächensatz impliziert also folgende Relation zwischen T und der großen Halbachse a :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\alpha}{\mu}. \quad (4.77)$$

Insbesondere ist für nur gravitativ gebundene Körper

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} \frac{m_1 m_2}{\mu} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}. \quad (4.78)$$

Die Massen aller Planeten im Sonnensystem sind klein verglichen mit der Sonnenmasse. Wir dürfen also in guter Näherung M durch m_S ersetzen und dann sind die Konstanten auf der rechten Seite für alle Planeten der Sonne dieselben. Also gilt für zwei Planeten in guter Näherung

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}. \quad (4.79)$$

Dies Beziehung ist das wohlbekannte

Dritte KEPLERSche Gesetz: *Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.*

In der folgenden Tabelle sind die großen Halbachsen, Umlaufzeiten und Verhältnisse a^3/T^2 für die Planeten im Sonnensystem angegeben:

Planet	$a[\text{AE}]$	$T[\text{s}]$	$a^3/T^2[\text{AE}^3/\text{s}^2]$
Merkur	0.387	$7.60 \cdot 10^6$	$1.0035 \cdot 10^{-15}$
Venus	0.723	$1.94 \cdot 10^7$	$1.0042 \cdot 10^{-15}$
Erde	1.000	$3.16 \cdot 10^7$	$1.0014 \cdot 10^{-15}$
Mars	1.523	$5.94 \cdot 10^7$	$1.0012 \cdot 10^{-15}$
Jupiter	5.202	$3.74 \cdot 10^8$	$1.0064 \cdot 10^{-15}$
Saturn	9.554	$9.30 \cdot 10^8$	$1.0083 \cdot 10^{-15}$
Uranus	19.218	$2.66 \cdot 10^9$	$1.0031 \cdot 10^{-15}$
Neptun	30.109	$5.20 \cdot 10^9$	$1.0094 \cdot 10^{-15}$
Pluto	39.60?	$7.82 \cdot 10^9$	$1.0155 \cdot 10^{-15}$

Planetendaten zum dritten Keplerschen Gesetz

Bezüglich der Ellipsenbahnen wollen wir noch einen weiteren Satz erwähnen. Die Gesamtenergie kann durch die große Halbachse ausgedrückt werden. Lösen wir nämlich die zweite Gleichung in (4.76) nach der Energie auf und ersetzen ℓ^2 aus der ersten Gleichung, dann erhalten wir mit $p = (1 - \epsilon^2)a$ folgende einfache Formel für die Energie der Relativbewegung,

$$E = -\frac{\alpha}{2a} = \begin{cases} -\gamma m_1 m_2 / 2a & \text{Newtonsche Kraft} \\ +q_1 q_2 / 8\pi\epsilon_0 a & \text{Coulombkraft.} \end{cases} \quad (4.80)$$

Also hängt die Energie im Falle einer Ellipsenbahn nur von der großen Achse ab; allen Ellipsen mit gleichem a (und verschiedener Exzentrizität) entspricht dieselbe Energie.

Im Prinzip kann neben der Bahngleichung auch die Zeitabhängigkeit der Koordinaten r und ϕ bestimmt werden. Aus dem Flächensatz $\ell = \mu r^2 \dot{\phi}$ folgt nämlich, da $r = r(\phi)$ schon bekannt ist, die dem Winkel ϕ entsprechende Zeit,

$$t = \frac{\mu}{\ell} \int_{\phi_0}^{\phi} r^2(\phi) d\phi = t(\phi). \quad (4.81)$$

Die Umkehrfunktion liefert $\phi = \phi(t)$, und damit ist mit $r = r(\phi(t))$ auch der Radius als Funktion der Zeit bestimmt. Das Integral (4.81) kann aber nicht in geschlossener Form angegeben werden.

Ungebundene Bahnen

Ist die Energie der Relativbewegung zweier Körper positiv, so sind diese nicht gebunden. Für sehr frühe und sehr späte Zeiten haben die beiden Körper einen sehr großen ('unendlichen') Abstand. Wir können uns vorstellen, dass sie in sehr großem Abstand mit einer Relativgeschwindigkeit v_{∞} starten. Von Interesse ist die relative Winkelablenkung der Teilchen, der sogenannte *Streuwinkel*. Er ergibt sich aus dem Schnittwinkel $2\varphi_{\infty}$ der Asymptoten, siehe Figur (4.6) zu $\theta = \pi - 2\varphi_{\infty}$. Für den Winkel φ_{∞} divergiert der Radius r in (4.74). Dies ist

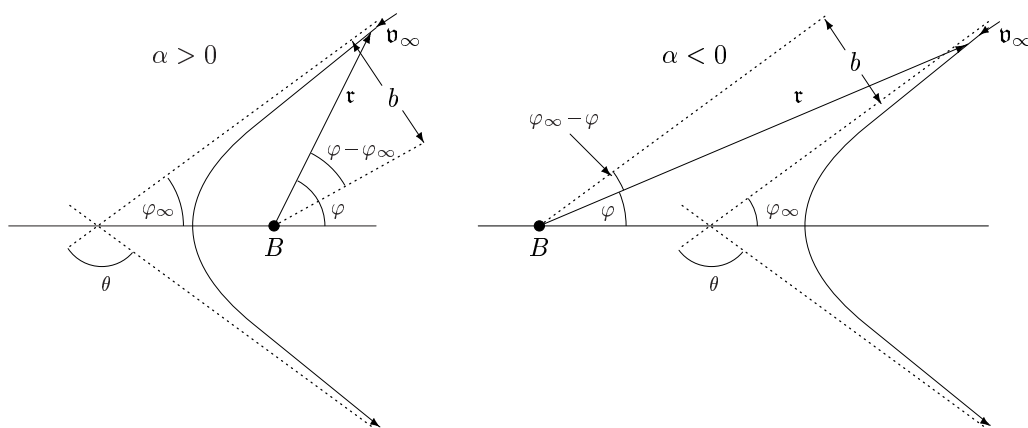


Abbildung 4.6: Rutherfordstreuung.

der Fall für $\epsilon \cos \varphi_{\infty} = 1$. Damit ist

$$\theta = \pi - 2 \arccos \left(\frac{1}{\epsilon} \right). \quad (4.82)$$

Führt man statt E und ℓ neben v_{∞} den Abstand des Ursprungs von der Asymptoten, den sogenannten *Stoßparameter* b als neue Konstante ein, so erhält man für $\alpha > 0$ und nach der L'HOSPITALSchen Regel

$$b = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{\infty}} \{ r(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_{\infty}) \} = p \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{\infty}} \frac{\sin(\varphi - \varphi_{\infty})}{1 - \epsilon \cos \varphi} = \frac{p}{\epsilon} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{\infty}} \frac{\cos(\varphi - \varphi_{\infty})}{\sin \varphi} = \frac{p}{\epsilon} \frac{1}{\sin \varphi_{\infty}}.$$

Der Stoßparameter b ist diejenige Strecke, um die sich die Teilchen bei kräftefreiem Flug verfehlen würden⁵. Wegen

$$\sin^2 \varphi_\infty = 1 - \cos^2 \varphi_\infty = 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$$

finden wir folgenden einfachen Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter und den Hyperbelparametern,

$$b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu E}} = \frac{\ell}{\mu v_\infty}, \quad (4.83)$$

wobei wir die Relativenergie bei sehr großen Abständen ausgewertet haben, $E = \mu v_\infty^2/2$. Für $\alpha < 0$ findet man exakt dasselbe Resultat. Diese einfache Beziehung gilt auch für allgemeine Zentralfeldpotentiale $V(r)$, siehe unten. Drücken wir in der Formel für die numerische Exzentrizität die Energie E durch v_∞ und den Drehimpuls ℓ gemäß (4.83) durch b und v_∞ aus, dann finden wir

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu v_\infty^2 b}{\alpha}\right)^2}. \quad (4.84)$$

Damit ergibt sich für den Cotangens des halben Streuwinkels

$$\cot \frac{\theta}{2} = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\epsilon} \right) = \tan(\arccos \frac{1}{\epsilon}) = \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{\mu v_\infty^2}{|\alpha|} b.$$

Für die COULOMBstreuung ist $\alpha = -q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ und wir erhalten

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{8\pi\epsilon_0 E}{|q_1 q_2|} b, \quad E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2. \quad (4.85)$$

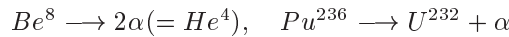
Für die Streuung zweier Himmelskörper aufgrund der NEWTONschen Gravitationskraft ist $\alpha = \gamma m_1 m_2$ und entsprechend

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{v_\infty^2}{\gamma M} b. \quad (4.86)$$

Wir werden später in diesem Kapitel auf diese Resultate zurückgreifen, wenn wir den Streuquerschnitt für RUTHERFORDstreuung berechnen werden.

4.4 Zwei-Körper-Zerfall eines Teilchens

Ein Teilchen der Masse m_0 zerfalle in zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 . Beispiele aus der Kernphysik sind:



Die charakteristischen Größen der am Zerfallsprozess beteiligten Teilchen sind ihre Massen m_i und inneren Energien ϵ_i (Anregungsenergien, Bindungsenergien etc.). Für die Anwendungen sind zwei Koordinatensysteme von besonderer Bedeutung: das *Schwerpunktsystem*, in dem $\mathfrak{R} = 0$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 = 0$ gilt, und das *Laborsystem*, in dem der Beobachter ruht.

⁵Die kleine Ellipsenhalbachse und der Stoßparameter werden in der Literatur beide mit b bezeichnet.

Beschreibung des Zerfalls im Schwerpunktsystem

In diesem System ruht das zerfallende Primärteilchen und es gilt $\mathbf{p}_0 = 0$. Aus dem Impulssatz folgt dann, dass $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ und daher

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \quad \text{oder} \quad m_1 \mathbf{v}_1 = -m_2 \mathbf{v}_2. \quad (4.87)$$

Die Energiebilanz lautet

$$\epsilon_0 = \epsilon_1 + \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \epsilon_2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2, \quad (p_i = \|\mathbf{p}_i\|)$$

oder

$$\epsilon_0 - \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p^2 = \frac{1}{2\mu} p^2, \quad \text{wobei} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.88)$$

die *reduzierte Masse* der beiden Teilchen im Endzustand ist. Das Schwerpunktsystem ist für theoretische Überlegungen oft vorteilhaft, da in ihm die Formeln in der Regel eine symmetrische und einfache Form annehmen.

Der Zerfall im Laborsystem

Die Größen im Laborsystem, wo die Messungen stattfinden, werden mit einem L gekennzeichnet. In diesem System bewegt sich das zerfallende Teilchen in der Regel mit einer von Null verschiedenen konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v}_{L0} . Dies ist dann auch die Geschwindigkeit mit der sich das Schwerpunktsystem relativ zum Laborsystem bewegt, $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{L0}$. Das Laborsystem und Schwerpunktsystem unterscheiden sich also um eine spezielle Galilei-Transformation. Für die Geschwindigkeiten der Sekundärteilchen m_1, m_2 gilt daher im Laborsystem

$$\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{L2} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_2 \stackrel{(4.87)}{=} \mathbf{u} - \frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}_1, \quad (4.89)$$

woraus die Beziehung

$$v_1^2 = (\mathbf{v}_{L1} - \mathbf{u})^2 = u^2 + v_{L1}^2 - 2uv_{L1} \cos \theta_L \quad (4.90)$$

folgt. Sie erlaubt, aus Messungen der Geschwindigkeiten $v_{L0} = u$ und v_{L1} und des 'Zerfallswinkels' θ_L des ersten Sekundärteilchens mit der \mathbf{u} -Richtung den *Betrag* der Geschwindigkeit \mathbf{v}_1 zu bestimmen. Die Richtung von \mathbf{v}_1 läßt sich durch den Winkel θ_L berechnen. Dazu entnimmt man der Abbildung (4.7) die Beziehung

$$\tan \theta_L = \frac{v_1 \sin \theta}{u + v_1 \cos \theta},$$

die man nach $\cos \theta$ auflösen kann:

$$\cos \theta = -\frac{u}{v_1} \sin^2 \theta_L \pm \cos \theta_L \left(1 - \frac{u^2}{v_1^2} \sin^2 \theta_L \right)^{1/2}. \quad (4.91)$$

Bei der Umrechnung des gemessenen Zerfallswinkels θ_L in das Schwerpunktsystem sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob der Scheitel des Winkels θ_L innerhalb oder außerhalb des Kreises mit dem Radius v_1 liegt:

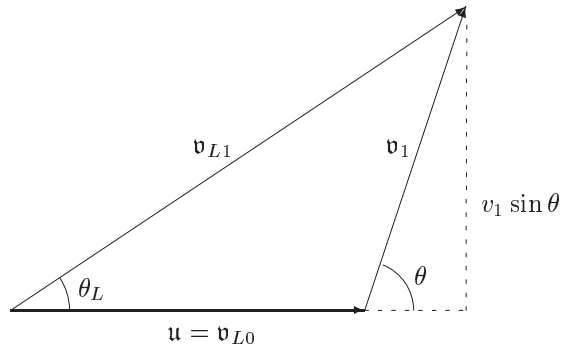


Abbildung 4.7: Der Übergang zwischen Labor- und Schwerpunktsystem.

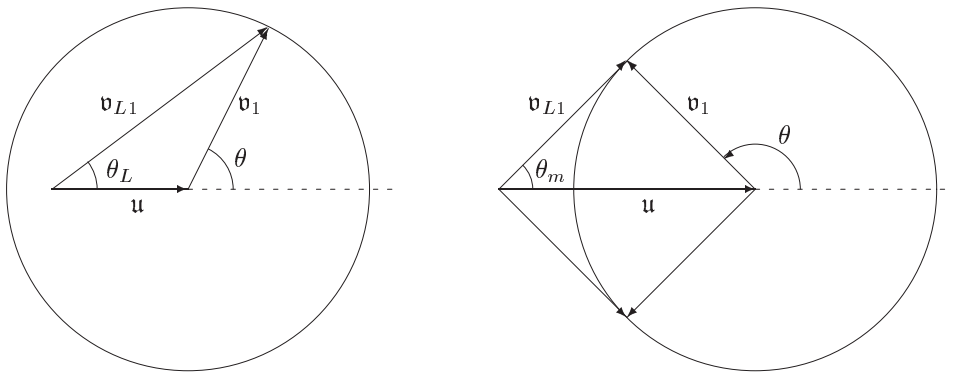


Abbildung 4.8: Die Fälle $u < v_1$ und $u > v_1$ müssen unterschieden werden.

- Für $u < v_1$ liegt der Scheitel innerhalb des Kreises mit Radius v_1 und die Werte von θ_L können im Intervall $[-\pi, \pi]$ liegen. Da $\theta_L = 0$ zu $\theta = 0$ gehört, kommt nur das Plus-Zeichen in (4.91) in Frage:

$$\cos \theta = -\frac{u}{v_1} \sin^2 \theta_L + \cos \theta_L \left(1 - \frac{u^2}{v_1^2} \sin^2 \theta_L \right)^{1/2}. \quad (4.92)$$

- Für $u > v_1$ liegt der Scheitel des Winkels außerhalb des Kreises mit Radius v_1 und der Vektor \mathbf{v}_{L1} schneidet den Kreis an zwei Stellen mit den Winkeln θ_L und θ'_L relativ zu \mathbf{u} , die durch die beiden Lösungen der obigen Gleichung für $\cos \theta$ gegeben sind. Der Zerfallswinkel liegt im Intervall

$$\theta_L \in [-\theta_m, \theta_m], \quad \sin \theta_m = \frac{v_1}{u} < 1. \quad (4.93)$$

Für sehr große Geschwindigkeiten des ersten Teilchens findet im Laborsystem die Streuung vorwiegend in die Vorwärtsrichtung, d.h. in Richtung von $\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{u}$ statt.

4.5 Elastische Streuung

In der Atom-, Kern- und Elementarteilchenphysik spielen Streuexperimente und deren theoretische Beschreibung eine sehr wichtige Rolle. Obwohl die hierbei benutzten Methoden und Konzepte aus der Quantenmechanik kommen und in der entsprechenden Vorlesung behandelt werden, lassen sich wichtige Eigenschaften der Streuung schon in der klassischen Mechanik behandeln. Dies trifft insbesondere auf die Anwendung von Energie- und Impulserhaltung zu, deren Gültigkeitsbereich weit über die NEWTONsche Mechanik hinausgeht. Auch läßt sich in der NEWTONschen Mechanik die RUTHERFORDsche *Formel* für den Wirkungsquerschnitt für die Streuung von elektrisch geladenen Teilchen ableiten.

Charakteristisch für Stöße von Teilchen ist, dass bei ihnen nur während einer begrenzten Zeit τ wirkende Kräfte eine Rolle spielen. Dabei müssen sich die Körper nicht unbedingt berühren; die gegenseitige Wirkung ihrer Kraftfelder genügt ebenfalls, um eine Richtungsänderung herbeizuführen. Man spricht in diesem Fall auch von *Streuung*. Die Änderung des Impulses des Teilchens i folgt aus der NEWTONschen Bewegungsgleichung,

$$\mathbf{p}_i(\text{nachher}) - \mathbf{p}_i(\text{vorher}) = \int_0^\tau \mathfrak{F}_i dt, \quad (4.94)$$

und ist gleich dem Zeitintegral der Kraft, die während der Streuung wirkt, dem sogenannten *Kraftstoß*. Der Kraftstoß kann aus der gemessenen Geschwindigkeitsänderung bestimmt werden.

Neben den inneren Kräften zwischen den an der Streuung beteiligten Teilchen darf man während der Stoßzeit äußere Kräfte im allgemeinen vernachlässigen. Deshalb kann man das Streuproblem folgendermaßen formulieren:

Gegeben sind die auf die einzelnen Massenpunkte m_i wirkenden Kraftstöße und die Geschwindigkeiten der Massenpunkte vor dem Stoß. Zu bestimmen sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Entsprechend kann man den zeitlichen Ablauf der Streuung in drei Stufen einteilen:

- **Anfangszustand:** Zu sehr frühen Zeiten sind die Teilchen weit voneinander entfernt und bewegen sich kräftefrei aufeinander zu.
- **Wechselwirkungsbereich:** Wenn sich die Teilchen hinreichend nahe gekommen sind, üben sie Kräfte aufeinander aus, die sie aus ihrer ursprünglich geradlinig gleichförmigen Bahn ablenken. Dies ist der eigentliche Streuprozess. Seine analytische Beschreibung setzt die Kenntnis der für die Streuung verantwortlichen Wechselwirkung voraus.
- **Endzustand:** Zu späten Zeiten haben die Teilchen den Wechselwirkungsbereich wieder verlassen und bewegen sich kräftefrei voneinander fort.

Die Massen der Körper seien m_i und ihre Geschwindigkeiten (in einem Inertialsystem) vor dem Stoß \mathbf{v}_i . Die Geschwindigkeiten \mathbf{v}'_i nach der Stoß sind durch die Art der Wechselwirkung bestimmt. Ohne die Bewegungsgleichung zu lösen, lassen sich bei gegebenen Anfangsbedingungen Einschränkungen an die möglichen Endzustände allein mit Hilfe der Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunkt ableiten.

Da wir äußere Kräfte vernachlässigen dürfen, gilt in jedem Fall der Impulssatz

$$\mathfrak{P} = \sum \mathbf{p}_i = \sum \mathbf{p}'_i. \quad (4.95)$$

Bei der Formulierung des Energiesatzes sind ergänzende Annahmen notwendig. Bei der *elastischen Streuung* ändern sich die inneren Zustände der Teilchen, zum Beispiel deren innere Energien, nicht. Sie sind vor und nach der Wechselwirkung dieselben. Beispiele für elastische Streuung sind der Stoß zweier Stahlkugeln, die Streuung von Elektronen an Ionen oder die Streuung von Neutronen an Atomkernen. Bei der vollkommen elastischen Streuung ist die kinetische Energie vor und nach dem Stoß gleich,

$$\sum m_i v_i^2 = \sum m_i v_i'^2. \quad (4.96)$$

Dieser Erhaltungssatz für die mechanische Bewegungsenergie gilt nicht mehr, wenn einer der Stoßpartner *unelastisch* ist. Er nimmt beim Zusammenprall kinetische Energie auf und gibt diese nicht vollständig zurück. Der unelastische Körper verändert seinen Zustand (wird ange-regt) und kann später durch Abgabe von Strahlung (Wärme) wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehren.

Wir werden hier nur die elastische Streuung behandeln, bei der sich die Identität der Teilchen nicht ändert und für die (4.95) die Beziehung

$$\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i' \quad (4.97)$$

nach sich zieht.

4.5.1 Streuprozess im Schwerpunktsystem

Im Schwerpunktsystem verschwindet der Gesamtimpuls und der Schwerpunkt

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) \quad (4.98)$$

sitzt im Ursprung, $\mathfrak{R} = 0$. Neben der Schwerpunktskoordinate führt man noch die *Relativkoordinate* und *Relativgeschwindigkeit* der beiden streuenden Teilchen ein,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2. \quad (4.99)$$

Die Umkehrtransformationen lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathfrak{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r} = \mathfrak{R} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathfrak{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} = \mathfrak{R} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Nun seien wieder die ungestrichenen Größen diejenigen der einlaufenden Teilchen ($t \rightarrow -\infty$) und die gestrichenen diejenigen der auslaufenden Teilchen ($t \rightarrow \infty$). Die nichttrivialen Erhaltungssätze *im Schwerpunktsystem* lauten

$$\begin{aligned} \text{Energiesatz:} \quad & \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu v'^2 \\ \text{Drehimpulssatz:} \quad & \mu \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \mu \mathbf{r}' \wedge \mathbf{v}' \end{aligned} \quad (4.101)$$

Die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem folgt sofort aus (4.100) (mit $\mathfrak{R} = 0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{m_2}{M} \mathbf{v} = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v} = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1' &= \frac{m_2}{M} \mathbf{v}' = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{v}' = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{v}_2'. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Setzen wir dies in den Energieerhaltungssatz ein, so finden wir

$$v_1 = v'_1 \quad \text{und} \quad v_2 = v'_2. \quad (4.103)$$

Die kinetische Energie jedes Teilchens ist vor und nach der Streuung die gleiche. Im Schwerpunktsystem gibt es keinen *Energieübertrag*.

Der *Streuwinkel* θ , um den das erste Teilchen (und damit auch das zweite Teilchen) abgelenkt wird, ist

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'_1}{v_1^2} = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}'_2}{v_2^2} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{v^2}. \quad (4.104)$$

Er kann auch mit dem Impulsübertrag $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1$ in Verbindung gebracht werden,

$$q^2 = 2m_1^2 v_1^2 (1 - \cos \theta) = 4 m_1^2 v_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.105)$$

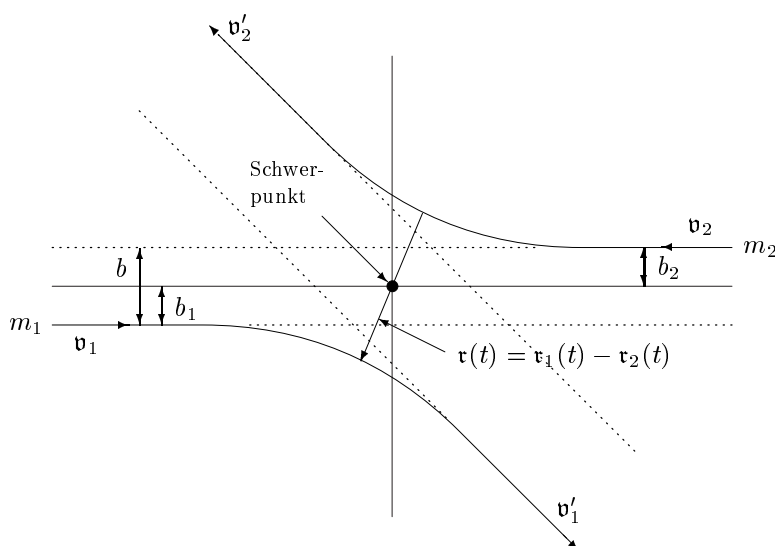


Abbildung 4.9: Zum Stoßparameter.

Für den Betrag ℓ des Drehimpulses im Schwerpunktsystem,

$$\mathcal{L} = m_1 \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{v}_2 = \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \mathcal{L}^{\text{rel}}$$

findet man unter Berücksichtigung von Abbildung (4.9)

$$\ell = m_1 v_1 b_1 + m_2 v_2 b_2 = \mu v (b_1 + b_2) = \mu v b, \quad (4.106)$$

eine Beziehung, die schon in (4.83) auftrat. Der *Stoßparameter* b gibt den kürzesten Abstand an, mit dem die beiden Teilchen aneinander vorbeifliegen würden, falls es keine Kräfte zwischen ihnen gäbe. Er mißt den Abstand der Asymptoten an die Bahnen der beiden Teilchen für große negative Zeiten beziehungsweise große positive Zeiten. Um den Ablenkwinkel der

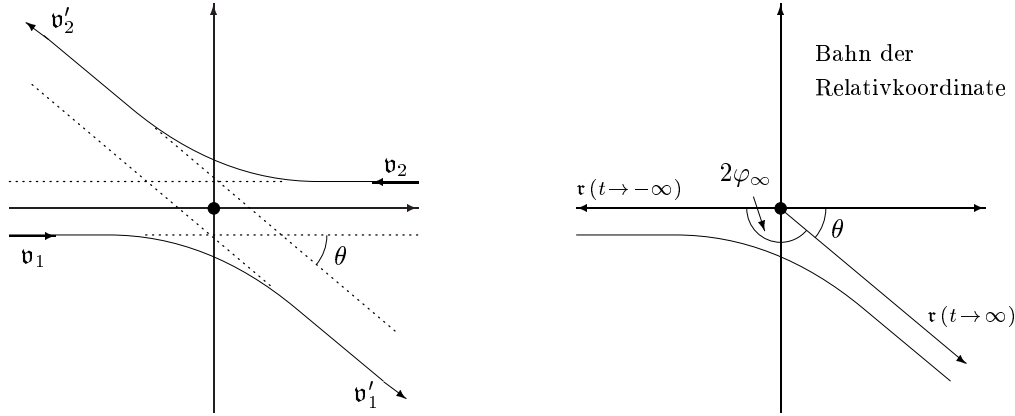


Abbildung 4.10: Streuwinkel versus φ_∞ .

Relativkoordinate $r(t)$ mit dem Streuwinkel in Verbindung zu bringen betrachte man die Abbildung (4.10).

Offensichtlich ist (θ ist positiv)

$$\theta + 2\varphi_\infty = \pi \quad \text{oder} \quad \theta = |\pi - 2\varphi_\infty|. \quad (4.107)$$

Aus der Formel (4.50) für die konstante Energie der Relativbewegung und unter Verwendung von $\mu r^2 \dot{\varphi} = \ell$ finden wir folgende Formel für die Variation des Radius r mit dem Winkel φ :

$$\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}) = \dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \dot{\varphi}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{\ell}{\mu r^2}\right)^2.$$

Diese lösen nach $d\varphi/dr$ auf und integrieren über den Radius. Den Winkel φ_∞ zwischen der Asymptoten und dem Punkt der größten Annäherung ist dann

$$\varphi_\infty = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2} \left[\frac{1}{2} \mu v^2 - V(r') - \frac{\ell^2}{2\mu r'^2} \right]^{-1/2}, \quad (4.108)$$

wobei wir die erhaltene Energie durch ihren Wert $\mu v^2/2$ für große Abstände der beiden Teilchen ersetzen. Bei der größten Annäherung verschwindet die radiale Geschwindigkeit, so dass der minimale Abstand r_{\min} über

$$E = V_{\text{eff}}(r_{\min})$$

berechnet werden kann. Ersetzen wir noch den Drehimpuls durch den Stoßparameter gemäß (4.106), dann finden wir schlussendlich den Streuwinkel

$$\theta = \left| \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\mu V(r)}{p^2} \right]^{-1/2} \right|. \quad (4.109)$$

Hier haben wir noch den (asymptotischen) Impuls eines gestreuten Teilchens im Schwerpunktsystem,

$$p \equiv m_1 v_1 = m_2 v_2 = \mu v$$

eingeführt. Dies ist die grundlegende Formel zur Berechnung des Streuwinkels θ als Funktion vom Betrag p der Schwerpunktsimpulse der beiden Teilchen im Anfangs- und Endzustand und vom Stoßparameter b .

4.5.2 Wirkungsquerschnitte

Bei den Experimenten zur Untersuchung von Streuprozessen hat man es in der Regel zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht mit einem einzelnen Projektilteilchen zu tun, das an einem isolierten Targeeteilchen gestreut wird, sondern man hat, im Schwerpunktsystem, zwei sich entgegenkommende Strahlen mit vielen Teilchen, die zwar alle annähernd die gleiche Energie haben, deren relative Stoßparameter aber statistisch verteilt sind. Eine solche experimentelle Situation kann man folgendermaßen quantitativ beschreiben: Es sei j die

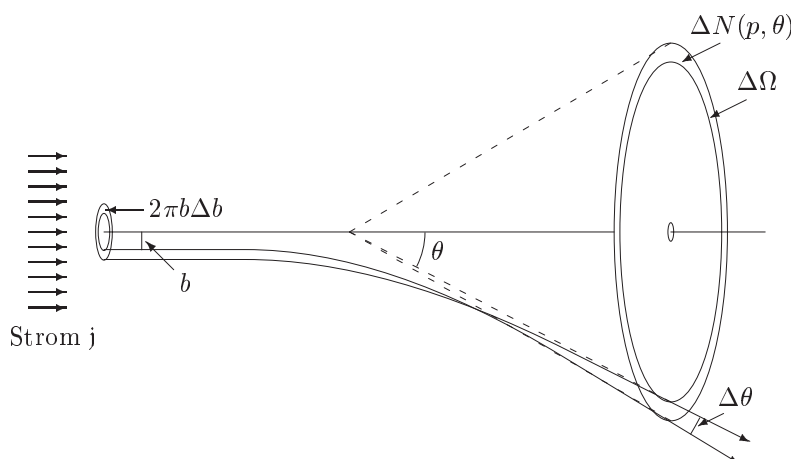


Abbildung 4.11: Zur Definition des Streuquerschnitts.

senkrecht zur Strahlrichtung gemessene *Stromdichte* der von einer Seite einfallenden Teilchen, also die Anzahl der Teilchen pro Flächen- und Zeiteinheit. Es sei $\Delta N(p, \theta)$ die Anzahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit und pro Targeeteilchen in das kegelförmige und bezüglich der durch den Punkt $\mathfrak{R} = 0$ gehenden (verlängerten) Strahlachse rotationssymmetrischen Raumwinkelsegment $[\theta, \theta + \Delta\theta]$ gestreut werden. Diese Anzahl wird vom Impulsbetrag p und dem Streuwinkel θ abhängen sowie der als räumlich und zeitlich konstant angenommenen Stromdichte proportional sein,

$$\Delta N(p, \theta) = \Delta\sigma(p, \theta)j. \quad (4.110)$$

Wir erhalten den *Streuquerschnitt*

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta N}{j} = \frac{\text{Anzahl Teilchen, die pro Sekunde in } \Delta\Omega \text{ gestreut werden}}{\text{Anzahl Teilchen, die pro Sekunde und } m^2 \text{ einfallen}} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega} \Delta\Omega.$$

Nach dem Übergang zu Differentialquotienten heißt $d\sigma/d\Omega$ *differentieller Wirkungsquerschnitt* für die Streuung von Teilchen am Potential $V(r)$ in das Winkelintervall $[\theta, \theta + d\theta]$. Der Name hat folgenden geometrischen Hintergrund: Der Streuwinkel ist eine Funktion des Stoßparameters, gegeben durch die sogenannte *Deflektionsfunktion* $\theta(b)$. Daher gehört zu dem Winkelintervall $d\theta$ ein Intervall db , siehe Abbildung (4.11). Die Anzahl dN ist daher gegeben durch

$$dN = 2\pi b db j, \quad (4.111)$$

woraus dann

$$d\sigma = 2\pi b db \quad (4.112)$$

folgt. Danach ist der Streuquerschnitt ein kreisförmiger Ring mit Radius b und 'Dicke' db . Mit $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (4.113)$$

Die Betragsstriche sind erforderlich, da generisch die Deflektionsfunktion $\theta(b)$ monoton abnimmt: wird b größer so wird θ kleiner (weit entfernte Teilchen werden weniger gestreut als nahe) und die Ableitung des Stoßparameters nach dem Winkel θ ist in den meisten Fällen negativ. Da aber $d\sigma/d\Omega$ positiv sein muß, benötigt man die Betragsstriche. Sollte aber zu *einem* gegebenen Winkel θ *verschiedene* Stoßparameter $b_i(\theta)$ gehören, dann erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p, \theta) = \sum_i \frac{b_i(p, \theta)}{\sin\theta} \left| \frac{db_i(p, \theta)}{d\theta} \right|. \quad (4.114)$$

Schließlich ist der *totale Wirkungsquerschnitt* definiert als das Integral

$$\sigma_{\text{tot}}(p) = \int \frac{d\sigma(p, \theta)}{d\Omega} d\Omega. \quad (4.115)$$

Alle Teilchen, die innerhalb der Fläche σ_{tot} ankommen, werden gestreut. Bei einem Festkörper, an dem die Teilchen abprallen, ist gewöhnlich σ_{tot} gleich der Querschnittsfläche.

Als einfaches Beispiel untersuchen wir den Stoß zweier *harter Kugeln* mit Radien $R/2$. Das Potential ist gegeben durch eine unendlich hohe Stufe am Abstand $r_{\text{min}} = R$,

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r > R \\ \infty & \text{für } r \leq R, \end{cases} \quad (4.116)$$

und mit (4.109) erhalten wir den Streuwinkel

$$\theta = \pi - 2 \int_R^\infty \frac{bdr}{r^2 \sqrt{1 - b^2/r^2}} = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{b}{R}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$b = R \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.117)$$

und ein isotroper Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin\theta} \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{4}. \quad (4.118)$$

Nach Integration über den vollen Raumwinkel ergibt sich schließlich der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = 4\pi \frac{R^2}{4} = \pi R^2, \quad (4.119)$$

d.h. der totale Wirkungsquerschnitt ist gleich dem geometrischen Querschnitt der Wechselwirkungskugel.

4.5.3 Rutherford Streuung

Wir betrachten die elastische Streuung von elektrisch geladenen Teilchen. Ein Beispiel wäre die Streuung von α -Teilchen am COULOMBFeld eines Kerns mit der Ladung Ze . Wenn der Kern keinen Spin besitzt und das α -Teilchen ebenfalls Spin 0 hat, heißt sie RUTHERFORDSTREUUNG. Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Teilchen mit Spin 0 an Kernen ohne Spin kann klassisch oder quantenmechanisch berechnet werden, was zum selben Ergebnis führt. Die RUTHERFORDSche Streuformel ist eine der wenigen Gleichungen, die ohne Änderung in der Quantenmechanik gelten und auf diese Tatsache war RUTHERFORD außerordentlich stolz⁶.

In (4.85) haben wir bereits den Streuwinkel für das COULOMBpotential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

als Funktion der Energie und des Stossparameters bestimmt. Die Deflektionsfunktion hat die explizite Form

$$b = \frac{|\alpha|}{2E} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (4.120)$$

welche auf

$$b \frac{db}{d\theta} = -2 \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}$$

führt. Dividiert man durch $\sin \theta$ und berücksichtigt $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, so erhält man folgenden differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung von α -Teilchen an Kernen,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (4.121)$$

Der Parameter α ist proportional zum Produkt der Ladungen der am Streuprozess beteiligten Teilchen. Diese Formel von RUTHERFORD ist unabhängig vom Vorzeichen von α , d.h. der Wirkungsquerschnitt ist identisch für gleich und ungleich geladene Teilchen. Sie wurde im Schwerpunktsystem abgeleitet. Bei schweren Targetteilchen ist sie auch im Laborsystem annähernd gültig; sonst muß auf das Laborsystem umgerechnet werden.

Der totale Wirkungsquerschnitt divergiert und die Divergenz kommt von großen Stoßparametern oder kleinen Streuwinkeln. Dies hat mit der langen Reichweite der COULOMBKraft zu tun, ist jedoch für praktische Fälle ohne Bedeutung, da realistische Ladungen immer abgeschirmt sind.

⁶RUTHERFORD verachtete komplizierte Theorien und pflegte zu sagen, eine Theorie taue nur dann etwas, wenn auch eine Bardame sie verstehen kann (Gamov, *My World Line*, Viking, New York, 1979).

4.5.4 Transformation ins Laborsystem

Bei Experimenten ruht im allgemeinen eines der Teilchen (Target) vor dem Stoß im Laborsystem, d.h. der Schwerpunkt bewegt sich. Die Teilchen der Sorte 1 seien die Projektile und diejenigen der Sorte 2 die ruhenden Targetteilchen. Man muß also den in Relativkoordinaten berechneten Wirkungsquerschnitt zuerst ins Laborsystem umrechnen, bevor man ihn mit experimentellen Daten vergleichen kann. Dazu erinnern wir uns an den Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel im Laborsystem θ_L und demjenigen im Schwerpunktsystem θ : Wir brauchen in der Abbildung (4.7) nur \mathbf{v}_{L1} durch \mathbf{v}'_{L1} zu ersetzen und berücksichtigen, dass die Geschwindigkeit \mathbf{u} des Schwerpunktes parallel zur Strahlrichtung verläuft. Damit ergibt sich

$$\tan \theta_L = \frac{v'_1 \sin \theta}{u + v'_1 \cos \theta}. \quad (4.122)$$

Wegen (4.102) ist

$$v_1 = v'_1 = \frac{\mu}{m_1} v,$$

wobei v die Relativgeschwindigkeit der Teilchen vor der Streuung (oder mit (4.101) auch nach der Streuung) ist. Da das Targetteilchen im Labor ruht, gilt mit (4.100) auch noch

$$0 = \mathbf{v}_{L2} = \mathbf{u} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v} \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{\mu}{m_2} v, \quad \mathbf{u} = \mathfrak{R}.$$

Damit können wir (4.122) umformen,

$$\tan \theta_L = \frac{\sin \theta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta}. \quad (4.123)$$

Dies ist eine implizite Darstellung der Funktion $\theta_L(\theta)$, die jedem Winkel θ im Schwerpunktsystem den entsprechenden Winkel θ_L im Laborsystem zuordnet.

Um eine Relation für den Wirkungsquerschnitt abzuleiten müssen wir berücksichtigen, dass die Zahl der in ein gegebenes Raumwinkelelement gestreuten Teilchen in beiden Systemen gleich sein muß,

$$2\pi j \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta = 2\pi j \frac{d\sigma_L}{d\Omega_L} \sin \theta_L d\theta_L. \quad (4.124)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt im Laborsystem ist also

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_L} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_L} \frac{d\theta}{d\theta_L}. \quad (4.125)$$

Wir betrachten noch einige Spezialfälle:

- $m_1 \ll m_2$: Dann ist $\theta \sim \theta_L$ und der Wirkungsquerschnitt ist in beiden Systemen etwa gleich.
- $m_1 = m_2$: Dann ist $\tan \theta_L = \tan \theta/2$, d.h. $\theta_L = \theta/2$ und

$$\frac{d\sigma_L}{d\Omega_L}(\theta_L) = 4 \cos \theta_L \frac{d\sigma}{d\Omega}(2\theta_L). \quad (4.126)$$

Bei gleichen Massen stehen die Impulse der beiden Teilchen nach einem elastischen Streuvorgang im Laborsystem senkrecht aufeinander. Bei gleichen Massen $m_1 = m_2 = m$ ist nämlich die reduzierte Masse $\mu = m/2$ und wegen (4.100)

$$\mathbf{v}_{L1} = \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{L2} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}.$$

Es folgt

$$\mathbf{v}_{L1} \cdot \mathbf{v}_{L2} = u^2 - \frac{v^2}{4}$$

und damit ist der Winkel zwischen den beiden Geschwindigkeiten vor und nach der Streuung gleich. Vor dem Stoß verschwindet aber \mathbf{v}_{L2} , also auch $\mathbf{v}_{L1} \cdot \mathbf{v}_{L2} = 0$ nach dem Stoß.

Falls man annimmt, dass im Schwerpunktsystem alle Streuwinkel möglich sind, gilt dies im Laborsystem nur für $m_1 < m_2$, denn bei $m_1 > m_2$ gibt es einen maximalen Wert für θ_L , der sich aus der Gleichung

$$\frac{d}{d\theta} \frac{\sin \theta}{m_1/m_2 + \cos \theta} = 0$$

ergibt und den Wert $\sin \theta_{L\max} = m_2/m_1$ hat.

4.6 Bemerkungen zum Dreikörperproblem

Das Dreikörperproblem hat eine lange Geschichte und viele Anwendungen [5]. Schon NEWTON verwandte viel Mühe auf das Studium des Systems Sonne, Erde und Mond. Seit etwa 1750 haben sich bedeutende Mathematiker wie etwa EULER, LAGRANGE oder POINCARÉ daran versucht. Auch eine der von MITTAG-LEFFLER für den schwedischen KÖNIG OSCAR formulierten Preisfragen war eine Version des Mehr-Körperproblems:

Gegeben sei ein System von beliebigen vielen Massenpunkten, die sich gemäß dem NEWTONSchen Kraftgesetz anziehen. Gesucht ist eine konvergente Reihendarstellung der Koordinaten eines jeden Körpers in einer Variablen, die eine bekannte Funktion der Zeit ist.

Obwohl POINCARÉ das Problem nicht lösen konnte, gewann er den ausgeschriebenen Preis. Nach POINCARÉ, in den 1920ern, löste K.F. SUNDMAN die Preisfrage für drei Massen⁷. Er fand die Lösung in Form einer zu allen Zeiten konvergenten Reihe [6]. Allerdings konvergiert seine Reihe extrem langsam und ist daher von geringem praktischen Wert.

Beim allgemeinen Dreikörperproblem wechselwirken drei Körper mit Massen m_1, m_2 und m_3 an den Orten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ und \mathbf{r}_3 über die früher diskutierte NEWTONSche Gravitationskraft. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\gamma m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} - \gamma m_3 \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\gamma m_1 \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} - \gamma m_3 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -\gamma m_1 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} - \gamma m_2 \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3}. \end{aligned} \tag{4.127}$$

⁷ und gewann einen von der französischen Akademie der Wissenschaften ausgeschriebenen Preis.

Falls wir Dreierstöße ausschließen und falls die Gesamtenergie des Systems negativ ist, können die Bewegungen der drei Körper klassifiziert werden. Dann gibt es nur folgende mögliche 'Endstadien' für die drei Körper:

- Die Bewegung ist beschränkt, d.h. der Abstand $r_{ij}(t)$ zwischen zwei beliebigen Körpern ist endlich für alle Zeiten.
- Zwei Massen bilden ein enges *Binärsystem* und der Abstand des dritten Körpers von diesem System strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen unendlich.
- Es bildet sich eine oszillierende Lösung bei der sich zwei Körper periodisch sehr nahe kommen und weit voneinander entfernen, d.h. es gibt ein Paar ij mit $\limsup_{t \rightarrow \infty} r_{ij}(t) = \infty$ und $\liminf_{t \rightarrow \infty} r_{ij}(t) < \infty$.

Ist die Gesamtenergie positiv, dann gibt es weitere Lösungsklassen. Zum Beispiel können die Abstände zwischen allen Körpern für große Zeiten gegen Unendlich streben.

4.6.1 Exakte Lösungen

Die ersten Versuche zum Verständnis des Dreikörpersystems zielten auf das Auffinden von expliziten Lösungen. EULER fand 1767 kollineare periodische Bahnen, bei denen die drei Körper längs einer rotierenden Linie oszillieren. Fünf Jahre später konstruierte LAGRANGE periodische Lösungen, bei denen die drei Körper zu allen Zeiten die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, welches seine Größe periodisch ändert.

Kollineare Kegelschnittlösungen

Bei den einfachen *kollinearen Kegelschnittlösungen* sind die drei Körper zu jedem Zeitpunkt auf einer Geraden angeordnet, und diese Gerade rotiert um eine zu ihr senkrechte Achse durch den Massenmittelpunkt. Die Verhältnisse der Abstände von je zwei Massenpunkten sind dabei konstant, im Gegensatz zu den Einzelabständen, welche sich ändern können. Nur bei den einfachen kollinearen Kreisbahnlösungen sind auch die Einzelabstände konstant. Setzen wir nun $\mathbf{r}_{21} = \mathfrak{s}$, dann ist

$$\mathbf{r}_{32} = \lambda \mathbf{r}_{21} \equiv \lambda \mathfrak{s} \implies \mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_{32} + \mathbf{r}_{21} = (1 + \lambda) \mathfrak{s}, \quad (4.128)$$

mit einem noch zu bestimmenden konstanten Faktor λ . Wir legen nun den Ursprung des Bezugssystems in den Schwerpunkt, so dass

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (4.129)$$

gilt. Sind die Körper wie in Abbildung (4.12) angeordnet, dann ist die Konstante λ positiv. Mit Hilfe von (4.128, 4.129) findet man für die Ortsvektoren im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned} M \mathbf{r}_1 &\stackrel{(4.129)}{=} -(m_2 + m_3) \mathbf{r}_{21} - m_3 \mathbf{r}_{32} = -(m_2 + m_3 + \lambda m_3) \mathfrak{s} \\ M \mathbf{r}_2 &\stackrel{(4.129)}{=} m_1 \mathbf{r}_{21} - m_3 \mathbf{r}_{32} = (m_1 - \lambda m_3) \mathfrak{s} \\ M \mathbf{r}_3 &\stackrel{(4.129)}{=} m_1 \mathbf{r}_{21} + (m_1 + m_2) \mathbf{r}_{32} = ((1 + \lambda) m_1 + \lambda m_2) \mathfrak{s} \end{aligned} \quad (4.130)$$

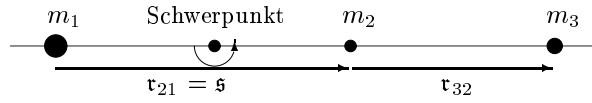


Abbildung 4.12: Anordnung der Massen.

Diese Konfiguration soll um den gemeinsamen Schwerpunkt rotieren. Nun können wir die Ortsvektoren \mathbf{r}_i und relativen Ortsvektoren \mathbf{r}_{ij} in (4.127) alle durch den Relativvektor \mathbf{s} ersetzen und erhalten

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\gamma \mu_i(\lambda, m_i) \frac{\mathbf{s}}{s^3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.131)$$

mit den effektive Massen

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{M}{(1+\lambda)^2} \frac{(1+\lambda)^2 m_2 + m_3}{m_2 + (1+\lambda)m_3} \\ \mu_2 &= \frac{M}{\lambda^2} \frac{\lambda^2 m_1 - m_3}{m_1 - \lambda m_3} \\ \mu_3 &= \frac{M}{\lambda^2(1+\lambda)^2} \frac{\lambda^2 m_1 + (1+\lambda)^2 m_2}{(1+\lambda)m_1 + \lambda m_2}. \end{aligned}$$

Offensichtlich müssen diese effektiven Massen gleich sein,

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu.$$

Diese drei (abhängigen) Bedingungen sind genau dann erfüllt, wenn λ eine Nullstelle von

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (m_1 + m_2)\lambda^5 + (3m_1 + 2m_2)\lambda^4 + (3m_1 + m_2)\lambda^3 \\ &\quad - (m_2 + 3m_3)\lambda^2 - (2m_2 + 3m_3)\lambda - (m_2 + m_3) \end{aligned} \quad (4.132)$$

ist. Da nur ein Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge des Polynoms $P(\lambda)$ vorhanden ist, kann nach der DESCARTESSchen Vorzeichenregel höchstens eine positive reelle Wurzel auftreten. Nach derselben Regel hat das Polynom entweder 4, 2 oder gar keine negative reelle Wurzeln. Für eine Massenanzordnung wie in der Abbildung (4.12) hat aber nur die positive Wurzel eine physikalische Bedeutung. Für gegebene drei Massen sind dann durch zyklische Vertauschung der Körper zwei weitere Konfigurationen möglich:

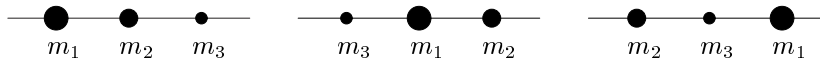


Abbildung 4.13: Anordnung der Massen.

Ist λ eine Nullstelle des Polynoms (4.132), so liegt mit (4.131) ein reduziertes Zweikörperproblem vor,

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\gamma \mu \frac{\mathbf{s}}{s^3}, \quad (4.133)$$

dessen Lösung die Relativbewegung der kollinearen Massenpunkte bezüglich des gemeinsamen Schwerpunktes ergibt. Bei der Lösung des Keplerproblems haben wir gesehen, dass \mathfrak{s} eine Ellipse mit einem der Brennpunkte im Ursprung überstreicht,

$$s(\varphi) = \frac{C^2}{\gamma\mu} \frac{1}{1 - \epsilon \cos \varphi}, \quad \text{mit } C = s^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}$$

Kollineare Kreisbahnen: Verschwindet nun die numerische Exzentrizität ϵ der Relativbewegungen, dann ist s konstant und die drei Massen bewegen sich kollinear auf *Kreisbahnen* um den gemeinsamen Schwerpunkt. Insbesondere für gleiche Massen $m_i = m$ ist

$$\lambda = 1, \quad \mu = \frac{5}{4}m, \quad \mathbf{r}_2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_3 = -\mathbf{r}_1 = \mathfrak{s}$$

und man findet folgende Beziehung zwischen dem Radius s und der Umlaufzeit

$$\frac{s^3}{T^2} = \frac{5}{4} \frac{\gamma m}{4\pi^2} = \frac{5}{12} \frac{\gamma M}{4\pi^2}.$$

Kollineare Ellipsenbahnen: Der Relativvektor $\mathfrak{s} = \mathbf{r}_{21}$ bewegt sich auf einer Ellipse unter Einhaltung des Flächensatzes. Mit Hilfe der Formeln (4.130), worin λ die positive Nullstelle des Polynoms fünften Grades (4.132) ist, können dann die Positionen der drei kollinearen Körper im Schwerpunktsystem bestimmt werden. Zum Beispiel, für

$$m_1 = 3m, \quad m_2 = 2m \quad \text{und} \quad m_3 = m$$

ist $\lambda \sim 0.7801$ und mit (4.130) folgt

$$\mathbf{r}_1 \sim -0.63 \mathfrak{s}, \quad \mathbf{r}_2 \sim 0.37 \mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_3 \sim 1.15 \mathfrak{s}.$$

Die drei Körper bewegen sich auf ähnlichen Ellipsen, d.h. Ellipsen mit der gleichen Exzentrizität aber im Allgemeinen verschiedenen Halbachsen. Deren große Halbachsen liegen auf *einer* Geraden und ihre Brennpunkte im Schwerpunkt des Systems. Wegen $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$ können die Mittelpunkte der Ellipsen nicht alle auf derselben Seite des Schwerpunktes liegen.

Für $m_3 \ll m_{1,2}$ handelt es sich um das ausgiebig studierte *ingeschränkte Dreikörperproblem*. Der Probekörper m_3 stört die Bewegungen der schweren Körper kaum und diese bewegen sich auf Ellipsenbahnen um einander. Der sehr leichte Körper m_3 kann in drei Punkten verbleiben, je nachdem, in welcher Reihenfolge man die drei Körper anordnet.

Dreieckslösungen

Das von drei beliebigen Massenpunkten gebildete Dreieck ist dann eine strenge Lösung des Dreikörperproblems, wenn das Dreieck dauernd sich selbst ähnlich und gleichseitig bleibt. Um dies einzusehen führen wir wieder die relativen Ortsvektoren ein,

$$\mathfrak{s}_1 \equiv \mathbf{r}_{32}, \quad \mathfrak{s}_2 \equiv \mathbf{r}_{13}, \quad \mathfrak{s}_3 \equiv \mathbf{r}_{21}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad (4.134)$$

die offensichtlich zu Null addieren,

$$\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2 + \mathfrak{s}_3 = 0. \quad (4.135)$$

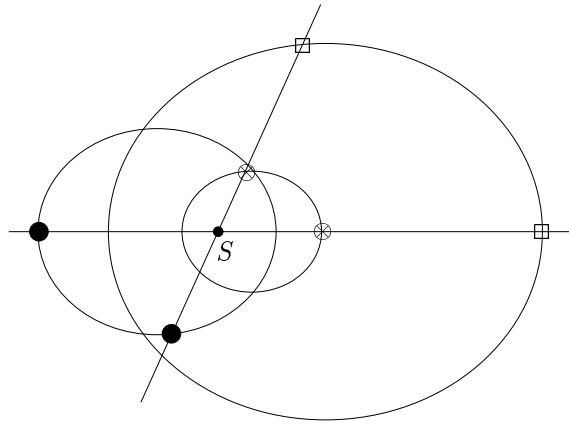


Abbildung 4.14: EULERSche Lösungen. • : m_1 , ⊗ : m_2 , □ : m_3

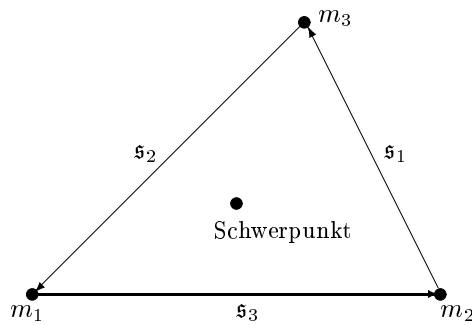


Abbildung 4.15: Zu den LAGRANGESchen Lösungen des Dreikörperproblems.

Die zugehörige Umkehrtransformation lautet

$$\mathbf{r}_i = -\frac{1}{M} \epsilon_{ijk} m_j \mathfrak{s}_k. \quad (4.136)$$

Nach einer kurzen Rechnung findet folgende Bewegungsgleichungen für die \mathfrak{s}_i ,

$$\ddot{\mathfrak{s}}_i = -\gamma M \frac{\mathfrak{s}_i}{s_i^3} + \gamma m_i \sum_{j=1}^3 \frac{\mathfrak{s}_j}{s_j^3}. \quad (4.137)$$

Nun folgen wir LAGRANGE und setzen die 3 Körper auf die Eckpunkte eines *gleichseitigen Dreiecks*. Wegen $s_1 = s_2 = s_3$ und (4.135) verschwindet dann der letzte Term in (4.137) und die Bewegungsgleichungen für die relativen Ortsvektoren entkoppeln,

$$\ddot{\mathfrak{s}}_i = -\gamma M \frac{\mathfrak{s}_i}{s_i^3}. \quad (4.138)$$

Die Vektoren \mathfrak{s}_i verbinden also die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks und liegen gleichzeitig auf drei Ellipsen. Dann handelt es sich um drei Kopien einer Ellipse welche in einer raumfesten Ebene liegen und um $2\pi/3$ gegeneinander verdreht sind. Wir legen \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 in die Bahnebene und finden

$$\mathfrak{s}_k = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \left(\mathbf{e}_1 \cos\left(\varphi + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathbf{e}_2 \sin\left(\varphi + \frac{2k\pi}{3}\right) \right), \quad k = 1, 2, 3$$

Man findet für die Ortsvektoren im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} N_{23} \{ \mathbf{e}_1 \cos(\varphi + \varphi_{23}) + \mathbf{e}_1 \sin(\varphi + \varphi_{23}) \} \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} N_{31} \{ \mathbf{e}_1 \cos(\varphi + \varphi_{31}) + \mathbf{e}_2 \sin(\varphi + \varphi_{31}) \}, \\ \mathbf{r}_3 &= \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} N_{12} \{ \mathbf{e}_1 \cos(\varphi + \varphi_{12}) + \mathbf{e}_2 \sin(\varphi + \varphi_{12}) \} \end{aligned}$$

wobei die Massenverhältnisse $\alpha_i = m_i/M$ zwischen 0 und 1 liegen, und die Normierungsfaktoren und Winkel

$$N_{jk} = \sqrt{\alpha_j^2 + \alpha_k^2 + \alpha_j \alpha_k} \quad \text{und} \quad N_{jk} \exp(\varphi_{jk}) = \alpha_k z^j - \alpha_j z^k, \quad z = e^{2\pi i/3}$$

eingeführt haben. Die Ortsvektoren \mathbf{r}_i durchlaufen also Ellipsen mit Brennpunkten im Schwerpunkt. Alle drei Ellipsen besitzen die gleiche numerische Exzentrizität, haben im Allgemeinen aber verschiedene Halbachsen. Die große Halbachse der Ellipse 1 ist gegenüber der \mathbf{e}_1 -Richtung um φ_{23} gedreht, die große Halbachse der Ellipse 2 um φ_{31} und diejenige der Ellipse 3 um φ_{12} .

Für *gleiche Massen* vereinfachen sich die Formeln sehr, da

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad N_{23} = N_{31} = N_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

sind und entsprechend

$$\phi_{31} = \phi_{23} + \frac{2\pi}{3} \quad \text{und} \quad \phi_{12} = \phi_{31} + \frac{2\pi}{3}$$

gilt. Das gleichseitige Dreieck hat also seinen Mittelpunkt im Schwerpunkt und entsprechend haben alle drei Ortsvektoren zu allen Zeiten dieselbe Länge. Für gleiche Massen sind die drei Ellipsen kongruent und um 120° gegeneinander verdreht.

4.6.2 Numerische Integration des ebenen Dreikörperproblems

Neben den besprochenen exakten Lösungen gibt es nur noch wenige explizit angebbare Lösungen. Das Dreikörperproblem ist nicht integrabel⁸. Will man die Bewegungsgleichungen für beliebige Anfangsorte und Geschwindigkeiten der drei Körper lösen, so ist man gezwungen die Bewegungsgleichungen numerisch zu integrieren. Kommen sich die Massenpunkte nicht zu nahe, so kann man die Differentialgleichungen mühelos zum Beispiel mit MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB, SCILAB oder OCTAVE lösen. Kommen sich mindestens zwei Körper

⁸Diese Eigenschaft wird am Ende der Vorlesung besprochen werden.

sehr nahe oder treffen sie sich sogar, dann müssen die NEWTONSchen Bewegungsgleichungen regularisiert werden. Dies geschieht durch eine geschickte Transformation der Zeit- und Raumvariablen. Für Interessierte verweise ich auf den lehrreichen Artikel von GRUNTZ und WALDVOGEL [7].

Beim ebenen Dreikörperproblem bewegen sich alle Massenpunkte in einer Ebene. Wir legen die Basisvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 in diese Ebene, so dass

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{e}_2 + y_2\mathbf{e}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{e}_3 + y_3\mathbf{e}_3.$$

Das System hat offensichtlich $3 \times 4 = 12$ Freiheitsgrade. Um das gekoppelte Differentialgleichungssystem mit Scilab zu lösen, definieren wir die Funktion $\text{Xdot}=\text{xdot3k}(t, X)$, welche als file `xdot3k.sci` abgespeichert wird, wie folgt:

```
function Xdot=xdot3k(t,X)
global m1 m2 m3 // die Massen der drei Körper
x1=X(1:2); x2=X(5:6); x3=X(9:10);
d1=(x2-x3)/norm(x2-x3)^3; d2=(x3-x1)/norm(x3-x1)^3; d3=(x1-x2)/norm(x1-x2)^3;
Xdot(1:2)=X(3:4); Xdot(5:6)=X(7:8); Xdot(9:10)=X(11:12);
Xdot(3:4)=-m2*d3+m3*d2;
Xdot(7:8)=-m3*d1+m1*d3;
Xdot(11:12)=-m1*d2+m2*d1;
endfunction
```

Hierin ist X ein Spaltenvektor der die Orte und Geschwindigkeiten der 3 Körper enthält. Wir wählen Einheiten, so dass die Gravitationskonstante $\gamma = 1$ wird. Nun rufen wir in SCILAB den Integrator `ode` und einige einfache Befehle auf, um die Orbits der drei Körper zu berechnen und darzustellen

```
t=linspace(0,10,10000);
global m1 m2 m3; m1=5; m2=3; m3=4;
x10=[1;-1]; x20=[1;3]; x30=[-2;-1]; xpo=[0;0]; //Anfangsbedingungen
u=ode([x10;xpo;x20;xpo;x30;xpo],0,t,xdot3k);
plot2d([u(1,:)',u(5,:)',u(9,:)'],[u(2,:)',u(6,:)',u(10,:)'])
```

Wir haben die Massen

$$m_1 = 5, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 4$$

und die sogenannten *pythagoräischen Anfangsdaten*

$$t = 0: \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_3 = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$$

für die Anfangsorte gewählt. Die drei Körper seien anfänglich in Ruhe,

$$t = 0: \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Der Schwerpunkt liegt für alle Zeiten im Ursprung. Bei der numerischen Integration der Systems (4.127) kann diese Bedingung zu jeder Zeit nachgeprüft werden. Zur Zeit $t = 15.8299$ kommen sich die Massen m_1 und m_3 sehr nahe. Die Geschwindigkeiten bei diesem Beinahe-Zusammenstoß werden sehr groß und danach wird die Genauigkeit der numerischen Integration schlecht.

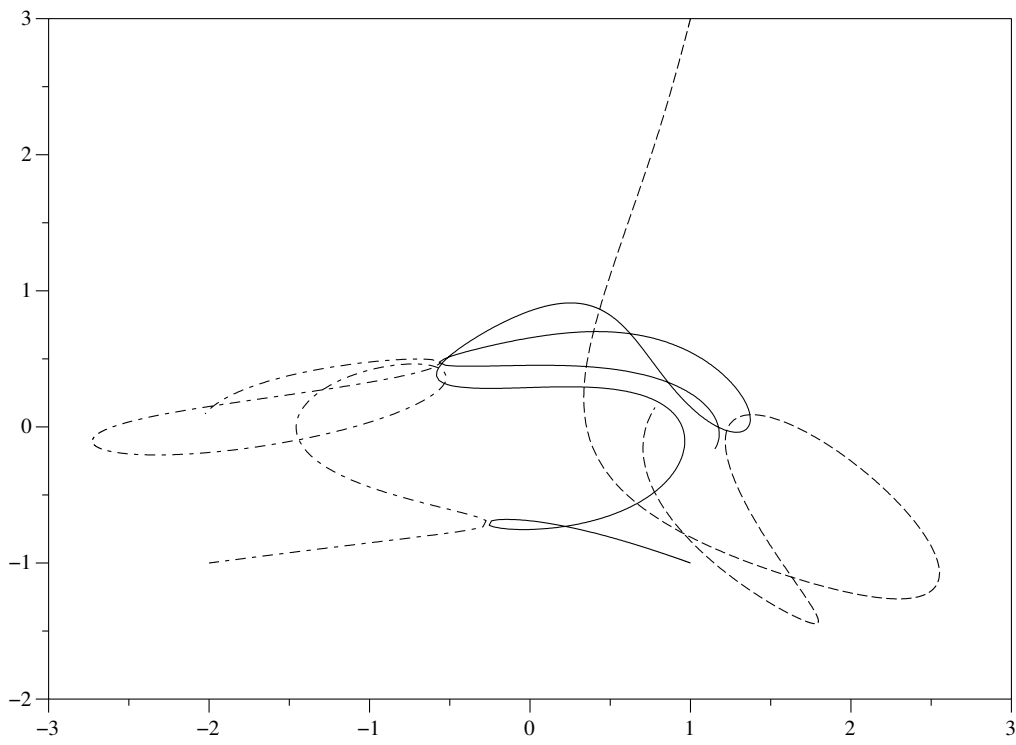


Abbildung 4.16: *Orbits für $t \leq 10$. durchgezogen: m_1 , gestrichelt: m_2 , Strichpunkt: m_3*