Lie-Gruppen

- kontinuierliche Gruppen: Elemente können stetig ändern
- Beispiel O(3): Eulerwinkel $(\psi, \theta, \varphi) \mapsto R(\psi, \theta, \varphi) \in \mathrm{SO}(3)$
- allgemein: Koordinaten $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto g(\alpha)$ und

$$g(\alpha)g(\beta) = g(\gamma), \qquad \gamma = m(\alpha, \beta), \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$$

- $n =$ Dimension der Gruppe
- existieren i.A. keine globalen Koordinaten $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
  $\Rightarrow$ Gruppe durch Koordinatenumgebungen überdecken
  natürliche Forderungen, z.B. $m(\alpha, \beta)$ analytisch $\Rightarrow$ Lie-Gruppe
- G kompakt, wenn der Parameterbereich kompakt (beschränkt und abg.)
- U(1), SO(3), U(n) sind kompakte Lie-Gruppen (LG)
- Translationen $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ bilden nichtkompakte LG

Definition (Lie-Gruppe)

Eine Lie-Gruppe G ist Gruppe, die differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, so dass

$$\begin{aligned} \text{Multiplikation}: &\quad G \times G \mapsto G, \qquad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \\ \text{Inversenbildung}: &\quad G \mapsto G, \qquad g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

stetig und differenzierbar sind

Definition (Mannigfaltigkeit)

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M ist ein topologischer Raum mit folgenden Eigenschaften

1. er ist Hausdorffsch,
2. er hat eine abzählbare Basis,
3. er ist lokal Euklidisch.

1. $\Rightarrow$ zwei Punkte haben disjunkte Umgebungen und können getrennt werden
2. $\Rightarrow$ existiert abzählbare Menge von offenen Mengen $\mathcal{B} \Rightarrow U \subset M$ ist Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}$
3. $\Rightarrow$ zu jedem $p \in M$ existiert Umgebung U und Homöomorphismus

$$\varphi : U \mapsto \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \quad \text{(bijektiv, beidseitig stetig)}$$

φ heißt Karte von M und U ist zugehörige Kartengebiet

Menge von Karten $\{\varphi_\alpha | \alpha \in A\}$ mit Gebieten U_α heißt Atlas von M, wenn

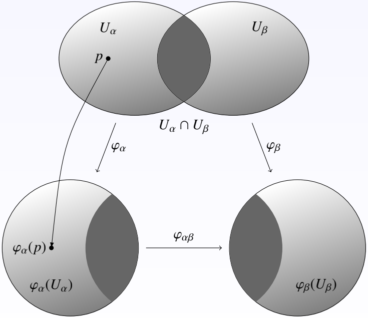
$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$$

Definition (Modellierung einer Mannigfaltigkeit)

Eine Mannigfaltigkeit M lässt sich lokal durch Karten aus einem Atlas beschreiben.

- Karten $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ auf Durchschnitt ihrer Gebiete $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$
- Homöomorphismen $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ auf $U_{\alpha\beta}$ definiert
- Homöomorphismus $\varphi_{\alpha\beta}$ = Kartenwechsel (Koordinatentransformation)

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \mapsto \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}), \quad U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$$



- M differenzierbar (von der Klasse C^k): existiert Atlas mit differenzierbaren $\varphi_{\alpha\beta}$
- alle Koordinatentransformationen sind Diffeomorphismen

Definition (Diffeomorphismus)

$V, V' \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : V \mapsto V'$ differenzierbar. φ Diffeomorphismus $\Leftrightarrow \varphi^{-1}$ differenzierbar

Lineare Lie-Gruppen

meiste Anwendungen: lineare Lie-Gruppen = Untergruppen der linearen Gruppen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$

differenzierbare Mannigfaltigkeiten $\subset \mathbb{R}^n$:

Satz (Niveauflächen im $\mathbb{R}^n$ als Mannigfaltigkeiten)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \mapsto \mathbb{R}^p$ differenzierbar. $Df(x)$ habe Rang p auf Niveaufläche $f(x) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0)$ definiert $(n-p)$-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$

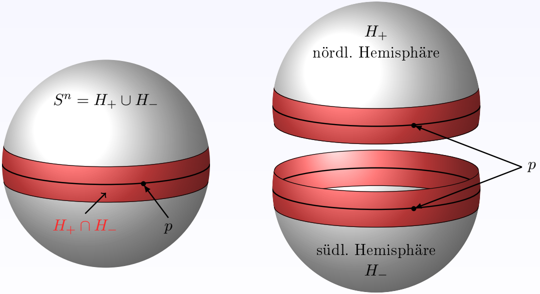
Niveaufläche $f^{-1}(0)$ von $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ist Mannigfaltigkeit wenn Jacobi-Matrix Df auf $f^{-1}(0)$ maximalen Rang p hat

Beispiel: Atlanten für Sphären

- $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Niveaufläche von $f : x \to \|x\| - 1$ Überdeckung
- mit zwei Koordinatenumgebungen

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, x_{n+1} > -1/2\}, \quad H_- = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, x_{n+1} < 1/2\}$$

- H_+: stereographische Projektion vom Südpol, H_- Projektion vom Nordpol
- Koordinatentransformation beliebig oft stetig differenzierbar $\Rightarrow$ S^n C^∞-Mannigfaltigkeit



Definition (Produktmannigfaltigkeit)

Seien $M \sim \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ und $M' \sim \{U'_\beta, \varphi'_\beta\}$ diffbare Mannigfaltigkeiten $\Rightarrow$ Produkt $M \times M' \sim \{U_\alpha \times U'_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi'_\beta\}$ ebenfalls diffbare Mannigfaltigkeit

Definition (Offene Teilmengen)

Jedes offene $N \subset M$ in einer diffbaren Mannigfaltigkeit M ist eine diffbare Mannigfaltigkeit.

Beweis.

Kartengebiete von N = offene Mengen $N \cap U_\alpha$, wobei $\cup_\alpha U_\alpha = M$ □

Abbildung $f : M \to M'$ lässt sich in lokalen Koordinaten beschreiben:
sei $f(p) = p' \in M'$ und (U, φ) sowie (U', φ') Umgebungen von p und p'.
Seien $x = \varphi(p)$ und $x' = \varphi'(p')$ Koordinaten der Punkte p und p' $\Rightarrow$

$$(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (\varphi' \circ f)\big(\underbrace{\varphi^{-1}(x)}_{p}\big) = \varphi'(p') = x' \,.$$

Differenzierbare Abbildungen

- bezüglich lokaler Koordinaten ist $f : M \to M'$ gleich $(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})$.
- C^n immer bezüglich lokaler Koordinaten von C^n-Mannigfaltigkeiten
- Eigenschaft unabhängig von Koordinaten, da Kartenwechsel C^n sind

(Wege)Zusammenhängende Lie-Gruppen

- Lie-Gruppe ist auch topologische Gruppe:
  Gruppenmultiplikation und Inversion (nur) stetige Abbildungen
- Weg in G: stetige Abbildung $w : [0, 1] \to G$
- g_1, g_2 verbindbar: existiert Weg der sie verbindet, $w(0) = g_1$ und $w(1) = g_2$
- definiert Äquivalenzklassen:
  $g \sim g \in G$: konstanter Weg
  $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2 \sim g_1$: umgekehrter Weg $\tilde{w}(t) = w(1-t)$
  w_1 verbindet g_1, g_2 und w_2 verbindet $g_2, g_3 \Longrightarrow w_1 \circ w_2$ verbindet g_1, g_3

$$\text{Komposition:} \quad (w_1 \circ w_2)(t) = \begin{cases} w_1(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ w_2(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Definition (Wege-Zusammenhangskomponente)

Zusammenhangskomponenten von G = Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Existiert nur eine Komponente: G wegezusammenhängend.

wegezusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend
Mannigfaltigkeit: wegezusammenhängend $\Leftrightarrow$ zusammenhängend

Satz

G topologische Gruppe, $G_0 \subset G$ Zusammenhangskomponenten mit $e \in G \Rightarrow G_0$ ist Normalteiler von G und $G/G_0 = \{$Zusammenhangskomponenten von $G\}$.

Beweis.

stetiger Weg $w : e \to g_0 \in G_0$. Adjungierte stetige Weg

$$\tilde{w}(t) = gw(t)g^{-1}$$

verbindet e mit $gg_0g^{-1} \Rightarrow gg_0g^{-1}$ in G_0. Zweiter Teil: Übung □

Definition (Lie-Untergruppe, Lie-Normalteiler)

Lie-Untergruppe H einer LG: Untermannigfaltigkeit und gleichzeitig Untergruppe
Lie-Normalteiler N einer LG: Lie-Untergruppe und Normalteiler

Satz (Cartanscher Untergruppensatz, J. von Neumann und E. Cartan)

Untergruppe (Normalteiler) $H \subset G$ ist Lie-Untergruppe (Lie-Normalteiler) $\Longleftrightarrow$ H ist abgeschlossen in G

Ohne Beweis:

1. Produkt $G_1 \times G_2$ zweier Lie-Gruppen ist Lie-Gruppe.
2. $N \subset G$ ein Lie-Normalteiler $\Rightarrow$ Faktorgruppe G/N ist Lie-Gruppe

Lemma

Für eine zusammenhängende Lie-Gruppe liegt ein diskreter Normalteiler im Zentrum

Example (eigentliche Drehungen)

$\mathrm{SO}(3)$ hat keinen diskreten Normalteiler

Lemma folgt aus

Satz

G zusammenhängende Lie-Gruppe, U offene Umgebung von $e \implies U$ erzeugt G, d.h. jedes $g \in G$ ist Produkt $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ mit $g_i \in U$.

Beweis.

- Sei $U = U^{-1}$ = Menge der Inversen Elemente von U (falls nicht: $U \cap U^{-1}$)
- Behauptung: von $U \ni e$ erzeugte Untergruppe $H \leq G$ ist offen:
  $a \in H$ beliebig $\Rightarrow \ell_a U = aU \subset H$ offene Umgebung von a, da ℓ_a Diffeomorphismus
  $\Rightarrow H$ offen

$$\text{offene Restklassen } H, bH, b'H, \cdots \implies H \cup \Big(\bigcup_{b \neq e} bH\Big) = G$$

- H Komplement einer offenen Menge $\Rightarrow H$ abgeschlossene UG $H \leq G$
- $H \leq G$ offen und abgeschlossen, G zusammenhängend $\Rightarrow H \in \{\emptyset, G\}$

□

Gruppe erbt Eigenschafte von $U \ni e$

- $U \ni e$ liege in einem Kartengebiet $\Rightarrow$ G erbt Eigenschaften von U
- Anwendung: $g_1 g_2 = g_2 g_1$ in $U \Rightarrow$ G abelsch
- Insbesondere: Satz $\Rightarrow$ Lemma (Aufgabe)

Die Lie-Gruppen $\mathrm{U}(2)$ und $\mathrm{SU}(2)$

- QM: Drehungen durch werden durch Elemente in $\mathrm{SU}(2)$ beschrieben (siehe unten)
- wichtig für Verständnis der Teilchenspins in nichtrel/rel. Quantentheorie
- SU(2)× U(1) Eichgruppe der schwachen Wechselwirkung
- Realisierung: $2d$ komplexer Vektorraum mit $(.,.)$, kartesiche Basis $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$
  Vektor $\boldsymbol{r} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 \Longleftrightarrow$ 2-Tupel

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

- lineare Abbildung $\Longleftrightarrow$ Matrix $A = (a_{ij}) \in$Mat$(2, \mathbb{C})$ wirkt auf Tupel

$$\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}, \quad \text{mit} \quad (A\boldsymbol{x})_i = \sum_j a_{ij} x_j \, .$$

- hermitesches Skalarprodukt

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 = \sum_{i=1}^{2} \bar{x}_i y_i, \qquad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^2$$

- U unitär $\Leftrightarrow (U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Longrightarrow U^\dagger U = U^\dagger U = \mathbb{1}$

Definition (Gruppe U(2))

$$\mathrm{U}(2,\mathbb{C}) \equiv \mathrm{U}(2) = \left\{ U \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) | U^\dagger U = U^\dagger U = \mathbb{1} \right\}$$

bilden eine Gruppe, die sogenannte unitäre Gruppe

- Spaltenvektoren von U sind senkrecht und haben Länge 1

$$U^\dagger U = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Verknüpfung = Komposition von linearen Abbildungen = Matrixmultiplikation
- Invarianzeigenschaft $\Rightarrow$ Gruppe
- explizite Prüfung: $(U_1 U_2)^\dagger U_1 U_2 = U_2^\dagger U_1^\dagger U_1 U_2 = \mathbb{1}$

U(2) und SU(2)

- U(2) ist Liegruppe, lokale Koordinaten

$$U = \begin{pmatrix} a & \lambda\bar{b} \\ -b & \lambda\bar{a} \end{pmatrix}$$

- Spalten orthonormal $\Rightarrow$ $|a|^2 + |b|^2 = 1$ und $|\lambda| = 1 \Longrightarrow \det U = \lambda$
- 4-dimensionale diff.bare Mannigfaltigkeit
- U(2) ist 4-dimensionale Liesche Gruppe
- Normalteiler: spezielle unitäre Gruppe $\mathrm{SU}(2) = \{U \in \mathrm{U}(2) | \det U = 1\}$:

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \Big| \, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}$$

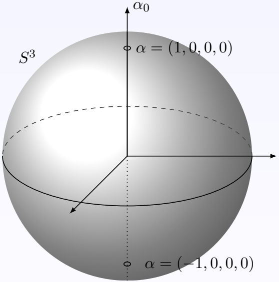
- $\mathrm{SU}(2)$ abgeschlossen

  Cartan'schen Untergruppensatz $\Rightarrow$ Lie-Normalteiler.
- $\mathrm{SU}(2)$ ist Kommutator-Untergruppe von $\mathrm{U}(2)$.

- lokale Koordinaten: bijektive Abbildung

$$\left\{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\Re a, \Im a, \Re b, \Im b) \,\middle|\, \sum \alpha_i^2 \equiv \alpha^2 = 1\right\} \mapsto \mathrm{SU}(2)$$

- kann mit 2 Karten überdeckt werden



SU(2) ist Sphäre

SU(2) ist 3-dimensionale zusammenhängende C^∞-Mannigfaltigkeit S^3

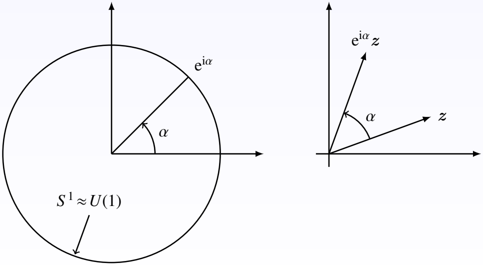
- U(2) und SU(2): sei $U \in \mathrm{U}(2) \Longrightarrow U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \cdot U', \quad U' \in \mathrm{SU}(2)$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \cdot U'$ und $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \cdot U'$ in gleicher Nebenklasse, da $-\mathbb{1} \in \mathrm{SU}(2) \Rightarrow$

$$\mathrm{U}(2)/\mathrm{SU}(2) \cong \{\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} |\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \sim -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \} = \mathrm{U}(1)/\mathbb{Z}_2$$

- abelsche Untergruppe von SU(2):

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \end{pmatrix} \Big| \alpha \in [0, 2\pi) \right\} < \mathrm{SU}(2)\,.$$

- isomorph zu U(1)$= \{\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} | 0 \le \alpha < 2\pi \} \cong S^1$ (braucht 2 Kartenumgebungen)



Konjugationsklassen

- Konjugationsklassen: $U \in \mathrm{SU}(2) \Rightarrow$ gibt $V \in \mathrm{SU}(2)$ mit

$$U = VDV^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix}$$

- Transitivität: $U \sim U' \Rightarrow U, U'$ haben gleiche Eigenwerte, weitere Konjugation

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{Sp}(U) = \mathrm{Sp}(U^*)$, umgekehrt $\mathrm{Sp}(U) \neq \mathrm{Sp}(U') \Rightarrow U, U'$ nicht konjugiert

Satz (Konjugationsklassen von SU(2))

U und U' in $SU(2)$ sind konjugiert $\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(U) = \mathrm{Sp}(U')$

- Zentrum $=$ diagonale Matrizen $z = \mathrm{diag}(a, \bar{a})$ mit $\bar{a} = a \Rightarrow$

Satz (Zentrum)

Das Zentrum von $SU(2)$ ist $Z = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \cong \mathbb{Z}_2$

Satz (quantenmechanische Drehungen)

Die Faktorgruppe $SU(2)/Z$ ist isomorph zur Gruppe $SO(3)$

Konstruktion des Isomorphismus

- hermitesche und spurlose Pauli-Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Produkte

$$\sigma_i \sigma_j = \mathbb{1}\, \delta_{ij} + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

- jede hermitesche und spurlose Matrix = reelle Linearkombination

$$A = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} a_i \sigma_i = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$$

- Determinante

$$\det(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = -\boldsymbol{a}^2$$

- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ hermitesch, spurlos $\Rightarrow U(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})U^{-1}$ hermitesch, spurlos für $U\in\mathrm{SU}(2)$
- gibt $\boldsymbol{b}$ mit

$$\mathrm{U}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\mathrm{U}^{-1}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,,$$

- $\boldsymbol{b}$ hängt linear von $\boldsymbol{a}$ und quadratisch von U ab
- Determinante ändert nicht bei Konjugation: $\Rightarrow$

$$\det(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})=\det(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\Longrightarrow\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$$

Der Gruppenhomomorphismus SU(2) $\mapsto$SO(3)

lineare Abbildung $\boldsymbol{a}\mapsto\boldsymbol{b}$ ist längenerhaltend $\Rightarrow$ gibt U-abhängige Drehung R mit

$$U(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})U^{-1}=\big(R(U)\,\boldsymbol{a}\big)\cdot\boldsymbol{\sigma},\qquad R^T(U)R(U)=\mathbb{1}_3$$

- Abbildung ist Homomorphismus:

$$\begin{aligned}(R(U_1U_2)\,\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\sigma}&=(U_1U_2)\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,(U_1U_2)^{-1}=U_1\left(U_2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})U_2^{-1}\right)U_1^{-1}\\&=U_1\left(\big(R(U_2)\,\boldsymbol{a}\big)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)U_1^{-1}=(R(U_1)R(U_2)\,\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\sigma}\,,\end{aligned}$$

SU(2) ist doppelte Überlagerung von SO(3)

- Homomorphismus SU(2) $\mapsto$ O(3)

$$R(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad R(U_1 U_2) = R(U_1) R(U_2)$$

- O(3) hat zwei Zusammenhangskomponenten $\det(R) = 1$ und $\det(R) = -1$
- Behauptung: $R(U) \in \mathrm{SO}(3)$ ist eigentliche Drehung

  Beweis: $U \mapsto R(U)$ Homomorphismus mit $R(\mathbb{1}_2) = \mathbb{1}_3 \Rightarrow \mathbb{1}_2 \in \mathrm{SO}(3)$

  Stetigkeit: alle $R(U)$ in SO(3) (sonst würde det springen)
- $U \mapsto R(U)$ ist surjektiv
- Abbildung ist 2 : 1. Kern

$$R(U) = \mathbb{1}_3 \Longleftrightarrow U(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) U^{-1} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \Longleftrightarrow U = \pm \mathbb{1}$$

- Kern=$\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$, erster Isomorphiesatz $\Rightarrow$

$$\mathrm{SU}(2)/\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \cong \mathrm{SO}(3)$$

klassische und quantenmechanische Drehungen

Die QM-Drehgruppe SU(2) ist doppelte universelle Überlagerung der SO(3)

Matrixgruppen

- quadratische Matrix $\cong$ lineare Abbildung Vektorraum $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$
- orthonormierte Basis $\{\boldsymbol{e}_i\}$ bzgl. Skalarprodukt $(.,.)$
- Vektor $\boldsymbol{r} \Leftrightarrow$ Tupel $\boldsymbol{x}$ mit Elementen $x_i = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{r}) \in \mathbb{K}, \quad i = 1, \dots, n$
- lineare Abbildung $A : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V} \Leftrightarrow$ Matrix $a_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j) \in \mathbb{K}$

$$x_i \mapsto x_i' = \sum_j a_{ij}\, x_j \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \quad A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$$

- gleiches Symbol für Matrix und lineare Abbildung, invertierbar

Definition (allgemeine linearen Gruppe (general linear group))

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{für} \quad \mathcal{V} = \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \text{für} \quad \mathcal{V} = \mathbb{C}^n$$

- GL(n,$\mathbb{K}$) Teilmengen von $\mathbb{K}^{n^2}$: $A \leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{K}^{n^2}$
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ metrischer Raum mit Abstandsquadrat

$$d(A,B)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^2 = \mathrm{Sp}(A-B)^\dagger (A-B) = \|A-B\|^2_{\mathrm{Frob}}$$

Matrixgruppen, cont.

- Frobeniusnorm
- Dimensionen: dim(GL(n,$\mathbb{R}$)) $= n^2$ und dim(GL(n,$\mathbb{C}$)) $= 2n^2$
- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$ offene Untermengen $\Rightarrow$ Liegruppen

Satz (Matrixgruppen)

Multiplikation und Inversion in GL(n,$\mathbb{K}$) sind stetig und differenzierbar

Beweis.

- Matrixelemente (ME) von $A \cdot B$ sind Polynome der ME von A und B
- ME von A^{-1}: rationale Funktionen der ME von A

  Nenner = Polynom $\det A \neq 0$

$\square$

- allgemein: Matrixgruppen = Lie-Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$
- in Untergruppe: $\det \neq 0$ und $\mathbb{1}_n$
- soll differenzierbare Mannigfaltigkeit sein (z.B. Niveaufläche)

Spezielle lineare Gruppen

Definition (spezielle lineare Gruppe)

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) | \det A = 1\} = \mathrm{Kern}\Big(\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}^*\Big)$$

- nicht-kompakt, Normalteiler in $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ (Kern)

$$\dim\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\big) = n^2 - 1 \quad \text{und} \quad \dim\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})\big) = 2n^2 - 2$$

- erhalten Volumen und Orientierung
- Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ = doppelte Überlagerung der Lorentzgruppe (Quantenmechanik)

Orthogonale Gruppen

- ändern Euklidisches Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum x_i y_i$ in $\mathbb{R}^n$ nicht

$$(R\boldsymbol{x}, R\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, R^T R\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Definition (Orthogonale Gruppen ≅ Drehungen + Spiegelungen)

$$\mathrm{O}(n) = \Big\{R \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) | R^T R = \mathbb{1}_n\Big\}, \qquad \text{kompakt}$$

- Verallg: Pseudo-orthogonale Transformationen im $\mathbb{R}^n$; metrischer Tensor

$$G = (g_{ij}) = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p-\mathrm{mal}}, \underbrace{-1,\cdots-1}_{q-\mathrm{mal}}), \quad p+q=n$$

- lineare Transformation die quadratische Form $\boldsymbol{x}^T G\boldsymbol{y} = \sum g_{ij}x^i x^j$ nicht ändern

$$(\Lambda\boldsymbol{x}, G\Lambda\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, G\boldsymbol{y})$$

Definition (Pseudo-Orthogonale Gruppen $\cong$ verallg. Lorentztransformationen)

$$\mathrm{O}(p,q) = \left\{\Lambda \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) | \Lambda^T G\Lambda = G\right\}, \quad pq \neq 0 \Rightarrow \text{nicht-kompakt}$$

- Dimension

$$\dim \mathrm{O}(n) = \dim \mathrm{O}(p,q) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad n = p+q$$

Definition (Spezielle orthogonale Gruppen, eigentliche Drehungen)

$$\mathrm{SO}(n) = \left\{R \in \mathrm{O}(n) | \det R = 1\right\} = \mathrm{Kern}\big(\det:\ \mathrm{O}(n) \mapsto \mathbb{Z}_2\big)$$

- $\dim \mathrm{SO}(n) = \dim \mathrm{O}(n)$, analog eigentliche „Lorentz-Transformationen“ $\mathrm{SO}(p,q)$

Unitäre Gruppen

- lassen hermitesches Skalarprodukt $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum x_i^* y_i$ invariant
- invariant: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, U^\dagger U\boldsymbol{y}) \Rightarrow$

Definition (unitäre und speziell unitäre Gruppen)

$$\mathrm{U}(n) = \left\{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) | U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}_n\right\}$$

$$\mathrm{SU}(n) = \{U \in \mathrm{U}(n) | \det U = 1\}\,, \quad \text{Normalteiler}$$

- kompakte Liegruppen
- Dimensionen $\dim \mathrm{U}(n) = n^2$ und $\dim \mathrm{SU}(n) = n^2 - 1$
- 8-dimensionale $\mathrm{SU}(3)$:

  Eichgruppe der Quantenchromodynamik

  approximative Flavor-Symmetrie des Quarkmodells
- 24-dimensionale $\mathrm{SU}(5)$: lange Kandidat GUT (grand unified theory)

Symplektische Gruppen

- lineare Transformationen $\boldsymbol{x} \mapsto M\boldsymbol{x}$, Bilinearform $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := (\boldsymbol{x}, J\boldsymbol{y})$ invariant

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} = -J^T$$

Definition (symplektische Gruppen)

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{K}) | M^T J M = J\}$$

- Jacobi-Matrix jeder kanonischen Transformation in $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$
- Behauptung: $\det(M) = 1$ (betrachte Pfaffian von $M^T J M$)

Example (die Gruppe Sp(2,$\mathbb{R}$))

reelle 2×2-Matrizen mit

$$M^T J M = (\det M) J \stackrel{!}{=} J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det M = 1$$

$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ isomorph zu $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

Gruppe	Cartan	Bedingung	Dimension
$SL(n+1,\mathbb{R})$	A_n	$\det A = 1$	$n(n+2)$
$SU(n+1)$	A_n	$U^\dagger U = \mathbb{1}_{n+1}$	$n(n+2)$
$SO(2n+1)$	B_n	$R^T R = \mathbb{1}_{2n+1}$	$n(2n+1)$
$Sp(2n,\mathbb{R})$	C_n	$M^T J_{2n} M = J_{2n}$	$n(2n+1)$
$SO(2n)$	D_n	$R^T R = \mathbb{1}_{2n}$	$n(2n-1)$

- Tabelle enthält beinahe alle einfachen kompakten Liegruppen
- zweite Spalte: Bezeichnung in Cartan Klassifizierung
- fehlen: exzeptionelle E_6, E_7, E_8, G_2, F_4
- Gruppen nicht-Abelsch, $\dim > 1$
- einfache Gruppen $\Rightarrow$ weder direktes noch semidirektes Produkt

  Bewegungsgruppe, Galileigruppe, Poincaré-Gruppe sind einfach

Example (Dimensionen mit LiE)

Eingabe: dim(A4) dim(B4) dim(C4) dim(D4)
Ausgabe: $\dim(A_4) = 24$, $\dim(B_4) = 36$, $\dim(C_4) = 36$ und $\dim(D_4) = 28$.

stellt sich die natürliche Frage nach den Faktorgruppen

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{K}), \quad \mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n) \quad \text{oder} \quad \mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n)$$

Die letzte ist einfach zu berechnen, $\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n) \cong \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe

Versuchen Sie, die anderen beiden Faktorgruppen zu bestimmen.

globale Eigenschaften

ändern nicht bei stetigen Deformationen des Raumes vermittels Homöomorphismen

- Anzahl seiner Zusammenhangskomponenten
  $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{U}(n)$ zusammenhängend
  $\mathrm{O}(n)$ hat zwei Komponenten

$$\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathrm{O}(n) | \det R = 1\} \cup \{R \in \mathrm{O}(n) | \det R = -1\}$$

- Lorentzgruppe hat vier Komponenten

Definition (stetige Deformation $\cong$ homoömorphe Räume)

topologische Räume M und N homöomorph $\Leftrightarrow$ existiert ein Homöomorphismus $\phi : M \mapsto N$

- Dehnen, Stauchen, Verbiegen, Verzerren, Verdrillen erlaubt
- Zerschneiden nur, wenn Teile genau an Schnittfläche wieder zusammenfügt werden

- Räume können homöomorph oder homotop sein:

  stetige $f : M \mapsto N$ und $g : N \mapsto M \Rightarrow g \circ f : M \mapsto M$ und $f \circ g : N \mapsto N$ stetig

Definition (homotope Räume)

Existieren f, g mit $g \circ f \sim id_M$ und $f \circ g \sim id_N$, so heißen M und N homotop

- Homotope Räume teilen globale Eigenschaften

Definition (homototope stetige Abbildungen $f, g : M \mapsto N$)

f, g homotop: existiert stetiges $H : M \times [0,1] \mapsto N$ mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$

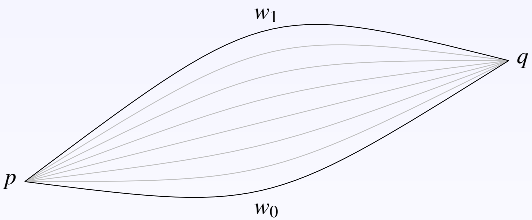
Definition (homotope Wege für $M = [0,1]$)

Zwei stetige Wege w_0, w_1 von p nach q sind homotop: existiert $H : [0,1] \times [0,1] \to N$ mit

$$\begin{aligned} H(t,0) = w_0(t), \quad H(t,1) = w_1(t), \quad t \in [0,1] \\ H(0,s) = p, \quad H(1,s) = q, \quad s \in [0,1] \end{aligned}$$

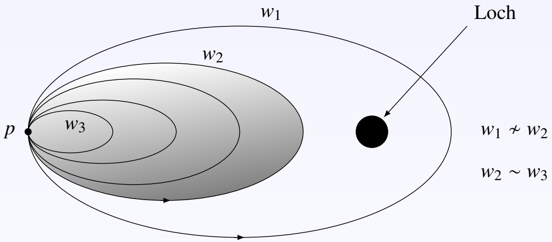
- Homotopie definiert Äquivalenzrelation $f \sim g$ oder $w_0 \sim w_1 \Rightarrow$ Homotopieklassen

- Parameter t: Parameter längs festem Weg
- Parameter s: beschreibt Verformung des Weges w_0 in den Weg w_1



w_0 kann stetig in w_1 deformiert werden. Wege sind homotop

- geschlossener Weg von $p \to p$: Schleife mit Basispunkt p
- Zwei Schleifen mit Basispunkt p homotop: gibt Homotopie zwischen ihnen gibt
- Äquivalenzrelation $\Rightarrow$ Homotopieklassen von Schleifen mit Basis p



w_1 kann nicht stetig in w_2 deformiert werden $\Rightarrow$ in verschiedenen Homotopieklassen

- $\pi_1(M,p) = \{$Homotopieklassen mit Basispunkt $p\}$
- existiert Verknüpfung von Schleifen $p \to p$: Konvolution
- definiert Multiplikation von Klassen (unabhängig vom Repräsentanten)
- neutrale Element: Klasse der auf p zusammenziehbarer Wege
- inverses Element: Schleife rückwärts durchlaufen

Fundamentalgruppe

Definition (Fundamentalgruppe)

Mit Konvolution als Verknüpfung wird Menge der Homotopieklassen mit Basispunkt p zu einer Gruppe, die Fundamentalgruppe $\pi_1(M,p)$.

- $\pi_1(M,p)$ misst Eigenschaften in Zusammenhangskomponente von p liegt
- M wegezusammenhängend $\Rightarrow$ Wahl des Basispunktes unerheblich, denn:
  mit Weg $w: q \to p$ Schleifen von p nach q „verschieben“:
  - längs w von q nach p $\to$ Schleife mit Basis p durchlaufen $\to$ längs w^{-1} zurück nach q
  - Resultat: Schleife mit Basis q
  - Bei Verknüpfung von zwei q-Schleifen heben sich die Zwischenwege weg
- Folgerung $\pi_1(p) \cong \pi_1(q) \Rightarrow$ schreibt $\pi_1(M)$.

Definition (einfach zusammenhängend)

Ein topologischer Raum M mit $\pi_1(M) = 0$ heißt einfach zusammenhängend

- Sphäre: jede Schleife auf Punkt zusammenziehbar $\Rightarrow \pi_1(S^n) = 0$ für $n > 1$
- Ebene mit Loch $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \Rightarrow \pi_1 = \mathbb{Z}$. Die Homotopieklasse $\sim$ Windungszahl

Fundamentalgruppen von U(1) und SU(2)

SU(2) ist einfach zusammenhängend im Gegensatz zu U(1) : $\pi_1(\mathrm{U}(1)) = \mathbb{Z}$.

Höhere Homotopiegruppen

- sei I^n n-dimensionaler Einheitswürfel mit Rand ∂I^n
- stetige Abbildungen $g : (I^n, \partial I^n) \to (M, p)$ die ∂I^n in Punkt p abbilden
- Menge der Homotopieklassen $\pi_n(M, p)$ ist Gruppe
- Gruppenoperation $=$ Verkleben von Abbildungen entlang einer Seite

$$(f * g)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f\,(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n) & \text{für}\ \ t_n \leq 1/2 \\ g\,(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n - 1) & \text{für}\ \ t_n \geq 1/2. \end{cases}$$

- M wegezusammenhängend $\Rightarrow \pi_n(M, p)$ unabhängig von $p \Rightarrow \pi_n(M)$
- M, N wegezusammenhängend und homöomorph $\Rightarrow \pi_n(M) = \pi_n(N)$
- äquivalent: stetige Abbildungen $f : (S^n, a) \to (M, p)$ mit $f(a) = p$
- i.A. schwierig π_n zu berechnen. Nicht alle $\pi_n(S^2)$ sind bekannt. Aber:

Satz (Homotopiegruppen von direkten Produkten)

$$\pi_n(M \times N) = \pi_n(M) + \pi_n(N), \quad n \geq 1$$

Satz (Weyl)

G kompakte und halb-einfache Lie-Gruppe $\Rightarrow \pi_1(G)$ endlich

Beispiel: spezielle unitäre und orthogonale Gruppen

$$\pi_1(\mathrm{SU}(n)) = 0 \quad \text{und} \quad \pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \mathbb{Z}_2$$

Aber: $\mathrm{U}(1)$ nicht halb-einfach mit $\pi_1(\mathrm{U}(1)) = \mathbb{Z}$

Satz (Cartan)

G Lie-Gruppe $\Rightarrow \pi_2(G) = 0 \Longrightarrow$ stetiges $f : S^2 \to G$ homotop zur konstanten Abbildung

- Instantonlösungen der Euklidschen YM-Theorien durch π_3 charakterisiert

Satz (Bott)

G kompakte und einfache Lie-Gruppe $\Longrightarrow \pi_3(G) = \mathbb{Z}$.

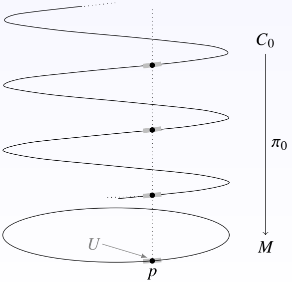
- $\pi_4(G) \sim$ Witten-Anomalie. G kompakt, einfach zhd, einfach $\Rightarrow \pi_4(G) = 0$ oder $\mathbb{Z}_2$

- SU(2) universelle Überlagerungsgruppe der SO(3)
- SL(2, $\mathbb{C}$) universelle Überlagerungsgruppe der Lorentzgruppe

Definition (Überlagerung eines topologischen Raums M)

= ist topologischer Raum C zusammen mit stetigen surjektiven Abbildung $\pi : C \to M$, so dass für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung U existiert mit $\pi^{-1}(U)$ die Vereinigung von *disjunkten* offenen Mengen (Blättern) in C ist. Jedes Blatt ist homöomorph zu U (via π)

Faser über jedem $p \in M$ diskrete Menge in C. Für jede zusammenhängende Komponente von M ist die Kardinalität der Fasern gleich. Hat jede Faser zwei Elemente $\Rightarrow$ doppelte Überlagerung



Die universelle Überlagerung (π_0, C_0) von M projiziert den einfach zusammenhängenden Raum C_0 auf M

Definition (universelle Überlagerung)

Überlagerung $\pi_0 : C_0 \to M$ universell, wenn $\pi_1(C_0) = 0$ ist (C_0 einfach zusammenhängend)

universelle Überlagerung überlagert alle zusammenhängenden Überlagerungen von $\mathcal{M}$

Eindeutigkeit der universellen Überlagerung

Besitzt M eine universelle Überlagerung, dann ist diese eindeutig.

zwei universelle Überlagerungen $\pi_0 : C_0 \to M$ und $\pi_0' : C_0' \to M \Rightarrow$ existiert Homöomorphismus $f : C_0 \to C_0'$, so dass $\pi_0' \circ f = \pi_0$ gilt.

Beispiele von universelle Überlagerungen

- $\pi : \mathbb{R} \ni \alpha \to \exp(\mathrm{i}\alpha) \in U(1)$ Überlagerung von U(1)

  Faser über $\exp(\mathrm{i}\alpha)$ enthält Elemente $\alpha + 2\pi\mathbb{Z}$
- SU(2) ist die doppelte und universelle Überlagerung von SO(3).

- Strukturen von M werden universeller Überlagerung C geerbt
- M Mannigfaltigkeit $\Rightarrow$ C Mannigfaltigkeit
- M Lie-Gruppe $\Rightarrow$ C Lie-Gruppe (universelle Überlagerungsgruppe)

Satz (Überlagerungsgruppe)

G zusammenhängende Lie-Gruppe $\Rightarrow$ existiert eine (bis auf Isomorphismus eindeutige) universelle Überlagerungsgruppe $\tilde{G}$ mit

- *$G \cong \tilde{G}/Z$, mit diskreter Untergruppe Z des Zentrums von $\tilde{G}$*
- *Ist $\pi_1(G) = 0$, dann ist G isomorph zu $\tilde{G}$*

SU(N) und SO(N)

- $\mathrm{SU}(N)$ einfach zusammenhängend für $N = 2, 3, \cdots \Rightarrow$ eigene Überlagerungsgruppe
- Überlagerungsgruppen der $\mathrm{SO}(n)$ = Spingruppen Spin(n)

Aufgabe

Beweisen Sie: $\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{Spin}(6) \cong \mathrm{SU}(4)$