Kapitel 3

Dynamik von Massenpunkten

Nach dem 1. Newtonschen Axiom bewegen sich *freie Körper in einem Inertialsystem* geradlinig und gleichförmig. Sind die Wechselwirkungen mit der Umgebung (beabsichtigt oder unbeabsichtigt) ungenügend abgeschirmt, dann sind Körper äußeren Einflüssen ausgesetzt. In der makroskopischen Mechanik sind dafür die gravitative und elektromagnetische Wechselwirkung verantwortlich. Es wirken *Kräfte* auf die Körper und diese führen zu Abweichungen ihrer Bahn in einem Inertialsystem von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung. Die beschleunigten Bewegungen sind bestimmt durch die *Kräfte* und die Fähigkeit der Materie des Teilchens, auf diese Einflüsse zu reagieren, seine *Trägheit*. Nach der Erfahrung gibt es ein für jedes Materieteilchen universelles Maß an Trägheit, unabhängig von den jeweiligen Einflüssen. Das eigentliche Bewegungsgesetz gibt an, wie sich der Körper in Inertialsystemen unter dem Einfluss von Kräften bewegt:

2. Axiom (lex secunda): *Die Änderung der Bewegungsgröße ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.*

Für *Bewegungsgröße* benutzen wir heute das Wort *Impuls*. Der Impuls $\mathbf{p}$ ist definiert als Produkt von träger Masse m und Geschwindigkeit,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{3.1}$$

Das 2. Newtonsche Gesetz ist demnach gleichwertig mit

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{K}. \tag{3.2}$$

In den meisten Fällen ist die Masse konstant[1], und dann gilt

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{a} = \mathbf{K} \tag{3.3}$$

gilt. In diesem Kapitel werden wir uns ausführlich mit der Bedeutung und den Anwendungen der Gleichung (3.2) beschäftigen. Sie beinhaltet die Begriffe träge Masse und Kraft, die zuerst als messbare Größen erklärt werden müssen.

[1] Für eine Treibstoff verlierende Rakete ist die Masse zeitabhängig.

3.1 Die träge Masse und Kräfte

Wir setzen voraus, daß Länge und Zeit bereits definiert sind. Damit ist die Beschleunigung $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ eine messbare Größe. Wir betrachten eine bestimmte, in ihrer Größe unbekannte Kraft (zum Beispiel eine Federkraft) und zwei Körper. Wir messen die Beschleunigungen $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ welche durch die unbekannte Kraft hervorgerufen werden. Nach (3.3) ist das Verhältnis m_1/m_2 durch $\|\mathbf{a}_2\|/\|\mathbf{a}_1\|$ gegeben. Damit ist das Verhältnis der trägen Massen als Messgröße festgelegt. Man definiert nun willkürlich die träge Masse eines bestimmten Körpers als 1 Masseneinheit, bekanntlich ist dies das Kilogramm (kg). Hierdurch ist dann die träge Masse jedes Körpers bezogen auf das Kilogramm als Messgröße definiert.

Auch der *Stoßprozess zweier Teilchen (Körper)* erlaubt die operative Definition der trägen Masse. Zwei freie Teilchen bewegen sich längs Geraden mit konstanten Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ aufeinander zu, stoßen zusammen und bewegen sich nach dem Stoß mit konstanten Geschwindigkeiten $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ wieder auseinander. Der Stoß braucht nicht elastisch zu sein. Es wird lediglich vorausgesetzt, daß die Teilchen durch den Stoß ihre Identität nicht verlieren, und daß die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß gemessen werden können. Man findet, daß bei gleichen Teilchen aber veränderlichen Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ das Verhältnis

$$\alpha = \frac{\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1\|}{\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2\|}$$

immer denselben Wert hat. Weiter stellt man fest, daß sich bei Vervielfachung der Materie eines Teilchens durch Volumenänderung das obige Verhältnis α umgekehrt proportional verändert. Verdoppelt man die Materie des zweiten Teilchens, so verdoppelt sich der Wert von α, verdoppelt man die Materie des ersten Teilchens, so halbiert sich der Wert von α, usw. Man setzt daher

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}. \tag{3.4}$$

und nennt m_1, m_2 die *trägen Massen* der beiden Teilchen. Damit ist das Verhältnis von trägen Massen operationell definiert. Nach Wahl einer Einheitsmasse sind damit alle Massen definiert.

Das Verhältnis α ist invariant gegenüber beliebigen Galilei-Transformationen, da mit (2.46) die Geschwindigkeiten folgendermaßen transformieren,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u} + R\mathbf{v}'_i, \quad \mathbf{w}_i = \mathbf{u} + R\mathbf{w}'_i, \quad \text{so daß} \quad \|\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i\| = \|R(\mathbf{v}'_i - \mathbf{w}'_i)\| = \|\mathbf{v}'_i - \mathbf{w}'_i\|.$$

Benutzt man die gleiche Einheitsmasse in allen Inertialsystemen, dann ist die in (3.4) definierte träge Masse eines Körpers also unabhängig vom Inertialsystem. Die oben zur Definition der trägen Masse benutzte Beziehung $m_1\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1\| = m_2\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2\|$ folgt aus dem noch zu beweisenden *Impulssatz*. Danach ist die Summe der Impulse vor und nach einem Stoß dieselbe. Für den Stoß zweier Teilchen gilt also

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{w}_1 + m_2\mathbf{w}_2, \tag{3.5}$$

Neben der trägen Masse gibt es die begrifflich verschiedene *schwere Masse*, die proportional zur Stärke der Gravitationskraft auf einen Körper ist. Die schweren Massen zweier Körper sind gleich, wenn sie durch einen dritten Körper dieselbe Anziehungskraft erfahren. Sie kann experimentell durch eine Kraftmessung festgelegt werden. Die schwere Masse könnte eine von der trägen Masse unabhängige Eigenschaft eines Körpers sein. Experimentell stellt sich jedoch heraus, daß das Verhältnis der beiden Massen immer gleich groß ist. Daher verzichtet man in der Notation zumeist auf eine Unterscheidung der beiden Begriffe und setzt beide Massen gleich m. Die Eigenschaft der Gleichheit von träger und schwerer Masse wird axiomatisch oft angenommen und dieses sogenannten *Äquivalenzprinzip* ist ein zentraler Ausgangspunkt in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Äußere Kräfte: Die Ursache für die Abweichung von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung ist in den am Körper angreifenden Kräften zu suchen, die zu einer zeitlichen Änderung des Impulses führen. Fast immer ist die Kraft $\mathbf{K}$ auf ein Teilchen bei $\mathbf{r}(t)$ eine Funktion der Zeit t, seiner Position $\mathbf{r}(t)$ und seiner Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}\big(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\big). \tag{3.6}$$

Eine Ausnahme ist die beschleunigungsabhängige Kraft auf ein elektromagnetische Wellen abstrahlendes geladenes Teilchen. Wir werden derartige Strahlungsdämpfungen in dieser Vorlesung vernachlässigen. Sie werden in der Elektrodynamik behandelt.

Nach Einführung eines kartesischen Koordinatensystems können wir die Bewegungsgleichung (3.3) für eine Kraft von der Gestalt (3.6) in ein gekoppeltes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung umformen,

$$m\ddot{x}_i = K_i(t, x_1, x_2, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3). \tag{3.7}$$

Welches kartesische Koordinatensystem für die Lösung dieser Gleichungen besonders geeignet ist und ob überhaupt die Verwendung von kartesischen Koordinaten günstig ist, hängt von der konkreten Form von $\mathbf{K}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ ab.

Man spricht von *äußeren Kräften*, wenn die Rückwirkung des betrachteten Teilchens auf das die Kräfte erzeugende System vernachlässigt wird. Dies ist sicher eine gute Näherung für die Bewegung einer Rakete im Gravitationsfeld der sehr viel schwereren Erde oder eines Elektrons im elektrischen Feld eines Kondensators. Dagegen wird ein Elektron auf ein mit ihm wechselwirkendes Elektron zurückwirken. Über diese Rückwirkung macht das dritte Newtonsche Axiom die einfache, oft unter dem Schlagwort *actio = reactio* zusammengefasste Aussage:

Newtons 3. Axiom (lex tertia): *Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massenpunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft, mit der der Massenpunkt zurückwirkt,*

$$\mathbf{K}_{\text{actio}} = -\mathbf{K}_{\text{reactio}}. \tag{3.8}$$

Bei der Behandlung von Mehrkörpersystemen wird dieses Prinzip eine große Rolle spielen.

Wirken zwei verschiedene Kräfte $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{K}_2$ auf ein und denselben Massenpunkt, so erhält man die Gesamtkraft durch die Vektorsumme $\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$. Dies wird als das *Superpositionsprinzip* für Kräfte bezeichnet. Wie die Geschwindigkeit und Impuls Vektoren sind, ist auch die Kraft ein Vektor und die Kräfte bilden einen 3-dimensionalen Vektorraum.

3.1.1 Beschleunigte Bezugssysteme und Scheinkräfte

Die Bewegung eines beliebigen *kartesischen* Koordinatesystems S' mit kartesischer Basis $\mathbf{e}'_a$ und Koordinaten x'_a gegenüber einem *Inertialsystem IS* mit kartesischer Basis $\mathbf{e}_a$ und Koordinaten x_a setzt sich aus der Bewegung des Ursprungs O' von S' und der Drehung der Achsen von S' um diesen Ursprung zusammen. Es gilt

$$\overline{OP} = x_a \mathbf{e}_a = \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + x'_a \mathbf{e}'_a, \qquad \mathbf{r}_0 = \overline{OO'}, \tag{3.9}$$

siehe Abbildung (3.1). Wir nehmen an, daß die Zeit Uhren S' und IS synchronisiert sind.

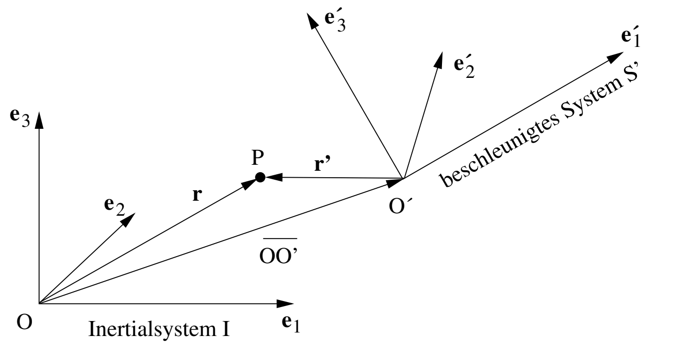

Abbildung 3.1: *Beschleunigt bewegtes Koordinatensystem*

Für $\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}\,t$ und $\mathbf{e}_a = R_{ab}\mathbf{e}'_b$ mit zeitunabhängiger Relativgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ und zeitunabhängiger Drehung $R \in SO(3)$ wäre dies eine Galileitransformation und damit S' ebenfalls ein Inertialsystem. Für beliebig beschleunigte Systeme sind $\dot{\mathbf{r}}_0$ und $\mathbf{e}'_a$ zeitabhängig und

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{x}'_a \mathbf{e}'_a + x'_a \dot{\mathbf{e}}'_a. \tag{3.10}$$

Ein mitrotierender Beobachter, für den sich die Achsenrichtungen ja nicht ändern, würde dem Massenpunkt hingegen die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{x}'_a \mathbf{e}'_a \tag{3.11}$$

zuschreiben[2].

Der letzte Term in (3.10) rührt ausschließlich von der Drehung des Systems S' her. Zusammen mit dem ersten Term beschreibt er die Geschwindigkeit eines - vom Inertialsystem aus gesehenen - in S' ruhenden Massenpunktes. Ein mitrotierender Punkt hat konstante Koordinaten x'_a.

Hier müssen wir noch einmal auf die Drehungen zurückkommen. Da wir zwei kartesische Bezugssysteme wählten, können nach (2.32) die Basen ineinander gedreht werden,

$$\mathbf{e}'_a = R_{ba}\mathbf{e}_b \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{e}}'_a = \dot{R}_{ba}\mathbf{e}_b = \dot{R}_{ba}R_{bc}\mathbf{e}'_c = (R^T\dot{R})_{ca}\mathbf{e}'_c. \tag{3.12}$$

Für eine Drehung ist $R^T R = \mathbb{1}$ und entsprechend ist die infinitesimale Drehmatrix

$$\Omega = R^T\dot{R} = R^{-1}\dot{R} \tag{3.13}$$

antisymmetrisch, wie man leicht beweist:

[2]Beachte: Für $\mathbf{r}_0 = 0$ ist offensichtlich $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Aber für die soeben definierte Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}'$ im System S' ist $\dot{\mathbf{r}}'$ trotzdem nicht gleich $\dot{\mathbf{r}}$. Ein mitbewegter Punkt hat $\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{o}$ aber $\dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{o}$.

$$0 = \dot{R}^T R + R^T \dot{R} = \dot{R}^T R + (\dot{R}^T R)^T = \Omega + \Omega^T. \tag{3.14}$$

Damit finden wir für die Geschwindigkeit bezüglich des Inertialsystems

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{x}'_a \mathbf{e}'_a + x'_a \Omega_{ba} \mathbf{e}'_b = \dot{\mathbf{r}}_0 + \big(\dot{x}'_a + \Omega_{ab} x'_b\big)\mathbf{e}'_a. \tag{3.15}$$

Hier ist es wieder angebracht, das Koordinatentripel bezüglich der Basis in S' mit $\mathbf{r}'$ zu identifizieren und den Vektor der *Winkelgeschwindigkeit* $\boldsymbol{\omega}$ einzuführen,

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$ parametrisieren die schiefsymmetrische infinitesimale Drehmatrix,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega\mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' \tag{3.16}$$

Damit erhalten wir endgültig

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}}_0 + \big(\frac{d}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge\big)\mathbf{r}'. \tag{3.17}$$

Selbst ein Teilchen mit konstanten S'-Koordinaten hat eine Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_0$ wegen der Bewegung des Ursprungs O' relativ zu O und eine Geschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'$ aufgrund der Drehung des Nichtinertialsystems bezüglich IS. Diese Drehung erfolgt um die durch $\boldsymbol{\omega}$ definierte Drehachse mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$. Die in (3.17) abgeleitete Vorschrift zur Bildung der Zeitableitung eines Vektors $\mathbf{u}$, der in einem rotierenden Koordinatensystem dargestellt wird,

$$\mathbf{u} = u'_a \mathbf{e}'_a,$$

kann man in der Operatorgleichung

$$\frac{d}{dt}\Big|_{IS} = \frac{d}{dt}\Big|_{S'} + \boldsymbol{\omega}\wedge$$

zusammenfassen. Die vom Inertialsystem her gesehene Zeitableitung $d/dt|_{IS}$ eines im Nichtinertialsystem aufgeschriebenen Vektors bildet man, indem man zunächst die Zeitableitung der Komponenten ausführt, $d/dt|_{S'}$, und dann den Einfluss der Rotation berücksichtigt.

Um die Beschleunigung bezüglich des IS zu berechnen, benötigen wir die zweite Zeitableitung der Basisvektoren $\mathbf{e}'_a$:

$$\ddot{\mathbf{e}}'_a = \mathbf{e}'_b \dot{\Omega}_{ba} + \dot{\mathbf{e}}'_b \Omega_{ba} = \mathbf{e}'_b \dot{\Omega}_{ba} + \mathbf{e}'_b \Omega^2_{ba}.$$

Dies setzen wir in

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{x}'_a \mathbf{e}'_a + 2\dot{x}'_a \dot{\mathbf{e}}'_a + x'_a \ddot{\mathbf{e}}'_a$$

ein. Nach Identifikation des gestrichenen Koordinatentripels mit $\mathbf{r}'$ finden wir für die Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\mathbf{r}}' + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'). \tag{3.18}$$

Damit lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung im Nichtinertialsystem für einen Massenpunkt (mit konstanter träger Masse)

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{K} - m\ddot{\mathbf{r}}_0 - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}}'. \tag{3.19}$$

Die *Scheinkräfte*, die neben $\mathbf{K}$ auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung stehen, dienen nur dazu, den Massenpunkt in Abwesenheit einer wirklichen Kraft $\mathbf{K}$ gleichförmig auf einer Geraden zu führen. Sie rühren alle von der Trägheit der Masse her, sind alle proportional zur trägen Masse, und werden deshalb *Trägheitskräfte* genannt. Am beeindruckensten ist die *Coriolis*-Kraft

$$\mathbf{K}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}}', \tag{3.20}$$

die immer senkrecht zur Geschwindigkeit in S' und zur Drehachse steht, und zu überraschenden Effekten führt. Sie nimmt proportional mit der Winkelgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit in S' zu. Bewegt sich ein geführtes Teilchen auf einer um die 3-Achse rotierende Scheibe radial von der Drehachse weg, $\rho' = v't$ und φ' =const., dann ist die Corioliskraft $-2m\,\omega v\,\mathbf{e}'_\varphi$. Die Erde dreht sich entgegen dem Uhrzeigersinn um den Nordpol mit einer Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega \sim 7.29 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

relativ zu den Fixsternen. Auf der nördlichen Erdhalbkugel zeigt der Kreisfrequenzvektor $\boldsymbol{\omega}$ aus der Erdoberfläche heraus und auf der südlichen Halbkugel in sie hinein. Ein auf der nördlichen Halbkugel längs der Erdoberfläche abgeschossenes Projektil wird aufgrund der Corioliskraft nach rechts (in Bewegungsrichtung) abgelenkt. Auf der südlichen Halbkugel wird es nach links ausgelenkt. Die Coriolis Beschleunigung ist immer kleiner als

$$2\omega v \sim 1 - 5 \times 10^{-4}\, v,$$

wo v die Geschwindigkeit des Projektils ist. Sie spielt eine wichtige Rolle in vielen ozeanographischen und meteorologischen Phänomenen.

Die *Zentrifugalkraft*

$$\mathbf{K}_z = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') \tag{3.21}$$

ist proportional zu ω^2 und zum Abstand von der Drehachse und sie zeigt von der Achse weg. Für konstantes $\boldsymbol{\omega}$ und für $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$ ist sie die einzig wirksame Trägheitskraft auf ein in S' ruhendes Teilchen. Für einen Körper am Äquator ist die von der Erddrehung herrührende Zentrifugalbeschleunigung

$$\omega^2 r = 3.38\ \mathrm{cm/s}^2,$$

was etwa 0.3% der gravitativen Beschleunigung ist. Die Resultante der zum Erdmittelpunkt gerichteten Gravitationskraft

$$\mathbf{K}_G = G\frac{m_s M_s}{r^3}\,\mathbf{r}, \qquad m_s \quad \text{schwere Masse},$$

und der Zentrifugalkraft (3.21) ist für einen irdischen Beobachter das *Gewicht* eines Körpers, das nach Definition mg - vektoriell $m\mathbf{g}$ - ist, wenn unter g die an dem Ort des Massenpunktes gemessene

Fall- oder Erdbeschleunigung verstanden wird. Hier haben wir die träge und schwere Masse gleich gesetzt. Das Gewicht bzw. $\mathbf{g}$ ändert sich infolge der Zentrifugalkraft mit der geographischen Breite ψ, vom äquatorialen Wert 978.0 bis auf 983.2 cm/s^2, dem Wert an den Polen. Aus dem gleichen Grund ist die Form der Erde, das *Geoid*, von der Kugelform verschieden, und $\mathbf{g}$ zeigt nicht genau nach dem Erdzentrum, sondern steht senkrecht auf der Geoidfläche. Bei den meisten Problemen sind jedoch die Bewegungen so kurz, daß $\mathbf{g}$ mit genügender Genauigkeit als konstant angenommen werden kann.

Die dritte Trägheitskraft tritt nur auf, wenn sich die Drehachse und/oder die Winkelgeschwindigkeit ändern. Ruht das Teilchen in S', dann beschreibt es im Inertialsystem IS eine sich zeitliche ändernde Drehbewegung und dies führt zu einer zusätzlichen Trägheitskraft.

3.1.2 Bewegungen auf der rotierenden Erde

Wir wählen das zur Beschreibung der Bewegung angepasste Koordinatensystem am Beobachtungsort der geographischen Breite ψ nach Abbildung (3.2).

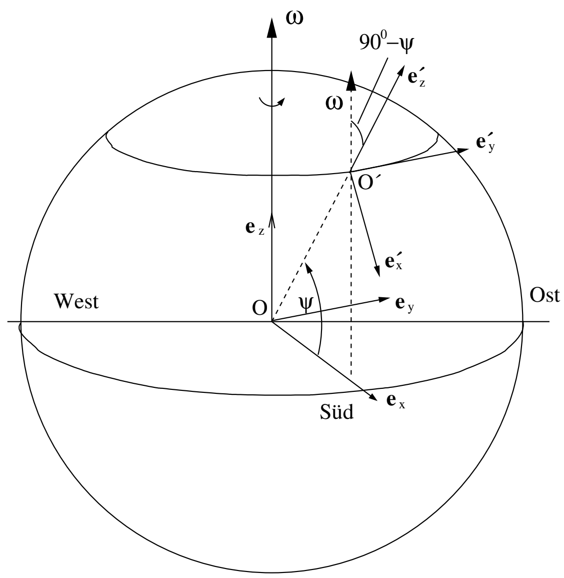

Abbildung 3.2: *Beschleunigtes Koordinatensystem auf Erdoberfläche*

Wir benötigen die Transformation von der kartesischen Basis $\mathbf{e}_a$ des durch die Fixsterne definierten Inertialsystems und der am Beobachtungsort befindlichen mitrotierenden kartesischen Basis $\mathbf{e}'_a$. Wir nehmen an, daß zur Zeit $t = 0$ die mitrotierende Basis am Nordpol gleich der Basis $\mathbf{e}_a$ ist. Aus Abbildung (3.2) entnimmt man, daß für $t = 0$

$$\mathbf{e}'_x = \sin\psi\mathbf{e}_x - \cos\psi\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}'_y = \mathbf{e}_y \quad \text{und} \quad \mathbf{e}'_z = \sin\psi\mathbf{e}_z + \cos\psi\mathbf{e}_x \tag{3.22}$$

gelten. Der Winkelgeschwindigkeitvektor hat die Form

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z = \omega\big(\sin\psi\,\mathbf{e}'_z - \cos\psi\,\mathbf{e}'_x\big).$$

Nun ist es einfach, die Corioliskraft zu berechnen,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_c &= -2m\boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\mathbf{r}}' = -2m\omega\big(\sin\psi\,\mathbf{e}'_z - \cos\psi\,\mathbf{e}'_x\big)\wedge\big(\dot{x}'\,\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\,\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\,\mathbf{e}'_z\big)\\ &= 2m\omega\big\{\sin\psi\dot{y}'\,\mathbf{e}'_x - (\sin\psi\dot{x}' + \cos\psi\dot{z}')\,\mathbf{e}'_y + \cos\psi\dot{y}'\,\mathbf{e}'_z\big\}.\end{aligned}$$

Diese Corioliskraft wird mit der Gravitationskraft $-mg\mathbf{e}'_z = m\mathbf{g}$ und der Zentrifugalkraft superponiert. Wählen wir für O' einen Punkt auf der Erdoberfläche wie in Abbildung (3.2), dann enthält $\ddot{\mathbf{r}}_0$ in (3.19) die Zentrifugalkraft; wählen wir für O' den Erdmittelpunkt, dann ist $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$ und (3.21) beschreibt die Zentrifugalkraft. Wie oben erklärt wurde, können wir diese Kraft in guter Näherung durch eine geringfügige Änderung von g berücksichtigen. Damit erhalten wir folgende Bewegungsgleichungen für ein nur der Gravitationskraft ausgesetztes Teilchen bezüglich erdgebundener Koordinaten

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -2\boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{g},\qquad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\omega} = \omega\begin{pmatrix}\cos\psi\\ 0\\ -\sin\psi\end{pmatrix} = \omega\,\hat{\boldsymbol{\omega}},\quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -g\end{pmatrix},\tag{3.23}$$

wobei die Kreisfrequenz der Erde $\omega = 7.29\cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$ ist. In Abwesenheit des Gravitationsfeldes beschreibt der Geschwindigkeitsvektor des dann freien Teilchens eine Drehung um die Drehachse mit der Kreisfrequenz 2ω. Er dreht sich doppelt so schnell wie die Basis $\mathbf{e}'_a$. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \mathbf{r}'(0) + \hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\big(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\dot{\mathbf{r}}'(0)\big)\,t + \frac{1}{2\omega}(\hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge\mathbf{g})\,t + \frac{1}{2}\,\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{g})\,t^2\\ &\quad + \frac{1}{4\omega^2}\big(\mathbb{1} - R\big)\mathbf{g} + \frac{1}{2\omega}\,\hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge\big(\mathbb{1} - R\big)\dot{\mathbf{r}}'(0).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Hier bezeichnet R die Drehung um die Drehachse $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ mit der Winkelgeschwindigkeit 2ω. Für einen beliebigen Vektor $\mathbf{a}$ ist

$$R\mathbf{a} = (\hat{\boldsymbol{\omega}},\mathbf{a})\hat{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge(\hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge\mathbf{a})\cos 2\omega t + \hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge\mathbf{a}\,\sin 2\omega t,\tag{3.25}$$

siehe Abschnitt (2.4.2). Die Geschwindigkeit im beschleunigten System gewinnt man durch Ableiten des Koordinatentripels in S' nach der Zeit. Benutzt man die beiden Identitäten

$$\dot{R}\mathbf{a} = 2\omega\hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge(R\mathbf{a})\quad\text{und}\quad \hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge R\mathbf{a} = R\big(\hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge\mathbf{a}\big),\tag{3.26}$$

die aus (3.25) folgen, so findet man folgende Form für die Geschwindigkeit:

$$\dot{\mathbf{r}}'(t) = \frac{1}{2\omega}\,\hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge\mathbf{g} + \hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{g})\,t - \frac{1}{2\omega}\,\hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge R\mathbf{g} + R\,\dot{\mathbf{r}}'(0).\tag{3.27}$$

Mit den Identitäten (3.26) folgt nun relativ leicht, daß $\dot{\mathbf{r}}'$ die Bewegungsgleichung (3.23) erfüllt. Wir betrachten den freien Fall mit Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}'(0) = h\mathbf{e}'_z\quad\text{und}\quad\dot{\mathbf{r}}'(0) = \mathbf{o}\,.$$

Wegen

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{g} = g\sin\psi,\quad \hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge\mathbf{g} = g\cos\psi\,\mathbf{e}'_y,\quad \hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge(\hat{\boldsymbol{\omega}}\wedge\mathbf{g}) = g\cos\psi\big(\sin\psi\,\mathbf{e}'_x + \cos\psi\,\mathbf{e}'_z\big)\tag{3.28}$$

vereinfacht sich die Lösung zu

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{g}{2\omega^2}\,\sin\psi\cos\psi\{(\omega t)^2 - \sin^2\omega t\} \\
y' &= \frac{g}{2\omega^2}\,\cos\psi\{\omega t - \sin\omega t\cos\omega t\} \\
z' &= h - \frac{g}{2\omega^2}\,\{(\omega t)^2\sin^2\psi + \sin^2\omega t\,\cos^2\psi\}.
\end{aligned}$$

Erst nach einer Fallzeit von mehreren Stunden ist $\omega t \sim 1$. Damit dürfen wir $\omega t \ll 1$ annehmen und die trigonometrischen Funktionen entwickeln,

$$\sin\omega t \sim \omega t + \ldots \quad \text{und} \quad \cos\omega t \sim 1 - \frac{1}{2}(\omega t)^2 + \ldots .$$

Entwickeln wir bis zur Ordnung $g(\omega t)^3/\omega^2$, so finden wir

$$x' \sim 0, \quad y' \sim \frac{1}{3}gt^2\,(\omega t)\cos\psi \quad \text{und} \quad z' \sim h - \frac{1}{2}\,gt^2. \tag{3.29}$$

Da wir die y-Achse in der Ost-Richtung gewählt haben, bedeutet der immer positive y-Wert, daß *ein frei fallende Körper von der Vertikalen nach Osten abweicht.* Auf unserem Breitenkreis ist die Abweichung bei 100 m Fallhöhe etwa 1.5 cm.

3.2 Erhaltungssätze

Erhaltungsätze erleichtern oder ermöglichen oft die Lösung von physikalischen Problemen. Sie spielen eine zentrale Rolle in allen Gebieten der Physik. Die bekanntesten sind der Impulserhaltungssatz, der Drehimpulserhaltungssatz und die Erhaltung der Energie.

3.2.1 Der Impulssatz

Er ist nur ein anderes Wort für die Newtonschen Bewegungsgleichung (3.2) in der Abwesenheit von äußeren Kräften,

$$\dot{\mathbf{p}} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{p} = \text{const.} \tag{3.30}$$

Ist die Summe *aller* auf einen Körper wirkenden Kräfte Null, dann ist der Impuls des Körpers erhalten.

3.2.2 Der Drehimpulssatz

Multiplizieren wir das Newtonsche Bewegungsgesetz vektoriell mit $\mathbf{r}$ so erhalten wir

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) = \mathbf{r} \wedge \mathbf{K}, \tag{3.31}$$

da $\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{p} = 0$ ist. Definieren wir den *Drehimpuls* $\mathbf{L}$ des Teilchens und das auf ihn einwirkende *Drehmoment* $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{K}, \tag{3.32}$$

so wird (3.31) zur Bewegungsgleichung für den Drehimpuls,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{M}. \tag{3.33}$$

Der Drehimpuls und das Drehmoment beziehen sich auf den Ursprung des gewählten Inertialsystems. Bei einer Verschiebung des Systems ändern sich $\mathbf{L}$ und $\mathbf{M}$ im Gegensatz zu $\mathbf{p}$ und $\mathbf{K}$. Verschwindet das Drehmoment, dann ist der Drehimpuls erhalten. Für $\mathbf{K} \neq 0$ verschwindet $\mathbf{M}$ genau dann, wenn $\mathbf{r}$ und $\mathbf{K}$ parallel sind. Die Kraft muss also in Richtung zum Zentrum des Bezugssystems (oder entgegengesetzt) wirken,

$$\mathbf{K} = K\big(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}(t)\big)\,\mathbf{r}. \tag{3.34}$$

Eine solche Kraft heißt *Zentralkraft*. Bewegt sich ein Punktteilchen unter dem Einfluss einer Zentralkraft, dann ist sein Drehimpuls erhalten,

$$\mathbf{L} = \text{const} = \mathbf{L}_0. \tag{3.35}$$

Obwohl $\mathbf{r}$ und $\mathbf{p}$ für ein bewegtes Teilchen von der Zeit abhängen, ist für eine Zentralkraft der Drehimpuls zeitunabhängig. Man nennt (3.35) *Drehimpulserhaltungssatz*. Wir haben bei der Ableitung nirgends vorausgesetzt, daß die träge Masse des Punktteilchens konstant ist. Um (3.35) zu veranschaulichen, multiplizieren wir (3.32) skalar mit $\mathbf{r}(t)$ und erhalten mit (3.35)

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{L}_0 = 0. \tag{3.36}$$

Das bedeutet, daß alle möglichen Bahnen $\mathbf{r}(t)$ in derjenigen Ebene durch den Ursprung liegen, die auf $\mathbf{L}_0$ senkrecht steht. Damit ist für $\mathbf{L}_0 \neq 0$ die Konstanz der Richtung von $\mathbf{L}_0$ veranschaulicht. Der Betrag des Drehimpulses hängt eng mit der vom Ortsvektor $\mathbf{r}(t) = OP(t)$ überstrichenen Fläche pro Zeiteinheit zusammen, siehe Abbildung (3.3).

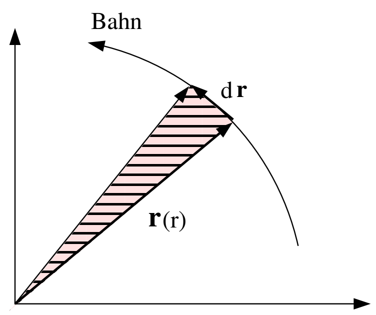

Abbildung 3.3: *Der Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Bewegt sich ein Teilchen während der kurzen Zeit Δt von $\mathbf{r}(t)$ nach $\mathbf{r}(t+\Delta t) \sim \mathbf{r}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t)\Delta t + O\big((\Delta t)^2\big)$, dann ist die dabei überstrichene gerichtete Fläche

$$\Delta\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}(t) \wedge \Delta\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}(t) \wedge \dot{\mathbf{r}}\,\Delta t$$

und die Flächengeschwindigkeit ist

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2m}\mathbf{L}. \tag{3.37}$$

Für einen erhaltenen Drehimpuls und eine zeitunabhängige träge Masse ist die vom Fahrstrahl pro Zeitintervall überstrichene Fläche konstant,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2m}\,\mathbf{L}\,t. \tag{3.38}$$

Damit ist der Betrag und die Richtung des erhaltenen Drehimpulses geometrisch veranschaulicht:

Unter der Wirkung jeder Zentralkraft ist die Flächengeschwindigkeit des Massenpunktes konstant, d.h. die Bewegung ist eben und der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Dieser Satz ist im speziellen Fall der Planetenbewegung als das zweite KEPLERsche Gesetz bekannt. Der Flächensatz ist eine Vektorgleichung und enthält entsprechend drei Integrationskonstanten. Zwei bestimmen die Bahnebene und die dritte legt den Betrag der Flächengeschwindigkeit in der Bahnebene fest. Ist die Bahn-Ebene die $x - y$-Ebene, dann ist

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = (x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)\mathbf{e}_3.$$

In Polarkoordinaten $x_1 = \rho\cos\varphi$ und $x_2 = \rho\sin\varphi$ ist

$$\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \rho^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{m}\,\mathbf{L}. \tag{3.39}$$

Der Drehimpuls $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_3$ zeigt in die z Richtung und der Drehimpulserhaltungs- und Flächensatz können folgendermaßen geschrieben werden,

$$L = m\rho^2\dot{\varphi} \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\,t.$$

Schlussendlich wollen wir noch untersuchen wie sich der Drehimpuls ändert, wenn wir das Inertialsystem wechseln. Zuerst zeigen wir, daß unter Drehungen des Inertialsystems der Drehimpuls wie ein Vektor transformiert, d.h. genauso wie der Orts- und Impulsvektor,

$$\mathbf{r} = R\mathbf{r}' \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = R\mathbf{p}'.$$

Das Kreuzprodukt von gedrehten Vektoren geht in das gedrehte Kreuzprodukt der Vektoren über:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = (R\mathbf{r}') \wedge (R\mathbf{p}') = R\big(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{p}'\big) = R\,\mathbf{L}', \tag{3.40}$$

und dies beweist die gemachte Aussage. Dagegen transformiert $\mathbf{L}$ unter Raumspiegelungen anders als $\mathbf{r}$ und $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{r} = P\mathbf{r}' = -\mathbf{r}', \quad \mathbf{p} = P\mathbf{p}' = -\mathbf{p}' \Longrightarrow \mathbf{L} = \mathbf{L}', \tag{3.41}$$

siehe Abbildung (3.4). Ein Vektor, der unter Raumspiegelung in sich übergeht heißt *Pseudo-Vektor*. Während $\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{K}$ Vektoren sind, ist $\mathbf{L}$ ein Pseudovektor.

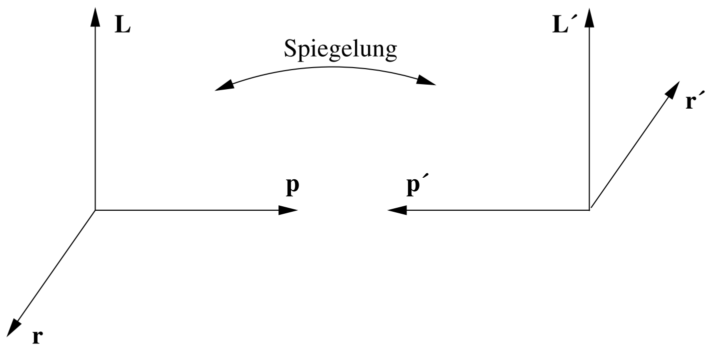

Abbildung 3.4: ***L*** *ist ein Pseudovektor.*

3.2.3 Energiesatz

Ein Punktteilchen bewege sich unter dem Einfluss einer äußeren Kraft von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Dann ist das Skalarprodukt

$$dA = \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}$$

die von der Kraft an dem Teilchen geleistete Arbeit. Die längs eines Weges C von P_1 (mit Ortsvektor $\mathbf{r}_1$) nach P_2 (mit Ortsvektor $\mathbf{r}_2$) geleistete Arbeit ist

$$A = \int_C dA = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}. \tag{3.42}$$

Die Arbeit hängt von der Kraft, von Anfangs- und Endpunkt des Weges und im allgemeinen Fall auch vom gewählten Weg C selbst ab. Die Wegabhängigkeit merkt ein Schwimmer, der in der Strömung in Abbildung (3.5) von P_1 nach P_2 einmal mit der Strömung und einmal gegen sie schwimmt. Die pro Zeit verrichtete Arbeit wird *Leistung* genannt,

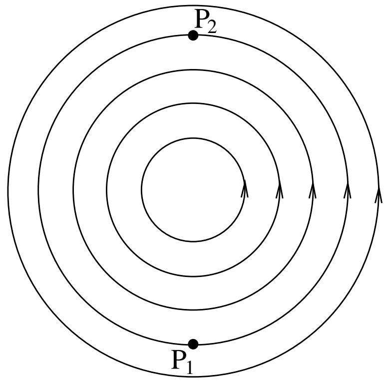

Abbildung 3.5: *Zur Wegabhängigkeit der Arbeit.*

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}. \tag{3.43}$$

Die Arbeit wird in Energieeinheiten

$$\mathrm{Joule} = \mathrm{J} = \mathrm{Nm} = \frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

gemessen und die Leistung in Watt = J/s. Auf die Leistung stoßen wir auch, wenn wir die Newtonsche Bewegungsgleichung (für eine konstante träge Masse) (3.3) mit der Geschwindigkeit multiplizieren,

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung erkennen wir die Zeitableitung der *kinetischen Energie*,

$$T = \frac{m}{2}\, \dot{\mathbf{r}}^2, \tag{3.44}$$

also die mit der Bewegung verbundenen Energie. Damit können wir die Gleichung auch in der Form

$$\frac{d}{dt} T = \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = P \tag{3.45}$$

schreiben. Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist gleich der zu- oder abgeführten Leistung.

Oft hat man es mit Kräften zu tun für die

$$\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{d}{dt}\, V(\mathbf{r}) \tag{3.46}$$

gilt. Diese Bedingung an die Kraft kann für beliebiges $\dot{\mathbf{r}}$ auf zweierlei Weise erfüllt werden. Eine erste Möglichkeit ist eine Kraft, die immer senkrecht zur Geschwindigkeit steht. Dann wäre $\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ und (3.46) mit $V = 0$ erfüllt. Ein wichtiges Beispiel ist die Lorentzkraft

$$\mathbf{K} = e\big(\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}\big)$$

die in einem Magnetfeld auf ein geladenes Teilchen wirkt. Ein Magnetfeld kann an einem geladenen Teilchen keine Arbeit leisten. Die zweite, für die Mechanik wesentliche Möglichkeit der Erfüllung von (3.46) sind *Potentialkräfte*, für welche die Kraft $\mathbf{K}$ ein Potential besitzt,

$$\mathbf{K} = -\nabla V(\mathbf{r}) \Longrightarrow \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = -\frac{d}{dt}\, V(\mathbf{r}). \tag{3.47}$$

Setzen wir dies in (3.45) ein, so finden wir

$$\frac{d}{dt}\Big(T + V(\mathbf{r})\Big) = 0. \tag{3.48}$$

Daraus ergibt sich der *Energiesatz*

$$E = \frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = \text{const.} \tag{3.49}$$

Im konservativen Kraftfeld ist die Summe aus kinetischer Energie und V erhalten. Die Funktion $V(\mathbf{r})$ ist eine Energie und heißt *potentielle Energie* oder *Potential.* Aus (3.48) kann man sofort eine notwendige Bedingung ablesen, welcher die Komponenten K_i einer *konservativen Kraft* genügen müssen: Da für ein genügend glattes Potential V die zweiten Ableitungen vertauschen, gilt

$$0 = (\partial_a\partial_b - \partial_b\partial_a)V = -(\partial_a K_b - \partial_b K_a), \quad \text{wo} \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$$

ist. Mit Hilfe der früher eingeführten Differentialoperatoren können wir auch schreiben,

$$\mathbf{K} = -\nabla V \Longrightarrow \nabla \wedge \mathbf{K} = \mathbf{o}. \tag{3.50}$$

Auf einfach zusammenhängenden Gebieten kann man auch die Umkehrung beweisen. Es sei C irgend eine Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet die P_0 mit P verbindet und sei $\nabla \wedge \mathbf{K} = 0$ im betrachteten Gebiet. Dann ist die von der Kraft an dem Teilchen geleistete Arbeit $\int \mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}$ unabhängig vom gewählten Weg C, solange Anfangs- und Endpunkt fest sind, und definiert eine bis auf eine Konstante eindeutige Funktion. Ist $P = P_0$, dann verschwindet das Linienintegral, und wir dürfen

$$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = -\int_C \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \tag{3.51}$$

schreiben. Um die Wegunabhängigkeit der geleisteten Arbeit zu beweisen, betrachte man den auf einen Punkt zusammenziehbaren Rand ∂A der von den beiden Wegen C und C' eingeschlossenen Fläche, siehe Abbildung (3.6).

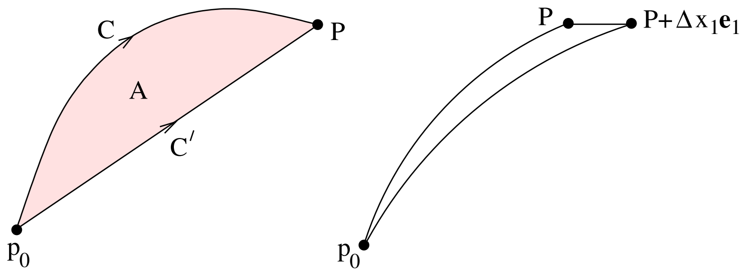

Abbildung 3.6: *Zur Wegunabhängigkeit der Arbeit.*

Mit dem STOKESschen Satz verschwindet die von einem konservativen Kraftfeld längs irgendeiner geschlossenen (und zusammenziehbaren) Kurve geleistete Arbeit,

$$0 = \int_A d\mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{K}) = \int_{\partial A} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} - \int_C \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r},$$

was beweist, daß die längs C und C' geleisteten Arbeiten gleich sind,

$$\int_{C'} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}. \tag{3.52}$$

Wir haben berücksichtigt, daß C und C' verschiedene Orientierungen haben. Umgekehrt ist

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{P_0}^{P}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta x_1\to 0}\Big(\frac{1}{\Delta x^1}\int\limits_{P}^{P+\Delta x_1\mathbf{e}_1}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}\Big) = \mathbf{K}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{e}_1 = K_1(\mathbf{r}), \tag{3.53}$$

was bedeutet, daß $\mathbf{K} = -\nabla V$ ist. Damit haben wir bewiesen, daß ein Kraftfeld dann und nur dann ein Potential besitzt, wenn die Rotation der Kraft verschwindet, d.h. wenn das Kraftfeld wirbelfrei ist.

Das Potential wird durch die Definition $\mathbf{K} = -\nabla V$ nur bis auf eine beliebige additive Konstante bestimmt. Daher kann der Wert von V in einem willkürlich gewählten Punkt P_0 mit Ortsvektor $\mathbf{r}_0$ gleich Null angenommen werden. Dann hat das Potential

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{P_0}^{P}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P}^{P_0}\mathbf{K}\cdot d\mathbf{r}$$

folgende Bedeutung: In einem Punkt P ist der Wert des Potentials gleich der Arbeit, welche die Feldkräfte leisten, bis sie den Massenpunkt von P nach P_0 verschieben, oder es ist gleich der Arbeit, die gegen die Feldkräfte geleistet werden muß, bis der Massenpunkt von P_0 in P überführt wird.

Die Punkte in denen das Potential denselben Wert V_0 hat, bilden eine durch die Gleichung

$$V(\mathbf{r}) = V_0$$

bestimmte Fläche, die *Äquipotentialfläche* oder *Niveaufläche* genannt wird. Wird der Massenpunkt längs einer solchen Fläche bewegt, so entsteht keine Potentialdifferenz und die Arbeit ist Null. Hieraus oder aus $\mathbf{K} = -\nabla V$ folgt, daß die Kraft $\mathbf{K}$ senkrecht zu der Niveaufläche steht.

Nicht alle Kräfte sind konservativ. Dissipative Kräfte treten immer auf, wenn mit Leistungsverlusten einhergehende Reibungseffekte auftreten. Entsprechend teilen wir eine Kraft in ihre konservativen und dissipativen Anteile auf,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{Kons}} + \mathbf{K}_{\text{Diss}}. \tag{3.54}$$

Ersetzen wir in (3.45) die Leistung der konservativen Kräfte entsprechend (3.47) durch ihr Potential, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r})\Big) = \mathbf{K}_{\text{Diss}}\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{3.55}$$

Die Summe aus kinetischer Energie T und potentieller Energie V ist die Energie des Massenpunktes. Entsprechend ist (3.55) die Bilanzgleichung der Energie, der Energiesatz: *Die zeitliche Änderung der Energie ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte.* In Abwesenheit von dissipativen Kräften ist die Energie erhalten.

3.3 Lösungen der Bewegungsgleichung

Für ein freies Teilchen ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = 0 \tag{3.56}$$

eine lineare Funktion der Zeit. Bei bekannter Anfangslage $\mathbf{r}(0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}(0)$ hat sie die Form

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0)t, \tag{3.57}$$

und bei bekannter Anfangslage $\mathbf{r}(0)$ und Endlage $\mathbf{r}(T)$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \frac{t}{T}\big\{\mathbf{r}(T) - \mathbf{r}(0)\big\}. \tag{3.58}$$

Auch wenn Kräfte wirken ist (für genügend kleine Zeitintervalle) eine Lösung durch Angabe von Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit, oder durch Anfangs- und Endlage, eindeutig bestimmt.

3.3.1 Konstante Kräfte

Die einfachsten Kräfte sind solche, bei denen $\mathbf{K}$ konstant ist. Beispiele hierfür sind die näherungsweise konstante Gravitationskraft in der Nähe der Erdoberfläche oder die Kraft auf ein elektrisch geladendes Teilchen im Innern eines Kondensators. Es genügt hier, den Fall der Bewegung im Schwerefeld zu betrachten. Wir lassen die Erdanziehungskraft in die negative 3-Richtung zeigen und haben dann

$$m_t\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} = -m_s g \mathbf{e}_3, \tag{3.59}$$

wo links die träge und rechts die schwere Masse stehen. Nach dem mit genügender Genauigkeit experimentell verifizierten Äquivalenzprinzip dürfen wir diese gleich setzen, $m_t = m_s = m$. Die allgemeine Lösung dieser einfachen Differentialgleichung lässt sich sofort angeben:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0)\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2\, \mathbf{e}_3. \tag{3.60}$$

In der Ebene parallel zur Erdoberfläche ist die Bewegung geradlinig und gleichförmig und in Richtung der Schwerkraft gleichmäßig beschleunigt. Für die Anfangsbedingungen

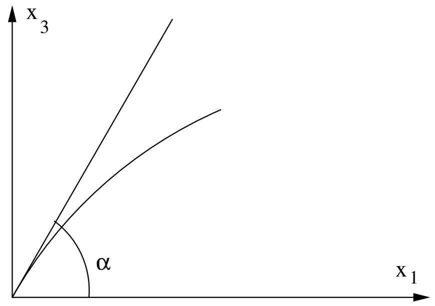

Abbildung 3.7: *Wurfbewegung.*

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = v_0\,(\cos\alpha, 0, \sin\alpha\,)$$

ist die Lösung

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y(t) = 0 \quad \text{und} \quad z(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 \tag{3.61}$$

und beschreibt eine Parabel

$$z(x) = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2$$

in der $x - z$ Ebene.

Die Wurfzeit T ist durch $z(T) = 0$ bestimmt und ergibt sich

$$T = \frac{2}{g}\, v_0 \sin\alpha.$$

Die Reichweite des Wurfs ist

$$R = x_1(T) = \frac{2}{g} v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha$$

und sie ist maximal v_0^2/g für einen Wurfwinkel $\pi/4$. Die maximal mögliche Wurfhöhe $v_0^2/2g$ wird natürlich für den senkrechten Wurf erreicht. Für beliebige Winkel ist die Wurfhöhe (Übung)

$$h = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\alpha.$$

Konstante Kräfte sind immer konservativ,

$$\mathbf{K} = -\nabla V, \qquad V(\mathbf{r}) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} + V_0. \tag{3.62}$$

Für die Wurfbewegungen ist es sinnvoll die Konstante V_0 so zu wählen, daß V auf der Erdoberfläche verschwindet. Dann ist

$$V(\mathbf{r}) = mgz,$$

und der Energiesatz hat die Gestalt

$$\frac{m}{2}\, \dot{\mathbf{r}}^2 + mgz = E. \tag{3.63}$$

Für die obige Lösung sind die kinetische und potentielle Energie

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\big\{v_0^2 - (2gv_0 \sin\alpha)\, t + g^2 t^2\big\} \\ V(t) &= mgz(t) \qquad\;\; = \frac{m}{2}\big\{(2gv_0 \sin\alpha)\, t - g^2 t^2\big\} \end{aligned}$$

und die gesamte Energie $E = T + V = mv_0^2/2$ ist natürlich konstant. Solange der geworfene Stein steigt verliert er kinetische Energie, da die Schwerkraft ihn verlangsamt: der Stein muß Arbeit gegen die Schwerkraft leisten. Der Verlust an kinetischer Energie bedeutet Gewinn an potentieller Energie. Nach Erreichen der maximalen Höhe gewinnt der Stein wieder kinetische Energie auf Kosten seiner potentiellen Energie; die Schwerkraft leistet am Stein Arbeit.

3.3.2 Oszillatoren

Ein Teilchen bewege sich in einer Umgebung O des Koordinatenursprungs mit Ortsvektor $\mathbf{r} = 0$ unter dem Einfluss einer konservative Kraft $\mathbf{K} = -\nabla V$. Wir nehmen an, daß V in der Umgebung des Ursprungs in eine Taylorreihe entwickelt werden kann,

$$V(\mathbf{r}) = V(0) + \frac{\partial V}{\partial x_a}\Big|_0 x_a + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x_a \partial x_b}\Big|_0 x_a x_b + \text{ höhere Potenzen in } x_a. \tag{3.64}$$

Der erste Term $V^{(0)} = V(0)$ in der Entwicklung, die nullte Näherung, ist eine Konstante die zur Kraft nicht beiträgt und ignoriert werden kann. Die erste Näherung

$$V^{(1)} = V^{(0)} + mW_a x_a, \qquad mW_a = \frac{\partial V}{\partial x_a}\Big|_0$$

liefert eine konstante Kraft $K_a^{(1)} = -mW_a$, die schon behandelt wurde. Die zweite Näherung

$$V^{(2)}(\mathbf{r}) = V^{(0)} + m\big(W_a x_a + \tfrac{1}{2}\,\Omega^2_{ab} x_a x_b\big), \qquad m\Omega^2_{ab} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_a \partial x_b}\Big|_0 \tag{3.65}$$

führt auf ein lineares Kraftgesetz,

$$\mathbf{K}^{(2)} = -m\big(\mathbf{W} + \Omega^2 \mathbf{r}\big).$$

Für $\mathbf{W} = 0$ ist der Ursprung eine *Gleichgewichtslage* des Teilchens und die Bewegungsgleichungen lauten

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\Omega^2 \mathbf{r}. \tag{3.66}$$

Die symmetrische Matrix Ω^2 kann immer mit einer orthogonalen Drehmatrix diagonalisiert werden. Sind ω_1^1, ω_2^2 und ω_3^2 die Eigenwerte der Matrix, dann gibt es immer eine Drehmatrix R mit

$$\big(\Omega^2_{ab}\big) = R^{-1}\Omega'^2 R, \qquad \Omega'^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}. \tag{3.67}$$

Energien werden in Nm=kg m^2/s^2 angegeben und entsprechend haben die ω_a die Dimension 1/s, also die Dimension von Frequenzen. Die Koordinaten

$$x'_a = R_{ab} x_b \tag{3.68}$$

im gedrehten System erfüllen dann die einfachen *entkoppelten* Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -\Omega'^2 \mathbf{r}' \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}'_a = -\omega_a^2 x'_a \quad \text{(keine Summe!)} \tag{3.69}$$

Für $\omega_a^2 > 0$ bezeichnet man die ω_a als *Eigen(kreis)frequenzen* des Systems und die Koordinaten x'_a, für welche die Bewegungsgleichungen diagonal werden, als *Normalkoordinaten.* Da jede der Normalkoordinaten x'_a der Bewegungsgleichung eines 1-dimensionalen Oszillators gehorcht, genügt es, die eindimensionale Bewegung

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \qquad V = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2, \tag{3.70}$$

zu untersuchen. Diese Bewegungsgleichung ist ein gutes Modell für kleine Auslenkungen einer Feder, für welche die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Die Federkonstante ist $k = m\omega_0^2$.

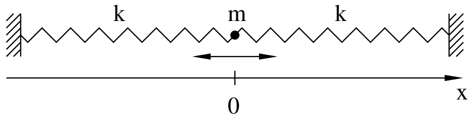

Abbildung 3.8: *Harmonischer Oszillator in Ruhelage.*

Stabiles Gleichgewicht $\omega_0^2 > 0$: Ein System mit $V = m\omega_0^2 x^2/2$ heißt *harmonischer Oszillator*, wobei der Zusatz harmonisch erst aus der Art der Lösung $x(t)$ klar wird. Die Kraft zeigt immer in Richtung des Ursprungs und damit ist die triviale Lösung $x(t) = 0$ ein stabiles Gleichgewicht. Aus dem Energiesatz

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2\right) \tag{3.71}$$

folgt bereits, daß

$$\frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \leq E \quad \text{oder} \quad |x| \leq a \equiv \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E}{m}} \tag{3.72}$$

gelten muß. Das Teilchen wird durch die lineare Kraft an den Ursprung gebunden. Für $x = \pm a$ ist die Geschwindigkeit des Oszillators Null und er kehrt seine Bewegung um. Diese beiden Orte sind offensichtlich *Umkehrpunkte* der Bewegung. Wir können den Energiesatz benutzen, um $\dot{x}$ als Funktion von x zu bestimmen,

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2} = \pm\omega_0\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{3.73}$$

Für $\dot{x} \neq 0$ kann man die Umkehrfunktion $t(x)$ von $x(t)$ bilden und es gilt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \pm\frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{oder} \quad \omega_0 t = \pm\int^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{3.74}$$

Mit

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} - \varphi_0,$$

wo φ_0 eine zunächst willkürliche Integrationskonstante ist, finden wir für das positive Vorzeichen in (3.74)

$$x(t) = a\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = a\sin\varphi_0\cos\omega_0 t + a\cos\varphi_0\sin\omega_0 t. \tag{3.75}$$

Für das negative Vorzeichen ist die Lösung bis auf die Ersetzung $\varphi_0 \to \varphi_0 + \pi$ identisch. Die allgemeine Lösung hängt also von den beiden Integrationskonstanten $a \geq 0$ und $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ ab. Die positive Größe a ist der Maximalwert der Auslenkung, die *Amplitude*; die *Phase* $\omega_0 t + \varphi_0$ gibt den momentanen Auslenkungszustand an. Für den harmonischen Oszillator ist die Kreisfrequenz ω_0 unabhängig von der Amplitude.

Der Ort und die Geschwindigkeit des Oszillators zur Zeit Null sind

$$x_0 = x(0) = a\sin\varphi_0 \quad \text{und} \quad v_0 = \dot{x}(0) = a\omega_0\cos\varphi_0,$$

so daß wir auch schreiben können

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \tag{3.76}$$

Die Ortskoordinate x ist eine periodische und harmonische Funktion der Zeit und die *Periodendauer* T ist definiert durch

$$\omega_0 T = 2\pi. \tag{3.77}$$

Die Größe ω_0 heißt *Kreisfrequenz*. Die Frequenz der Schwingung ist gegeben durch

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \tag{3.78}$$

Instabiles Gleichgewicht $\omega_0^2 < 0$. Für negatives ω_0^2 oder imaginäre $\omega_0 = i|\omega_0|$ ist die lineare Kraft vom Ursprung weggerichtet und damit wird die Gleichgweichtslösung $x = 0$ instabil sein. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = |\omega_0^2| x$$

hat die Form

$$x(t) = a \sinh(|\omega_0| t + \varphi_0) = x_0 \cosh |\omega_0| t + \frac{v_0}{|\omega_0|} \sinh |\omega_0| t. \tag{3.79}$$

Mit zunehmender Zeit wächst die Koordinate x über alle Grenzen. Wie erwartet ist die Bewegung instabil.

Phasenbahnen: Zwischen den Koordinaten $x(t)$ und $p(t) = m\dot{x}(t)$ besteht wegen der Energieerhaltung

$$\frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = E$$

die Beziehung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{B^2} = 1 \quad \text{mit} \quad A^2 = \frac{2E}{m\omega_0^2}, \quad B^2 = 2mE. \tag{3.80}$$

Für $\omega_0^2 > 0$ ist dies die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt im Ursprung und den Halbachsen A und B. Der Massenpunkt durchläuft in der (x, p) Ebene, dem sogenannten *Phasenraum* des eindimensionalen Oszillators, eine Ellipse mit den Halbachsen A und B, und zwar im Uhrzeigersinn, siehe Abbildung (3.9). Die Lösung der Bewegungsgleichung ist durch Vorgabe des Anfangsortes und der Anfangsgeschwindigkeit oder äquivalent durch Angabe von Anfangsort und Anfangsimpuls eindeutig bestimmt. Jeder Punkt im Phasenraum bestimmt also eine eindeutige Lösung und damit eine Lösungskurve $\{x(t), p(t)\}$ im Phasenraum. Eine Lösungskurve bezeichnet man als *Phasenbahn* und die Gesamtheit aller möglichen Phasenbahnen eines vorgegebenen Systems als *Phasenportrait*. Für den instabilen Oszillator ist $A^2 = -|A|^2$ und die Gleichung (3.80) ist eine Hyperbelgleichung mit Mittelpunkt im Ursprung. Nur für die stabile Bewegung verläuft die Phasenbahn für alle Zeiten in einem beschränkten Gebiet.

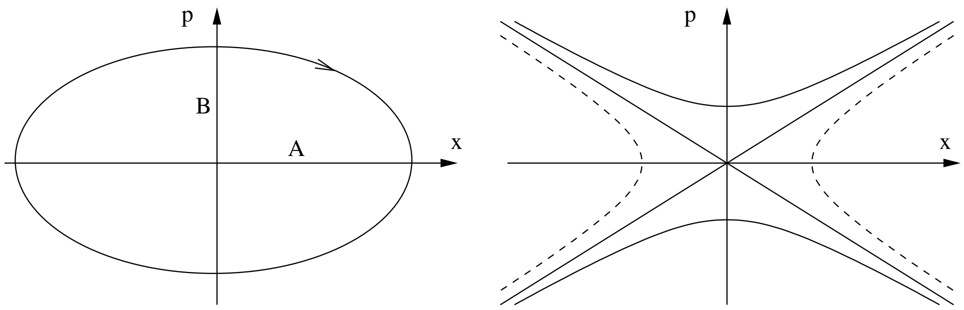

Abbildung 3.9: *Phasenportrait für den harmonischen Oszillator. Die durchgezogenen Phasenbahnen haben $E > 0$ und die gestrichelte $E < 0$.*

3.3.3 Reibungskräfte

Den idealen Oszillator, der beliebig lange mit konstanter Amplitude schwingt, gibt es nicht, da Reibungsverluste unvermeidlich sind. Reibungskräfte sind in der Regel geschwindigkeitsabhängig, und die Bewegungsgleichung hat die allgemeine Form

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \tag{3.81}$$

Für kleinen Geschwindigkeiten kann $\mathbf{K}$ in der Nähe des Ursprungs in eine Taylorreihe entwickelt werden

$$K_a = K_a\big|_0 + \frac{\partial K_a}{\partial x_b}\Big|_0 x_b + \frac{\partial K_a}{\partial \dot{x}_b}\Big|_0 \dot{x}_b + \dots\,, \tag{3.82}$$

wobei die Ableitungen an der Stelle $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{o}$ auftreten. Im folgenden vernachlässigen wir die durch die Punkte angedeuteten höheren Potenzen in x_a und $\dot{x}_a$. Wir wollen annehmen, dass in Abwesenheit des letzten Terms die Kraft konservativ sei, also

$$\frac{\partial K_a}{\partial x_b}\Big|_0 = \frac{\partial K_b}{\partial x_a}\Big|_0 \tag{3.83}$$

gelte. Entsprechend zerlegen wir die Kraft in einen konservativen und dissipativen Anteil,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{Kons}} + \mathbf{K}_{\text{Diss}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_{\text{Kons}} = -\nabla V$$

mit dem Potential

$$V(\mathbf{r}) = m\big\{W_a x_a + \tfrac{1}{2}(\Omega^2)_{ab} x_a x_b\big\}, \quad \text{wobei} \quad K_a\big|_0 = -mW_a \quad \text{und} \quad \frac{\partial K_a}{\partial x_b}\Big|_0 = -m(\Omega^2)_{ab} \tag{3.84}$$

sind. Setzen wir zudem

$$\frac{\partial K_a}{\partial \dot{x}_b}\Big|_0 = -m\Gamma_{ab}, \tag{3.85}$$

dann schreiben sich die Bewegungsgleichungen folgendermaßen

$$\ddot{x}_a = -W_a - \Omega^2_{ab} x^b - \Gamma_{ab}\dot{x}^b \quad \text{oder} \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{W} - \Omega^2 \mathbf{r} - \Gamma\dot{\mathbf{r}}. \tag{3.86}$$

Die zugehörige Energiebilanzgleichung hat die Form

$$\frac{d}{dt}\big(T + V\big) = -m\Gamma_{ab}\dot{x}_a\dot{x}_b, \tag{3.87}$$

mit der in (3.84) definierten quadratischen Form als Potential $V(\mathbf{r})$. Da bei Reibungskräften die Energie abnimmt, muß

$$\dot{x}_a \Gamma_{ab} \dot{x}_b \geq 0 \tag{3.88}$$

sein. In die Abnahme der Energie geht nur der symmetrische Anteil der Matrix Γ,

$$\Gamma_{(ab)} = \tfrac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ba})$$

ein. Die Bedingung (3.88) bedeutet, dass die Eigenwerte dieser symmetrischen Matrix nicht-negativ sind. Der antisymmetrische Anteil der Matrix Γ,

$$\Gamma_{[ab]} = \tfrac{1}{2}(\Gamma_{ab} - \Gamma_{ba})$$

trägt zur Leistungsbilanz nicht bei, ganz ähnlich wie die Lorentzkraft im magnetischen Feld. Wir nehmen deshalb an, daß Γ eine symmetrische Matrix ist. Dann kann sie mit einer Drehmatrix R diagonalisiert werden,

$$\Gamma = R^{-1}\Gamma' R, \quad \text{wo} \quad \Gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_i \geq 0. \tag{3.89}$$

Wir untersuchen relevante Spezialfälle der Bewegungsgleichung (3.86). Für $\Omega^2 = \Gamma = 0$ ist die Kraft konstant und dieser Fall wurde früher untersucht. Wir werden deshalb annehmen, daß der konstante Kraftanteil verschwindet. Für $\Gamma = 0$ handelt es sich um den bereits diskutierten harmonischen Oszillator. Für invertierbares Ω^2 verschwindet in den Koordinaten $\tilde{\mathbf{r}}$, welche gegenüber den ursprünglichen Koordinaten verschoben sind,

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} - \Omega^{-2}\mathbf{W},$$

der konstante Kraftanteil. Wir dürfen also annehmen, daß $\mathbf{W} = 0$ ist.

$\boldsymbol{\Omega^2 \neq 0,\ \Gamma \neq 0}$ **:** Für $\Omega^2 = 0$ erfüllt der Ortsvektor die einfache Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\Gamma\dot{\mathbf{r}}, \quad \text{oder} \quad \ddot{\mathbf{r}}' = -\Gamma'\dot{\mathbf{r}}', \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{r}. \tag{3.90}$$

Da Γ' in (3.89) diagonal ist, entkoppeln die drei Differentialgleichungen in den Normalkoordinaten $\mathbf{r}'$. Es genügt daher, den 1-dimensionalen Fall zu betrachten,

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x}.$$

Diese einfache Differentialgleichung für die Geschwindigkeit hat die Lösung

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma t} v_0, \qquad v_0 = \dot{x}(0). \tag{3.91}$$

Eine weitere Integration führt auf folgende Zeitabhängigkeit der Ortskoordinate

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}\big(1 - e^{-\gamma t}\big), \qquad x_0 = x(0). \tag{3.92}$$

Die Lösung hat die Eigenschaft

$$x(t \to \infty) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}, \tag{3.93}$$

d.h. das Teilchen legt nur eine endliche Strecke zurück, auch wenn man beliebig lange wartet. Im Phasenraum verläuft die Bewegung längs der Strecke vom Punkt $(x_0, p_0 = mv_0)$ zum Punkte $(x_0 + v_0/\gamma, 0)$.

Im 3 dimensionalen Raum ist die Lösung in den angepassten Koordinaten für $\gamma_a > 0$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'_0 + \Gamma'^{-1}\Big(\mathbb{1} - e^{-\Gamma' t}\Big)\mathbf{v}'_0, \tag{3.94}$$

wobei

$$\Gamma'^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma_3 \end{pmatrix}$$

die zu Γ' inverse Matrix ist, und wir die Matrix-Exponentialfunktion einführten,

$$e^{-\Gamma' t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}(\Gamma')^n = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma_3 t} \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

Die Lösung in den ursprünglichen, ungestrichenen Variablen gewinnt man, wenn man die Transformation (3.90) rückgängig macht. Wegen $R^{-1}\Gamma' R = \Gamma$ gilt für jede Matrixfunktion f

$$R^{-1} f(\Gamma') R = f\big(R^{-1}\Gamma' R\big) = f(\Gamma) \tag{3.96}$$

wie man leicht für Monome zeigt,

$$R^{-1}(\Gamma'\,)^n R = R^{-1}\underbrace{\Gamma'\Gamma'\cdots\Gamma'\Gamma'}_{\mathrm{n-mal}}R = (R^{-1}\Gamma' R)(R^{-1}\Gamma' R)\cdots(R^{-1}\Gamma' R)(R^{-1}\Gamma' R) = \Gamma^n.$$

Damit gilt (3.96) für alle Polynome und konvergente Folgen von Monomen. Multiplizieren wir (3.94) von links mit R^{-1} und benutzen

$$R^{-1}\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) \quad \text{und} \quad R^{-1}\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t),$$

dann erhalten wir die folgende Form für die Lösung in den ursprünglichen Koordinaten,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \Gamma^{-1}\Big(\mathbb{1} - e^{-\Gamma t}\Big)\mathbf{v}_0. \tag{3.97}$$

Die im Allgemeinen nicht mehr diagonale Exponentialfunktion $\exp(-\Gamma t)$ ist über die Reihendarstellung definiert,

$$e^{-\Gamma t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}\,\Gamma^n.$$

$\mathbf{\Omega \neq 0,\ \Gamma \neq 0:}$ Die Lösungsuche für die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\Omega^2 \mathbf{r} - \Gamma \dot{\mathbf{r}} \tag{3.98}$$

gestaltet sich relativ schwierig ohne zusätzliche Annahmen an die Kraft, d.h. die symmetrischen Matrizen Ω^2 und Γ. Wir wollen vorerst annehmen, daß sie vertauschen

$$\Omega^2\Gamma - \Gamma\Omega^2 \equiv [\Omega^2, \Gamma] = 0.$$

Der allgemeine Fall wird dann später analysiert. Nach einem Theorem aus der linearen Algebra können zwei kommutierende Matrizen gleichzeitig diagonalisiert werden,

$$\Omega = R^{-1}\Omega'^2 R \quad \text{und} \quad \Gamma = R^{-1}\Gamma' R, \quad \text{mit diagonalen} \quad \Omega'^2, \Gamma'. \tag{3.99}$$

Für Ω'^2 wählen wir die Parametrisierung (3.67) und für Γ' diejenige in (3.89). In den entsprechenden Normalkoordinaten $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ entkoppeln die Differentialgleichungen,

$$\ddot{x}'_a = -\omega_a^2 x'_a - \gamma_a \dot{x}'_a$$

und es genügt, die eindimensionale Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} \tag{3.100}$$

zu untersuchen. Jede Lösung einer derartigen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist eine lineare Superposition von Fundamentallösungen der Form

$$x^{(i)}(t) = P_i(t)\, e^{\lambda_i t}, \tag{3.101}$$

wobei $P_i(t)$ ein Polynom in t ist. Sind die λ_i verschieden, dann sind alle $P_i(t)$ Konstanten. Fallen einige λ_i zusammen, dann treten nicht-konstante Polynome auf. Bei der vorliegende Differentialgleichung zweiter Ordnung kann $P_i(t)$ nur eine Konstante oder ein Polynom vom Grade 1 sein. Setzen wir den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

ins (3.100) ein, so finden wir

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega_0^2 e^{\lambda t} - \lambda\gamma e^{\lambda t} = 0$$

für λ. Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn die Konstante λ die *charakteristische Gleichung* erfüllt,

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{3.102}$$

Die beiden Lösungen sind

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} + \mu \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2} - \mu \quad \text{mit} \quad \mu = +\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}. \tag{3.103}$$

Wenn die Wurzel nicht Null ist, dann ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung hat die Form

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3.104}$$

Die beiden willkürlichen Konstanten a_1 und a_2 werden durch Vorgabe von Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit festgelegt. Für $\gamma^2 = 4\omega_0^2$ ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und (3.104) ist nicht mehr die allgemeine Lösung, siehe weiter unten. Wir diskutieren nun die verschiedenen Lösungstypen.

Starke Dämpfung (Kriechfall): Für $\gamma^2/4 > \omega_0^2$ und mit obiger Definition von μ schreibt sich die Lösung gemäß

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\big(a_1 e^{\mu t} + a_2 e^{-\mu t}\big). \tag{3.105}$$

Da $\gamma/2 > \mu$ ist, gilt

$$x(t \to \infty) = 0. \tag{3.106}$$

Die Bewegung ist nicht periodisch. Man kann leicht die Konstanten a_1 und a_2 mit den Anfangswerten $x_0 = x(0)$ und $v_0 = \dot{x}(0)$ in Verbindung bringen und findet

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\Big(x_0 \cosh \mu t + \frac{1}{\mu}\big(v_0 + \tfrac{1}{2}\gamma x_0\big) \sinh \mu t\Big). \tag{3.107}$$

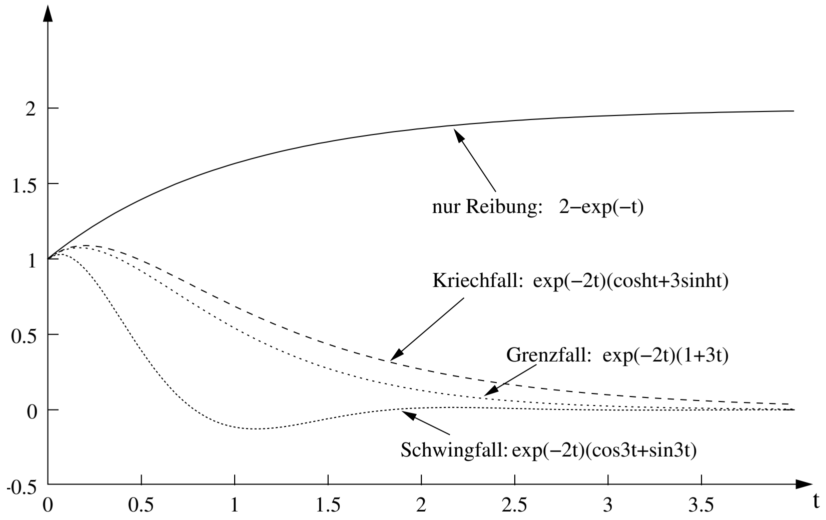

Abbildung 3.10: *Die Verschiedenen Lösungstypen für den Oszillator mit Dämpfung.*

Schwache Dämpfung (Schwingfall): Hier ist $\gamma^4/4 < \omega_0^2$ und μ wird imaginär. Definieren wir

$$\mu = i\omega_\gamma, \qquad \omega_\gamma = +\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}, \tag{3.108}$$

dann lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\big(a_1 e^{i\omega_\gamma t} + a_2 e^{-i\omega_\gamma t}\big). \tag{3.109}$$

Da $x(t)$ eine reelle Größe ist, muß $a_2 = \bar{a}_1$ gelten. Stellen wir $a_{1,2}$ in Polarkoordinaten dar

$$a_1 = \frac{a}{2i}\, e^{i\varphi_0} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{ia}{2}\, e^{-i\varphi_0} \quad \text{mit} \quad a > 0,$$

dann schreibt sich die Lösung gemäß

$$x(t) = a\, e^{-\gamma t/2} \sin\big(\omega_\gamma t + \varphi_0\big) = e^{-\gamma t/2}\Big(x_0 \cos\omega_\gamma t + \frac{1}{\omega_\gamma}\big(v_0 + \tfrac{1}{2}\gamma x_0\big)\sin\omega_\gamma t\Big). \tag{3.110}$$

Hier handelt sich um eine periodische Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega_\gamma < \omega_0$ und abklingender Amplitude

$$a\, e^{-\gamma t/2} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty. \tag{3.111}$$

Das Verhältnis der Ausschläge in zwei benachbarten Maxima, deren zeitlicher Abstand $T = 2\pi/\omega_\gamma$ ist, beträgt $e^{-\gamma T/2}$. Die Zeit $\tau = 2/\gamma$, nach der die Amplitude auf den e-ten Teil abgesunken ist, heißt *Relaxationszeit* der Schwingung.

Kritische Dämpfung (aperiodischer Grenzfall): Für $\gamma = 2\omega_0$ ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und (3.104) gibt zunächst nur eine Lösung,

$$x(t) = ae^{-\gamma t/2} = ae^{-\omega_0 t}, \qquad a = a_1 + a_2.$$

Da die Bewegungsgleichung aber eine Differentialgleichung 2. Ordnung ist, muß die allgemeine Lösung 2 Integrationskonstanten enthalten. Eine zweite unabhängige Lösung gewinnt man mittels der Methode der *Variation der Konstanten*. Dazu lässt man die Integrationskonstante a von der Zeit abhängen und setzt

$$x(t) = a(t)e^{-\omega_0 t}, \quad \dot{x}(t) = \big\{\dot{a}(t) - \omega_0 a(t)\big\}e^{-\omega_0 t}, \quad \ddot{x}(t) = \big\{\ddot{a}(t) - 2\omega_0\dot{a}(t) + \omega_0^2 a(t)\big\}e^{-\omega_0 t}$$

in die Bewegungsgleichung $\ddot{x} + 2\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ein. Wir erhalten

$$\big\{\ddot{a} - 2\omega_0\dot{a} + \omega_0^2 a\big\} + 2\omega_0\big\{\dot{a} - \omega_0 a\big\} + \omega_0^2 a = \ddot{a} = 0$$

also ist $a(t)$ eine lineare Funktion der Zeit, $a(t) = a_1 + a_2 t$. Die allgemeine Lösung für $\gamma = 2\omega_0$ ist deshalb

$$x(t) = \big(a_1 + a_2 t\big)e^{-\omega_0 t} = \big\{x_0 + (\omega_0 x_0 + v_0)t\big\}e^{-\omega_0 t}. \tag{3.112}$$

Der Bewegungsablauf ist ähnlich dem der starken Dämpfung.

3.4 Lineare Differentialgleichungssysteme

Für die bisher betrachteten dynamischen Systeme lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}} = A\dot{\mathbf{r}} + B\mathbf{r} \tag{3.113}$$

mit Matrizen A und B. Für ein 1-dimensionales System sind A und B Zahlen und für eine 3-dimensionales System 3×3-Matrizen. Das System ist konservativ für $A = 0$ und symmetrisches B.

Mit $m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}$ sind die Bewegungsgleichungen äquivalent zu folgendem Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}/m \\ mB & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \tag{3.114}$$

oder wenn wir Orts- und Impulsvektor in einen Vektor $\boldsymbol{\xi}$ vereinigen,

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \tag{3.115}$$

schreibt sich die Bewegungsgleichung gemäß

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0. \tag{3.116}$$

Diese Differentialgleichung *erster Ordnung* beschreibt die Bewegung im Phasenraum mit Koordinaten $\mathbf{r}$ und $\mathbf{p}$. Selbst für 1-dimensionale Systeme ist M eine 2×2-Matrix. Für 3-dimensionale Systeme ist es eine 6×6 Matrix. Wäre M eine reelle oder komplexe Zahl, dann könnten wir die Lösung dieser dann sehr einfachen Differentialgleichung sofort angeben. Für Systeme von Differentialgleichungen, d.h. wenn M keine Zahl sondern eine Matrix ist, ist die Lösung ähnlich einfach, wie wir jetzt sehen werden.

3.4.1 Matrix-Exponentialfunktionen

Formal hat die Differentialgleichung (3.116) mit beliebiger Matrix M die folgende Lösung,

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0. \tag{3.117}$$

Dabei braucht M nicht die spezielle Form in (3.116) zu haben. Wir wollen uns hier nicht auf 1 oder 3-dimensionale Bewegungen beschränken und deshalb soll M eine *beliebige n-dimensionale Matrix* sein. Der Beweis der Behauptung ist nicht allzu schwierig und benutzt die Reihendarstellung der Matrix-Exponentialfunktion,

$$e^{Mt} = \mathbb{1} + tM + \frac{t^2}{2!}M^2 + \frac{t^3}{3!}M^3 + \dots .$$

Für beliebige Matrizen ist dies eine absolut konvergente Potenzreihe. Deshalb vertauschen Differenzieren und Summieren und wir finden

$$\frac{d}{dt}e^{Mt} = M + tM^2 + \frac{3t^2}{3!}M^3 + \dots = M\big(\mathbb{1} + tM + \frac{t^2}{2!}M^2 + \dots\big) = Me^{tM}. \tag{3.118}$$

Daraus folgt unmittelbar, daß $\boldsymbol{\xi}(t)$ in (3.117) die Differentialgleichung (3.116) erfüllt,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \frac{d}{dt}e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0 = Me^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0 = M\boldsymbol{\xi}(t). \tag{3.119}$$

Zwei beliebige Matrizen M_1 und M_2 vertauschen im Allgemeinen nicht, $M_1M_2 \neq M_2M_1$, und dann ist $e^{M_1}e^{M_2} \neq e^{M_1+M_2}$. Nur wenn die beiden Matrizen vertauschen, hat die Exponentialfunktion die für Zahlen charakteristische Eigenschaft

$$e^{M_1}e^{M_2} = e^{M_1+M_2} = e^{M_2}e^{M_1} \Longleftrightarrow [M_1, M_2] = 0. \tag{3.120}$$

Wir beweisen dies, indem wir jede Exponentialfunktion in ihre absolut konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$\begin{aligned} e^{M_1}e^{M_2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}M_1^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}M_2^m = \sum_{n,m}\frac{1}{n!m!}\,M_1^nM_2^m \overset{p=m+n}{=} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!\,(p-n)!}\,M_1^nM_2^{p-n} \\ &= \sum_{p,n}\frac{1}{p!}\frac{p!}{n!\,(p-n)!}M_1^nM_2^{p-n} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}M_1^nM_2^{p-n}. \end{aligned}$$

Vertauschen M_1 und M_2, dann ist die letzte Summe $(M_1+M_2)^p$ und wir erhalten

$$e^{M_1}e^{M_2} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}(M_1+M_2)^p = e^{M_1+M_2},$$

was die Identität (3.120) für kommutierende Matrizen M_1 und M_2 beweist. Es folgt insbesonders, daß

$$\left(e^M\right)^{-1} = e^{-M}. \tag{3.121}$$

Mit der Eigenschaft (3.120) können wir einen alternativen Beweis für (3.118) führen.

$$\frac{d}{dt}e^{tM} = \frac{d}{d\epsilon}e^{(t+\epsilon)M}\big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon}e^{\epsilon M}\big|_{\epsilon=0}e^{tM} = \frac{d}{d\epsilon}\{1+\epsilon M+O(\epsilon^2)\}\big|_{\epsilon=0}e^{tM} = Me^{tM}.$$

Die Berechnung von $\exp(Mt)$ ist relativ einfach für

Diagonalisierbare M: Eine Matrix M heisst diagonalisierbar, wenn es eine reguläre Transformation S gibt, so dass

$$SMS^{-1} = M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

diagonal ist. Die Spalten von S^{-1} sind die Eigenvektoren von M. Mit der Formel (3.96) ist es relativ einfach, diagonalisierbare Matrizen zu exponentieren,

$$e^{Mt} = e^{S^{-1}M'S} = S^{-1}e^{M't}S = S^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S. \tag{3.123}$$

Die Exponentiation reduziert sich auf die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M. Aus den Eigenvektoren kann man die Transformationsmatrix S berechnen. Bezüglich der (im allgemeinen komplexen) Normalkoordinaten $\boldsymbol{\xi}'$ im Phasenraum, $\boldsymbol{\xi}' = S\boldsymbol{\xi}$, entkoppeln die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} \Longleftrightarrow \dot{\boldsymbol{\xi}}' = M'\boldsymbol{\xi}'$$

und die Komponenten von $\boldsymbol{\xi}'$ haben eine exponentielle Zeitabhängigkeit

$$\xi'_a(t) = e^{\lambda_a t}\xi'_a(0).$$

Für diagonalisierbare Matrizen treten bei der Lösung von (3.116) also nur Exponentialfunktionen und keine Polynome auf. Obwohl M eine reelle Matrix ist, sind im Allgemeinen die Eigenwerte λ_k und damit die Lösung $\mathbf{r}'(t)$ komplex. Aber nach Rücktransformation gewinnt man für eine reelle Anfangsbedingung ξ_0 wieder eine reelle Lösung

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0.$$

Nicht jede $n\times n$ Matrix M ist diagonalisierbar. Sie ist aber diagonalisierbar, wenn die Nullstellen $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ihres *charakteristischen Polynoms*

$$\begin{aligned} P_M(\lambda) &= \det(\lambda\mathbb{1} - M) = \lambda^n - \mathrm{Sp}\,(M)\lambda^{n-1} + \ldots + (-)^n \det M \\ &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n) \end{aligned} \tag{3.124}$$

verschieden sind. Mit λ_k ist auch $\bar\lambda_k$ eine Nullstelle von $P_M(\lambda)$, den das charakteristische Polynom besitzt ja reelle Koeffizienten. Bei einer expliziten Berechnung von $\exp(Mt)$ ist es oft auch hilfreich, sich an den Satz von CAYLEY-HAMILTON, nach dem

$$\begin{aligned} P_M(M) &= (M-\lambda_1\mathbb{1})(M-\lambda_2\mathbb{1})\cdots(M-\lambda_n\mathbb{1}) \\ &= M^n - (\mathrm{Sp}\,M)\,M^n + \ldots + (-)^n(\det M)\,\mathbb{1} = 0 \end{aligned} \tag{3.125}$$

gilt, zu erinnern. Die n'te Potenz einer n-dimensionalen Matrix M ist immer eine Linearkombination der niedrigeren Potenzen von M. Zum Beispiel lautet für die schiefsymmetrische infinitesimale Drehmatrix in (3.16),

$$\Omega = \omega\begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \omega\,\hat\Omega, \qquad \mathbf{n}^2 = 1,$$

die Identität von Cayley-Hamilton

$$P_\Omega(\Omega) = \Omega^3 + \omega^2\Omega = 0 \Longrightarrow \Omega^{2n} = (-)^{n-1}\omega^{2n-2}\Omega^2, \quad \Omega^{2n+1} = (-)^n\omega^{2n}\Omega.$$

Dies führt dann auf

$$\exp(\Omega t) = \mathbb{1} + \hat\Omega^2 + \sin\omega t\,\hat\Omega - \cos\omega t\,\hat\Omega^2.$$

Wegen $\hat\Omega\mathbf{r} = \mathbf{n}\wedge\mathbf{r}$ gilt auch

$$e^{\Omega t}\mathbf{r} = (\mathbf{n},\mathbf{r})\mathbf{n} - \cos\omega t\,\mathbf{n}\wedge(\mathbf{n}\wedge\mathbf{r}) + \sin\omega t\,\mathbf{n}\wedge\mathbf{r},$$

also beschreibt $\exp(\Omega t)$ eine Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse $\mathbf{n}$, siehe (2.40). Dies erklärt auch den Namen infinitesimale Drehmatrix für Ω.

Zur weiteren Illustration betrachten noch einmal die Bewegungsgleichungen des 1-dimensionalen Oszillators mit Reibung. Mit (3.100) ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -m\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{3.126}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind die Lösungen λ_1 und λ_2 des charakteristischen Gleichung (3.102), siehe (3.103). Für $\mu \neq 0$ sind die Eigenwerte verschieden und die Matrix M kann diagonalisiert werden,

$$M = S^{-1}M'S, \qquad M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m\lambda_1 & m\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Nun ist es leicht die Matrix tM zu exponentieren,

$$e^{Mt} = S^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} S = e^{-\gamma t/2}\Big(\cosh \mu t \; \mathbb{1} + \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \gamma & 2/m \\ -2m\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \sinh \mu t \Big).$$

Wir finden wieder die frühere Lösung (3.107) für den Kriechfall

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t/2}\{ \cosh \mu t \, x_0 \; + \; \frac{1}{m\mu}(m\gamma x_0/2 + p_0) \; \sinh \mu t \} \\ p(t) &= e^{-\gamma t/2}\{ \cosh \mu t \, p_0 - \frac{1}{\mu}(m\omega_0^2 x_0 + \gamma p_0/2) \sinh \mu t \}. \end{aligned} \tag{3.127}$$

Den Schwingfall erhalten wir, wenn wir μ durch $i\omega_\gamma$ ersetzen. Deshalb ist für einen Oszillator mit schwacher Dämpfung

$$e^{Mt} = e^{-\gamma t/2}\Big(\cos \omega_\gamma t \; \mathbb{1} + \frac{1}{2\omega_\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & 2/m \\ -2m\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \sin \omega_\gamma t \Big). \tag{3.128}$$

Nicht-diagonalisierbare M: Interessanter ist der aperiodische Grenzfall, für welchen das charakteristische Polynom von

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -m\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0 & 1/m \\ -m\omega_0^2 & -\omega_0 \end{pmatrix} \equiv D + N$$

eine doppelte Nullstelle bei $-\omega_0$ hat. Die beiden Matrizen D und N vertauschen und N ist nilpotent, $N^2 = 0$. Für die Exponentialfunktion erhalten wir

$$e^{Mt} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}\big(\mathbb{1} + Nt\big) = \begin{pmatrix} 1 + \omega_0 t & t/m \\ -m\omega_0^2 t & 1 - \omega_0 t \end{pmatrix} e^{-\omega_0 t},$$

wo wir benutzten, daß D und N vertauschen. Daraus gewinnen wir sofort die Lösung für den aperiodischen Grenzfall

$$\begin{aligned} x(t) &= \{ x_0 \; + \; \frac{1}{m}(m\omega_0 x_0 + p_0)t \} e^{-\omega_0 t} \\ p(t) &= \{ p_0 - \omega_0(m\omega_0 x_0 + p_0)t \} e^{-\omega_0 t} \end{aligned} \tag{3.129}$$

in Übereinstimmung mit (3.112). Während im Kriech- und Schwingfall die beiden Eigenwerte des charakteristischen Polynoms verschieden sind, sind sie im aperiodischen Grenzfall gleich.

Hat das charakteristische Polynom $P_M(\lambda)$ einer $n \times n$ Matrix M mehrfache Nullstellen, dann ist M im Allgemeinen nicht mehr diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom hat dann die Form

$$P_M(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - M) = \prod_{k=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \qquad n_1 + \ldots n_r = n,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von P_M und die $n_k > 0$ ihre algebraischen Vielfachheiten sind. Wie im diagonalisierbaren Fall heissen die λ_k Eigenwerte von M. Hat λ_k die Multiplizität n_k, so ist auch $\bar{\lambda}_k$ ein Eigenwert derselben Multiplizität, denn das charakteristische Polynom hat reelle Koeffizienten.

Wir erinnern daran, dass eine $n \times n$-Matrix der Form

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{3.130}$$

$n \times n$ *Jordan-Block* mit Eigenwert λ heisst. Eine *Jordan-Matrix* ist eine quadratische Matrix der Form

$$M' = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right), \qquad n_1 + \ldots + n_r = n. \tag{3.131}$$

Eine *Jordan-Basis* einer linearen Abbildung (Matrix) $M : V \longrightarrow V$ ist eine Basis von V, in der die Matrix von M eine Jordan Matrix ist, also die Jordan-Normalform (3.131) hat. Es gilt der

Satz: *Sei $M : V \to V$ eine lineare Abbildung eines endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes V. Dann existiert für M eine Jordan-Basis. Die Jordan-Matrix M' ist eindeutig, bis auf eine Permutation der Jordan-Blöcke.*

Wir finden also eine Koordinatentransformation $\boldsymbol{\xi}' = S\boldsymbol{\xi}$ mit regulärer Transformationsmatrix S, so dass in den gestrichenen Koordinaten die lineare Abbildung

$$M' = SMS^{-1} \tag{3.132}$$

eine Jordan-Matrix ist. Im diagonalisierbaren Fall sind die $\boldsymbol{\xi}'$ als Normalkoordinaten und wir wollen diesen Namen beibehalten. Wegen der Blockdiagonalform (3.131) von M' in Normalkoordinaten ist

$$\exp(Mt) = S^{-1} e^{M't} S = S^{-1} \begin{pmatrix} \exp\big(J_{n_1}(\lambda_1)t\big) & & 0 \\ & \exp\big(J_{n_2}(\lambda_2)t\big) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} S, \tag{3.133}$$

und es genügt vollauf, $\exp\big(J_n(\lambda)t\big)$ zu berechnen. Nun schreiben wir $J_n(\lambda) = \lambda \mathbb{1} + J_n(0)$, wo die Summanden auf der rechten Seite offensichtlich vertauschen, und finden

$$e^{J_n(\lambda)t} = e^{\lambda} \exp\big(J_n(0)\, t\big).$$

Da die Matrix $J_n(0)$ nilpotent ist, $J_n^n(0) = 0$, kann sie mit

$$\big(J_n^m(0)\big)_{ij} = \delta_{i,j-m}, \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

leicht exponentiert werden. Wir finden

$$\exp\big(J_n(\lambda)t\big) = e^{\lambda t}\cdot\begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.134}$$

Wir fassen zusammen:

Satz: *In Normalkoordinaten (bezüglich einer Jordan Basis) hat* $\exp(M't)$ *die Form (3.133) mit* $\exp\big(J_n(\lambda)t\big)$ *aus (3.134).*

Zur Konstruktion einer Jordan-Basis nutzt man aus, daß

$$\big(M' - \lambda_1 1\!\!1\big) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2-\lambda_1) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

ist, oder, da die n_1-te Potenz von $J_{n_1}(0)$ verschwindet,

$$\big(M' - \lambda_1 1\!\!1\big)^{n_1} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & J^{n_1}_{n_2}(\lambda_2-\lambda_1) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

gilt. Man sieht sofort, dass die Matrizen $J^{n_1}_{n_k}(\lambda_k-\lambda_1)$, $k = 2,\dots,r$ invertierbar sind. Anstelle von λ_1 hätten wir irgend einen anderen Eigenwert λ_k auszeichnen können mit dem Ergebnis, daß auf den Unterräumen

$$V'_k = \big\{\boldsymbol{\xi}' \in V \big| \big(\lambda_k 1\!\!1 - M'\big)^{n_k}\boldsymbol{\xi}' = 0\big\} = \mathrm{Kern}(\lambda_k - M')^{n_k}$$

die Matrix M' gleich $J_{n_k}(\lambda_k)$ ist. Es kann passieren, daß $J_{n_k}(\lambda_k)$ in weitere Jordanblöcke zerfällt und im Extremfall $\lambda_k 1\!\!1_{n_k}$ ist. Zum Beispiel hat das charakteristische Polynom von $1\!\!1_n$ eine n-fache Nullstelle bei $\lambda = 1$ und die Jordan-Matrix ist $1\!\!1_n$.

In den ursprünglichen Koordinaten $\xi = S^{-1}\xi'$ hat M nicht mehr die explizite Jordanform (3.131), aber wir können die durch diese Form ausgezeichneten Unterräume auf invariante Weise folgendermassen charakterisieren:

$$V_k = S^{-1}V'_k = \mathrm{Kern}\big(S^{-1}\big(\lambda_k - M'\big)^{n_k}S\big) = \mathrm{Kern}(\lambda_k - M)^{n_k}.$$

Die V_k heissen *verallgemeinerte Eigenräume* der linearen Abbildung M.

Nun sind wir in der Lage, die Lösungen des dynamischen Systems $\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi}$ anzugeben. Für ein $\boldsymbol{\xi}_0$ im Unterraum V_k ist $S\boldsymbol{\xi}_0$ im Unterraum V'_k und

$$e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0 = S^{-1}e^{M't}S\boldsymbol{\xi}_0 = S^{-1}e^{M't}\boldsymbol{\xi}'_0 = e^{\lambda_k t}P_{n_k}(t)\boldsymbol{\xi}_0,$$

wo wir das Matrixpolynom

$$P_{n_k}(t) = S^{-1}\,\exp\big(J_{n_k}(0)t\big)\,S$$

der Ordnung n_k einführten. Wir haben also gezeigt, daß in in einer beliebigen Basis die Matrix M als Summe von

$$D = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 1\!\!1_{n_1} & & \\ & \lambda_2 1\!\!1_{n_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} S \quad \text{und} \quad N = S^{-1}\begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & J_{n_2}(0) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} S$$

dargestellt werden kann, wobei

$$[D,N]=0 \quad \text{und} \quad N^m=0 \quad \text{mit} \quad m=\max\{n_1,\dots,n_r\} \tag{3.135}$$

gilt.

In expliziten Rechnungen ist das Auffinden der Jordan Basis der schwierigste Teil der Aufgabe. Wir wollen dies an einem einfachen dynamischen System illustrieren.

Beispiel: Gegeben sei folgendes dynamisches System

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}=M\boldsymbol{\xi} \quad \text{mit} \quad M=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\0&-1&4\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{3.136}$$

Das zugehörige charakteristische Polynom

$$P_M(\lambda)=\det(\lambda\mathbb{1}-M)=(\lambda+1)^2(\lambda-1) \tag{3.137}$$

hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda=-1$ und eine einfache Nullstelle bei $\lambda=1$. Also hat M den zweifachen Eigenwert $\lambda_1=-1$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2=1$. Wegen

$$(M+\mathbb{1})^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&8\\0&0&4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (M-\mathbb{1})=\begin{pmatrix}-2&1&-2\\0&-2&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

sind die verallgemeinerten Eigenräume

$$V_1=\text{span}\{\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2'=\mathbf{e}_2\} \quad \text{und} \quad V_2=\text{span}\{\mathbf{e}_3'=2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\}.$$

Setzen wir $\xi_a\mathbf{e}_a=\xi_a'\mathbf{e}_a'$ mit Jordan Basis $\mathbf{e}_a'=S^{-1}_{ba}\mathbf{e}_b$, so ist $\boldsymbol{\xi}'=S\boldsymbol{\xi}$ und die lineare Differentialgleichung $\dot{\boldsymbol{\xi}}=M\boldsymbol{\xi}$ geht über in

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}'=M'\boldsymbol{\xi}', \quad \text{wobei} \quad S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ist. Nach unserem allgemeinen Theorem ist

$$M'=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbb{1}_2&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}J_1(0)&0\\0&0\end{pmatrix}$$

die Summe eines diagonalen und nilpotenten Operators. Wir schließen, daß

$$M=D+N=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&4\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \qquad [D,N]=0, \quad N^2=0.$$

Um $\exp(Mt)$ zu berechnen, benutzen wir, daß

$$e^{Mt} \;=\; S^{-1}e^{M't}S=S^{-1}e^{D't}(1+N't)S=\begin{pmatrix}e^{-t}&te^{-t}&-2te^{-t}\\0&e^{-t}&2(e^t-e^{-t})\\0&0&e^t\end{pmatrix}.$$

Damit wäre die Differentialgleichung (3.136) für beliebige Anfangsbedingungen explizit gelöst.

Für explizite Rechnungen kann man zum Beispiel auf das algebraischen Computerprogram Maple zurückgreifen. Mit dem `with(linalg)` Befehl lädt man die in der linearen Algebra gebräuchlichen Funktionen. Definiert man die Matrix M,

```
M:=matrix(3,3,[-1,1,-2,0,-1,4,0,0,1])
```

so liefert der Befehl `J:=jordan(M,'SI')` die Jordan Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit `S=inverse(SI)` erhält man die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

welche M in die Jordan-Normalform bringt, $J = SMS^{-1}$, was mit `multiply(S,M,SI)` nachgeprüft werden kann.

3.4.2 Stabilität von linearen Systemen I

Eine wichtige und interessante Frage ist diejenige nach der Stabilität von (Gleichgewichts)Lösungen von Bewegungsgleichungen. Wir werden nun untersuchen, wann die Gleichgwichtslösung $\boldsymbol{\xi} = 0$ des linearen dynamischen Systems

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi}, \qquad \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 \tag{3.138}$$

stabil oder instabil ist. Für die Stabilitätsanalyse zerlegen wir den Vektor $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}_{01} + \ldots + \boldsymbol{\xi}_{0r}$, wobei $\boldsymbol{\xi}_{0k}$ im verallgemeinerten Eigenraum V_k liegt. Im Gegensatz zu $\boldsymbol{\xi}_0$ können die $\boldsymbol{\xi}_{0k}$ komplex sein. Dann ist

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0 = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k t} P_{n_k}(t)\,\boldsymbol{\xi}_{0k} \quad \text{wobei} \quad P_{n_k}(t) = 1 + tN_k + \ldots + \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} N_k^{n_k-1} \tag{3.139}$$

ein matrixwertiges Polynom in t der Ordnung $< n_k$. Damit ist der quadrierte Abstand des Teilchen vom Ursprung des Phasenraums zur Zeit t gleich

$$\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t) + \mathbf{p}(t)\cdot\mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\xi}(t)\cdot\boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{k,l} e^{(\lambda_k+\lambda_l)t}\big(P_k(t)\boldsymbol{\xi}_{0k}\big)\cdot\big(P_l(t)\boldsymbol{\xi}_{0l}\big).$$

Hier können die λ_k, P_k und $\boldsymbol{\xi}_{0k}$ komplex sein. Für reelles M ist die Summe aber reell.

Generisch wird für späte Zeiten der Abstand durch die Exponentialfunktionen, also die Eigenwerte λ_k von M, und nicht durch die Polynome bestimmt[3].

Hat *nur ein Eigenwert* einen positiven Realteil, dann gibt es immer Bahnen auf denen sich das System exponentiell schnell vom Ursprung entfernt. In diesem Fall ist die Gleichgewichtslösung

[3] Nur wenn *alle* λ_k imaginär sind, bestimmen die polynomialen Anteile das asymptotische Verhalten.

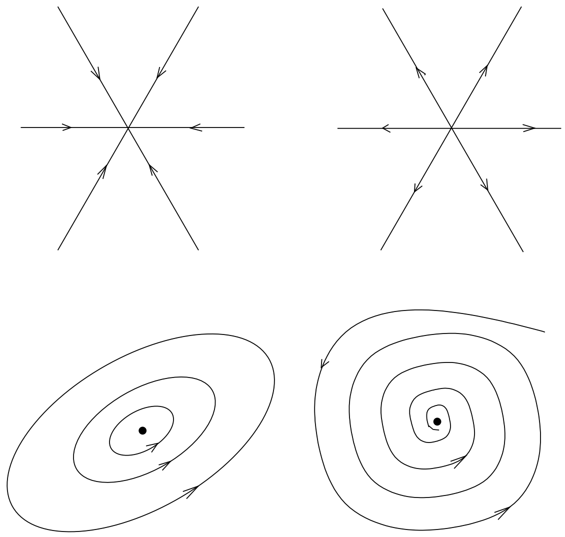

Abbildung 3.11: *Asymptotisch stabile, instabile und stabile Gleichgewichtslösung*

$\boldsymbol{\xi} = 0$ *instabil.* Ist zum Beispiel der Realteil von λ_1 positiv, so entfernen sich alle Teilchen mit $\boldsymbol{\xi}_{01} \neq \mathbf{o}$ exponentiell schnell vom Ursprung weg, siehe Abbildung (3.11).

Sind dagegen die Realteile *aller Eigenwerte* negativ, dann ist die Gleichgewichtslösung *asymptotisch stabil.* Alle Lösungen streben exponentiell schnell gegen den Ursprung. Man nennt die Gleichgewichtslösung $\boldsymbol{\xi} = 0$ daher *Attraktor* der Bewegung. Allgemein bezeichnet man für ein vorgegebenes dynamisches System als *Attraktor* eine Teilmenge des Phasenraumes, der sich das System für große Zeiten mehr und mehr annähert.

Der interessanteste Fall liegt zwischen Stabilität und Instabilität, nämlich wenn alle Eigenwerte rein imaginär sind. Dies ist der Fall für den harmonischen Oszillator ohne Reibung. Ist M diagonalisierbar und damit alle P_k Konstanten, dann ändert sich der Abstand vom Ursprung periodisch in der Zeit. Das Teilchen bleibt in der Umgebung der Gleichgewichtslösung, nähert sich ihr asymptotisch aber nicht an. Diese Bewegungen heissen *stabil*, sind aber nicht *asymptotisch stabil.*

3.5 Erzwungene Schwingungen

Der bisher untersuchte harmonische Oszillator ist ein schwingungsfähiges System mit einer in die Gleichgewichtslage zurücktreibenden linearen Kraft sowie mit energieverbrauchenden Reibungskräften. Ein solcher Oszillator kann durch eine äußere zeitabhängige Kraft $\mathbf{K}(t)$ 'angetrieben' werden. Dann haben wir die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\Omega^2\mathbf{r} - m\Gamma\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}(t). \tag{3.140}$$

Die entsprechende Differentialgleichung im Phasenraum ist

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}/m \\ -m\Omega^2 & -\Gamma \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{K}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.141}$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung lässt sich aus folgendem Zusammenhang zwischen den Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} \tag{3.142}$$

und einer Lösungen der inhomogenen Gleichung (3.141) ableiten. Ist $\boldsymbol{\xi}^{(s)}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und $\boldsymbol{\xi}^{(h)}$ eine Lösung der homogenen Gleichung, dann ist ihre Summe eine neue Lösung der inhomogenen Gleichung,

$$\frac{d}{dt}\{\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}^{(h)}\} = M\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\eta} + M\boldsymbol{\xi}^{(h)} = M\{\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}^{(h)}\} + \boldsymbol{\eta}.$$

Umgekehrt, sind $\boldsymbol{\xi}_1$ und $\boldsymbol{\xi}_2$ zwei beliebige Lösungen der inhomogenen Gleichung, dann löst ihre Differenz die homogene Gleichung. Wir folgern:

Ist $\boldsymbol{\xi}^{(h)}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und $\boldsymbol{\xi}^{(s)}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist $\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}^{(h)}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Um eine spezielle Lösung von (3.141) zu finden machen wir den folgenden Separationsansatz

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt}\boldsymbol{\psi}(t). \tag{3.143}$$

Für ein konstantes $\boldsymbol{\psi}$ wäre $\boldsymbol{\xi}$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Der Ansatz (3.143) entspricht einer *Variation der Konstanten* (Anfangsbedingung). Die Zeitableitung von $\boldsymbol{\xi}$ in (3.143) ist

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = Me^{Mt}\boldsymbol{\psi} + e^{Mt}\dot{\boldsymbol{\psi}} = M\boldsymbol{\xi} + e^{Mt}\dot{\boldsymbol{\psi}},$$

und deshalb erfüllt $\boldsymbol{\xi}$ die inhomogenen Differentialgleichung genau dann, wenn

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \left(e^{Mt}\right)^{-1}\boldsymbol{\eta} = e^{-Mt}\boldsymbol{\eta} \tag{3.144}$$

gilt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \int_0^t e^{-Ms}\boldsymbol{\eta}(s) + \boldsymbol{\xi}_0$$

mit einer Integrationskonstante $\boldsymbol{\xi}_0$. Damit lautet die Lösung

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_0^t e^{M(t-s)}\boldsymbol{\eta}(s) + e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0, \tag{3.145}$$

worin die Integrationskonstanten $\boldsymbol{\xi}_0$ als Anfangsbedingungen auftreten, $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}(0)$. Der zweite Term ist die Lösung der homogenen Gleichung mit Startpunkt $\boldsymbol{\xi}_0$ und der erste Term die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung die für $t = 0$ verschwindet. Wir wollen wieder annehmen, daß Ω und Γ in M diagonal sind (oder beide gleichzeitig diagonalisiert werden können). Dann entkoppeln die Differentialgleichungen und es genügt den eindimensionalen Fall zu untersuchen, d.h. die Differentialgleichung (3.140) oder (3.141) mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -m\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}. \tag{3.146}$$

Die Rechnungen werden einfacher wenn wir als untere Integrationsgrenze in (3.145) nicht 0 sondern $-\infty$ nehmen. Dies ist äquivalent zu einer Verschiebung von $\boldsymbol{\xi}_0$ in dieser Formel. Mit $e^{M(t-s)}$ aus (3.128) und $\boldsymbol{\eta}$ aus (3.141) lautet die spezielle Lösung

$$\int\limits_{-\infty}^{t} e^{M(t-s)}\boldsymbol{\eta}(s) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)/2} \begin{pmatrix} 1/m\omega_\gamma \, \sin\omega_\gamma(t-s) \\ \cos\omega_\gamma(t-s) - \gamma/2\omega_\gamma \, \sin\omega_\gamma(t-s) \end{pmatrix} K(s),$$

mit $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$. Addieren wir die allgemeine homogenen Lösung (3.110), dann finden wir folgende allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung für eine beliebige treibende Kraft,

$$x(t) = a\, e^{-\gamma t/2} \sin\left(\omega_\gamma t + \varphi_0\right) + \frac{1}{m\omega_\gamma} \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)/2} \sin\omega_\gamma(t-s) K(s). \tag{3.147}$$

Zu den wichtigsten Kräften, die einen gedämpften harmonischen Oszillator 'treiben', gehören die periodischen, zum Beispiel

$$K(t) = K_0 \sin\omega t. \tag{3.148}$$

Für diese einfache treibende Kraft ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m\omega_\gamma} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)/2} \sin\omega_\gamma(t-s) K(s) &= \frac{K_0}{2im\omega_\gamma} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)/2} \Big[e^{i\omega s} \sin\omega_\gamma(t-s) + \text{kompl. konj.} \Big] \\
&= \frac{K_0}{2im} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_\gamma^2 - \omega^2 + \gamma^2/4 + i\gamma\omega} + \text{ kompl. konj.} \\
&= \frac{K_0}{2im} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} + \text{ kompl. konj.}
\end{aligned}$$

Um zu einer möglichst einfachen Darstellung der inhomogenen Lösung zu kommen schreiben wir

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = b(\omega) e^{-i\delta(\omega)}$$

Unter Benutzung von $\omega_\gamma^2 = \omega_0^2 - \gamma^4/4$ ergibt eine kurze Rechnung folgende Amplitude und Phase

$$b(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad \text{und} \quad \delta(\omega) = \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{3.149}$$

Eingesetzt in (3.147) führt dies dann auf folgende allgemeine Lösung für den schwach gedämpften harmonischen Oszillator mit harmonischer Treibkraft (3.147)

$$x(t) = a\, e^{-\gamma t/2} \sin\left(\omega_\gamma t + \varphi_0\right) + \frac{K_0}{m} b(\omega) \sin\left(\omega t - \delta(\omega)\right). \tag{3.150}$$

Während des Zeitintervalls $t \leq \tau = 2/\gamma$ schwingt das System ein. Dieser Einschwingvorgang wird durch die homogene Lösung, also die Parameter m, ω_0 und γ des charakterisierten Systems, bestimmt. Nach der Relaxationszeit τ strebt die homogene Lösung gegen Null und spielt keine Rolle mehr. Für $t \gg \tau$ verbleibt nur die spezielle Lösung, die eine periodische Bewegung mit der auferlegten Frequenz $\omega(\omega)$ der treibenden Kraft beschreibt. Die Amplitude ist proportional zur Kraftstärke K_0 und umgekehrt proportional zur trägen Masse des Schwingers.

Resonanzen: Bei vorgegebener Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfung γ des Schwingers sind die Phasenverschiebung δ und die Amplitude $K_0 b(\omega)/m$ Funktionen der Kreisfrequenz der treibenden periodischen Kraft $K_0 \sin \omega t$. Diese Funktionen zeigen in der Umgebung der 'Eigenfrequenzen' ω_0 bzw. ω_γ ein typisches Verhalten, das nun genauer untersucht werden soll:

Die Phasenverschiebung δ ist ein Maß für die Verzögerung, mit der die Kraftphase ωt am Oszillator wirksam wird. Wir haben

$$\delta(\omega = 0) = 0, \quad \delta(\omega = \omega_0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \delta(\omega \to \infty) = \pi. \tag{3.151}$$

Bei $\omega = \omega_0$ ist das Argument von arctan in (3.149) unendlich. Also ist die Phasenverzögerung $\pi/2$ wenn die aufgezwungene Frequenz ω gleich der ungedämpften Eigenfrequenz ω_0 ist. Für $\omega > \omega_0$ müssen wir bei der Bestimmung von arctan auf den 'nächsten Zweig' dieser Funktion gehen.

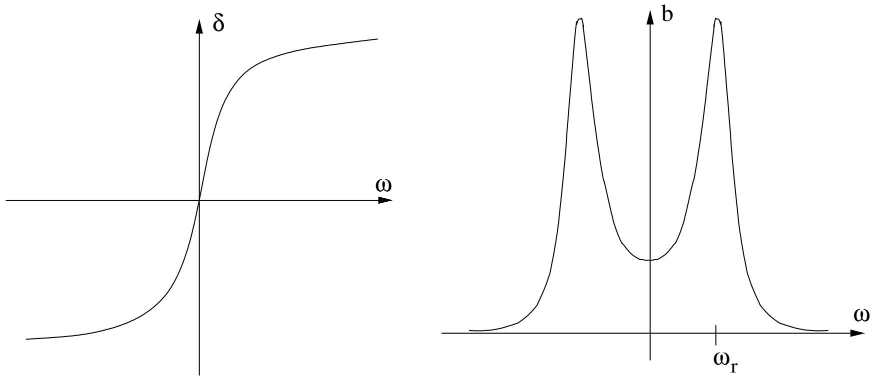

Abbildung 3.12: *Die Phase und Amplitude des getriebenen Oszillators.*

Die Abhängigkeit der Amplitude b von der Kreisfrequenz in (3.149) ist durch eine *Verteilung* mit Maximum ω_r in der Nähe von ω_0 und Breite $\sim \gamma$ gegeben. Es gilt

$$b(\omega = 0) = \frac{1}{\omega_0^2} \quad \text{und} \quad b(\omega \to \infty) = 0. \tag{3.152}$$

Die Amplitude hat ein Maximum bei ω_r, wo ω_r ein Minimum des Nenners von $b(w)$ in (3.149) ist,

$$\frac{\partial}{\partial \omega^2}\left((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right)\Big|_{\omega_r^2} = 2(\omega_r^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 = 0.$$

Damit finden wir für die Lage des Maximums, der sogenannten *Resonanz*, und die Amplitude an der Resonanzstelle die Werte

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2} \leq \omega_\gamma \leq \omega_0 \quad \text{und} \quad b(\omega_r) = \frac{1}{\gamma\omega_\gamma}. \tag{3.153}$$

Den qualitative Verlauf der Amplitudenfunktion ist in Abbildung (3.12) dargestellt.