Kapitel 2

Kinematik des Massenpunktes

2.1 Einführendes

In der Mechanik wird die Bewegung von materiellen Körpern untersucht. Zur Beschreibung einer Bewegung im Raum benötigen wir stets eine Bezugsbasis. Dies sind mindestens vier nicht in einer Ebene liegende gegenständliche Punkte, bezüglich welcher die Bewegung beschrieben wird. Die Erfahrung lehrt uns, daß genügend weit weg von sehr dichten und schweren Körpern die Bewegungen in guter Näherung in einem drei-dimensionalen Raum mit Euklidischer Metrik ablaufen. Dazu werden wir durch Messung der Winkelsummen in Dreiecken geleitet, deren Seiten aus den kürzesten Verbindungen zwischen den Eckpunkten gebildet werden. Das Ergebnis ist in sehr guter Näherung immer 180^0, was für die Euklidische Geometrie charakteristisch ist. Nur in der Nähe von sehr kompakten Körpern oder auf kosmologischen Skalen sind die Abweichungen von der Euklidischen Geometrie nicht mehr vernachlässigbar. Dann wird sie durch die Riemannsche Geometrie zu ersetzen sein und die entsprechenden physikalischen Gesetze sind Gegenstand der allgemeinen Relativitätstheorie. In dieser Vorlesung wollen wir also den physikalischen Raum durch einen kontinuierlichen, homogenen, isotropen und unendlichen Euklidischen Raum modellieren. Der Abstand zweier Punkte im Raum ist die Länge der verbindenden Geraden, welche mit einem (möglichst idealen) Maßstab bestimmt werden kann.

Obwohl Bewegungen von materiellen Körpern unabhängig vom Beobachter ablaufen, benötigen wir zu ihrer Beschreibung ein *Bezugssystem*, zum Beispiel vier Ecken in diesem Hörsaal. Die Bewegungsgesetze werden vom gewählten Bezugssystem abhängen und zu ihrer Formulierung muss das Bezugssystem, oder zumindest eine Klasse von Systemen, festgelegt werden. In der klassischen Mechanik gibt es ideale Bezugssysteme, die sogenannten *Inertialsysteme* in welchen Newtons 1. Axiom Gültigkeit hat:

1. Axiom (lex prima): *Es gibt Inertialsysteme, in denen die kräftefreie Bewegung durch* $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v} = const.$ *beschrieben wird.*

Zu ihrer Definition benötigt man aber noch den Begriff der Zeitmessung. Zur Zeitbestimmung braucht es eine Uhr, d.h. einen möglichst periodischen Vorgang, dessen Periode eine Zeiteinheit definiert. Die aktuelle Zeitdefinition erfolgt über Atomfrequenzen, wobei man bekannte Störungen (wie zum Beispiel den Einfluss des Gravitationsfeldes) möglichst korrigiert. Die Zeitdifferenz zwischen zwei am Ort der Uhr stattfindenden Ereignissen ist proportional zur Anzahl der Schwingungen zwischen den Ereignissen. Um den zeitlichen Abstand zweier Ereignisse an zwei verschiedenen Orten zu definieren, stellt man am anderen Ort eine gleichartige Uhr auf und synchronisiert die Uhren, indem man sie durch ein geeignetes Verfahren gleich stellt. Dies kann zum Beispiel mit einem elektromagnetischen Signal mit Laufzeitkorrektur geschehen. Auf diese Weise ist der Begriff der Gleichzeitigkeit eingeführt. Legt der Beobachter noch einen (willkürlich gewählten) Bezugspunkt für die Zeit fest, so kann er einem Ereignis eine eindeutige Zeit zuordnen (89.1 Zeiteinheiten nach dem Zeitursprung). Bewegt sich eine Uhr mit einer Geschwindigkeit $v \ll c$ relativ zu einer anderen Uhr, so gehen die Uhren synchron. Nähert sich die Relativgeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit, so verstreichen auf den beiden Uhren verschiedene Zeitdifferenzen zwischen zwei Ereignissen. Auch der Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab. Bis auf das letzte Kapitel dieser Vorlesung werden wir allerdings von solchen relativistischen Effekten absehen und folgendes Axiom als Arbeitshypothese benutzen:

Es gibt eine für alle Bezugssysteme universelle Zeit.

Oder mit NEWTON: 'Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand'. Dabei lässt er offen, woher er seine absolute Zeit nimmt.

Mit diesem Axiom ist die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse eine systemunabhängige Eigenschaft. Wir werden bei der Entwicklung der Mechanik weiter annehmen, daß der räumliche Abstand zweier Punkte absolute Bedeutung hat:

Der räumliche Abstand von zwei gleichzeitig stattfindenden Ereignisse ist unabhängig vom Bezugssystem.

NEWTONS Formulierung 'Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich' lässt offen, wie er seinen unbeweglichen absoluten Raum von einem dagegen gleichförmig bewegten Raum unterscheiden könne.

Man sollte jedoch in Erinnerung behalten, daß es qualitativ verschiedene *Raumzeit-Modelle* gibt

- MODELLE, BEI DENEN DIE STRUKTUR VON RAUM UND ZEIT UNABHÄNGIG VON DER VORHANDENEN MATERIE IST.
  - Das *Galilei-Newtonsche Modell* mit einer absoluten Zeit, d.h. das Zeitmaß ist vom Bezugssystem unabhängig. Bis auf das letzte Kapitel der Vorlesung werden wir diese Annahmen treffen.
  - Das *Einstein-Poincarésche Modell*, in dem das Zeitmaß vom Bezugssystem abhängt. Dieses Modell wird durch die spezielle Relativitätstheorie implementiert und wird im letzten Kapite diskutiert. Das GALILEI-NEWTONsche Modell ist ein Grenzfall desjenigen von EINSTEIN und POINCARÉ.
- MODELLE, BEI DENEN DIE STRUKTUR VON RAUM UND ZEIT DURCH DIE VORHANDENE MATERIE BESTIMMT IST.
  Die wichtigste Theorie mit dieser Eigenschaft ist EINSTEINs Allgemeine Relativitätstheorie. Sie ist eine Erweiterung der NEWTONschen Theorie und wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.

In der ersten Klasse von Raumzeitmodellen gibt es ausgezeichnete Bezugssysteme. Ein solches ist nahezu ideal oder inertial, wenn in ihm für einen hinreichend kräftefreien Körper das Galileische

Trägheitsgesetz hinreichend genau gilt, also wenn der Körper in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung beharrt. Für drei Massenpunkte, die sich auf nicht parallelen Geraden bewegen, scheint dies eine leere Aussage zu sein, aber für jede weitere kräftefreie Bewegung liefert dies eine operative Definition von Inertialsystemen. Innerhalb eines frei auf die Erde fallenden Kastens oder in einem weit weg von Himmelskörpern antriebslos fliegenden Raumschiff hat man in guter Näherung ein (lokales) Inertialsystem.

In einem Bezugssystem, sei es nun inertial oder auch nicht, führen wir Ortskoordinaten ein, welche die Lage jedes Punktes im uns interessierenden Raum eindeutig charakterisieren. Ein lokales Ereignis ist durch die Angabe seines Ortes und seiner Zeit charakterisiert und nach Wahl eines Bezugssystems und einer Uhr durch seine Ortskoordinaten und durch t. Wir wollen die soeben an-diskutierten Begriffe nun formalisieren und weiter analysieren.

2.2 Die Euklidische Geometrie des Raumes

Elemente dieser Geometrie sind

1. *Punkte* $P_1,\dots,P_m$. Ein Punkt kann die Spitze eines Zirkels, der Schnittpunkt zweier Linien oder deren Idealisierungen sein.

2. *Maßstäbe* $\mathbf{s}_1,\dots,\mathbf{s}_m$. Zum Beispiel der Urmeter, ein Zollstock und deren Idealisierungen. Maßstäbe haben genau einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt E: $\mathbf{s}=\overline{AE}$.

Die Existenz von Maßstäben folgt aus der Annahme der Existenz von starren Körpern. Dies sind Körper, die beim Verschieben oder Drehen in kongruente Körper übergehen. Oder anders ausgedrückt, die an verschiedenen Raumpunkten befindlichen materiellen Punkte ändern ihre relativen Abstände und Winkel zueinander nicht. Wir idealisieren und setzen unendlich dünne Maßstäbe voraus. Solche Maßstäbe können addiert werden. Der Maßstab $\mathbf{s}_2$ wird zu $\mathbf{s}_1$ addiert, indem man $\mathbf{s}_2$ parallel zu sich selbst verschiebt bis sein Anfangspunkt A_2 mit dem Endpunkt E_1 des ersten Maßstabes zusammenfällt. Dann ist $\overline{A_1E_2}$ der neue Maßstab $\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2$. Die Addition von Maßstäben ist kommutativ. Falls $A=E$ dann sprechen wir vom 'Nullmaßstab' $\mathbf{o}$. Addieren wir $\mathbf{o}$ zu einem Maßstab $\mathbf{s}$, dann erhalten wir wieder $\mathbf{s}$. Vertauschen wir End- und Anfangspunkt eines Maßstabes, dann ergibt sich der Maßstab $-\mathbf{s}$ mit der Regel $\mathbf{s}+(-\mathbf{s})=\mathbf{o}$.

Wir können Maßstäbe mit Zahlen multiplizieren, zum Beispiel

$$\underbrace{\mathbf{s}_1+\ldots+\mathbf{s}_1}_{\text{n−mal}}=n\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_2 \quad \text{oder} \quad \mathbf{s}_1=\tfrac{1}{n}\,\mathbf{s}_2\Longrightarrow m\mathbf{s}_1=\tfrac{m}{n}\,\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_3.$$

Damit ist die Multiplikation von Maßstäben mit rationalen Zahlen erklärt. Mittels Stetigkeit ergeben sich die folgenden Regeln für reelle Zahlen:

$$(a+b)\mathbf{s}=(a\mathbf{s})+(b\mathbf{s}),\quad a(b\mathbf{s})=(ab)\mathbf{s},\quad 1\cdot\mathbf{s}=\mathbf{s}\quad\text{und}\quad a(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2)=(a\mathbf{s}_1)+(a\mathbf{s}_2).$$

Die Regeln implizieren, das Maßstäbe einen *Vektorraum* V_3 *über den reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ bilden. In der Literatur benutzt man auch oft das Symbol $\vec{s}$ anstelle von $\mathbf{s}$ für einen Vektor. Wir nennen Maßstäbe *linear unabhängig*, falls keiner der Maßstäbe eine Linearkombination der übrigen Maßstäbe ist. Mehr als drei Maßstäbe sind in drei Dimensionen immer linear abhängig. Anderseits kann man in drei Dimensionen immer drei linear unabhängige Maßstäbe finden. Dann lässt sich jeder Maßstab $\mathbf{s}$ eindeutig als Linearkombination dieser Maßstäbe schreiben,

$$\mathbf{s} = s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2 + s_3\mathbf{e}_3 = \sum_i s_i\mathbf{e}_i \equiv s_i\mathbf{e}_i. \tag{2.1}$$

Das Tripel $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bildet eine *Basis* des 3-dimensionalen Vektorraumes V_3. Wir haben die EINSTEINsche Summenkonvention benutzt, nach der über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Von großer Bedeutung für die Physik sind die *metrischen* Eigenschaften von Punkten im Raum und Maßstäben, bei denen es um die Bestimmung von *Längen* und *Winkel* geht.

Längen- und Winkelmessungen: Wir können Längen nur vergleichen, zum Beispiel mit dem Urmeter, und nicht absolut angeben. Sei $\mathbf{e}$ ein 'Einheitsmaßstab' und $\mathbf{s}$ ein beliebiger Maßstab. Man bringe die beiden Anfangspunkte zu Deckung und richte die beiden Maßstäbe parallel aus. Dann ist

$$\mathbf{s} = \ell\mathbf{e}, \qquad \ell = \ell(\mathbf{s}, \mathbf{e}) \geq 0 \tag{2.2}$$

und ℓ ist die Länge von $\mathbf{s}$ bezogen auf den Einheitsmaßstab $\mathbf{e}$. Man schreibt

$$l(\mathbf{s}) = ||\mathbf{s}||_{\mathbf{e}}.$$

Mittels Zirkel und Lineal können wir zwei senkrechte Maßstäbe konstruieren oder Winkel Halbierungen vornehmen. Winkel werden damit operativ erklärt.

Skalarprodukt: Längen und Winkel lassen sich am besten mit Hilfe des Skalarproduktes (inneren Produktes) zweier Maßstäbe (Vektoren) beschreiben. Es seien $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in V_3$ mit Längen ℓ_1, ℓ_2 und ϕ der Winkel zwischen den Maßstäben. Dann ist das *Skalarprodukt* $\cdot$ der beiden Vektoren definiert durch

$$\cdot\ : V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 := \ell_1\ell_2\cos\phi. \tag{2.3}$$

Oft schreibt man auch $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ für das Skalarprodukt. Das Skalarprodukt ist eine symmetrische und positive Bilinearform auf dem Vektorraum V_3 der Maßstäbe:

$$\begin{array}{ll} \text{symmetrisch:} & \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_1 \\ \text{bilinear:} & \mathbf{s} \cdot (a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2) = a_1\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_2, \\ \text{positiv:} & \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = \ell^2 = ||\mathbf{s}||^2 > 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{s} = \mathbf{o}. \end{array} \tag{2.4}$$

Ist $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ eine Basis und $\mathbf{s} = s_i\mathbf{e}_i$ ein beliebiger Vektor, dann gilt

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = \sum_{ij} s_i s_j\, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv s_i s_j\, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

Die Koeffizienten s_i hängen von der gewählten Basis ab. Ersetzen wir zum Beispiel $\mathbf{e}_1$ durch $2\mathbf{e}_1$ dann geht s_1 in $s_1/2$ über. Wir werden auf diese Basisabhängigkeit der Koeffizienten zurückkommen. Von besonderer Bedeutung sind die *orthonormierten* Basen

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{2.5}$$

für die $||\mathbf{s}||^2$ gleich der Quadratsumme der Koeffizienten in der Entwicklung von $\mathbf{s}$ nach $\mathbf{e}_i$ ist,

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{s} = \sum_i s_i^2. \tag{2.6}$$

Die reellen Koeffizienten s_i in dieser Entwicklung heißen *kartesische Koordinaten* von $\mathbf{s}$ bezüglich der orthonormierten Basis $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Bei vorgegebener Basis hat man die ein-eindeutige Zuordnung zwischen Vektoren und Koordinaten,

$$\mathbf{s} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Ist die Basis orthonormiert, dann sind die Koeffizienten s_i leicht zu berechnen,

$$s_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{s} \Longrightarrow \mathbf{s} = \sum_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{s})\, \mathbf{e}_i. \tag{2.8}$$

Meistens legt man bei der Basiswahl auch noch die Orientierung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ fest. Eine positiv orientierte Basis bildet ein Rechtsschraubensystem, vgl. Abbildung (2.1). Eine Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ heißt *kartesisch*, falls sie positiv orientiert und orthonormal ist. Sein nun O ein fester Raumpunkt

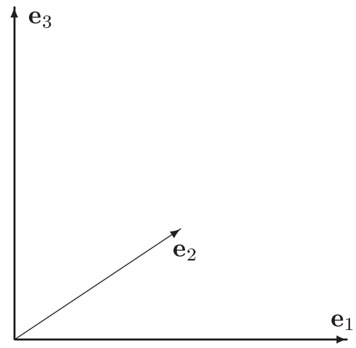

Abbildung 2.1: *Eine kartesische Basis ist orthonormiert und orientiert.*

und P ein beliebiger zweiter Punkt. Dann heißt der von O nach P zeigende Maßstab

$$\mathbf{r}(P) = \overline{OP} \tag{2.9}$$

Ortsvektor von P bezüglich O. Diese geometrische Definition nimmt keinen Bezug auf eine Basis. Für eine kartesische Basis $\mathbf{e}_i$ in O, sind die Koeffizienten $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ in der Darstellung

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i \equiv x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \tag{2.10}$$

die *kartesischen Koordinaten* von P bezüglich O und $\{\mathbf{e}_i\}$. Der Abstand des Punktes P von O ist gleich der Länge des Maßstabes, $r = \|\mathbf{r}\|$. Entsprechend gilt für den Abstand zweier Punkte P, Q mit Ortsvektoren $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ und kartesischen Koordinaten x_i und y_i

$$\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\| = \left\{\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2\right\}^{1/2} . \tag{2.11}$$

Dieser Abstand ist unabhängig von der Wahl des Ursprungs O und der kartesischen Basis. Dies bedeutet, daß der euklidische Raum *homogen* und *isotrop* ist. Der Zahlenwert für den Abstand hängt von der Wahl des Einheitsmaßstabes ab und die Koordinaten sind ursprungs- und basisabhängig.

Zwei Vektoren in $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3$ definieren einen dritten (Pseudo)Vektor über das bilineare schiefsymmetrische *Vektorprodukt* $V_3 \times V_3 \longrightarrow V_3$:

Definition: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ist definiert durch

1. $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin\phi$

2. Ist $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| \neq 0$ so ist $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ ein positiv orientiertes Tripel und $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$.

Hier ist ϕ der von den Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ definierte Winkel. Das Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren verschwindet genau dann wenn sie linear abhängig sind. Aus der Definition folgt, daß $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ gilt und daß das Produkt bilinear ist. Eine orthonormierte Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ ist genau dann positiv orientiert wenn

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \;\; , \;\; \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \;\; , \;\; \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 . \tag{2.12}$$

Sind $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ zwei beliebige Vektoren und $\mathbf{e}_i$ eine kartesische Basis, dann ist wegen der Linearität von $\wedge$ in beiden Argumenten

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} . \tag{2.13}$$

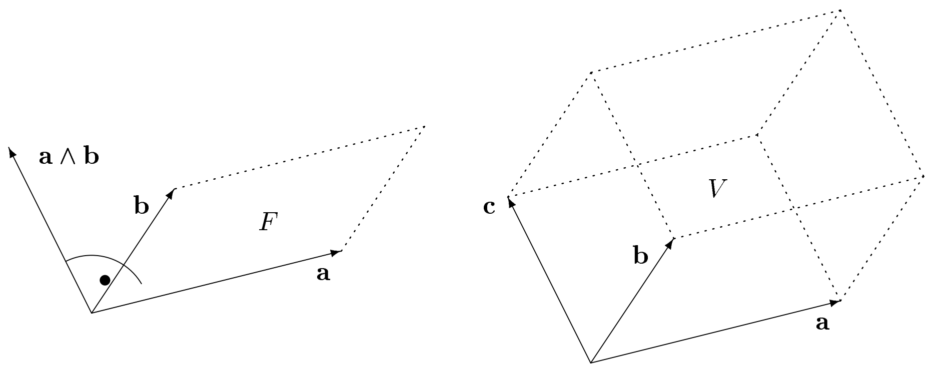

Abbildung 2.2: *Vektor- und Spatprodukt.* $F = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$ *und* $V = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

Der (Pseudo)Vektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ steht senkrecht auf der von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Ebene und seine Länge ist gleich der Fläche des aufgespannten Parallelogramms. Es gelten die folgenden Identitäten

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\\
&\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) + \mathbf{b}\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) + \mathbf{c}\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = 0, \qquad (\text{Jacobi})\\
&(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}). \quad (\text{Lagrange})
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Aus drei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ kann man das *Spatprodukt* (schiefe Produkt) bilden,

$$
V_3 \times V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \longrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \equiv (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}. \tag{2.15}
$$

Das Spatprodukt ist das orientierte Volumen des durch $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aufgespannten Parallelepipeds. Es verschwindet genau dann, wenn die drei Vektoren linear abhängig sind. Bezüglich einer kartesischen Basis gilt

$$
[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{2.16}
$$

Für eine kartesische Basis ist

$$
[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = 1 \Longrightarrow [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = \epsilon_{ijk}, \tag{2.17}
$$

wobei der vollständig schiefsymmetrische ϵ-(Pseudo)Tensor die Komponenten

$$
\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \quad \text{und} \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \tag{2.18}
$$

hat. Verjüngt man den $\epsilon-$Tensor über einen, zwei oder alle drei Indizes, so ergibt sich

$$
\epsilon_{ijk}\epsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijp} = 2\delta_{kp}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6. \tag{2.19}
$$

Das Spatprodukt ist linear in jedem Argument, zum Beispiel

$$
[\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \quad \text{und} \quad [\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}],
$$

und ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung der Argumente,

$$
[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}]. \tag{2.20}
$$

2.3 Der Zeitbegriff in der Newtonschen Mechanik

Bei der Einführung einer Zeit in der NEWTONschen Mechanik geht man von folgenden Elementen aus:

1. An einem festen Raumpunkt P kann man *Ereignisse qualitativ anordnen* in früher, gleichzeitig und später.

2. Man kann *Gleichzeitigkeit* von Ereignissen an verschiedenen Raumpunkten P_1 und P_2 festlegen. Dies kann im Prinzip mittels eines P_1 mit P_2 verbindenden idealen starren Körpers geschehen, über den man unendlich große Signalgeschwindigkeiten übermitteln kann.

Diese Annahme muss in der relativistischen Mechanik aufgegeben werden, da Signalgeschwindigkeiten die Lichtgeschwindigkeit nicht überschreiten können. In der speziellen Relativitätstheorie benutzt man Lichtsignale, um die Gleichzeitigkeit von zwei räumlich getrennten Ereignissen zu definieren[1].

3. Um vom qualitativen früher, jetzt und später zu einem *quantitativen Zeitmaß* zu kommen, braucht es einen periodischen physikalischen Vorgang, eine Uhr. Die periodischen Vorgänge definieren ein Zeitintervall-Maß[2]. Ist T_0 ein Zeit-Nullpunkt, T ein beliebiger Zeitpunkt und e_t das zeitliche Einheitsintervall (Sekunde, Stunde etc.) so gilt

$$\overline{T_0 T} = t\, e_t, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Man kann die Zeitmessung auf Längenmessungen zurückführen wenn man die Bewegung von sehr kleinen *freien Materiekörpern* in *Inertialsystemen* untersucht. Solche Probekörper sind hinreichend kleine Materiestücke ohne innere Struktur, die durch genügendes Entfernen von der restlichen Materie isoliert werden können und mit dieser nicht mehr wechselwirken. In der Natur gibt es bekanntlich vier Wechselwirkungen von Materie aufeinander:

- die *Gravitation*,
- der *Elektromagnetismus*,
- die *starke Wechselwirkung* (Kernkräfte),
- die *schwache Wechselwirkung* (β-Zerfall).

Die Reichweite der beiden letzten ist sehr klein, $< 10^{-13}$cm, und sie können daher in der makroskopischen Mechanik vernachlässigt werden. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist zwar langreichweitig, aber elektrisch neutrale Probekörper werden von elektromagnetischen Einflüssen abgeschirmt. Dagegen ist die Gravitation langreichweitig und universell, das heißt jede Form von Energie und damit Materie (und Antimaterie) erzeugt ein Gravitationsfeld und das Gravitationsfeld wirkt auf alle Materie. Die Gravitation kann nicht abgeschirmt werden und der Raum ist nur frei von Gravitationsfeldern, falls er auch frei von Materie ist. Hier kommt uns aber die Universalität der Gravitation zugute: In einem räumlich und zeitlich homogenen Gravitationsfeld erfahren alle Materieteilchen, *unabhängig von ihrer Zusammensetzung* die gleiche Beschleunigung. In einem im Schwerefeld *frei fallendes Raumschiff* (Einsteins Fahrstuhl) erfahren elektromagnetisch abgeschirmte Probekörper keine Beschleunigung und wir können *lokal* die Gravitation 'abschalten'. Die Erfahrung lehrt uns, daß sich in solchen *Bezugssystemen* von einem Punkt aus in verschiedene Richtungen geschossene Teilchen auf Geraden bewegen. Ein System mit dieser Eigenschaft heißt *Inertialsystem*.

Ein Inertialsystem wird realisiert durch ein 'frei fallendes' Raumschiff im Schwerefeld, wobei das Gravitationsfeld über die Ausdehnungen des Raumschiffes konstant ist. Inertialsysteme sind nur räumlich und zeitlich 'lokal' realisierbar.

Nun können wir die Zeit- auf die Längenmessung zurückführen, indem wir folgenden Zeitmaß definieren: In einem Inertialsystem legt ein freies Teilchen in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück.

[1] Die heute gebräuchlichste Methode für Präzisionszeitvergleiche von Ereignissen an verschiedenen Orten benutzt die Satelliten des Global Positioning Systems (GPS).

[2] zum Beispiel die Periode eines Pendels (Genauigkeit 10^{-5}s), die Eigenschwingungen eines Schwingquarzes (10^{-9}s) oder Atomuhren ($10^{-13} - 10^{-15}$s).

Zum Beispiel könnten wir als Zeitmaß die Lichtsekunde nehmen, also die Zeit, die ein Photon (Lichtteilchen) braucht, um $2.998\ldots 10^8$m zurückzulegen.

2.4 Eigenschaften von Inertialsystemen

Wir wählen nun ein Bezugssystem und zeichnen darin einen Ursprung O aus. Dann können die Punkte des dreidimensionalen Euklidischen Raumes bijektiv auf die Menge der Ortsvektoren $\overline{OP} = \mathbf{r}$ abgebildet werden. Nach Wahl eines Zeitnullpunktes T_0 und eines Zeitskala wird jedes Ereignis durch ein Paar $t, \mathbf{r}$ beschrieben.

2.4.1 Punktteilchen in Inertialsystemen

Nun folgen wir EULER und führen den idealisierten Begriff des *Massenpunktes* oder des *Punktteilchens* ein. Dies ist ein Körper, für dessen Bewegung nur sein Ort relevant ist. Beispielsweise kann man die Erde bei der Berechnung ihrer Bahn um die Sonne in sehr guter Näherung durch einen Massenpunkt in ihrem Schwerpunkt ersetzen. Sobald man sich aber für Eigenschaften interessiert die mit ihrer Nichtstarrheit und Eigenrotation verknüpft sind, müssen wir die Punktteilchennäherung aufgeben. Die Bewegung eines Massenpunktes ist eine Kette von Ereignissen und wird durch eine über einen Zeitintervall definierte Vektorfunktion $\mathbf{r}(t)$ beschrieben. Es ist oft vorteilhaft ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem im Euklidischen Raum zu benutzen. Die orthonormierten Basisvektoren des Koordinatensystems werden mit

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \quad \text{oder mit} \quad \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$$

bezeichnet. Ein Ortsvektor wird dann durch die kartesischen Komponenten $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ eindeutig charakterisiert,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad \text{oder} \quad \mathbf{r} = x_i\mathbf{e}_i. \tag{2.22}$$

Wir haben die oben eingeführte EINSTEINsche Summenkonvention benutzt. Wir werden in dieser Vorlesung die zweite Konvention in (2.22) benutzen und entsprechend die Koordinaten des Ortsvektors $\mathbf{r}$ mit x_1, x_2, x_3 bezeichnen.

Die Bewegung eines Massenpunktes ist dann bekannt, wenn der Ortsvektor als Funktion der Zeit bekannt ist,

$$\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i. \tag{2.23}$$

$\mathbf{r}(t)$ heißt *Bahnkurve* des Massenpunktes. Ein freies Teilchen bewegt sich auf einer Geraden und legt in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück, d.h.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v} \cdot t, \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t = 0). \tag{2.24}$$

Der Vektor $\mathbf{v}$ zeigt in Richtung der Geraden und ist die Geschwindigkeit,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)}{t}. \tag{2.25}$$

Für allgemeinere, beschleunigte Bewegungen definieren wir die (basisunabhängige) Geschwindigkeit durch einen Grenzprozess. Der Massenpunkt befinde sich zur Zeit t in dem durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ gekennzeichneten Punkt P, und nach der Zeitspanne Δt in dem durch $\mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta\mathbf{r}$ bestimmten Punkt P', d.h. die Verrückung des Massenpunktes während des Zeitintervalls Δt ist $\overline{PP'} = \Delta\mathbf{r}$. Die auf die Zeiteinheit bezogene (mittlere) Verrückung ist durch den Vektor

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{2.26}$$

gegeben. Sie hängt von der Zeit t und der gewählten Zeitspanne Δt ab. Den von Δt unabhängigen Vektor der *Geschwindigkeit* $\mathbf{v}(t)$ findet man dann als Grenzwert von (2.26) für $\Delta t \to 0$,

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \tag{2.27}$$

Bei festen Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ folgt aus $\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{v}(t) = v_i(t)\mathbf{e}_i = \dot{x}_i(t)\mathbf{e}_i \quad \text{also} \quad v_i(t) = \dot{x}_i(t). \tag{2.28}$$

Die Geschwindigkeiten bilden einen 3-dimensionalen Vektorraum[3].

2.4.2 Übergang zwischen Inertialsystemen

Es seien I und I' zwei beliebige Inertialsysteme mit gleicher Zeiteinheit und gleichem Längenmaßstab, also $e_t = e_t'$ und $\mathbf{e} = \mathbf{e}'$ und zunächst gleichem Zeitursprung $T_0 = T_0'$.

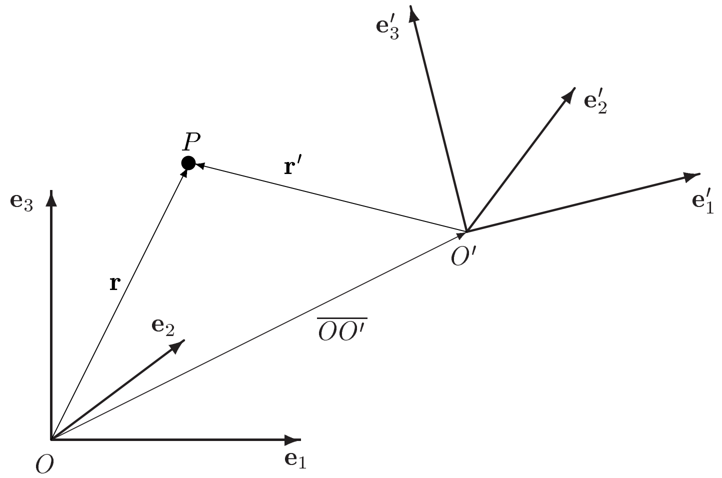

Abbildung 2.3: *Es werden zwei Inertialsysteme I, I' betrachtet, deren Ursprünge O und O' durch den zeitabhängigen Vektor $\overline{OO'}$ verbunden sind. Demselben Raumpunkt P werden die Ortsvektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ zugeordnet.*

[3]Dies ist nicht mehr der Fall in der relativistischen Mechanik, in der sich Geschwindigkeiten nicht mehr einfach addieren.

Die Ursprünge O, O' brauchen aber nicht übereinzustimmen. Zum Beispiel könnte O ein Punkt auf dem Gehsteig und O' ein Punkt auf dem vorbeifahrenden Zug sein. Ein und dasselbe freie Teilchen, welches sich zur Zeit t am Ort $P(t)$ aufhält, hat in I und I' die Ortsvektoren

$$\mathbf{r}(t) = \overline{OP(t)} = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}t \quad \text{und} \quad \mathbf{r}'(t) = \overline{O'P(t)} = \mathbf{r}'(0) + \mathbf{v}'t. \tag{2.29}$$

Hieraus folgt

$$\overline{OO'} = \overline{OP(t)} + \overline{P(t)O'} = \overline{OP(t)} - \overline{O'P(t)} = \mathbf{r}(0) - \mathbf{r}'(0) + (\mathbf{v} - \mathbf{v}')t.$$

Die Vektoren

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(0) - \mathbf{r}'(0) \quad \text{und} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$$

sind unabhängig von $P(t)$ und die Gleichung

$$\overline{OO'} = \mathbf{a} + \mathbf{u}\,t \tag{2.30}$$

bedeutet:
Zwei beliebige Inertialsysteme können sich dadurch unterscheiden, daß ihre Ursprünge O und O'
- durch eine (t-unabhängige) *räumliche Translation* $\mathbf{a}$ gegeneinander verschoben sind und/oder
- sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ relativ zueinander bewegen.

Eine äquivalente Formulierung ist:
Hat ein Teilchen in einem beliebigen Inertialsystem I' den Ortsvektor $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'(0) + \mathbf{v}'\,t$, so hat es im Inertialsystem I den Ortsvektor $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{r}'(0) + \mathbf{a}) + (\mathbf{v}' + \mathbf{u})\,t$.
Wir haben dabei nur die Beschreibung der Bewegung des Massenteilchens geändert und nicht die Bewegung selbst (passive Transformation). Die Menge der räumlichen *Translationen* $\mathbf{r}' \longrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ bildet eine 3-parametrige kommutative Gruppe. Ebenso erzeugen die Menge der *speziellen Galilei-Transformationen* $\mathbf{r}' \longrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}\,t$ eine 3-parametrige kommutative Gruppe.

Es seien nun die beiden Zeitursprünge verschieden, $T_0 \neq T_0'$, und

$$\overline{T_0T_0'} = \tau e_t.$$

Dann gilt wegen

$$\overline{T_0T_0'} = \overline{T_0T} - \overline{T_0'T} = t - t'$$

die *Zeitranslation* $t' \longrightarrow t = t' + \tau$. Die Zeittranslationen bilden eine 1-parametrige kommutative Gruppe.

Nun wollen wir annehmen, dass die Zeit- und Ortsursprünge der Inertialsysteme zusammenfallen, $\mathbf{a} = 0$, und sie keine Relativgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ haben. Dann können die kartesischen Basen in I und I' noch verschieden sein. Wir untersuchen die lineare Transformation R die zwischen den beiden Basen vermittelt, $R : \mathbf{e}_i' \longrightarrow \mathbf{e}_i = R(\mathbf{e}_i')$. Dazu entwickeln wir den Ortsvektor bezüglich der beiden Basen,

$$\mathbf{r} = x_i\mathbf{e}_i = x_j'\mathbf{e}_j'. \tag{2.31}$$

Da beide Basen kartesisch sind, gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}'_j &= (\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}'_j)\,\mathbf{e}_i = (R\mathbf{e}'_i\cdot\mathbf{e}'_j)\,\mathbf{e}_i \equiv R_{ij}\,\mathbf{e}_i\\
\mathbf{e}_i &= (\mathbf{e}'_j\cdot\mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}'_j = (\mathbf{e}'_j\cdot R\mathbf{e}'_i)\,\mathbf{e}'_j \equiv R_{ij}\,\mathbf{e}'_j.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Genausowenig wie bei einer festen Basis zwischen Vektoren und ihren Koordinatentripeln unterschieden wird, genausowenig wird dann zwischen der linearen Abbildung R und ihrer 3×3 Matrix $R=(R_{ij})$ unterschieden. Einsetzen in (2.31) ergibt

$$
x_i\mathbf{e}_i = x'_j\mathbf{e}'_j = x'_jR_{ij}\mathbf{e}_i,
$$

und wir finden folgende lineare Relation zwischen den Koordinaten in den beiden Inertialsystemen,

$$
x_i = \sum_j R_{ij}\,x'_j, \qquad R_{ij} = (\mathbf{e}_i,\mathbf{e}'_j).
\tag{2.33}
$$

Die lineare Abbildung R ist nicht beliebig, da sie kartesische Basen ineinander überführt,

$$
\delta_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = R_{ip}R_{jq}\,\mathbf{e}'_p\cdot\mathbf{e}'_q = R_{ip}R_{jq}\delta_{pq} = R_{ip}R_{jp}.
$$

Definiert man die 3×3 Matrizen

$$
R=(R_{ij}),\quad R^T=(R_{ji})\quad\text{und}\quad \mathbb{1}=(\delta_{ij})
\tag{2.34}
$$

dann bedeuten die obigen Bedingungen

$$
RR^T = R^TR = \mathbb{1},
\tag{2.35}
$$

was die Eigenschaften von Drehungen sind. Die transponierte Matrix R^T ist gleich der inversen Matrix und wegen $\det R^T=\det R$ ist $\det R\det R=1$, also gilt

$$
R^T = R^{-1}\quad\text{und}\quad \det R=\pm 1.
\tag{2.36}
$$

Da R^TR eine symmetrische Matrix ist, ergeben die Gleichungen (2.35) 6 Bedingungen für die 9 Koeffizienten R_{ij}, von denen also nur 3 voneinander unabhängig sind. Bei fester Basis identifizieren wir Vektoren mit den zugehörigen Koordinatentripeln,

$$
\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\quad,\quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix},
\tag{2.37}
$$

und nach (2.33) gilt in Matrixschreibweise $\mathbf{r}=R\,\mathbf{r}'$. Man sollte bei dieser (etwas irreführenden) Notation in Erinnerung behalten, daß $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ die Koordinatentripel für ein und denselben Vektor bezüglich verschiedener kartesischer Basen sind.

Die Menge der *Drehungen*

$$
R:\mathbf{r}'\longrightarrow\mathbf{r}=R\,\mathbf{r}'\quad\text{mit}\quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'
\tag{2.38}
$$

ist die 3-parametrige *nichtkommutative orthogonale Gruppe* $O(3)$:

$$
\mathbb{1}\in O(3),\quad R_1,R_2\in O(3)\Longrightarrow R_1R_2\in O(3),\quad R\in O(3)\Longrightarrow R^{-1}=R^T\in O(3).
$$

Die Drehungen mit $\det R = 1$ definieren eine Untergruppe, die spezielle orthogonale Gruppe $SO(3)$, da wegen (2.36) $\det R^{-1} = \det R$ ist. Sie erhalten die Orientierung und heißen *eigentliche Drehungen*. Die uneigentlichen Drehungen oder *Spiegelungen* ändern die Orientierung. Zum Beispiel ist die Raumspiegelung

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

uneigentlich. Da die Einheitsmatrix in $SO(3)$ liegt, bilden die uneigentlichen Drehungen keine Untergruppe. Es gilt

$$O(3) = SO(3) \cup PSO(3). \tag{2.39}$$

Für eine explizite Parametrisierung von eigentlichen Drehungen benutzt man den

Satz (Euler): *Jede eigentliche Drehung (spezielle orthogonale Abbildung) besitzt eine Drehachse, d.h. einen* 1*-dimensionalen Unterraum aus lauter Fixpunkten.*

Wir müssen zeigen, daß $R\mathbf{n} = \mathbf{n}$ für ein $\mathbf{n} \neq 0$ lösbar ist, oder daß $\mathbf{n}$ im Kern von $R - \mathbb{1}$ liegt. Die von $\mathbf{n}$ definierte Gerade ist dann die Drehachse von R. Eine Lösung existiert genau dann, wenn $R - \mathbb{1}$ den Eigenwert 0 hat oder wenn $\det(R - \mathbb{1}) = 0$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} \det(R - \mathbb{1}) &= \det(R - \mathbb{1})^T = \det(R^{-1} - \mathbb{1}) = \det\left[R^{-1}(\mathbb{1} - R)\right] \\ &= \det R^{-1} \det(\mathbb{1} - R) = \det(\mathbb{1} - R) = -\det(R - \mathbb{1}) \end{aligned}$$

ist dies der Fall. Für eine explizite Parametrisierung von Drehungen um eine Achse, definiert durch den Einheitsvektor $\mathbf{n}$, um den Winkel θ betrachte man die Figur (2.4)

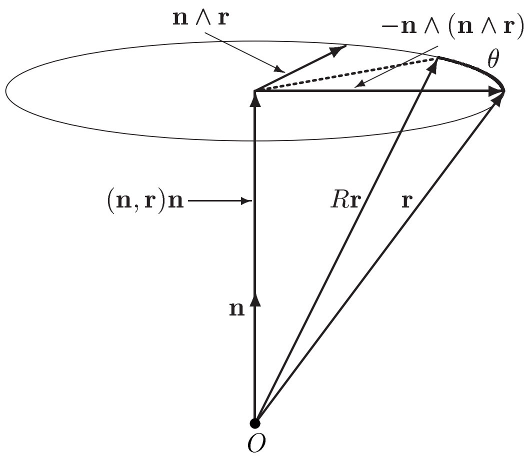

Abbildung 2.4: *Drehung um die Achse* $\mathbf{n}$ *mit Winkel* θ.

Man sieht, daß so eine Drehung die folgende Form hat:

$$R(\mathbf{n},\theta)\mathbf{r} = (\mathbf{n},\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}) \cos\theta + \mathbf{n} \wedge \mathbf{r} \sin\theta = \mathbf{r} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{r}\,\theta + O(\theta^2). \tag{2.40}$$

Fassen wir zusammen: charakterisieren $(t', \mathbf{r}')$ und $(t, \mathbf{r})$ *ein festes Ereignis* bezüglich zweier Inertialsysteme mit Ursprüngen O, O' und kartesischen Basen $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j$, dann sind folgende Transformationen zwischen den zwei Koordinatensystemen möglich:

$$\begin{aligned} \text{Translationen}: &\quad t = t', &\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a} \\ \text{Zeittranslationen}: &\quad t = t' + \tau, &\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' \\ \text{Drehungen}: &\quad t = t', &\quad \mathbf{r} = R\,\mathbf{r}' \\ \text{spez. Galileitransformationen}: &\quad t = t', &\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}\,t'. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Die Menge aller Transformationen die Inertialsysteme in Inertialsysteme überführen bildet die *Galilei Gruppe*. Ein beliebiges Element dieser Gruppe ist eine Zusammensetzung der Transformationen in (2.41) und hat die Form

$$t = t' + \tau \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = \mathbf{u}\,t' + R\,\mathbf{r}' + \mathbf{a}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{a} \in V_3, \qquad R^T R = \mathbb{1}. \tag{2.42}$$

Eine *Galilei-Transformationen* ist durch die 10 Parameter $(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R)$ bestimmt. Transformiert man zuerst von $I'' \to I'$ gemäß

$$t' = t'' + \tau' \quad \text{und} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{u}'\,t'' + R'\,\mathbf{r}'' + \mathbf{a}',$$

und anschließend von I' nach I wie in (2.42), so ergibt sich die zusammengesetzte Galileitransformation

$$(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R)(\tau', \mathbf{a}', \mathbf{u}', R') = \big(\tau + \tau', \mathbf{a} + R\mathbf{a}' + \mathbf{u}\tau', \mathbf{u} + R\mathbf{u}', RR'\big). \tag{2.43}$$

Den Galilei Transformationen können wir 5×5 Matrizen zuordnen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{o}^T \\ \tau & 1 & \mathbf{o}^T \\ \mathbf{a} & \mathbf{u} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Zum Einselement gehört $\mathbb{1}_5$ und zur inversen Galilei-Transformation die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{o}^T \\ -\tau & 1 & \mathbf{o}^T \\ R^{-1}(\mathbf{u}\tau - \mathbf{a}) & -R^{-1}\mathbf{u} & R^{-1} \end{pmatrix}.$$

In der relativistischen Mechanik werden die Galilei-Transformationen durch die Poincaré-Transformationen abgelöst und die Galileitransformationen mit $\tau = 0$ und $\mathbf{a} = 0$ durch die Lorentztransformationen.

2.4.3 Galileisches Relativitätsprinzip

Der erste Teil des *Galileischen Relativitätprinzips* beschreibt die physikalische Darstellung ein und desselben Vorgangs von verschiedenen Inertialsystemen aus:

Äquivalenz von Inertialsystemen: *Mechanische Vorgänge laufen von verschiedenen Inertialsystemen aus gesehen 'gleichartig' ab, d.h. sie können sich in ihrer quantitativen Beschreibung nur durch eine Galileitransformation* $(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R)$ *unterscheiden.*

Hier werden die Transformationen als *passive Transformationen* interpretiert. Die Vorgänge werden von zwei Experimentatoren in I und I' durch Gesetze der gleichen Form beschrieben (Kovarianz).

Beide wenden NEWTONs Axiome an; dabei verknüpft die Galileitransformation die Ortsvektoren und Zeiten, welche einem festen Ereignis in beiden Inertialsystemen zugeordnet werden.

Der zweite Teil des Äquivalenzprinzips besagt, daß ein Vorgang, der in *irgendeinem* Inertialsystem möglich ist, in derselben quantitativen Form auch in jedem fest vorgegebenen Inertialsystem im Prinzip realisierbar ist:

Äquivalenz von Vorgängen in einem Inertialsystem: *Ist in einem gegebenen Inertialsystem ein bestimmter Vorgang realisierbar, so sind in diesem System im Prinzip auch alle Vorgänge realisierbar, die sich in ihrer Beschreibung durch Galileitransformationen unterscheiden.*

Hier interpretieren wir die Transformationen *aktiv*. Man betrachtet *zwei* physikalische Systeme innerhalb *eines* Inertialsystems, welche durch eine Galileitransformation auseinander hervorgehen. Die Vorgänge in beiden physikalischen Systemen werden durch Gesetz der gleichen Form beschrieben (Kovarianz).

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines freien Teilchens, das sich in jedem Inertialsystemen unbeschleunigt längs Geraden bewegt. In jedem System lautet seine Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = 0, \tag{2.45}$$

wobei m die träge Masse des Teilchens bezeichnet[4]. Diese ist invariant unter Galileitransformationen. Um dies explizit zu sehen untersuchen wir die Transformation der Geschwindigkeiten. Mit (2.42) gilt

$$dt = dt' \quad \text{und} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{u}dt' + R\,d\mathbf{r}'.$$

Daraus erhalten wir

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt'} = \mathbf{u} + R\,\mathbf{v}'(t'). \tag{2.46}$$

Ein in I' ruhendes Teilchen (zum Beispiel am Ursprung O') bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ bezüglich I. Durch weitere Differenziation erhält man

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = R\,\ddot{\mathbf{r}}\,'(t').$$

Wie erwartet ist das 1. NEWTONsche Axiom kovariant unter allgemeinen Galileitransformationen

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = 0 \Longleftrightarrow m\ddot{\mathbf{r}}\,'(t') = 0.$$

Das Galileische Relativitätsprinzip[5] macht wesentliche Aussagen über die angenommene Struktur von Raum und Zeit. Es hat aber auch wichtige Konsequenzen für die dynamischen Eigenschaften eines physikalischen Systems. Wir werden später beweisen, daß zu jedem der 10 Parameter der Galileigruppe eine erhaltene Größe gehört. Dies ist der Inhalt eines Satzes von EMMY NOETHER. Folgende Symmetrien bedingen folgende Erhaltungsgrößen:

Zeittranslationen	$\longrightarrow$	Energieerhaltung
Raumtranslationen	$\longrightarrow$	Impulserhaltung
Spezielle Galileiinvarianz	$\longrightarrow$	konstante Schwerpunktsbewegung
Drehinvarianz	$\longrightarrow$	Drehimpulserhaltung.

[4]Wir kommen auf die träge Masse zurück.

[5]Es wird später durch das allgemeinere von EINSTEIN ersetzt werden.

2.5 Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Wir wählen ein Bezugssystem mit Ursprung O und vorerst orthonormierten Maßstäben $\mathbf{e}_i$. Die Bewegung eines Massenpunktes P ist bekannt, wenn der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ als Funktion der Zeit bekannt ist

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \tag{2.47}$$

Bei festgelegter Basis ist die Bewegung durch die Koordinatenfunktionen $x_i(t)$ in der Zerlegung

$$\mathbf{r}(t) = x_i(t)\mathbf{e}_i \tag{2.48}$$

eindeutig bestimmt. Wir nehmen an, daß diese Funktionen mindestens zweimal differenzierbar sind. Die Raumkurve $\mathbf{r}(t)$ heißt auch *Bahnkurve* des Massenpunktes.

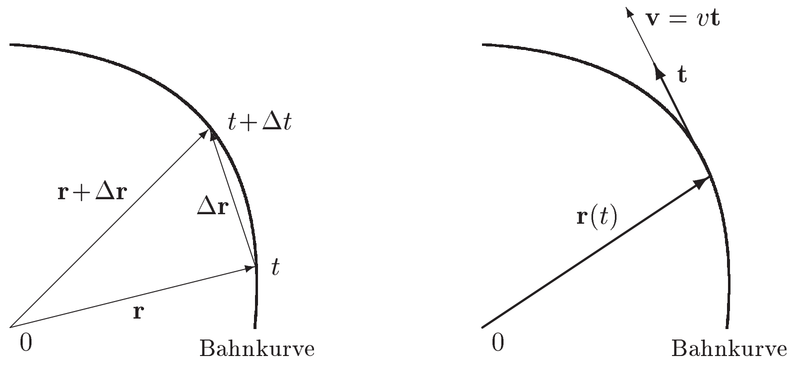

Abbildung 2.5: *Zur Definition der Geschwindigkeit*

Der von t abhängige Vektor der Geschwindigkeit (siehe Abschnitt 2.4.1)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{2.49}$$

ergibt sich als Grenzlage der Sekante durch die Vektoren $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ und $\mathbf{r}(t)$ pro Zeitintervall Δt im Grenzfall $\Delta t \to 0$. Damit ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ tangential an der Bahnkurve am Punkt $\mathbf{r}(t)$. Auf Bahnpunkten wo $\mathbf{v} \neq 0$ können wir den Geschwindigkeitsvektor in seinen Betrag und Tangenteneinheitsvektor zerlegen, $\mathbf{t}$,

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{t}, \qquad v = \|\mathbf{v}\| = \|\dot{\mathbf{r}}\| \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}. \tag{2.50}$$

Führen wir die Bogenlänge s (auch als *natürlicher Parameter* bezeichnet) des Kurvenstückes von P_0 bis P_1 ein (siehe Abbildung 2.6),

$$s(C) = \int_{s_0}^{s_1} ds, \qquad ds = \|d\mathbf{r}\| \Longrightarrow \frac{ds}{dt} = \|\dot{\mathbf{r}}\| = v, \tag{2.51}$$

dann finden wir für die Geschwindigkeit

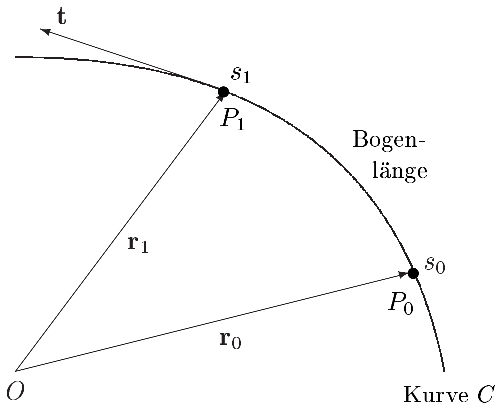

Abbildung 2.6: *Zur Bogenlänge*

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{t}\, v. \tag{2.52}$$

woraus wir entnehmen, daß der Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{t}$ die 'Geschwindigkeit' der Bahn mit der Bogenlänge als 'Zeit' ist.

Der Vektor der *Beschleunigung* ist die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}, \tag{2.53}$$

und bezüglich kartesischer Koordinaten

$$\mathbf{a} = \ddot{x}_i \mathbf{e}_i.$$

Der Beschleunigungsvektor ist tangential am *Hodographen*, daß heißt an der Kurve $t \to \mathbf{v}(t)$. Wir gebrauchen die Darstellung (2.50) und finden

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{t}) = \dot{v}\mathbf{t} + v\dot{\mathbf{t}}. \tag{2.54}$$

Im letzten Term ersetzen wir die Ableitung nach der Zeit durch die nach der Bogenlänge,

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\mathbf{t}}{ds} \equiv v\mathbf{t}',$$

wobei der Strich die Ableitung nach s kennzeichnet. Die Änderung des Tangenteneinheitsvektors zerlegen wir nach seinem Betrag und seiner Richtung,

$$\mathbf{t}' \equiv \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n} = \mathbf{n}/R, \qquad \kappa = \|\mathbf{t}'\| = \left\|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\|, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1, \tag{2.55}$$

wobei der Hauptnormaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$, die Krümmung κ und der Krümmungsradius R der Bahnkurve eingeführt wurden. Die Krümmung ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von einer Geraden. Für eine Kreisbahn ist in jedem Punkt die Krümmung $\kappa = 1/R$, wobei R der Kreisradius ist. Man kann die Krümmung einer Kurve in einem Punkt definieren als die Krümmung des Kreises, der die Kurve im betrachteten Punkt berührt und sich am besten an die Kurve anschmiegt. Benutzen wir

$$\dot{\mathbf{r}} = v\,\mathbf{t}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\,\mathbf{t} + v\,\dot{\mathbf{t}} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = v^2\mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{t}} = v^3\,\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}'$$

sowie $\mathbf{t} \perp \dot{\mathbf{t}}$, dann können wir die Krümmung der Kurve am Punkte $\mathbf{r}(t)$ folgendermaßen schreiben:

$$\kappa = \Big|\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}'\Big| = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \wedge \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}. \tag{2.56}$$

Die rechte Seite ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.

Druch Einsetzen von (2.55) in (2.54) ergibt sich die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{t} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{2.57}$$

Damit ist der Beschleunigungsvektor zerlegt in einen Anteil, der von der Betragsänderung der Geschwindigkeit herrührt und einen Anteil, dessen Ursache die Richtungsänderung der Geschwindigkeit ist. Für Planeten auf Kreisbahnen ist $\dot{v} = 0$, $\|\mathbf{a}\| = v^2/R$ und für Elektronen im Linearbeschleuniger ist $R = \infty$, $\|\mathbf{a}\| = \dot{v}$.

Der Einheitsvektor $\mathbf{n}$ steht senkrecht auf dem Tangentenvektor, da

$$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) = 2\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} \overset{(2.55)}{=} 2\kappa\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0. \tag{2.58}$$

Die durch die orthonormalen Vektoren $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ aufgespannte Ebene heißt *Schmiegebene* der Bahnkurve. Sie ist diejenige Ebene, in welcher der Schmiegkreis mit Radius $R = 1/\kappa$ liegt. Man kann diese zwei Vektoren noch durch den Binormaleneinheitsvektor ergänzen. Die orthonormalen Vektoren

$$\big\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}\big\}$$

sind das begleitende Dreibein. Es definiert das so-genannte natürliche Koordinatensystem für Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Der Vollständigkeit halber diskutieren wir noch die *Torsion einer Kurve* . In jedem Punkt der Kurve, in dem die Krümmung nicht verschwindet, definieren

$$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\} \equiv \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$$

ein positiv orientiertes orthonormiertes System. Damit ist Ableitung von $\mathbf{t}_i$ nach dem Bogenparameter eine Linearkombination der $\mathbf{t}_j$,

$$\mathbf{t}_i' = \sum_j a_{ij}\mathbf{t}_j.$$

Wegen (2.55) ist die erste Zeile der Matrix (a_{ij}) gleich $(0, \kappa, 0)$. Weiterhin ist diese Matrix antisymmetrisch,

$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j = \delta_{ij} \Longrightarrow \mathbf{t}_i' \cdot \mathbf{t}_j + \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j' = a_{ij} + a_{ji} = 0,$$

und hat damit die Gestalt

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.59}$$

Die Funktion $\omega(s)$ heißt *Torsion* oder *Windung* der Kurve. Sie ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich die Schmiegebene dreht. Bei ebenen Kurven verschwindet die Torsion identisch. Sie tritt in den FRENET*schen Formeln*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= && k(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -k(s)\mathbf{t}(s) &+& \quad \omega(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= && -\omega(s)\mathbf{n}(s), \end{aligned}$$

einem System von 9 linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, auf. Für beliebige Parameter, und insbesondere der Zeit, ist die Torsion

$$\omega = \frac{[\mathbf{v}, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}]}{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{a})^2}.$$

2.6 Krummlinige Koordinatensysteme

In kartesischen Koordinaten sind die Koordinatenlinien Geraden. Oft ist es jedoch hilfreich, die Koordinaten dem physikalischen Problem anzupassen und krummlinige Koordinaten zu wählen. Dann ändern die Basisvektoren und Koordinatenlinien ihre Richtung. Stehen die Koordinatenlinien senkrecht aufeinander, so spricht man von rechtwinkligen krummlinigen Koordinaten. Zum Beispiel sind die Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) definiert durch

$$x = x^1 = \rho\cos\varphi, \quad y = x^2 = \rho\sin\varphi, \quad z = x^3 = z \tag{2.60}$$

und die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) in

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta \tag{2.61}$$

rechtwinklig. Für kartesische Basen und Koordinaten ist $\mathbf{e}_a = \mathbf{e}^a$ und $x_a = x^a$ und wir brauchen nicht zwischen unteren und oberen Indizes zu unterscheiden. Zur besseren Unterscheidung indizieren wir in diesem Abschnitt die kartesischen Größen mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets. Für Größen die sich auf krummlinige Koordinatensysteme beziehen muss man zwischen unteren und oberen Indizes unterscheiden: Koordinaten haben obere Indizes. Wir betrachten ein Koordinatentripel

$$q^i = q^i(x^1, x^2, x^3) \tag{2.62}$$

und wollen voraussetzen, dass die Umkehrtransformation

$$x^a = x^a(q^1, q^2, q^3). \tag{2.63}$$

existiert. Nach dem Theorem über implizite Funktionen ist dies der Fall, wenn die Determinante der Transformationsmatrix

$$e_a{}^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^a} \tag{2.64}$$

nicht verschwindet. Die inverse Transformationsmatrix

$$e_i{}^a = \frac{\partial x^a}{\partial q^i} \quad \text{mit} \quad e_j{}^a e_a{}^i = \delta_j{}^i \quad \text{und} \quad e_b{}^i e_i{}^a = \delta_b{}^a, \tag{2.65}$$

ist dann ebenfalls regulär. Wir wollen auch voraussetzen, daß die Transformation (2.63) die Orientierung erhält, oder daß

$$e = \det(e_i{}^a) = \frac{1}{\det(e_a{}^i)} > 0. \tag{2.66}$$

2.6.1 Übergang von kartesischen zu krummlinigen Koordinaten

Zum einen können *kovariante* Basisvektoren

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial (x^a \mathbf{e}_a)}{\partial q^i} \equiv e_i{}^a \mathbf{e}_a \tag{2.67}$$

definiert werden, die sich tangential an die Koordinatenlinien q^i anschmiegen. Zum anderen können über Gradientenbildung *kontravariante* Basisvektoren

$$\mathbf{g}^i = \nabla q^i = \left(\mathbf{e}^a \frac{\partial}{\partial x^a}\right) q^i = \mathbf{e}^a e_a{}^i \tag{2.68}$$

eingeführt werden, die auf den Niveauflächen q^i =const. senkrecht stehen, siehe Abbildung (2.7).

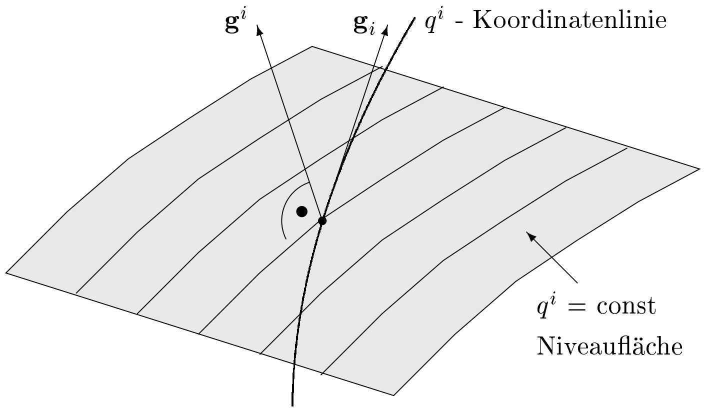

Abbildung 2.7: *Die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren.*

Im Gegensatz zur kartesischen Basis $\{\mathbf{e}_a = \mathbf{e}^a\}$ sind die ortsabhängigen Basen $\{\mathbf{g}_i\}$ und $\{\mathbf{g}^i\}$ verschieden. Für rechtwinklige Systeme sind sie noch parallel, $\mathbf{g}_i || \mathbf{g}^i$. Die Skalarprodukte

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = e_i{}^a e_{ja} = g_{ji} \quad \text{und} \quad g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = e_a{}^i e^{aj} = g^{ji} \tag{2.69}$$

sind ortsabhängig, da die Basisvektoren ortsabhängig sind. Die Matrix g_{ij} ist der *metrische Fundamentaltensor*. Invariant sind demgegenüber die Skalarprodukte von kovarianten und kontravarianten Basisvektoren

$$\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^i = e_j{}^a e_a{}^i = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j{}^i. \tag{2.70}$$

Ein beliebiger Vektor kann als Linearkombination der kartesischen, kontra- oder kovarianten Basisvektoren geschrieben werden,

$$\mathbf{u} = u^a \mathbf{e}_a = u^i \mathbf{g}_i = u_i \mathbf{g}^i \tag{2.71}$$

wobei sich mit (2.70) die Koeffizienten als Skalarprodukte von $\mathbf{u}$ mit den Basisvektoren schreiben lassen,

$$\begin{aligned} u^a &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^a = u^i e_i{}^a = e_a{}^i u_i \\ u^i &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{u} = u^a e_a{}^i = g^{ij} u_j \\ u_i &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u} = e_i{}^a u_a = g_{ij} u^j. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Wir können also kovariante Indices leicht in kovariante oder kartesische umrechnen und umgekehrt. Insbesondere ist (g_{ij}) die zu (g^{jk}) inverse Matrix, wie man auch direkt nachrechnen kann:

$$g_{ij} g^{jk} = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j)(\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}^k) = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k = \delta_i^k. \tag{2.73}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ ist

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^a v_a = g_{ij} u^i v^j = g^{ij} u_i v_j. \tag{2.74}$$

Die symmetrische Matrix g_{ij} bestimmt die Längenmessung in den gewählten krummlinigen Koordinaten,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{g}_i dq^i \Longrightarrow ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{ij} dq^i dq^j, \tag{2.75}$$

und dieser wichtigen Eigenschaft verdankt sie ihren Namen: *metrischer Tensor*. Das von den drei infinitesimalen Vektoren

$$d\mathbf{r}_1 = \mathbf{g}_1 dq^1, \quad d\mathbf{r}_2 = \mathbf{g}_2 dq^2 \quad \text{und} \quad d\mathbf{r}_3 = \mathbf{g}_3 dq^3$$

aufgespannte Parallelepipedon hat ein Volumen proportional zum Spatprodukt der kovarianten Basisvektoren,

$$\begin{aligned} dV &= [d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_3] = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]\, dq^1 dq^2 dq^3 = e_1^a e_2^b e_3^c\, [\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_c]\, dq^1 dq^2 dq^3 \\ &= \epsilon_{abc} e_1{}^a e_2^b e_3^c\, dq^1 dq^2 dq^3 = \det\left(e_i{}^a\right) dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g}\, dq^1 dq^2 dq^3, \end{aligned}$$

wobei g die Determinante des metrischen Tensors g_{ij} bezeichnet. Im letzten Schritt machten wir von (2.69) Gebrauch, d.h. von $e = \sqrt{g}$. Um die Volumenform

$$dV = \sqrt{g}\, dq^1 dq^2 dq^3, \qquad g = \det\left(g_{ij}\right) \tag{2.76}$$

zu erhalten, muss man also das Produkt der Differentiale noch mit der Wurzel der Determinante g des metrischen Fundamentaltensors im betreffenden Koordinatensystem multiplizieren. Insbesonders haben wir bewiesen, daß

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = e \Longrightarrow [\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k] = e\, \epsilon_{ijk} \equiv \eta_{ijk}, \qquad e = \pm\sqrt{g} \tag{2.77}$$

gilt. Diese Formel für das Spatprodukt der kovarianten Basisvektoren ist korrekt für beide Orientierungen der kovarianten Basisvektoren. Für ein nicht-positiv orientiertes Tripel ist $e = -\sqrt{g} < 0$. Hier haben wir den total antisymmetrischen *Levi-Civita Tensor* dritter Stufe η_{ijk} eingeführt. Durch 'hochziehen' der Indizes mit der Metrik erhält man den entsprechenden kontravarianten Tensor

$$\eta^{ijk} = [\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k] = \det({e_a}^i)\epsilon_{ijk} = \frac{1}{e}\epsilon_{ijk} \equiv \eta^{ijk}. \tag{2.78}$$

Entsprechend können die Flächen des das Volumenelements dV bildenden Parallelepipedons als vektorielle Flächenelemente angesehen werden, beispielsweise

$$d\mathbf{A}^1 = d\mathbf{r}_2 \wedge d\mathbf{r}_3 = \mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3 dq^2 dq^2$$

Der Vektor $\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3$ hat ein verschwindendes Skalarprodukt mit $\mathbf{g}_2$ und $\mathbf{g}_3$ und muss daher proportional zu $\mathbf{g}^1$ sein,

$$\mathbf{g}_2 \wedge \mathbf{g}_3 = C \cdot \mathbf{g}^1 \Longrightarrow [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = e = C.$$

Wir schließen, daß

$$\mathbf{g}_i \wedge \mathbf{g}_j = \eta_{ijk}\mathbf{g}^k. \tag{2.79}$$

Die gerichteten Flächenelemente haben damit die Form

$$d\mathbf{A}^1 = e\,\mathbf{g}^1 dq^2 dq^3, \quad d\mathbf{A}^2 = e\,\mathbf{g}^2 dq^3 dq^1 \quad \text{und} \quad d\mathbf{A}^3 = e\,\mathbf{g}^3 dq^1 dq^2. \tag{2.80}$$

Zum Beispiel steht $d\mathbf{A}^1$ senkrecht auf den Niveauflächen $q^1 =$const.

2.6.2 Differentialoperatoren

Für viele Rechnungen, insbesondere in der Elektrodynamik, ist es nützlich die gängigsten Differentialoperatoren in beliebigen krummlinigen Koordinatensystemen zu kennen.

Gradient: Der Gradient ist definiert durch

$$df = d\mathbf{r} \cdot \nabla f \Rightarrow \nabla f = \mathbf{e}^a \partial_a f = \mathbf{e}^a {e_a}^i \partial_i f = \mathbf{g}^i \partial_i f, \qquad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Wegen (2.68) finden wir für den Gradienten

$$\nabla = \mathbf{g}^i \partial_i = \mathbf{g}_i g^{ij} \partial_j. \tag{2.81}$$

Divergenz: Wir definieren die Divergenz eines Vektorfeldes, so daß der Gaußsche Satz

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} = \int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \tag{2.82}$$

gilt. Für ein kleine Volumenelement ΔV wie in Abbildung (2.8) gilt dann

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial \Delta V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}. \tag{2.83}$$

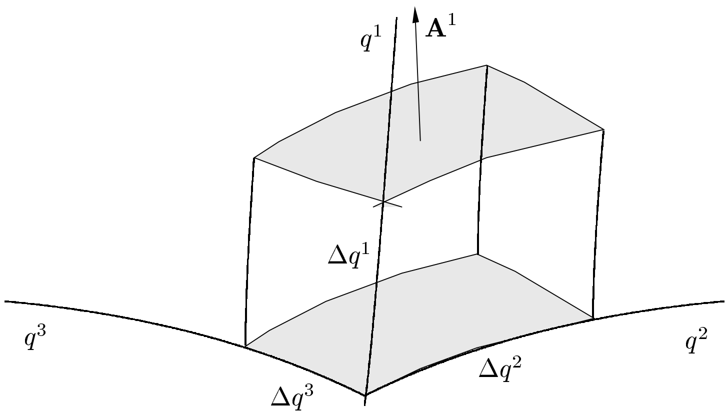

Abbildung 2.8: *Zur Berechnung der Divergenz*

Wir berechnen den Beitrag der in Abbildung (2.8) gekennzeichneten Flächen zum Oberflächenintegral. Mit $d\mathbf{A}$ aus (2.80) und $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i$ finden wir $d\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = e\,(a^1 dq^2 dq^3 + a^2 dq^3 dq^1 + a^3 dq^1 dq^2)$, und damit ist dieser Beitrag

$$\Big\{(ea^1)(q^1 + \Delta q^1, q^2, q^3) - (ea^1)(q^1, q^2, q^3)\Big\}\, \Delta q^2 \Delta q^3 \sim \frac{\partial}{\partial q^1}\big(ea^1\big)\, dq^1 dq^2 dq^3.$$

Dividieren wir durch $\Delta V = e\, dq^1 dq^2 dq^3$, dann erhalten wir für den Beitrag der beiden gekennzeichneten Flächen zur rechten Seite in (2.83)

$$\frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial q^1}(ea^1).$$

Berücksichtigen wir nun noch die beiden anderen Terme von den Flächen mit konstantem q^2 beziehungsweise q^3, so finden wir

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i}\big(\sqrt{g} a^i\big) \tag{2.84}$$

für die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{a} = a^i \mathbf{q}_i$.

Rotation: Die Rotation gewinnen wir aus dem Stokesschen Satz

$$\int_A d\mathbf{A}\cdot(\nabla\wedge\mathbf{a}) = \int_{\partial A} d\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}\,. \tag{2.85}$$

Auf der gekennzeichneten unteren infinitesimalen Fläche in (2.8) bedeutet dies

$$\begin{aligned} e\Delta q^2\Delta q^3\mathbf{g}^1\cdot(\nabla\wedge\mathbf{a}) \quad &\sim \quad \Delta q^2\big\{a_2(q^1,q^2,q^3) - a_2(q^1,q^2,q^3{+}\Delta q^3)\big\} \\ &+ \quad \Delta q^3\big\{a_3(q^1,q^2{+}\Delta q^2,q^3) - a_3(q^1,q^2,q^3)\big\}, \end{aligned}$$

oder nachdem wir die Differenzen auf der rechten Seite in Δq^3 beziehungsweise in Δq^2 entwickeln,

$$e\,\mathbf{g}^1\cdot(\nabla\wedge\mathbf{a}) = \frac{\partial a_3}{\partial q^2} - \frac{\partial a_2}{\partial q^3} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^1\cdot(\nabla\wedge\mathbf{a}) = \eta^{1jk}\frac{\partial a_k}{\partial q^j},$$

wobei der total antisymmetrische Tensor η^{ijk} schon in der Formel (2.78) auftrat. Mit den analogen Resultaten für die verbleibenden Komponenten erhalten wir folgende Formel für die Rotation eines Vektorfeldes in beliebigen krummlinigen Koordinaten:

$$\nabla\wedge\mathbf{a} = \mathbf{g}_i\,\eta^{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial q^j} \tag{2.86}$$

Laplace-Operator: Um den Laplace-Operator zu berechnen, bilden wir zuerst den Gradienten einer Funktion f und danach die Divergenz des so gewonnenen Vektorfeldes ∇f,

$$\triangle f = \nabla\cdot\nabla f = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}\big(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial q^j}f\big)$$

woraus sich

$$\triangle = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial q^j}\right) \tag{2.87}$$

für den gesuchten Laplace-Beltrami-Operator ergibt.

Rechtwinklige Koordinaten: In dieser Vorlesung werden wir immer rechtwinklige Koordinaten gebrauchen, für welche der metrische Tensor diagonal ist,

$$g_{ij} = \lambda_i^2\delta_{ij}, \quad \text{so daß} \quad \sqrt{g} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{2.88}$$

ist. Dann sind die $\mathbf{g}_i$ und $\mathbf{g}^i$ parallel zueinander (die Koordinatenlinien schneiden die Koordinatenflächen senkrecht) und die Vektoren

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{\lambda_i} = \lambda_i\mathbf{g}^i \qquad \text{(keine Summe über i!)} \tag{2.89}$$

bilden ein Orthonormalsystem. Entsprechend hat das Wegelement $d\mathbf{r}$ von $\{q^i\}$ nach $\{q^i+dq^i\}$ die Form

$$d\mathbf{r} = \sum_i \lambda^i\mathbf{e}_i\,dq^i. \tag{2.90}$$

Es bietet sich nun an, ein Vektorfeld nach der orthonormierten Basis $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ anstelle der kovarianten Basis $\mathbf{g}_i$ zu entwickeln,

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i = a_i \mathbf{g}^i = \sum_i \tilde{a}_i \, \mathbf{e}_i \Longrightarrow \tilde{a}_i = \lambda_i a^i, \quad a_i = \lambda_i \tilde{a}_i. \tag{2.91}$$

Der Gradient einer Funktion vereinfacht sich zu

$$\nabla f = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \, \mathbf{e}_i, \tag{2.92}$$

die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{a} = \tilde{a}_i \mathbf{e}_i$ zu

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \Big[\frac{\partial(\lambda_2 \lambda_3 \tilde{a}_1)}{\partial q^1} + \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_3 \tilde{a}_2)}{\partial q^2} + \frac{\partial(\lambda_1 \lambda_2 \tilde{a}_3)}{\partial q^3} \Big], \tag{2.93}$$

und die Rotation hat die Form

$$\nabla \wedge \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} \Big[\frac{\partial(\lambda_3 \tilde{a}_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(\lambda_2 \tilde{a}_2)}{\partial q^3} \Big] \, \mathbf{e}_1 + \text{zyklisch}. \tag{2.94}$$

Der Laplace-Beltrami-Operator vereinfacht sich zu

$$\triangle = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \lambda_3 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q^3} \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial q^3} \right). \tag{2.95}$$

2.6.3 Teilchenbahnen in krummlinigen Koordinatensystemen

Wir wollen die Bewegung eines Punktteilchens in beliebigen (möglichst angepassten) Koordinaten beschreiben. Wegen $d\mathbf{r} = dq^i \mathbf{g}_i$ ist die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{q}^i \mathbf{g}_i \tag{2.96}$$

und die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{q}^i \mathbf{g}_i + \dot{q}^i \dot{\mathbf{g}}_i. \tag{2.97}$$

Für rechtwinklige Koordinatensysteme lassen sich die Gleichungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung wie folgt vereinfachen:

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_i \dot{q}^i \lambda_i \, \mathbf{e}_i \tag{2.98}$$

und

$$\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \Big\{ \big[\frac{d}{dt} (\dot{q}^i \lambda_i) \big] \mathbf{e}_i + \dot{q}^i \lambda_i \dot{\mathbf{e}}_i \Big\}. \tag{2.99}$$

Da die $\mathbf{e}_i$ orthonormiert sind, steht $\dot{\mathbf{e}}_i$ senkrecht auf $\mathbf{e}_i$.

Zylinderkoordinaten: Oft gebraucht werden die Zylinder- und Kugelkoordinaten. Für die Zylinderkoordinaten (2.60) ist das Linienelement

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

und damit

$$\lambda_\rho = 1, \quad \lambda_\varphi = \rho \quad \text{und} \quad \lambda_z = 1. \tag{2.100}$$

Aus

$$\mathbf{r} = \rho \cos\varphi \, \mathbf{e}_x + \rho \sin\varphi \, \mathbf{e}_y + z \, \mathbf{e}_z$$

berechnen sich die kovarianten Basisvektoren durch Ableiten von $\mathbf{r}$ nach den Zylinderkoordinaten. Normiert man diese, so ergibt sich folgende orthonormierte Basis,

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\varphi \, \mathbf{e}_x + \sin\varphi \, \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi \, \mathbf{e}_x + \cos\varphi \, \mathbf{e}_y \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z, \tag{2.101}$$

siehe Abbildung (2.9).

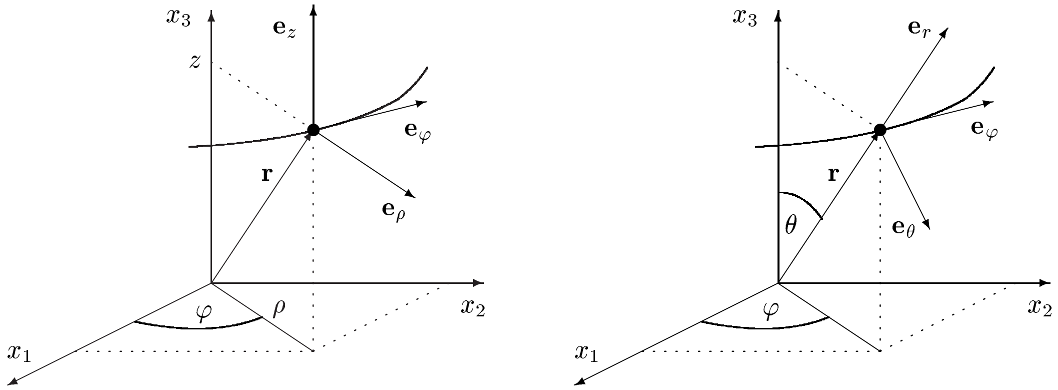

Abbildung 2.9: *Zylinder- und Kugelkoordinaten*

Eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot\rho \, \mathbf{e}_\rho + \rho\dot\varphi \, \mathbf{e}_\varphi + \dot z \, \mathbf{e}_z \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \left(\ddot\rho - \rho \, \dot\varphi^2\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\rho \, \ddot\varphi + 2\dot\rho \, \dot\varphi\right)\mathbf{e}_\varphi + \ddot z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Kugelkoordinaten: Für die Kugelkoordinaten (2.61) ist

$$\mathbf{r} = r \sin\theta \cos\varphi \, \mathbf{e}_x + r \sin\theta \sin\varphi \, \mathbf{e}_y + r \cos\theta \, \mathbf{e}_z \tag{2.103}$$

und man findet das Linienelement

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2, \quad \text{so daß}$$
$$\lambda_r = 1, \quad \lambda_\theta = r \quad \text{und} \quad \lambda_\varphi = r \sin\theta. \tag{2.104}$$

Durch Ableiten von $d\mathbf{r}$ nach den Kugelkoordinaten und anschließender Normierung findet man die orthogonalen Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \sin\theta \cos\varphi \, \mathbf{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \, \mathbf{e}_y + \cos\theta \, \mathbf{e}_z \\
\mathbf{e}_\theta &= \cos\theta \cos\varphi \, \mathbf{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \, \mathbf{e}_y - \sin\theta \, \mathbf{e}_z, \\
\mathbf{e}_\varphi &= -\sin\theta \, \mathbf{e}_x + \cos\varphi \, \mathbf{e}_y,
\end{aligned} \tag{2.105}$$

siehe Abbildung (2.9). Damit kann man die Geschwindigkeit und Beschleunigung in Kugelkoordinaten berechnen. Man findet

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \, \mathbf{e}_r + r \, \dot{\theta} \, \mathbf{e}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi} \, \mathbf{e}_\varphi \\
\ddot{\mathbf{r}} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2\right)\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi
\end{aligned} \tag{2.106}$$

2.6.4 Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten

Bei kugel oder axialsymmetrische Problemem ist es oft angebracht die dem Problem angepassten Kugel- oder Zylinderkoordinaten zu benutzen. Da diese Koordinatensystem oft gebraucht werden, geben wir hier die explizite Form der Differentialoperatoren in diesen Systemen an.

In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \\
\nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\
\nabla \wedge \mathbf{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_z \\
\triangle f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

In Kugelkoordinaten (r, θ, φ) gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \\
\nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\
\nabla \wedge \mathbf{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_\varphi \\
\triangle f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$