Raumzeit-Symmetrien

- Gruppen treten als Symmetrien auf
- Symmetrien wirken auf Elemente eines physikalischen Modells (Wirkungsmenge)
- Elemente = Elementarteilchen, Atome, Moleküle oder Kristalle
  Punkte einer Mannigfaltigkeit, Felder, Vektoren in Hilbertraum
- Wirkungsmenge = linearer Raum ⇒ Wirkung = Darstellung
- Drehungen und Verschiebungen (Translationen) im Raum
- Verschiebung der Zeit
- Galileigruppe in nicht-relativistischer Physik
- Lorentz- und Poincaré-Gruppen in relativistischer Physik
- Punktgruppen in Molekülphysik = endliche Untergruppen der Drehgruppe
- Kristallgruppen in Festkörpertheorie = Untergruppen der Bewegungsgruppe.

Definition (Links-Gruppenwirkung)

Gruppenwirkung = Abbildung $\Phi : G \times M \mapsto M$ mit

- $\Phi(e,p) = p$ für alle $p \in M$
- $\Phi\big(g_1, \Phi(g_2,p)\big) = \Phi\big(g_1 g_2, p\big)$ für alle $g_1, g_2 \in G$ und $p \in M$.

Gruppenwirkungen

Lemma (Φ definiert Bijektion von M)

Setze $\Phi_g(p) = \Phi(g,p) \Longrightarrow \Phi_g : M \to M$ *ist bijektiv* $\forall g$ *mit inverser Abbildung* $\Phi_g^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$.

Beweis.

$$\Phi_g \circ \Phi_{g^{-1}} = \Phi_{gg^{-1}} = \Phi_e = \mathbb{1}_M \, .$$

□

- *bijektiven Abbildungen*

$$S(M) = \{f : M \to M : \; f \text{ bijektiv}\}$$

  mit Verknüpfung $f \circ g$ (nacheinander ausführen) bilden Gruppe
- neutrale Element ist Identität $\mathbb{1}_M : p \to p$
- inverse Element zu $f \in S(M)$ ist Umkehrabbildung
- speziell $|M| = n < \infty \Rightarrow S(M) = \mathcal{S}_n$ symmetrische Gruppe

Gruppenwirkungen cont.

Φ_g definieren Homomorphismen

Abbildung $g \to \Phi_g$ ist Gruppen-Homomorphismus $G \to S(M)$, d.h. $\Phi_{gg'} = \Phi_g \circ \Phi_{g'}$.

Lemma (Umkehrung)

Jedes $\varphi \in Hom(G, S(M))$ definiert Gruppenwirkung von G auf M: $\Phi(g, p) = \varphi(g)(p)$

Beweis.

$$\Phi(g_1 g_2, p) = \varphi(g_1 g_2)(p) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)(p) = \varphi(g_1)\Phi(g_2, p) = \Phi\left(g_1, \Phi(g_2, p)\right)$$

□

Definition (spezielle Gruppenwirkungen)

- Φ treu: Φ_g ist nur für $g = e$ die identische Abbildung
- Φ frei, für jedes $p \in M$ lässt nur die Abbildung Φ_e den Punkt p fest
- Φ transitiv: für jedes Paar $p, q \in M$ gibt es g mit $\Phi_g(p) = q$

Stabilisator

- treu $\Rightarrow$ Homomorphismus $g \to \Phi_g$ ist injektiv
- transitiv $\Longleftrightarrow \mathcal{M} = B(p) =$ Bahn (Orbit) von p:

$$B(p) = \{\Phi(g,p) | g \in G\}$$

Definition (Stabilisator)

Der Stabilisator (Isotropiegruppe) von $p \in M$ ist

$$N_p = \{g \in G | \, \Phi_g(p) = p\} \leq G\,.$$

Beweis.

Menge N_p bildet eine Untergruppe von G: $g, g' \in N_p \Rightarrow$

$$\Phi_g(p) = \Phi_{g'}(p) = p \Longrightarrow \Phi(g'g,p) = \Phi(g',\Phi(g,p)) = \Phi(g',p) = p$$
$$\Phi(g^{-1},p) = \Phi(g^{-1},\Phi(g,p)) = \Phi(g^{-1}g,p) = p$$

□

adjungierte Wirkung

Lemma

Φ transitiv $\Rightarrow$ alle N_p sind zueinander konjugiert

Beweis.

beliebige p, q in M, Φ transitiv $\Rightarrow$ existiert g' mit $\Phi(g', p) = q \Rightarrow$

$$\Phi(g,p) = p \Longleftrightarrow \Phi\left(g' g g'^{-1}, q\right) = \Phi(g' g, p) = \Phi(g', p) = q\,.$$

Stabilisatoren von p und q konjugiert $N_q = g' N_p g'^{-1}$ □

Definition (adjungierte Wirkung: $M = G$)

Diese Wirkung auf der Gruppe ist definiert durch $\mathrm{Ad}_g(a) = gag^{-1}, \qquad a, g \in G$

zur adjungierten Wirkung

- $g \to \mathrm{Ad}_g$ ist Homomorphismus; treu $\Leftrightarrow$ $\phi_g = \mathbb{1}$ nur für $g = e$ $\Leftrightarrow$ Zentrum $Z = \{e\}$
- nicht frei, da $\mathrm{Ad}_g(g) = g$; nicht transitiv, da $\mathrm{Ad}_g(e) = e\ \forall g$

Drehungen im Euklid'schen Raum $\mathbb{R}^n$

- kartesische Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$; orientiert und orthonormal $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$
- Drehung im $\mathbb{R}^n$ (Einstein'sche Summenkonvention)

$$\boldsymbol{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{e}_j R_{ji} \equiv \boldsymbol{e}_j R_{ji} \,,$$

- Längen von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren unverändert:

$$\delta_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i', \boldsymbol{e}_j') = \left(\sum_p \boldsymbol{e}_p R_{pi}, \sum_q \boldsymbol{e}_q R_{qj} \right) = \sum_p R_{pi} R_{pj} \,.$$

- Matrixschreibweise

$$(R_{ij}) = R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \ldots & R_{nn} \end{pmatrix} .$$

- Bedingung $\sum_p R_{pi} R_{pj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow R^T R = \mathbb{1}$

Satz

Die Matrix einer Drehung bezüglich einer kartesischen Basis erfüllt

$$R^T = R^{-1} \quad \textit{oder} \quad R^T R = R R^T = \mathbb{1} \ .$$

- feste Basis $\boldsymbol{e}_i$: identifizieren Drehung mit Matrix R
- Nacheinander ausführen von zwei Drehungen $\sim$ Produkt der zugeordneten Matrizen:

$$R_2 R_1 \sim \text{zuerst die Drehung } R_1 \text{ und danach die Drehung } R_2 \ .$$

- Komposition von Drehungen R_1 und R_2 ist Drehung
- Identitätsabbildung ist eine Drehung
- inverse Abbildung ist eine Drehung

Orthogonale Gruppe der Drehungen

Die Drehungen im $\mathbb{R}^n$ bilden eine kontinuierliche Gruppe, die orthogonale Gruppe $O(n)$.

Expliziter Beweis.

$$(R_1 R_2)^T R_1 R_2 = R_2^T R_1^T R_1 R_2 = R_2^T R_2 = \mathbb{1}, \quad \mathbb{1} = (R R^T)^{-1} = (R^{-1})^T R^{-1}$$

□

aktive und passive Drehungen

aktive und passive Drehungen

- aktive Interpretation: Ortsvektor wird gedreht

$$\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{r}' = x_i \boldsymbol{e}_i' \equiv x_i' \boldsymbol{e}_i$$

- $\{\boldsymbol{e}_i\}$ fest $\Rightarrow$ Transformation

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$$

- passive Interpretation: festes $\boldsymbol{r}$ von verschiedenen Systemen S, S' aus beschrieben
- kartesische Basis $\boldsymbol{e}_i' \in S'$ und kartesische Basis $\boldsymbol{e}_i \in S$: Koordinaten verschieden

$$x_i \boldsymbol{e}_i = x_i' \boldsymbol{e}_i'$$

Drehung $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$ kompensiert Drehung der Basis

Lemma (eigentliche Drehungen)

Drehungen mit $\det R = 1$ *bilden die Untergruppe* $SO(n) \leq O(n)$. *Die Gruppe heißt spezielle orthogonale Gruppe.*

eigentliche Drehungen

- aus $\det(R^T R) = \mathbb{1}$ folgt $\det R = \pm 1$
- $\mathrm{SO}(n)$ = Kern des det-Homomorphismus $\Rightarrow$ $\mathrm{SO}(n)$ Normalteiler in $\mathrm{O}(n)$
- $R \in$S=(n) sind orientierungserhaltende (eigentliche) Drehungen:

$$\det\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right) = \det R$$

Satz (Satz von Euler)

n ungerade und $\det R = 1$ oder n gerade und $\det R = -1 \Rightarrow R$ hat 1-dimensionalen Unterraum aus lauter Fixpunkten. Speziell $d = 3$: jede eigentliche Drehung hat eine Drehachse.

Beweis.

- zu zeigen: $R\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$ hat nicht-triviale Lösung $\boldsymbol{n} \Rightarrow$ Fixpunktachse von R
  $\Leftrightarrow R$ hat Eigenwert 1 $\Leftrightarrow \det(R - \mathbb{1}) = 0$

$$\begin{aligned}\det(R-\mathbb{1}) &= \det(R-\mathbb{1})^T = \det(R^{-1}-\mathbb{1}) = \det\left[R^{-1}(\mathbb{1}-R)\right]\\ &= \det R^{-1}\det(\mathbb{1}-R) = (-)^n \det R \det(R-\mathbb{1})\end{aligned}$$

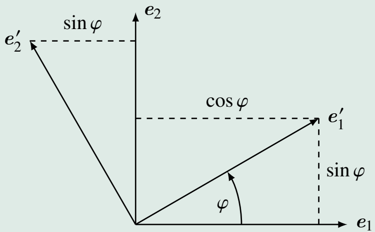
$$\Rightarrow \det(R-\mathbb{1}) = 0 \text{ für } (-1)^n \det R = -1 \Rightarrow \text{ Satz}$$

uneigentliche Drehungen (Drehspiegelung)

Lemma (Drehungen mit $\det R = -1$)

Eine Drehspiegelung hat in allen Dimensionen einen Eigenvektor zum Eigenwert -1.

Beispiel: Drehungen im $\mathbb{R}^2$



- Transformation

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1' &= \quad \boldsymbol{e}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi \\ \boldsymbol{e}_2' &= -\boldsymbol{e}_1 \sin\varphi + \boldsymbol{e}_2 \cos\varphi\,. \end{aligned}$$

- passive Interpretation

$$\begin{aligned} x_1' &= \cos\varphi\, x_1 - \sin\varphi\, x_2 \\ x_2' &= \sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2 \end{aligned}$$

- Matrix

$$R_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Drehungen in $\mathbb{R}^3$

Drehungen im $\mathbb{R}^3$

- R eigentlich $\Rightarrow$ R Drehung um feste Achse
- Drehungen um $\boldsymbol{e}_1$ bzw. $\boldsymbol{e}_3$ Achse:

$$R(\boldsymbol{e}_1,\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & R_2(\varphi)\end{pmatrix},\quad R(\boldsymbol{e}_3,\varphi)=\begin{pmatrix}R_2(\varphi) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Drehungen um $\boldsymbol{e}_2$-Achse

$$R(\boldsymbol{e}_2,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

- R eigentlich $\Rightarrow$ gibt Basis $\{\boldsymbol{e}_i\}$, so das Drehung Form $R(\boldsymbol{e}_3,\varphi)$ hat
- klassische Mechanik (Kreisel): Parametrisierung von Drehungen mit Euler-Winkeln

$$R(\varphi,\vartheta,\psi)=R(\boldsymbol{e}_3,\varphi)R(\boldsymbol{e}_1,\vartheta)R(\boldsymbol{e}_3,\psi)$$

Euklidische Gruppen (Bewegungsgruppen) E_n

- affinen Transformationen die Abstand zwischen 2 Punkten in $\mathbb{R}^n$ invariant lassen
- euklidischer Abstand: $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = y_i \boldsymbol{e}_i$ Ortsvektoren von P, Q

$$d(P,Q) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \text{mit} \quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_1^n x_i^2$$

Definition (Bewegungsgruppe)

Eine Bewegung besteht aus Drehungen und Verschiebungen,

$$(\boldsymbol{a}, R) : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \quad R \in \mathrm{O}(n)$$

- kontinuierliche Gruppe
- Komposition

$$(\boldsymbol{a}', R') = (\boldsymbol{a}_1, R_1)(\boldsymbol{a}, R)(\boldsymbol{a}_1, R_1)^{-1} = \left(\boldsymbol{a}_1 + R_1 \boldsymbol{a} - R_1 R R_1^{-1} \boldsymbol{a}_1, R_1 R R_1^{-1}\right) .$$

- semidirektes Produkt (siehe früher) von Translationen und Drehungen
- eigentlichen Bewegungen $E_n^+ = \left\{(\boldsymbol{a}, R) | \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, R \in \mathrm{SO}(n)\right\}$

Punktgruppen

Satz (ab)

Untergruppe $G \leq E_n$ von endlicher Ordnung $\Rightarrow$ G hat Fixpunkt (Anwendung: Punktgruppen)

Beweis.

- Bahn von $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ unter Wirkung von G:

$$B(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x}_i = R_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}_i | (\boldsymbol{a}_i, R_i) \in G\}$$

- $|G| = n$ endlich: Bahn enthält endlich viele Punkte
- Schwerpunkt

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i$$

ist Fixpunkt unter Wirkung von $(R_i, \boldsymbol{a}_i) \in G$, denn $\boldsymbol{x}_i$ werden nur permutiert

□

Galilei-Transformationen

- Mechanik, SRT: verschiedene Modelle für Raum und Zeit
- ausgezeichnete Bezugssysteme: Inertialsysteme IS
- nichtrelativistischer Grenzfall: Modell von Galilei und Newton
- zwei IS I und I' können
  - verschiedene Ursprünge $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ haben
  - durch räumliche Translation gegeneinander verschoben sein
  - mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ relativ zueinander bewegen
- äquivalente Formulierung: I, I' zwei Inertialsysteme:
  - Ortsvektoren eines (freien) Teilchens in I bzw. in I'

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}\, t$$
$$\boldsymbol{r}'(t) = (\boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u})\, t$$

- kartesische Basen $\boldsymbol{e}_i$ und $\boldsymbol{e}_i'$ in I, I'

$$\boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{e}_j R_{ji} \,.$$

- verschiedene Zeitursprünge möglich

Galilei-Transformationen cont.

Galilei-Gruppe

$(t, \boldsymbol{x})$ und $(t', \boldsymbol{x}')$ Koordinaten ein Ereignis bezüglich I und I' mit Ursprüngen $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ und kartesischen Basen $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_i'$. Folgende Transformationen zwischen Koordinaten sind möglich:

Art der Transformation	Zeitkoordinate	Raumkoordinaten
Verschiebung des Ortursprungs	$t' = t$	$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$
Verschiebung des Zeitursprungs	$t' = t + \tau$	$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$
Drehung der Systeme	$t' = t$	$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$
spezielle Galileitransformation	$t' = t$	$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\, t$

- definiert Gruppe mit Verknüpfung = Komposition

$$(\tau', \boldsymbol{a}', \boldsymbol{u}', R')(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, R) = \big(\tau' + \tau, \boldsymbol{a}' + R'\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}'\tau, \boldsymbol{u}' + R'\boldsymbol{u}, R'R\big)$$

- inverse Galilei-Transformation

$$(\tau, \boldsymbol{a}, u, R)^{-1} = \big(-\tau, R^{-1}(\boldsymbol{u}\tau - \boldsymbol{a}), -R^{-1}\boldsymbol{u}, R^{-1}\big)$$

- Galilei-Gruppe G hängt von 10 reellen Parametern ab

Galilei-Transformationen cont.

- Konjugation mit $(\tau_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{a}_1, R_1)$:

$$\begin{aligned} R' &= R_1 R R_1^{-1} \\ \boldsymbol{u}' &= R_1 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_1 - R' \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{a}' &= R'(\tau_1 \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{a}_1) - R_1(\tau_1 \boldsymbol{u} - \boldsymbol{a}) + (\tau - \tau_1)\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{a}_1 \\ \tau' &= \tau \end{aligned}$$

- Normalteiler
  - raumzeitliche Translationen $(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}, \mathbb{1})$
  - räumliche Translationen und speziellen Galileitransformationen $(0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, \mathbb{1})$.

Lemma (Galilei-Gruppe als semidirektes Produkt)

Galilei-Gruppe = semidirektes Produkt $\mathbb{R}^4 \rtimes E_3$ der Gruppe $\mathbb{R}^4$ der Translationen in Zeit und Raum mit Elementen $(\tau, \boldsymbol{a})$ und der Euklidischen Gruppe mit Elementen $(\boldsymbol{u}, R)$. Wirkung von $(\boldsymbol{u}, R) \in E_3$ auf $(\tau, \boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^4$ ist gegeben durch

$$\varphi(\boldsymbol{u}, R)\,(\tau, \boldsymbol{a}) = (\tau, R\boldsymbol{a} + \tau\boldsymbol{u})\,.$$

- insb. φ definiert Automorphismus von E_3 auf $\mathbb{R}^4$

$$\varphi(\boldsymbol{u}', R)\varphi(R, \boldsymbol{u}) = \varphi(R'R, R'\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = \varphi\big((\boldsymbol{u}', R') \circ (\boldsymbol{u}, R)\big)$$

Poincaré-Transformationen

- 4-dimensionale affine Minkowski-Raumzeit M
- Ereignisse = Punkte $\{P, Q, \dots\}$ in M (Zeit- und Raumpunkt)
- Bezugssysteme = IS
- synchronisierte Uhren in IS

  $\Rightarrow$ synchrone Zeit und kartesische Koordinaten eines Ereignisses

$$x = (x^\mu) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)^T = \begin{pmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$$

- Ereignisse P, Q mit Koordinaten $x, y \Rightarrow$ Differenzvektor

$$\xi = y - x = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)^T \quad \text{bzw.} \quad \xi = (\xi^\mu)\,.$$

- lorentzinvarianter Abstand zweier Ereignisse

$$d(x, y) = (\xi, \xi) = c^2 (t_y - t_x)^2 - (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^2$$

- Lichtsignal von x (früher) nach y (später): $c(t_y - t_x) = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \Rightarrow d(x, y) = 0$

Konventionen

- Bilinearform („invariantes Skalarprodukt“) auf Vektorraum $V = \{\xi \in \mathbb{R}^4\}$

$$(\xi,\eta) = \xi^0\eta^0 - \xi^1\eta^1 - \xi^2\eta^2 - \xi^3\eta^3\,,$$

- Einführung des metrischen Tensors

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g_{\mu\nu}) \quad \text{bzw.} \quad G^{-1} = (g^{\mu\nu})$$

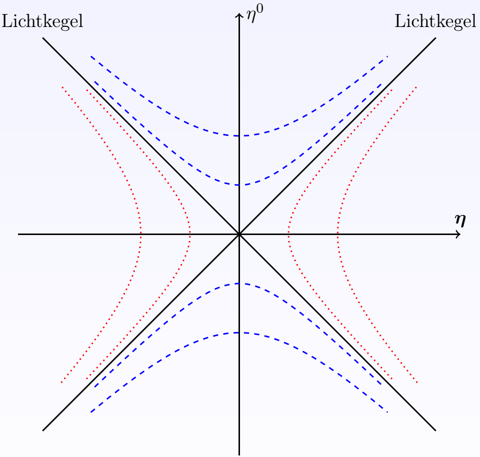
- invariante Skalarprodukt

$$(\xi,\eta) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\xi^\mu\eta^\nu = \xi^T G\eta\,.$$

- Indizes werden mit $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ hinunter- oder hinaufgezogen

$$\xi_\mu = g_{\mu\nu}\xi^\nu \quad \text{bzw.} \quad \xi^\mu = g^{\mu\nu}\xi_\nu, \quad \text{so dass} \quad (\xi,\eta) = \xi^\mu\eta_\mu = \xi_\mu\eta^\mu\,.$$

Kausalstruktur im Minkowskiraum



- Kegeloberfläche (durchgezogenen): lichtartigen Vektoren, Lichtfortpflanzung
- gepunkteten roten Hyperboloide: raumartige Vektoren $\rightarrow x, y$ raumartig getrennt
- gestrichelten blauen Hyperboloide: zeitartige Vektoren $\Rightarrow x, y$ zeitartig getrennt

Äquivalentzprinzip

Die Naturgesetze sehen in allen IS gleich aus $\Rightarrow$ Lichtgeschwindigkeit in allen IS gleich groß

- unverträglich mit Galilei-Transformationen (Addition von Geschwindigkeiten)
- unverträglich mit Newton'scher Mechanik (absolute Zeit)
- Zeitdilatation, Längenkontraktion

Poincaré-Transformationen

Die Abbildungen $x \to x'$ zwischen IS sind die Poincaré-Transformationen

$$x' = \Lambda x + a \quad \text{mit} \quad \Lambda \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R}), \quad \Lambda^T G \Lambda = G,$$

Die homogenen Transformationen mit $a = 0$ heißen Lorentztransformationen

- „Skalarprodukt" ist invariant

$$\begin{aligned} d(x',y') &= (y'-x')^T G(y-x) = (y'-x')\Lambda^T G \Lambda (x-y) \\ &= (x-y)^T G(x-y) = d(x,y) \end{aligned}$$

- Komposition zweier Poincaré-Transformationen

$$x \mapsto \Lambda_1 x + a_1 \mapsto \Lambda_2\Lambda_1 x + (\Lambda_2 a_1 + a_2)$$

- Inverse Transformation

$$x' = \Lambda x + a \Longrightarrow x = \Lambda^{-1}x' - \Lambda^{-1}a$$

Satz (Poincaré und Lorentzgruppe)

Die Poincaré-Transformationen sind Elemente einer Gruppe, der Poincaré-Gruppe (inhomogene Lorentz-Gruppe) Diese wird mit iL oder $iO(1,3)$ bezeichnet,

$$iO(1,3) = \left\{(a,\Lambda)\big|\, a \in V, \Lambda \in GL(4,\mathbb{R}), \Lambda^T G\Lambda = G\right\}$$

Die homogenen Transformationen mit $a = 0$ bilden die Lorentz-(Unter)Gruppe $O(1,3)$

Die Gruppenmultiplikation und Inversion:

$$(a_2,\Lambda_2)\,(a_1,\Lambda_1) = (a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2\Lambda_1)\,, \quad (a,\Lambda)^{-1} = \left(-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}\right)$$

Globale Struktur von $O(1,3)$

- Konjugation

$$(a_1,\Lambda_1)\,(a,\Lambda)\,(a_1,\Lambda_1)^{-1} = \big(a_1+\Lambda_1 a-\Lambda' a_1,\ \Lambda'\big)\,,\quad \Lambda' = \Lambda_1\Lambda\Lambda_1^{-1}$$

- Verschiebungen $x' = x + a$ mit Gruppenelementen $(a, \mathbb{1})$ bilden Normalteiler
- semidirektes Produkt von Verschiebungen mit Lorentztransformationen

$$\mathrm{iO}(1,3) = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{O}(1,3)$$

- Determinante und Zeitumkehr

$$\det(\Lambda^T G\Lambda) = \det G \Rightarrow \det\Lambda \in \{-1,1\}$$

$$\Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} \stackrel{\alpha=\beta=0}{\Longrightarrow} \left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left(\Lambda^i{}_0\right)^2 = 1 \Longrightarrow |\Lambda^0{}_0| \geq 1$$

$\Rightarrow O(1,3)$ enthält 4-Zusammenhangs-Komponenten

$$\mathrm{O}(1,3) = \mathrm{O}_+^\uparrow(1,3) \cup \mathrm{O}_-^\uparrow(1,3) \cup \mathrm{O}_+^\downarrow(1,3) \cup \mathrm{O}_-^\downarrow(1,3)\,,$$

- Bedeutung der Indizes:

$$\pm:\ \det\Lambda = \pm 1\,,\quad \uparrow:\text{keine Zeitumkehr } (\Lambda^0_0 \geq 1)\,,\quad \downarrow:\text{Zeitumkehr } (\Lambda^0_0 \leq -1)\,.$$

Normalformen von eigentlichen orthochronen LT in $O_+^\uparrow(1,3)$

- Wechsel des IS $I \to I'$ vermittels $x' = \tilde{\Lambda}x$
- Λ Lorentztransformation in $I \Longrightarrow \tilde{\Lambda}\Lambda\tilde{\Lambda}^{-1}$ Lorentztransformation in I'
- durch Wahl des IS kann man Λ auf Normalform bringen
- Lorentztransformationen in I und I' in gleicher Konjugationsklasse
- Elliptische Transformationen: konjugiert zu einer räumlichen Drehung um die $\boldsymbol{e}_3$:

$$\Lambda_{\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\boldsymbol{e}_3, \varphi) \end{pmatrix}$$

- Hyperbolische Transformationen: konjugiert Lorentz-Boost in Richtung $\boldsymbol{e}_3$:

$$\Lambda_{\mathrm{h}} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & 0 & 0 & \sinh\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\beta & 0 & 0 & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

- Loxodrome Transformationen: konjugiert zu Verknüpfung,

$$\Lambda_{\mathrm{l}} = \Lambda_{\mathrm{e}}\Lambda_{\mathrm{h}}\ .$$

- Parabolische Transformationen: konjugiert zu

$$\Lambda_{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2/2 & \alpha & 0 & -\alpha^2/2 \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ cr0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^2/2 & \alpha & 0 & 1-\alpha^2/2 \end{pmatrix}$$