

Übungen zu Symmetrien in der Physik

Blatt 3

Problem 13: Spiegelebenen

Sei σ eine Spiegelung an der Ebene definiert durch den Normalenvektor $\mathbf{n}$ und R eine Drehung um eine feste Achse. Zeigen Sie, dass $\sigma' = R\sigma R^{-1}$ eine Spiegelung an der Ebene definiert durch den Normalenvektor $R\mathbf{n}$ ist.

Problem 14: Quaternionengruppe

Im Folgenden seien σ_0 die Identität und σ_k die drei hermiteschen und spurfreien Pauli-Matrizen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass die σ_k zusammen mit der Einheitsmatrix eine Gruppe bilden. Welche Elemente enthält die von diesen Matrizen erzeugte Gruppe?
2. Die Matrizen $i\sigma_k$ erzeugen die Quaternionengruppe $\mathcal{Q}$. Bestimmen Sie die Gruppentafel von $\mathcal{Q}$. Ist die Gruppe isomorph zu einer Ihnen bekannten Gruppe?
3. Es gibt insgesamt 5 nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung 8. Bis auf die Quaternionengruppe lassen sich alle als direktes oder semidirektes Produkt aus den Ihnen bekannten Gruppen zweiter (C_2) und vierter (C_4 und Kleinsche Vierergruppe $\cong D_2$) Ordnung aufbauen. Wie? Geben Sie bei einem semidirekten Produkt an, wie der erste Faktor auf den zweiten wirkt. Welche der Gruppen ist abelsch?

Problem 15: Die Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$

Eine reelle Linearkombination der (σ_0, σ_k) sei gegeben durch

$$(x, \sigma) = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

- Man zeige, dass $x^\mu = \frac{1}{2} \text{tr}[\bar{\sigma}^\mu(x, \sigma)]$ gilt. Hier ist

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0, \quad \bar{\sigma}_k = -\sigma_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dies bedeutet, dass die Abbildung $x^\mu \rightarrow (x, \sigma)$ eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^4$ auf den linearen Raum der 2-dimensionalen hermiteschen Matrizen ist.

- Man berechne $\det(x, \sigma)$.
- Sei $A \in SL(2, \mathbb{C})$ eine 2-dimensionale komplexe Matrix mit Determinante 1. Warum ist die Matrix $A(x, \sigma)A^\dagger$ wieder eine Linearkombination der Form (y, σ) ?
- Man zeige, dass die Abbildung $x \rightarrow y$, definiert durch $(y, \sigma) = A(x, \sigma)A^\dagger$, linear ist und somit in der Form $y^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ geschrieben werden kann. Ist dies eine Lorentz-Transformation?

- Man zeige, dass die nicht-lineare Abbildung $A \rightarrow \Lambda(A)$, gegeben durch $(\Lambda x, \sigma) = A(x, \sigma)A^\dagger$, ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SO}(1, 3)_+^\uparrow$ ist. Ist diese Abbildung auch ein Isomorphismus?

Problem 16: Zur Landau-Theorie des Ferromagnetismus)

In der Landau-Theorie des Ferromagnetismus hat die freie Energie – als Funktion der absoluten Temperatur T und der Magnetisierung (des Ordnungsparameters) $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$ – die Form

$$F(\mathbf{m}, T) = a(T - T_c)\mathbf{m}^2 + b(\mathbf{m}^2)^2.$$

1. Die Symmetrien der freien Energie bilden die ungebrochene Symmetriegruppe G . Um welche Gruppe handelt es sich?
2. Die Menge der Ordnungparameter, welche bei einer gegebenen Temperatur die freie Energie minimieren, bilden den reduzierten Ordnungsparameterraum $\mathcal{M}$ (in der Teilchenphysik heißt $\mathcal{M}$ Vakuum-Mannigfaltigkeit). Was ist $\mathcal{M}$ für $T < T_c$ und für $T > T_c$?
3. Man spricht von einer spontanen Symmetriebrechung, wenn die Stabilisatorgruppe $H = \{R \in G \mid R\mathbf{m} = \mathbf{m}\}$ kleiner als die ungebrochene Symmetriegruppe ist. Was ist H oberhalb und unterhalb der kritischen Temperatur T_c ? Wann liegt spontane Symmetriebrechung vor?
4. Betrachten Sie eine feste Magnetisierung $\mathbf{m}_0$ im Fall $T < T_c$. Verdeutlichen Sie, dass die Anwendung von G auf $\mathbf{m}_0$ den gesamten Ordnungsparameterraum ergibt.
5. Ist die Linkswirkung von G auf $\mathcal{M}$ treu, frei oder transitiv?
6. Versuchen Sie, G/H zu bestimmen.