

# Theoretische Mechanik

Prof. A. Wipf

Theoretisch-Physikalisches-Institut

Friedrich-Schiller-Universität, Max Wien Platz 1

07743 Jena

Wintersemester 2002/2003

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ursprünge der klassischen Mechanik</b>	<b>1</b>
1.1	Literaturhinweise . . . . .	1
1.2	Einführung, Historisches . . . . .	3
1.2.1	Wichtige Ereignisse in der klassischen Mechanik im Überblick . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Kinematik des Massenpunktes</b>	<b>18</b>
2.1	Einführendes . . . . .	18
2.2	Die Euklidische Geometrie des Raumes . . . . .	20
2.3	Der Zeitbegriff in der Newtonschen Mechanik . . . . .	24
2.4	Eigenschaften von Inertialsystemen . . . . .	26
2.4.1	Punktteilchen in Inertialsystemen . . . . .	26
2.4.2	Übergang zwischen Inertialsystemen . . . . .	27
2.4.3	Galileisches Relativitätsprinzip . . . . .	32
2.5	Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	34
2.6	Krummlinige Koordinatensysteme . . . . .	37
2.6.1	Übergang von kartesischen zu krummlinigen Koordinaten . . . . .	38
2.6.2	Differentialoperatoren . . . . .	41
2.6.3	Teilchenbahnen in krummlinigen Koordinatensystemen . . . . .	43
2.6.4	Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Dynamik von Massenpunkten</b>	<b>46</b>

3.1	Die träge Masse und Kräfte . . . . .	47
3.1.1	Beschleunigte Bezugssysteme und Scheinkräfte . . . . .	49
3.1.2	Bewegungen auf der rotierenden Erde . . . . .	53
3.2	Erhaltungssätze . . . . .	56
3.2.1	Der Impulssatz . . . . .	56
3.2.2	Der Drehimpulssatz . . . . .	56
3.2.3	Energiesatz . . . . .	59
3.3	Lösungen der Bewegungsgleichung . . . . .	63
3.3.1	Konstante Kräfte . . . . .	63
3.3.2	Oszillatoren . . . . .	65
3.3.3	Reibungskräfte . . . . .	68
3.4	Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .	74
3.4.1	Matrix-Exponentialfunktion . . . . .	74
3.4.2	Stabilität von linearen Systemen I . . . . .	82
3.5	Erzwungene Schwingungen . . . . .	84
3.6	Anhang: Matrixfunktionen . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Mehrkörpersysteme</b>	<b>93</b>
4.1	Erhaltungssätze der Punktmechanik . . . . .	94
4.1.1	Der Impulssatz oder der Schwerpunktsatz . . . . .	94
4.1.2	Der Drehimpulssatz . . . . .	96
4.1.3	Der Energiesatz . . . . .	98
4.2	Gekoppelte Pendel . . . . .	101
4.3	Das Zweikörperproblem . . . . .	104
4.3.1	Kepler- und Coulomb-Problem . . . . .	107
4.4	Zwei-Körper-Zerfall eines Teilchens . . . . .	114
4.5	Elastische Streuung . . . . .	117
4.5.1	Streuprozeß im Schwerpunktsystem . . . . .	118
4.5.2	Wirkungsquerschnitte . . . . .	121

4.5.3	Rutherford Streuung . . . . .	123
4.5.4	Transformation ins Laborsystem . . . . .	124
4.6	Bemerkungen zum Dreikörperproblem . . . . .	125
4.6.1	Exakte Lösungen . . . . .	126
4.6.2	Numerische Integration des ebenen Dreikörperproblems . . . . .	130
<b>5</b>	<b>Starre Körper</b>	<b>133</b>
5.1	Bewegungen des starren Körpers . . . . .	133
5.1.1	Translationen des starren Körpers . . . . .	134
5.1.2	Drehbewegungen . . . . .	135
5.1.3	Eulersche Winkel . . . . .	137
5.2	Rotationsenergie und Trägheitstensor . . . . .	139
5.2.1	Eigenschaften des Trägheitstensors, Beispiele . . . . .	142
5.3	Drehimpuls und kräftefreie symmetrische Kreisel . . . . .	147
5.3.1	POINOT-Darstellung der Trägheitsdrehbewegung . . . . .	147
5.3.2	Kräftefreie symmetrische Kreisel . . . . .	148
5.4	Eulersche Gleichungen und Stabilitätsanalyse . . . . .	152
5.5	Kräftefreie unsymmetrische Kreisel . . . . .	153
5.5.1	Die elliptischen Funktionen von JACOBI und Theta-Funktionen . . . . .	155
5.5.2	Trägheitsdrehbewegung in den EULERSchen Winkeln . . . . .	159
5.6	Der schwere symmetrische Kreisel I . . . . .	163
<b>6</b>	<b>Zwangsbedingungen und Zwangskräfte</b>	<b>166</b>
6.1	Zwangskräfte und sphärisches Pendel . . . . .	166
6.1.1	Das sphärische Pendel . . . . .	167
6.2	Holonome und anholonome Nebenbedingungen . . . . .	173
6.3	Lagrange-Gleichungen 1. Art und d'Alembert-Prinzip . . . . .	175
6.3.1	Energiesatz . . . . .	176
6.3.2	Elimination der Lagrangeschen Multiplikatoren . . . . .	177

<b>7</b>	<b>Lagrangesche Mechanik</b>	<b>179</b>
7.1	Verallgemeinerte Koordinaten . . . . .	179
7.2	Lagrange-Funktion . . . . .	182
7.2.1	Rollpendel, zyklische Koordinaten . . . . .	183
7.2.2	Homogenität der Zeit und Energieerhaltung . . . . .	187
7.3	Kreisel im Lagrange Formalismus . . . . .	188
7.3.1	Schwere symmetrische Kreisel II . . . . .	190
7.4	Eichtransformationen . . . . .	192
7.5	Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen . . . . .	195
7.6	Symmetrien und Erhaltungsgrößen: Noether-Theorem . . . . .	196
7.6.1	Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung . . . . .	198
7.6.2	Homogenität des Raumes und Impulserhaltung . . . . .	199
<b>8</b>	<b>Hamiltonsches Prinzip</b>	<b>201</b>
8.1	Variationsrechnung . . . . .	201
8.1.1	Geodätische Linien . . . . .	203
8.1.2	Die Brachystochrone . . . . .	204
8.1.3	Mehrere abhängige oder/und unabhängige Variable . . . . .	206
8.2	Isoperimetrische Probleme . . . . .	208
8.3	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	209
8.4	Anhang: Differenziation in $\infty$ -dimensionalen Räumen. . . . .	211
<b>9</b>	<b>Hamilton'sche Mechanik</b>	<b>216</b>
9.1	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen . . . . .	217
9.1.1	Beispiele . . . . .	219
9.1.2	Die Legendre-Transformation . . . . .	220
9.1.3	Phasenraum, Trajektorien und Flüsse . . . . .	224
9.2	Zeitliche Änderung von Observablen . . . . .	226
9.2.1	Poisson-Klammern . . . . .	227
9.3	Kanonische Transformationen . . . . .	230

9.3.1	Eingeschränkte kanonische Transformationen . . . . .	230
9.4	Erzeugende Funktionen . . . . .	234
9.4.1	Die Erzeugende $F_5(t, q, p)$ . . . . .	235
9.4.2	Die Erzeugende $F_1(t, q, Q)$ . . . . .	236
9.4.3	Die Erzeugende $F_2(t, q, P)$ . . . . .	237
9.4.4	Zusammenhang zwischen den Erzeugenden . . . . .	239
9.4.5	Die Erzeugenden im Überblick . . . . .	239
9.5	Theorem von Liouville . . . . .	240
9.6	Elementare Hamilton-Jacobi Theorie . . . . .	245
9.6.1	Die Prinzipalfunktion $F_2(t, q, P)$ . . . . .	246
9.6.2	Beispiele . . . . .	248
9.6.3	Wirkungs- und Winkelvariablen . . . . .	250