Friedrich-Schiller-Universität Jena Wintersemester 2016
Prof. Dr. Andreas Wipf
Dr. Luca Zambelli

Übungen zu Symmetrien in der Physik

Blatt 6

Aufgabe 22: Fundamentalgruppen

Man bestimme die Fundamentalgruppen von

- dem N-dimensionalen Torus T^N,
- dem reellen projektiven Raum $RP^n = \left(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}\right) / \sim$, wobei $x \sim \lambda x$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- dem komplexen projektiven Raum $CP^n = \left(\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\right) / \sim$, wobei $x \sim \lambda x$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

Aufgabe 23: Nebenklassen

Welche Mannigfaltigkeiten sind die Räume $SO(N)/SO(N-1)$ und $SU(N)/SU(N-1)$?

Aufgabe 24: Die nicht-kompakte Liegruppe SU(1,1)

- Versuchen Sie eine ähnliche Parametrisierung für SU(1,1) zu finden wie für SU(2),
$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad |a|^2 - \dots\,.$$
- Benutzen Sie die Parametrisierung
$$a = \cosh(r)e^{i\phi}, \quad b = \sinh(r)e^{i\psi}$$
und extrahieren Sie damit die metrischen Koeffizienten g_{ij} aus $ds^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(U^{-1}dUU^{-1}dU)$.
- Was ist das (invariante) Volumenelement $d\mu = \sqrt{-g}drd\phi d\psi$?
- Wir schreiben $U^{-1}dU = Adr + Bd\phi + Cd\psi$ mit Matrizen A, B, und C. Beweise
$$\omega \equiv \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\left(U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU\right) = \mathrm{tr}\,\left(A[B,C]\right) dr \wedge d\phi \wedge d\psi$$
und berechnen Sie nun damit die invariante Volumenform ω.
- Zeigen Sie, dass die Gruppenmannigfaltigkeit von $SU(1,1)$ gleich dem AdS_3-Raum ist. Dessen Einbettung in $\mathbb{R}^4$ ist definiert durch
$$\mathrm{AdS}_3 = \{X \in \mathbb{R}^4 \,|\, X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = 1\}\,.$$
- Was lernen Sie daraus über die Fundamentalgruppe von SU(1,1)?
- Überzeugen Sie sich davon, dass SU(1,1)$\cong$ SL(2,$\mathbb{R}$).
Hinweis: Es existiert eine Matrix C, so dass CUC^{-1} reell ist für alle $U \in$SU(1,1).