Theoretische Mechanik

Prof. A. Wipf

Theoretisch-Physikalisches-Institut

Friedrich-Schiller-Universität, Max Wien Platz 1

07743 Jena

Wintersemester 2001/2002

Inhaltsverzeichnis

1 Die Ursprünge der klassischen Mechanik **5**

1.1 Literaturhinweise 5

1.2 Einführung, Historisches 7

1.2.1 Wichtige Ereignisse in der klassischen Mechanik im Überblick 19

2 Kinematik des Massenpunktes **21**

2.1 Einführendes 21

2.2 Die Euklidische Geometrie des Raumes 23

2.3 Der Zeitbegriff in der Newtonschen Mechanik 27

2.4 Eigenschaften von Inertialsystemen 29

2.4.1 Punktteilchen in Inertialsystemen 29

2.4.2 Übergang zwischen Inertialsystemen 30

2.4.3 Galileisches Relativitätsprinzip 34

2.5 Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung 36

2.6 Krummlinige Koordinatensysteme 39

2.6.1 Übergang von kartesischen zu krummlinigen Koordinaten 40

2.6.2 Differentialoperatoren 42

2.6.3 Teilchenbahnen in krummlinigen Koordinatensystemen 45

3 Dynamik von Massenpunkten **47**

3.1 Die träge Masse und Kräfte 48

3.1.1 Beschleunigte Bezugssysteme und Scheinkräfte 49

3.1.2 Bewegungen auf der rotierenden Erde 53

3.2 Erhaltungssätze 55

3.2.1 Der Impulssatz 55

3.2.2 Der Drehimpulssatz 55

3.2.3 Energiesatz 58

3.3 Lösungen der Bewegungsgleichung . . . 61
3.3.1 Konstante Kräfte . . . 62
3.3.2 Oszillatoren . . . 63
3.3.3 Reibungskräfte . . . 67
3.4 Lineare Differentialgleichungssysteme . . . 72
3.4.1 Matrix-Exponentialfunktionen . . . 73
3.4.2 Stabilität von linearen Systemen I . . . 80
3.5 Erzwungene Schwingungen . . . 81

4 Mechanik von N-Körpersystemen 86
4.1 Erhaltungssätze der Punktmechanik . . . 87
4.1.1 Der Impulssatz oder der Schwerpunktsatz . . . 87
4.1.2 Der Drehimpulssatz . . . 89
4.1.3 Der Energiesatz . . . 91
4.2 Schwingungen des Doppelpendels . . . 93
4.3 Das Zweikörperproblem . . . 97
4.3.1 Kepler- und Coulomb-Problem . . . 100
4.4 Zwei-Körper-Zerfall eines Teilchens . . . 108
4.5 Elastische Streuung . . . 110
4.5.1 Streuprozeß im Schwerpunktsystem . . . 111
4.5.2 Wirkungsquerschnitte . . . 114
4.5.3 Rutherford Streuung . . . 116
4.5.4 Transformation ins Laborsystem . . . 117

5 Starre Körper 119
5.1 Bewegungen des starren Körpers . . . 119
5.1.1 Translationen des starren Körpers . . . 120
5.1.2 Drehbewegungen . . . 121
5.1.3 Eulersche Winkel . . . 123
5.2 Rotationsenergie und Trägheitstensor . . . 125
5.2.1 Eigenschaften des Trägheitstensors, Beispiele . . . 126
5.3 Drehimpuls und kräftefreie symmetrische Kreisel . . . 130
5.3.1 Poinsot-Darstellung der Trägheitsdrehbewegung . . . 130
5.3.2 Kräftefreie symmetrische Kreisel . . . 132
5.4 Eulersche Gleichungen und Stabilitätsanalyse . . . 135
5.5 Kräftefreie unsymmetrische Kreisel . . . 136
5.5.1 Die elliptischen Funktionen von Jacobi und Theta-Funktionen . . . 138

5.5.2 Trägheitsdrehbewegung in den EULERschen Winkeln . . . 142
5.6 Der schwere symmetrische Kreisel I . . . 147

6 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte 149
6.1 Zwangskräfte und sphärisches Pendel . . . 149
6.1.1 Das sphärische Pendel . . . 150
6.2 Holonome und anholonome Nebenbedingungen . . . 153
6.3 Lagrange-Gleichungen erster Art und d'Alembert-Prinzip . . . 156
6.3.1 Energiesatz . . . 157
6.3.2 Elimination der LAGRANGEschen Multiplikatoren . . . 158

7 Lagrangesche Mechanik 160
7.1 Verallgemeinerte Koordinaten . . . 160
7.2 Lagrange-Funktion . . . 163
7.2.1 Rollpendel, zyklische Koordinaten . . . 164
7.2.2 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung . . . 167
7.3 Kreisel im Lagrange Formalismus . . . 168
7.3.1 Schwere symmetrische Kreisel II . . . 169
7.4 Eichtransformationen . . . 171
7.5 Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen . . . 174
7.6 Symmetrien und Erhaltungsgrößen: Noether-Theorem . . . 175
7.6.1 Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung . . . 177
7.6.2 Homogenität des Raumes und Impulserhaltung . . . 179

8 Hamiltonsches Prinzip 180
8.1 Variationsrechnung . . . 180
8.1.1 Geodätische Linien . . . 182
8.1.2 Die Brachystochrone . . . 183
8.1.3 Mehrere abhängige oder/und unabhängige Variable . . . 184
8.2 Isoperimetrische Probleme . . . 187
8.3 Hamiltonsches Prinzip . . . 188
8.4 Anhang: Differenziation in ∞-dimensionalen Räumen. . . . 190

9 Hamilton'sche Mechanik 195
9.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen . . . 196
9.1.1 Beispiele . . . 198
9.1.2 Die Legendre-Transformation . . . 199

9.1.3 Der Phasenraum . . . 203
9.2 Zeitliche Änderung von Observablen . . . 205
9.2.1 Poisson-Klammern . . . 206
9.3 Kanonische Transformationen . . . 209
9.3.1 Eingeschränkte kanonische Transformationen . . . 209
9.3.2 Kanonische Transformationen für das Dreikörperproblem . . . 213
9.4 Erzeugende Funktionen . . . 219
9.4.1 Die Erzeugende $F_5(t, q, p)$ . . . 220
9.4.2 Die Erzeugende $F_1(t, q, Q)$ . . . 220
9.4.3 Die Erzeugende $F_2(t, q, P)$ . . . 222
9.4.4 Zusammenhang zwischen den Erzeugenden . . . 223
9.4.5 Die Erzeugenden im Überblick . . . 223
9.5 Theorem von Liouville . . . 225
9.6 Elementare Hamilton-Jacobi Theorie . . . 230
9.6.1 Die Prinzipalfunktion $F_2(t, q, P)$ . . . 230
9.6.2 Beispiele . . . 232
9.6.3 Wirkungs- und Winkelvariablen . . . 235