Kapitel 1

Ursprünge der klassischen Mechanik

1.1 Literaturhinweise

Folgende Lehrbücher können empfohlen werden:

Allgemeine Lehrbücher:

A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik: Mechanik*, Nachdruck der 8. Auflage, Harri Deutsch, 1994.

L.D. Landau und E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band 1, *Mechanik*, Akademie-Verlag, Berlin 1990.

H. Goldstein, *Klassische Mechanik*, Aula, 1991; H. Goldstein, C. Poole und J. Safko, *Classical Mechanics*, third edition, Addison Wesley, 2001.

R.P. Feynman, R.B. Leighton und M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley Publishing Company, Reading 1971.

A. Budo, *Theoretische Mechanik*, Wiley, 1990.

N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Lecture Notes in Physics, Vol. 289, Springer, 1987.

F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, 5. Aufl., Wiley-VCH, Weinheim 1997

F. Scheck, *Theoretische Physik 1, Mechanik*, 6. Auflage, Springer, 1999.

S. Brandt, H.-D. Dahmen, *Mechanik: eine Einführung in Experiment und Theorie*, 3. Auflage, Springer 1996

H. Stephani und G. Kluge, *Theoretische Mechanik*, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.

W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik*, Band 1, Klassische Physik; Band 2, Analytische Mechanik, Vieweg & Son, Braunschweig 1997/1998.

E. Schmutzer, *Grundlagen der Theoretischen Physik*, Teil I; Wissenschaftsverlag, 1989.

W. Greiner, *Theoretische Physik: Mechanik I, II*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, neueste Auflage

T. Fließbach, *Lehrbuch zur theoretischen Physik*, Bd. 1, *Mechanik*, 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 1999.

Mathematische Aspekte der Mechanik:

V.I. Arnold, *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*, Birkhäuser, 1988.

R. Abraham und J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1981.

W. Thirring, *Lehrbuch der mathematischen Physik*, Bd. 1: *Klassische Dynamische Systeme*, Springer, 1988.

Klassische Werke:

I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687, 2. Auflage 1713; deutsch von J. P. Wolfers, Berlin 1872 (Nachdruck Darmstadt 1963).

L. Euler, *Mechanica, sive Motus scientia analytice exposita*, Petersburg 1736, und *Theoria Motus Corporum Solidorum seu Rigidorum*, deutsch von J. P. Wolfers, Greifswald 1853

J.L. de Lagrange, *Mécanique Analytique*, Paris 1788

W.R. Hamilton, *On a general method in Dynamics* und *Second Essay on a general method in Dynamics* 1834, Collected Papers II, 103-211, Cambridge 1940

C.G.J. Jakobi, *Vorlesungen über Dynamik*, Reimer, Berlin 1866

H. Poincare, *Les Méthodes nouvelles des da Mécanique céleste I-III*, Paris 1892-1899, engl. Übers. hrsg. von D. L. Goroff, Amer. Inst. of Phys. 1993

Skripten: Auch im Internet finden Sie einige sehr empfehlenswerte Skripten. Ein guter Anlaufpunkt ist die Seite von Wagner aus München,

`http://www.physik.tu-muenchen.de/~rwagner/physik/skripten.html`.

Ich fand zum Beispiel die Skripten von H.A. Kastrup von der RWTH Aachen und J. Wess von der LMU-München sehr nützlich. Auch das Skript von G. Welsch vom TPI unserer Universität ist empfehlenswert.

Einige Kommentare zur obigen (unvollständigen) Liste:

Die Bücher von Greiner, Nolting, Schmutzer und Sommerfeld, Landau/Lifschitz sind jeweils die ersten Bände einer Reihe über Theoretische Physik. Scheck und Fliessbach haben damit begonnen die theoretische Physik in mehreren Bänden darzustellen. Es dürfte sich für jeden Physiker empfehlen, mindestens einer dieser Reihen zu besitzen. Dabei sind die Werke von SOMMERFELD UND LANDAU/LIFSCHITZ qualitativ sehr gut, d.h. mit größter Sorgfalt und physikalischer Einsicht geschrieben. Die Bücher von SOMMERFELD sind teilweise natürlich etwas veraltet, aber sein Buch über Mechanik ist nach wie vor sehr empfehlenswert. Die Bücher von LANDAU/LIFSCHITZ sind etwas schwer zu lesen. Sie werden die einzelnen Bände immer dann zu Rate ziehen, wenn Sie den Kurs schon einmal erfolgreich absolviert haben. Das Buch über Mechanik gefällt mir weniger gut wie einige der anderen in der Reihe. Das Buch von SCHMUTZER ist sehr explizit und als Ergänzung zur Vorlesung geeignet. GREINER und NOLTING sind etwa von gleicher Güte und für Anfänger geschrieben, reich an Aufgaben, aber nicht immer systematisch. FLIESSBACH kann ich sehr empfehlen.

GOLDSTEIN (im Westen) und BUDO (im Osten) waren lange Zeit die Standardbücher, auf die man sich hinsichtlich Fragen der Notation und dessen, was jeder Physiker über klassische Mechanik wissen sollte, bezog. (Goldstein transportierte weiter, was vorher die Bücher von BORN und WHITTAKER, beide von 1925, vorgelegt hatten.) Das Buch von Goldstein wurde vor einigen Wochen neu aufgelegt und die dritte Auflage (bisher nur in englischer Sprache) sieht sehr ordentlich aus.

ARNOLDS Buch ist ein echter Klassiker und sei denjenigen Hörern nahegelegt die Sinn für Mathematik haben. Es ist sehr kompakt und anspruchsvoll (auf andere Weise als LANDAU/LIFSCHITZ, eher mathematisch als physikalisch tiefgründig). Die Bücher von STRAUMANN und SCHECK kann man als Brücke zwischen ARNOLD und der Physik ansehen, für Hörer mit Sinn für Mathematik vielleicht als die beste Einführung in die Mechanik.

Die Bücher von FLIESSBACH, KUYPERS und STEPHANI/KLUGE sind ohne Einschränkungen empfehlenswert. Sie führen sorgfältig in die Systematik und die Problemstellungen der Mechanik ein und geben der Physik Priorität gegenüber der Mathematik. KUYPERS ist dabei am ausführlichsten und vermutlich am leichtesten verdaulich (auch wegen der Einbeziehung des Computers in das Lösen von Aufgaben), STEPHANI/KLUGE am kompaktesten. Jede/r sollte selbst entscheiden, welches Buch am besten ihrer/seiner Vorbildung und Interessen entspricht.

In allen erwähnten Büchern mit Ausnahme von ARNOLD, SCHECK und STRAUMANN kommt die Geometrie etwas kurz, also die von Hamilton, Jacobi und Poincaré begründete Tradition, die heute grundlegend für ein Verständnis chaotischer Bewegungen ist.

1.2 Einführung, Historisches

Ziel der Theoretischen Physik ist ein Verständnis der Natur durch Abbildung der Erfahrungen auf mathematische Modelle. Es sollen möglichst viele Naturvorgänge möglichst einfach erklärt und nachprüfbare Vorhersagen gemacht werden. Dabei werden die physikalischen Erscheinungen auf die wesentlichen Aspekte reduziert und Idealisierungen vorgenommen.

Die theoretische Mechanik ist die erste Vorlesung des Theorie-Zyklus bestehend aus der theoretischen Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik I, Quantenmechanik II, Thermodynamik und statistische Physik. Sie befaßt sich mit dem Studium der Bewegungen von materiellen Körpern und den Kräften, die diese Bewegungen hervorrufen.

Es gibt gute Gründe die Vorlesungsreihe mit der Theoretischen Mechanik zu beginnen:

- Die Mechanik war die erste erfolgreiche Theorie und dient als Vorbild für andere Theorien.
- Grundlegende physikalische Größen und Begriffe wurden in der Mechanik eingeführt und dann auf andere Theorien übertragen.
- Viele mathematische Methoden der Physik wurden auf dem Gebiet der Mechanik entwickelt.
- Die Mechanik ist unserer Erfahrungswelt relativ nahe (was man von der Quantenmechanik nicht sagen kann).

Die Mechanik ist jener Teil der Physik, in dem es zuerst gelang, dem Ziel der theoretischen Physik nahe zu kommen, d.h. es gelang durch Verallgemeinerung von Erfahrungen einige allgemeine Axiome aufzustellen, aus denen die einzelnen Gesetze auf mathematischen Wege ableitbar sind. Die Mechanik war im vorletzten Jahrhundert so erfolgreich, daß man versuchte jede physikalische Erscheinung auf eine mechanische zurückzuführen. Obwohl dieses so-genannte mechanische Weltbild nicht mehr haltbar ist, stellt die Mechanik doch die allgemeine Grundlage der Physik dar.

Wie jede physikalische Theorie ist auch die klassische Mechanik nur begrenzt gültig und muß in bestimmten Fällen erweitert werden. Sie verliert ihre Gültigkeit

- bei Erscheinungen an welchen sehr schnell bewegte Körper beteiligt sind (zum Beispiel Elektronen mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit). Hier wird die klassische Mechanik durch die relativistische Mechanik der speziellen Relativitätstheorie abgelöst, in deren Rahmen die herkömmlichen NEWTONSCHEN Begriffe wie absoluter Raum und absolute Zeit ihre Bedeutung verlieren.
- bei atomaren Abständen, bei denen die Naturphänomene durch die Quantenmechanik und deren relativistische Verallgemeinerung, den Quantenfeldtheorien, richtig beschrieben werden.
- bei Anwesenheit von großen Massen und/oder Energiendichten, wo der Euklidische Raum durch eine gekrümmte Raumzeit ersetzt wird. Die zugrundeliegende erfolgreiche Theorie ist die allgemeine Relativitätstheorie.

Bereits im antiken Griechenland begannen Mathematiker und Naturwissenschaftler wie PYTHAGORAS (580-496 v.u.Z), HERAKLEIDES (544-483 v.u.Z.), EUDOXOS (408-355 v.u.Z.), CALIPPOS (370-300 v.u.Z.), ARISTOTELES (384-322 v.u.Z.), ARISTARCH (320-250 v.u.Z.) oder ERATOSTENES (276-194 v.u.Z.) aus eigenem Antrieb Fragen an die Natur zu stellen und Antworten von ihr zu erwarten. Dabei trat eine enge Verknüpfung von Mathematik und Physik zu Tage. Aus der Beobachtung von Naturphänomenen wurden mathematisch formulierte Regeln und Gesetze abgeleitet und in der Mathematik hielt die Beweisführung Einzug.

Die Mechanik hatte hier mit den Hebelgesetzen und der kinematischen Beschreibung der Himmelskörper ihre Anfänge. Als bedeutendster Mathematiker und Physiker dieser Epoche muß wohl ARCHIMEDES (287-212 v.u.Z) angesehen werden[1].

[1] ARCHIMEDES wurde 287 v.u.Z. in Syrakus, dem mächtigsten griechischen Stadtstaat auf Sizilien, als

Abbildung 1.1: *Archimedes*

Er hat in seinen teilweise erhaltenen Arbeiten den heutigen Anforderungen an eine Beweisführung weitestgehend entsprochen. Bekannt wurde er durch seine raffinierte Schraube, die heute noch im Nildelta als Wasserpumpe dient, die Bestimmung des Silbergehaltes des scheinbaren Goldkranzes von König Hieron II. von Syrakus, die Entdeckung des statischen Auftriebs (*„Heureka! Heureka!“*) oder die Aufstellung des Hebelgesetzes (*„Gebt mir einen Platz zum Stehen und ich werde die Erde bewegen“*). Er selbst hielt seine theoretischen Arbeiten für seine *wirklichen* Werke. Hierzu gehört seine Abhandlung *'Über das Gleichgewicht ebener Flächen'* in welchem das Prinzip der Hebel aufgestellt wurde, der Schwerpunkt eingeführt und für verschiedene ebene Flächen bestimmt wurde. Mit dieser Schrift legte ARCHIMEDES den Grundstein für die theoretische Mechanik. In seiner Arbeit *'Kreismessung'* finden sich die ersten Rechnungen mit kontrollierten Näherungen und die Anfänge der Infinitesimalrechnung. In seiner Schrift *'Über Kugel und Zylinder'* wurden Flächen von Kreis-, Parabel- und Hyperbelsegmenten bestimmt und die Volumina der zugehörigen Rotationsfiguren bestimmt. Bei seinen Berechnungen benutzt ARCHIMEDES die vereinfachte Form der Integralrechnung. In *'Von den Spiralen'* befasste er sich mit der nach ihm benannten Spirale und benutzte eine Methode, die der Differentialrechnung sehr nahe kommt. So nebenbei löste er zwei der drei berühmten Probleme der Antike: die Dreiteilung eines Winkels und die Quadratur des Kreises. Es ist eine Ironie des Schicksals, daß NEWTON und LEIBNIZ die *'Methodenschrift'*, in welcher der Vorläufer der Infinitesimalrechnung dargelegt wurde, nicht kannten, als sie im 17. Jahrhundert die modernen Infinitesimalrechnung schufen. ARCHIMEDES Schrift *'Über schwimmende Körper'* wird als erste Abhandlung über den statischen Auftrieb angesehen und gilt als eines seiner großen Meisterwerke.

Erst als seine Arbeiten im neunten Jahrhundert ins Arabische übersetzt wurden, führte seine Methode, bei der er Näherungs- und Grenzwerte zu Hilfe nahm, zu neuen mathematischen Entdeckungen. Für die spätere Entwicklung der Mathematik und Physik war die Übersetzung seiner Werke vom Griechischen ins Lateinische durch den Dominikanermönch W. MOERBECKE von Bedeutung. Ab Mitte des 16. Jahrhunderts ließen sich VIETA, KEP-

Sohn des Astronoms PHEIDIAS geboren und lernte in Alexandria bei dem Nachfolger Euklids. Den größten Teil seines Lebens verbrachte er in seiner Geburtsstadt, wo er 212 v.u.Z. bei der Einnahme der Stadt durch die Römer getötet wurde. Zusammen mit F. Gauß und I. Newton wird er oft als einer der drei besten Mathematiker aller Zeiten angesehen. Für historisch Interessierte verweise ich auf das Büchlein von P. Strathern [1] ler, Cavalieri, Huygens, Toricelli, Fermat, Pascal und viele andere Gelehrte von Archimedes inspirieren.

Die Kinematik der Planetenbahnen wurde eingehend von Nikolaus Kopernikus (1473-1543), und Tycho de Brahe (1546-1601), der die astronomische Beobachtungsgenauigkeit um eine Größenordnung verbesserte, untersucht und schließlich von Johannes Kepler (1571-1630), einer der interessantesten Persönlichkeiten der Wissenschaftsgeschichte, aufgeklärt[2].

Abbildung 1.2: *Johannes Kepler*

Neben den bekannten Keplerschen Gesetzen arbeitete er am Brechungsgesetz für kleine Winkel, der Theorie des astronomischen Fernrohrs, der Volumenbestimmung von rotationssymmetrischen Körpern (*'Neue Raumberechnung der Weinfässer'*) und einem genauen Tafelwerk mit den wichtigsten astronomischen Daten. In seinem bahnbrechenden Werk *'Astronomia Nova'* gelang ihm die Entdeckung, daß die Bahn des Planeten Mars eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkt sich der Mittelpunkt der Sonne befindet, und daß der Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Mit seiner Feststellung *„Die Sonne ist die Quelle der bewegenden Kraft, die in der Nähe stärker, in der Ferne schwächer wirkt"* war er 78 Jahre vor Erscheinen von Newtons Werk der Gravitationstheorie am nächsten. Er ging den Weg von der einfachen kinematischen Beschreibung der Marsbewegung zu ihrer dynamischen Erklärung. Die in seinem Werk auftretenden Integrationsaufgaben hat Kepler in Anlehnung an Archimedes durch Summierungen gelöst. Im Jahre 1619 waren die fünf Bücher der *'Weltharmonien'*, lateinisch *'Harmonices mundi'* fertiggestellt. Hierin findet sich das dritte Keplersche Gesetz, nach dem die dritten Potenzen der mittleren Abstände der Planeten von der Sonne proportional den Quadraten ihrer siderischen Umlaufzeiten sind.

Auch Galileo Galilei (1564-1642) kommt ein zentraler Platz bei der Herausbildung der

[2]Kepler wurde 1571 in Weil der Stadt geboren, studierte Theologie in Tübingen und hatte von 1594-1600 ein Lehramt in Graz inne. Von 1600 bis 1612 wirkte er in der kaiserlichen Sternwarte in Prag, wo er 1601 die Nachfolger des Hofastronoms Tycho Brahe als kaiserlicher Mathematiker antrat. Von 1612 bis 1626 war er in der Landschaftschule in Linz tätig und 1626-1628 weilte er in Ulm und Regensburg. Kepler starb 1930 auf der Reise zum Reichstag in Regensburg. Siehe [2].

modernen Naturwissenschaften zu[3]. Schone früh bemerkte er, daß die Periode eines Pendels

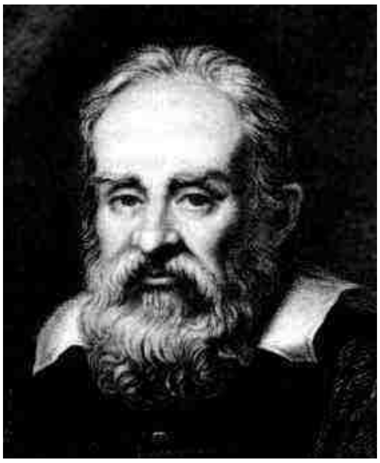

Abbildung 1.3: *Galileo Galilei*

für kleine Amplituden von der Auslenkung unabhängig ist (Isochronismus). Er experimentierte mit fallenden und rollenden Gegenständen und bestimmte deren Orte nach gleichen Zeitintervallen. Die entsprechenden Resultate wurden in seinem Buch *'De Motu' (Zur Bewegung)* veröffentlicht. Nachdem er existierende Teleskope mit dreifacher Vergrößerung wesentlich verbessert hatte und eine zwanzigfache Vergrößerung erreichte, beobachtete und vermaß er die Mondberge, untersuchte die Sonnenfleckenbewegungen und entdeckte die Jupitermonde. Diese und weitere Beobachtungen hat er in seiner Schrift *'Sidereus nuncius'* dargestellt. Wie der *'Dialogo'* hat diese Schrift wesentlich zur Popularisierung der Wissenschaften beigetragen. Für unsere Vorlesung ist sein Abhandlung *'Discorsi* von großer Bedeutung. Hier hat GALILEO das heute in der Physik bezeichnete *Galileisches Relativitätsprinzip* klar formuliert. Er ist mit seinen Untersuchungen der Bewegung auf einer schiefen Ebene den Trägheitsgesetzen der Newtonschen Mechanik, nach denen die Kraft zur Veränderung und nicht zur Aufrechterhaltung des Bewegungszustandes benötigt wird, sehr nahe gekommen. Wir zitieren GALILEI (Discorsi): *„Indes ist zu beachten, daß der Geschwindigkeitswert, den der Körper aufweist, in ihm selbst unzerstörbar enthalten ist (impresso), während äußere Ursachen der Beschleunigung oder Verzögerung hinzukommen, was man nur auf horizontalen Ebenen bemerkt, denn bei absteigenden nimmt man Beschleunigung wahr, bei aufsteigenden Verzögerung. Hieraus folgt, daß die Bewegung in der Horizontalen eine unaufhörliche sei.* Etwas expliziter zeigte er, daß bei der Bewegung auf der schiefen Ebene die Geschwindigkeit proportional zur Laufzeit anwächst und der zurückgelegte Weg proportional zu Quadrat der Zeit ist. GALILEIS Arbeiten müssen auch deshalb als Meilenstein in der Geschichte der Wissenschaft angesehen werden, weil er erstmalig sehr explizit von der Notwendigkeit der Vernachlässigung von Störeinflüssen spricht und idealisierte Versuchsbedingungen auswählt. Er hat bereits Geschwindigkeit und Beschleunigung für die geradlinige Bewegung definiert und mathematisch beschrieben.

[3] GALILEI wurde 1564 als Sohn eines Mathematikers und Musikers in Pisa geboren, studierte Medizin und wurde 1589 in seinem Geburtsort Professor für Mathematik. 1592 nimmt er ein Lehramt an der Universität zu Padua an. 1610 tritt er in Florenz in die Dienste der Medici. Nach dem berühmten Galilei-Prozess 1633 hatte er bis zu seinem Lebensende 1642 Hausarrest in Arcetri nahe Florenz.

In den Jahrzehnten nach GALILEI beschäftigten sich FRANCIS BACON und RENE DESCARTES[4] mit den Methoden zur Auffindung sicherer Wahrheiten. Im Gegensatz zu BACON, dem Vater der englischen empirischen Philosophie und dem Begründer der induktiven Methode, hat DESCARTES ein vollständiges philosophisches System vorgelegt. Alles sollte neu überdacht werden, da es keine über jeden Zweifel erhabene Wahrheit gäbe - mit einer einzigen Ausnahme: die Wahrheit der Mathematik. Zur Auffindung der Wahrheit hat DESCARTES vier Regeln aufgestellt. Seine Betonung der mathematischen oder deduktiven Methode war im Folgenden sehr wichtig für die theoretische Durchdringung der Physik. Im zweiten Teil der *'Principia Philosophiae'* formulierte er seine (fehlerhaften) Grundgesetze der Bewegung und arbeitete diese sehr detailliert aus. In der unveröffentlichten Arbeit *'Le monde'* hat DESCARTES bereits erkannt, daß eine Kraft benötigt wird, um einen Körper auf einer Kreisbahn zu führen. Schon im nächsten Kapitel dieser Mechanikvorlesung werden wir von seiner analytischen Geometrie Gebrauch machen, die in *'La Géometrie'* entwickelt wurde. Das rechtwinklige Koordinatensystem nennen wir ihm zu Ehren kartesisches System. Die größte Schwäche von DESCARTES Methoden liegt in der Überbetonung der Ratio auf Kosten des Experimentes.

CHRISTIAAN HUYGENS[5] hat erkannt, das Vernunft und Erfahrung von gleicher Bedeutung bei der Wahrheitsfindung sind. Die wissenschaftliche Tätigkeit von HUYGENS fällt in die Epoche zwischen GALILEIS Entdeckung der Dynamik und deren Anwendung auf die Gravitationsmechanik durch NEWTON und sie überragte weitaus die seiner Zeitgenossen.

Er verbesserte die Objektivgläser von Fernrohren und entdeckte einen sechsten Saturnmond (den größten) und den Orionnebel. In der kurzen Schrift *'Traité de la Lumière'* legte HUYGENS den Grundstock zur Undulationstheorie des Lichts, welche zum Beispiel die Reflexion, Refraktion und Doppelbrechung erklärt. Er gilt als Miterfinder der Pendeluhr und behandelte eine wichtige mechanische Aufgabe seiner Zeit: das Problem des physischen oder zusammengesetzten Pendels. Er konnte die auch noch heute gültige Formel für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels der Länge l,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ableiten. Er hat gezeigt, das für eine Zykloide die Laufzeit eines Körpers zum Fußpunkt nicht vom Startpunkt abhängt. Er hat dieses so-genannte *Zykloidenpendel*, dessen Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude ist, auch selbst gebaut.

In seinem Werk *'Horologium oscillatorium'* findet sich die Theorie der Kurvenevolutionen. So wird gezeigt, daß die Zykloide ihre eigene Evolute ist. Des weiteren findet sich hierin auch das Trägheitsprinzip und das Prinzip der Superposition von Bewegungen. Die von HUYGENS

[4] DESCARTES wurde 1596 in Le Haye als Sohn eines Juristen geboren. Vom 8. bis 16. Lebensjahr besuchte er das Jesuitenkolleg La Fleche. Nach unruhigen Jahren in Paris und anschließenden Aufenthalten in Holland und im Heer der Herzogs von Bayern bereiste er Italien und ist 1629 nach Holland übersiedelt. Im Jahre 1649 ist er auf Einladung der schwedischen Königin CHRISTINE nach Stockholm gegangen. Im darauffolgenden Jahr ist er an einer Lungenentzündung gestorben.

[5] HUYGENS wurde am 14. April 1629 in Haag geboren. Er studierte an der Universität Leyden und später in Breda. Seine besondere Begabung für Mathematik wurde schon früh von DESCARTES gerühmt. 1649 bereiste er Deutschland und Dänemark und promovierte danach in Angers (Frankreich). Er kehrte nach Holland zurück, wurde 1665 Mitglied der neu gegründeten Pariser Akademie und übersiedelte nach Paris. Ab 1681 wohnte er wieder in Holland, wo er 1695 in Haag verstarb.

Abbildung 1.4: *Christiaan Huygens*

abgeleiteten Ergebnisse haben sich ausnahmsweise bis zum heutigen Tage behauptet und sind Bestandteil der an den Universitäten gelehrten Mechanik.

Nur einige Monate nachdem Galilei starb wurde Isaac Newton[6],

dessen bahnbrechende Leistungen im Zentrum dieser Vorlesung stehen werden, geboren. Wahrscheinlich hat niemand die menschliche Naturerkenntnis so weit vorangetrieben wie er. Newton studierte die mathematischen Schriften von Descartes, Euklid's Elementargeometrie, die Arithmetik des Unendlichen von Wallis, die Optik Kepler's und die Logik Saunderson's.

Während einer erzwungenen einjährigen Abwesenheit von Cambridge, dem *annus mirabilis* 1665/66, bewies er die Abhängigkeit der Lichtbrechung von der Farbe (Dispersion), entwickelte die Differential- und Integralrechnung[7] und durch Verknüpfung von Keplers Gesetzen und Galileis Erkenntnissen entdeckte er die Schwerkraft.

Diese Entdeckungen und das später formulierte Gravitationsgesetz wurden 20 Jahre später in seinem Meisterwerk, der *'Principia'* veröffentlicht. Newtons drei Bewegungsgesetze lauten:

- ein Körper verharrt im Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung oder Ruhe, solange keine aktive Kraft auf ihn einwirkt,
- die Veränderung der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Körpers ist proportional zur auf ihn ausgeübten Kraft,
- jeder Aktion entspricht eine gleich große und entgegengesetzt gerichtete Reaktion.

[6] Newton wurde am 25.12.1642 in Lincolnshire, in der Nähe von Grantham, geboren. Ab 1661 studierte er am Trinity College in Cambridge. 1669 wurde er zum Lukasischen Professor für Mathematik ernannt. 1696 siedelte er von Cambridge nach London um, wo er bis zu seinem Tode blieb. Er starb am 20.02.1727 Kensington, London. Siehe [3]

[7] Wegen dieser Methode der Fluxonen kam es später zu einem erbitterten Prioritätenstreit mit Leibniz.

Abbildung 1.5: *Isaac Newton*

Er folgerte, dass die Schwerkraft zwischen zwei Körpern proportional zum Produkt der beiden Körpermassen und umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung ihrer Mittelpunkte ist[8],

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Bei der Ableitung dieses Gesetzes hat NEWTON keinen Gebrauch des ihm bekannten Integral und Differentialkalküls gemacht. Obwohl seine Berechnungen sich nur auf die Beobachtungen des Mondes und der damals bekannten Planeten stützte, bezeichnete er es ausdrücklich als allgemeines Gesetz der Schwerkraft: *„Hypotheses non fingo"(Ich erfinde keine Hypothesen).*

Mit der einheitlichen Darstellung der klassischen Mechanik, der Formulierung eines darauf aufbauenden physikalischen Weltbildes, der Vollendung der (nichtrelativistischen) Gravitationstheorie sowie der Entwicklung der Infinitesimal- und Integralrechunung hat sich ISAAC NEWTON unsterblich gemacht. Poeten haben zu seinen Ehren Gedichte verfasst, von denen der folgende Zweizeiler POPES das wohl bekannteste ist:

„All Nature and its laws lay hid in night
God said, let Newton be, and all was light"

Die Natur und ihre Gesetze lagen im Dunkeln
Gott sprach, es werde Newton, und alles wurde Licht

Kurz nach NEWTONS bahnbrechenden Beiträgen wurde die theoretische und analytische Mechanik von den BERNOULLIS, EULER und LAGRANGE weiterentwickelt und in ihre heutige Form gebracht. Die Brüder JAKOB und JOHANN BERNOULLI[9] machten sich zusammen

[8] HOOK hatte vor NEWTON die $1/r^2$-Abhängigkeit der Gravitationskraft postuliert.

[9] JAKOB (1654-1705) wurde als fünftes von elf Kindern in Basel geboren. Er hatte einen Lehrstuhl in seiner Heimatstadt Basel inne. JAKOB pflegte einen wichtigen Briefwechsel mit LEIPNIZ und war Mitglied der Pariser

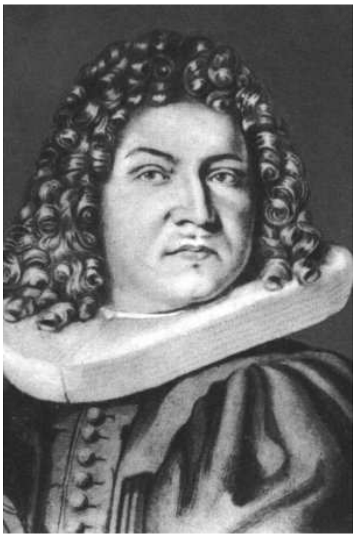

Abbildung 1.6: *Jakob Bernoulli*

um die Entwicklung und Verbreitung der Infinitesimalrechnung verdient. JAKOB löste das Problem der Isochrone und Brachistochrone, befasste sich mit der Kettenlinie, der Loxodrome und mit der logarithmischen Spirale (diese 'spire mirabilis' ließ er in seinen Grabstein einmeißeln).

Ein für die damalige Zeit typisches Problem war dasjenige der *Brachistrochrone*. Diese ist diejenige Kurve, welche zwei im homogenen Kraftfeld gelegene Punkte derart verbindet, daß die Zeit, die ein Körper benötigt, um entlang der Kurve reibungsfrei vom Punkt mit dem höheren Potential zum Punkt mit dem geringeren Potential zu gelangen, minimal wird. Die gesuchte Kurve wird durch diejenige Funktion $y(x)$ beschrieben, für die

$$\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx$$

minimal wird. Die Lösung ist eine Zykloide, die im höheren Punkt senkrecht beginnt und im niedrigen Punkt waagrecht endet,

$$x(t) = k(t - \sin t) \quad , \quad y(t) = k(1 - \cos t).$$

Die Zykloide ergibt sich als Bahnkurve eines Kreispunktes beim Abrollen eines Kreises mit Radius k auf einer Geraden, und zwar desjenigen Kreispunktes, der im Ursprung der Berührpunkt war. Anschaulich gesprochen bewegt sich ein Punkt auf dem Reifen eines Fahrrads auf einer Zykloide. Weiter schrieb JAKOB Arbeiten über die Reihenlehre, die Lösung von Differentialgleichungen (die Bernoullische Differentialgleichung ist nach ihm und seinem Bruder benannt) und die Variationsrechnung.

---

und Berliner Akademien. JOHANN (1667-1748) war das zehnte Kind und sein Bruder Jacob war sein Lehrer, mit dem er in späteren Jahren bezüglich wissenschaftlicher Arbeiten und Entdeckungen wetteiferte. 1695 nahm er eine Professur in Groningen an und 1705 trat er nach Jacobs Tod dessen Nachfolge in Basel an. DANIEL BERNOULLI (1700-1782), der Sohn von JOHANN, wurde in Groningen geboren. Er studierte in Basel, Heidelberg und Straßburg. Er arbeitete einige Jahre in Petersburg und kehrte 1729 nach Basel zurück.

Das Isochronenproblem wurde ebenfalls von JAKOB gelöst: bewegt sich ein Teilchen unter dem Einfluss der Gravitation längs einer *Isochronen*, dann braucht es vom Startpunkt bis um Fußpunkt immer die gleiche Zeit, unabhängig vom Startpunkt. Die entsprechende Bernoullische Differentialgleichung

$$y' = p(x)y + q(x)y^n$$

löste JAKOB BERNOULLI 1696 indem er die Variablen separierte. Obwohl wir hier nicht mehr weiter darauf eingehen, sei doch angemerkt, das JAKOBS wohl originellste Arbeiten auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie zu finden sind.

JOHANN BERNOULLI hatte ähnlich gelagerte Interessen wie sein älterer Bruder. Er war wohl der bedeutendste Mathematiker seiner Epoche und wurde „Archimedes seiner Zeit“ genannt. In der Newton-Leibniz Kontroverse unterstützte er LEIBNIZ indem er gewisse, mit NEWTONS Fluxionenmethode unlösbare Probleme, mit dem Kalkül von LEIBNIZ löste. JOHANN führte heftige Prioritätenstreite mit l'Hôpital (dessen Regel von JOHANN gefunden wurde) und seinem eigenen Sohn Daniel. Bekannt sind seine Arbeiten über die Erhaltung der kinetischen Energie, den Impulssatz und der Bedeutung des Prinzips der Verrückungen, welches in dieser Vorlesung eine wichtige Rolle spielen wird. Des weiteren unterrichtete er Leonhard Euler.

DANIEL BERNOULLI gilt als Begründer der Hydrodynamik und kinetischen Gastheorie und lieferte wesentliche Beiträge zur Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er formulierte das Superpositionsprinzip für die schwingende Seite und lieferte wichtige Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen.

LEONHARD EULER (1701-1783) war einer der produktivsten Naturwissenschaftler und hat unter anderem die Newtonschen Gedanken wesentlich weiterentwickelt[10]. Er lieferte wichtige Beiträge zur Kartographie, Astronomie, Geometrie (Theorie der Flächen, Krümmung von Flächen), Topologie (Euler Charakteristik), Analysis (Differentialgleichungen, Beta- und Gamma Funktionen, Sinus- und Cosinusfunktionen) und Zahlentheorie (Eulerkonstante). So konnte er zeigen, daß

$$2^n + 1 \quad \text{mit} \quad n = 2^m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

nicht immer eine Primzahl ist (wie von Fermat vermutet) und bewies eine andere Fermatsche Vermutung. Bemerkenswert und beachtet waren seine Resultate über die Summation von unendlichen Reihen. So löste er das so-genannte *Basler Problem* an welchem sich seine Vorgänger und Zeitgenossen vergeblich versuchten, nämlich eine geschlossene Form für

$$\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2}$$

abzuleiten. Das Resultat ist $\pi^2/6$. Er zeigte allgemeiner, daß

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} = \prod_{\text{Primzahlen}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

[10] LEONHARD EULER wurde am 15. April 1707 in Basel geboren. Ab 1727 trat er eine Stelle an der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg an wo er 1930 zum Professor ernannt wurde. 1741 nahm er eine Stelle in Berlin an (ab 1744 in der neugegründeten Akademie der Wissenschaften). Nach MAUPERTUIS Tod wurde er 1759 Leiter der Akademie. 7 Jahre später kehrte EULER nach 25 Jahren in Berlin nach St. Petersburg zurück, wo er teilweise erblindete und ab 1771 vollständig blind wurde. Am 18. September 1783 verstarb er ebenda.

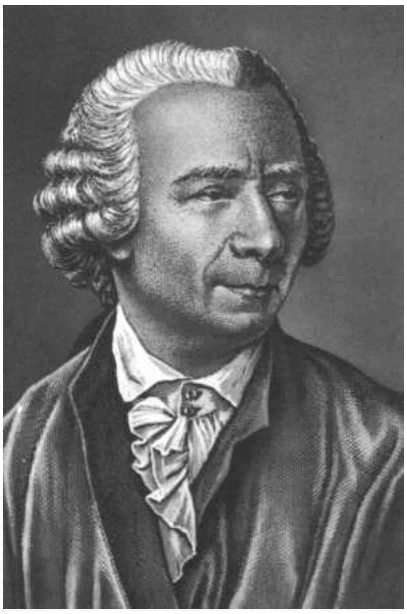

Abbildung 1.7: *Leonhard Euler*

gilt. EULER leistet wesentliche Beiträge zur Variationsrechnung in *'Methodus inveniendi lineas curvas ...'*, In seiner *'Mechanik oder die analytische Abhandlung der Bewegunglehre'* hat er den Begriff des Massenpunktes eingeführt und die Eigenschaften von krummlinigen Bewegungen weiter untersucht. In *'Die Entdeckung eines neuen Prinzips der Mechanik'* findet sich erstmalig der analytische Zusammenhang

$$\mathfrak{F} = m \cdot \mathfrak{a},$$

welcher von Massenpunkten auf Massenelemente und damit auf Kontinua ausgedehnt wurde. Damit war EULER in der Lage, die nach ihm benannten Gleichungen für (ideale) Flüssigkeitsströmungen sowie für die Bewegung starrer Körper, die im Massenmittelpunkt festgehalten werden, herzuleiten. Die letzteren werden in dieser Vorlesung besprochen werden. EULER hat bei der Untersuchung von starren Körpern das Trägheitsmoment und die Hauptträgheitsachsen eingeführt. Auch die heute noch gültige Fassung des Prinzips von MAUPERTUIS (er hat es früher und genauer formuliert als MAUPERTUIS), nachdem die tatsächlichen Bahnen von Massenpunkten einem Extremalprinzip genügen, stammt von EULER. Er gilt damit zu Recht als Begründer der Variationsrechnung, die in dieser Vorlesung eine zentral Rolle einnehmen wird.

JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736-1813)[11] hat bereits 1756 die Variationsrechnung auf die Mechanik angewandt und frühere Resultate von EULER verallgemeinert. Die hier auftretende Funktion und Variationsgleichungen zweiter Art tragen seinen (und EULERS) Namen und

[11] LAGRANGE wurde am 25. Januar 1736 in Turin als ältestes von elf Kindern geboren. Schon mit 19 Jahren wurde er zum Mathematikprofessor an der königlichen Artillerieschule in Turin berufen. Ab 1754 hatte LAGRANGE regen Briefkontakt mit EULER in Berlin. Im November 1766 wurde er Direktor an der Berliner Akademie der Wissenschaften und damit Nachfolger EULERS. Nach 20 Jahren in Berlin nahm er 1787 eine Stelle an der Akademie der Wissenschaften in Paris an. Im April 1813 starb er ebenda.

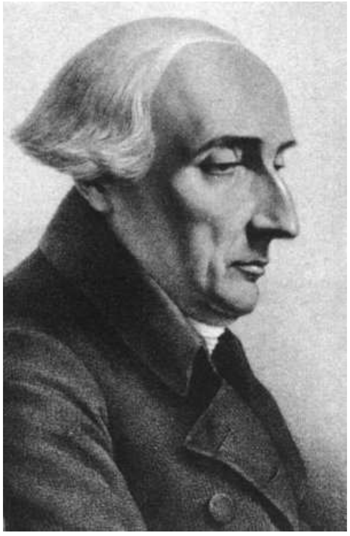

Abbildung 1.8: *Joseph-Louis Lagrange*

werden im zweiten Teil der Vorlesung eine große Rolle spielen. LAGRANGE lieferte wichtige Beiträge zur Schallausbreitung, der Theorie der schwingenden Saite, der Dynamik der Flüssigkeiten (wo er die Lagrangefunktion einführte), den Planetenbewegungen und dem Dreikörperproblem (die Lagrangeschen Punkte werden wir noch kennenlernen). Wie bei EULER sind seine Beiträge zur Zahlentheorie beachtlich. So zeigte er, daß jede natürliche Zahl die Summe von vier Quadraten ist oder daß n eine Primzahl ist genau dann, wenn $(n-1)!+1$ durch n teilbar ist. In seinem 1788 erschienen Buch *'Mécanique analytique'* fasste er die seit NEWTON erreichten Resultate in der Mechanik zusammen und machte wesentlichen Gebrauch von der Theorie der Differentialgleichungen (das Buch enthält keine einzige Figur, und LAGRANGE war stolz darauf).

WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865) [12] war einer der bedeutendsten Mathematiker und theoretischen Physiker seiner Zeit. Er lieferte wichtige Beiträge zur Wellentheorie des Lichts und der Strahlenoptik, die er auf Variationsprinzipien gründete. Aufbauend auf den Arbeiten von LAGRANGE, entwickelte er die analytische Mechanik weiter. Er fand das Hamiltonsche Prinzip und stellte die Hamilton-Gleichungen auf. Beide, wie auch die Hamilton-Jacobi-Gleichung, werden einen großen Raum in dieser Vorlesung einnehmen. Seine Formulierung der Mechanik im Phasenraum ist die Hamiltonsche Mechanik. HAMILTON begründete 1843 die Quaternionenrechnung, die in den Rest seines Lebens beschäftigte. Die von ihm in die Steine der Brougham Brücke eingemeiselten berühmten Formeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

[12] HAMILTON wurde am 4. August in Dublin geboren. Er war ein Wunderkind und sprach bereits im Alter von 5 Jahren Latein, Griechisch und Hebräisch und noch in jugendlichen Jahren 14 Sprachen. Mit 15 Jahren studierte er die Arbeiten von NEWTON und LAPLACE und als 17-jähriger fand er einen Fehler in der *'Mécanique céleste'* von LAPLACE. 1827 wurde er zum Professor für Astronomie ans Trinity College berufen. Von 1837-45 war er Präsident der Royal Irish Academy. Er starb am 2. September 1865 im Observatorium Dunsink nahe Dublin. Sein Leben verlief nicht immer geradlinig, woran seine Beziehung zu Frauen, und hier insbesonders Catherine Disney, und dem Alkohol nicht ganz unwesentlichen Einfluss hatten.

Abbildung 1.9: *William Rowan Hamilton*

deuten an, wie wichtig er seine Entdeckung der Quaternionen beurteilte: *„I still must assert that this discovery appears to me to be as important for the middle of the nineteenth century as the discovery of fluxions [the calculus] was for the close of the seventeenth.“*

Im Jahre 1905 publizierte Albert Einstein (1879-1955)[13] drei berühmte Arbeiten in den Annalen der Physik, eine davon über die spezielle Relativitätstheorie mit dem Titel *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Darin zeigte er, dass für schnelle Relativgeschwindigkeiten die Gesetze der klassischen Newtonschen Mechanik ihre Gültigkeit verlieren. Man findet eine Längenkontraktion in Bewegungsrichtung und eine Zeitdilatation. Im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik war die relativistische Mechanik mit den Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik verträglich. Mit seiner Speziellen Relativitätstheorie von 1905 und der Allgemeinen Relativitätstheorie von 1915 revolutionierte Einstein das Verständnis von Raum und Zeit. Diese und und eine Fülle weiterer Beiträge (zur Lichtquantenhypothese, Brownschen Bewegung, ersten Quantentheorie der spezifischen Wärme, Atomphysik, Bose-Einstein-Statistik) machen ihn zu einem der bedeudendsten Wissenschaftler des vergangenen Jahrhunderts. Im letzten Kapitel dieser Vorlesung werden wir die relativistische Mechanik besprechen und einige der interessantesten Anwendungen, zum Beispiel die berühmte Formel

$$E = mc^2,$$

welche die Äquivalenz zwischen Energie und Masse ausdrückt, kennenlernen. Hier ist nicht der Platz um auf Einsteins unglaublich tiefgründige Beiträge zur Physik näher einzugehen.

[13]Einstein wurde am 14.3.1879 in Ulm geboren und ging in München und Aargau zur Schule. Er studierte an der ETH in Zürich. 1902 wurde er vom Patentamt in Bern als Gutachter angestellt. 1911 nahm er ein Professur in Prag an und ein Jahr später in Zürich. Im Jahr 1914 wurde er als hauptamtliches Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften berufen und 1917 wurde er Direktor am neu gegründeten Kaiser Wilhelm Institut für Physik in Berlin. Zwanzig Jahre später wechselte er aus politischen Gründen ans Princeton Institute for Advanced Studies. 1921 wurde ihm für die Erklärung des lichtelektrischen Effekts der Nobelpreis verliehen. Albert Einstein starb am 18.4.1955 in Princeton.

Ich verweise auf die unzähligen Biographien über diesen interessanten theoretischen Physiker, z.B. [4]

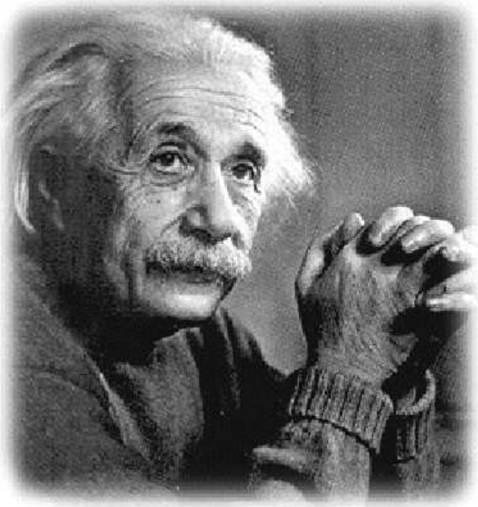

Abbildung 1.10: *Albert Einstein*

1.2.1 Wichtige Ereignisse in der klassischen Mechanik im Überblick

- -260: Archimedes arbeitet die Hebelgesetze mathematisch aus und entdeckt das Prinzip des Auftriebs.
- 60: Hero von Alexandria schreibt *Metrica Mechanics* und *Pneumatics*.
- 1589: Galileo Galilei zeigt, daß auf schiefen Ebenen rollende Bälle von unterschiedlichem Gewicht mit derselben Beschleunigung fallen.
- 1638: Galileo Galilei veröffentlicht die Dialoge über zwei neue Wissenschaften.
- 1658: Christian Huygens findet, daß Bälle in einer invertierten Zykloide den niedrigsten Punkt der Zykloide zur gleiche Zeit erreichen und zeigt damit experimentell, daß die Zykloide die Isochrone ist.
- 1668: John Wallis schlägt die Erhaltung des Impulses vor.
- 1687: Isaac Newton veröffentlicht die *'Principia Mathematica'*.
- 1690: Jakob Bernoulli beweist das die Zykloide die Lösung des Isochronenproblems ist.
- 1696: Johann Bernoulli zeigt, daß die Zykloide das brachistochrone Problem löst.
- 1734: Daniel Bernoulli löst die gewöhnliche Differentialgleichung für die Schwingungen eines einseitig fixierten elastischen Stabes.
- 1738: Daniel Bernoulli untersucht Flüssigkeitsströmungen.

- 1739: Leonhard Euler löst die gewöhnliche Differentialgleichung für den angetriebenen harmonischen Oszillator und bemerkt das Resonanzphänomen.
- 1742: Colin Maclaurin entdeckt gleichmäßig rotierende und selbst-gravitierende Rotations-Ellipsoide.
- 1747: Pierre-Louis Moreau de Maupertuis wendet das Minimalprinzip auf die Mechanik an.
- 1759: Leonhard Euler löst die partielle Differentialgleichung für die Schwingungen einer rechteckigen Trommel.
- 1764: Leonhard Euler untersucht die partielle Differentialgleichung für eine kreisförmige Trommel und entdeckt die Besselfunktionen.
- 1788: Joseph Lagrange stellt seine Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in *'Mécanique Analytique'* vor.
- 1789: Antoine Lavoisier formuliert das Gesetz von der Erhaltung der Masse.
- 1821: William Hamilton beginnt seine Untersuchungen über seine charakteristische Funktion.
- 1834: Carl Gustav Jacobi entdeckt seinen gleichmäßig rotierenden selbst-gravitierenden Ellipsoid.
- 1834: John Russell beobachtet eine stabile solitonartige Wasserwelle im Union Kanal nahe Edinburgh.
- 1835: William Hamilton stellt seine kanonischen Bewegungsgleichungen auf.
- 1835: Gaspard de Coriolis untersucht die Bewegungen auf einer drehenden Oberfläche und deduziert den Corioleseffekt.
- 1842: Christian Doppler untersucht die Dopplerverschiebung von Schall.
- 1847: Hermann Helmholtz formuliert das Gesetz von der Energieerhaltung.
- 1851: Jean-Bernard Foucault zeigt die Erdrotation mit einem riesigen Pendel.
- 1902: James Jeans findet die Längenskala die nötig ist, damit gravitative Instabilitäten anwachsen können.
- 1905: Albert Einstein legt die Grundlagen zur Speziellen Relativitätstheorie.