Friedrich-Schiller-Universität Jena
Prof. Dr. Andreas Wipf
Dr. Luca Zambelli

Wintersemester 2016/17

Übungen zu Symmetrien in der Physik

Blatt 5

Problem 17: Globale Eigenschaften

Zeigen Sie, dass SO(3) nicht einfach zusammenhängend ist, d.h. nicht jede geschlossene Kurve in SO(3) ist zusammenziehbar.

Problem 18: Symplektische Gruppen

Es sei $B(x,y)$ eine schiefsymmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^{2n}$, gegeben durch

$$B(x,y) = \big(x, Jy\big), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Matrizen lassen diese Bilinearform invariant. Zeige, dass diese eine Lie-Untergruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ von $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ bilden. Wie ist wohl $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ definiert.

Problem 19: Isomorphien

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}(1,\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und $\mathrm{Sp}(1,\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ist.

Problem 20: Polarzerlegung von SL$(n,\mathbb{R})$

Zeigen Sie, dass jedes Element $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ eindeutig faktorisiert werden kann, $A = RH$, wobei R in $\mathrm{SO}(n)$ ist und H eine symmetrische, positiv-definite Matrix mit $\det(H) = 1$ ist, d.h. es gilt $(x, Hx) = (Hx, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Hinweis: Betrachte $A^T A$ um H zu charakterisieren.

Problem 21: Spur 1

Zeigen Sie, dass die Spur des direkten Produkts von zwei Matrizen A und B das Produkt ihrer Spuren ist:

$$\mathrm{Sp}\,(A \otimes B) = \mathrm{Sp}(A)\mathrm{Sp}(B)\,.$$

Problem 21: Spur 2

Zeigen Sie, das die Spur eines Produkts von n-dimensionalen Matrizen $A_1, \ldots, A_k$ invariant unter zyklischer Vertauschung der Matrizen ist,

$$\mathrm{Sp}\,(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k) = \mathrm{Sp}\,(A_k A_1 A_2 \cdots A_{k-1})\ .$$