Endliche Gruppen und Permutationen

- M Wirkungsmenge mit n Elementen
- bijektive Abbildung $\pi : M \to M$ heißt Permutation (= Umordnung)
- Permutationsgruppe= {Permutationen}= $\mathcal{S}_n$, auch symmetrische Gruppe
- Gruppenmultiplikation = Komposition
- Ordnung $|\mathcal{S}_n| = n!$
- später: G Gruppe mit $|G| = n \Longrightarrow G \leq \mathcal{S}_n$
- $\mathcal{S}_n$ enthält alle Gruppen der Ordnung n als Untergruppen

Gruppentafel von G mit $|G| = n$

- Kopfzeile $\{g_1 = e, g_2, \ldots, g_n\}$

$$\text{Zeile zu } g: \quad \{gg_1, \ldots, gg_n\} = \{\pi_g(g_1), \ldots, \pi_g(g_n)\}$$

- Permutation π_g der Kopfzeile
- $g \neq g' \Rightarrow \pi_g \neq \pi_{g'} \Rightarrow n$ verschiedene Permutationen $\pi_{g_1}, \ldots, \pi_{g_n}$

$$G \longmapsto \mathcal{S}_n, \qquad g \longmapsto \pi_g$$

Lemma

Sei G Gruppe der Ordnung n. Die Abbildung

$$\pi : G \longmapsto \mathcal{S}_n, \qquad g \longmapsto \pi_g$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern$(\pi) = e$

Beweis.

- $\pi : g \to \pi_g$ is Homomorphismus (benutze $\pi_g(g') = gg'$)

$$(\pi_g \pi_{g'})(g'') = (\pi_g)(g'g'') = gg'g'' = \pi_{gg'}(g'') \Longrightarrow \pi_g \pi_{g'} = \pi_{gg'}\,.$$

- Einselement $G \ni e \to \pi_e =$ Einselement in $\mathcal{S}_n$, Inverses $\pi_g^{-1} = \pi_{g^{-1}}$

□

Kern$(\pi) = e \Rightarrow G$ isomorph zu Bild von π (Isomorphiesatz) $\Rightarrow$

Satz (Cayley)

Gruppe G mit $|G| = n \Longrightarrow G$ isomorph zu Untergruppe von $\mathcal{S}_n$

Die n Permutationen $\{\pi_g | \, g \in G\}$, bilden i.A. eine kleine Untergruppe in $\mathcal{S}_n$

- unter den endlichen Gruppen sind $\mathcal{S}_n$ ausgezeichnet
- wichtig für Quantensysteme von n identischen Teilchen (Fermionen, Bosonen, Anyonen)

Beispiel: Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$

$$\text{Permutation } a : (1,2,3) \to (2,3,1) \text{ oder } a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} ,$$

die $|\mathcal{S}_3| = 3! = 6$ Elemente sind

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad d = ca = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad f = cb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

ca : zuerst a und dann c Die Gruppe ist nicht-abelsch

Permutationen, Zyklen, Transpositionen

Darstellung von Zyklen (spezielle Permutationen)

- Permutation $(m_1, \dots, m_{k-1}, m_k) \to (m_2, m_3, \dots, m_k, m_1)$ ist $k-$Zyklus $(m_1, m_2, \dots, m_k)$
- Permutation $=$ Produkt elementfremder Zyklen (zuerst rechts, zuletzt links)

Beispiel: Zyklendarstellung von Elementen aus $\mathcal{S}_4$

- $(1,2,3,4) \to (1,3,4,2)$ wird mit $(1)(2,3,4)$ bezeichnet
- mehrere Zyklen durch Klammern getrennt
- $(1,2,3,4) \to (2,1,4,3)$ schreibt sich $(1,2)(3,4)$
- Verknüpfung: $(2,3,4) \circ (2,3,4) = (2,4,3)$; $(2,3,4) \circ (1,2,3) = (1,3)(2,4)$

- einfachste Permutation $=$ Transposition $=$ Vertauschung zweier Elemente
- $k-$Zyklus $=$ Produkt von $k-1$ Transpositionen

$$(m_1, m_2, \dots, m_k) = (m_1, m_2) \dots (m_2, m_3)(m_{k-1}, m_k)$$

$\Rightarrow$ jede Permutation ist Produkt von n_T Transpositionen (nicht eindeutig)

Permutationen, Zyklen, Transpositionen

- n_T gerade $\to$ gerade Permutation $\pi_{\rm g}$; n_T ungerade $\to \pi_{\rm u}$
- $\pi_{\rm g} \circ \pi'_{\rm g} = \pi''_{\rm g}$, $\pi_{\rm g}^{-1} = \pi'_{\rm g}$, wegen

$$\big[(m_1, m_2)(m_2, m_3)\cdots(m_{k-1}, m_k)\big]^{-1} = (m_k, m_{k-1})(m_{k-1}, m_{k-2})\cdots(m_2, m_1)$$

Lemma ($\mathcal{A}_n$ ist Untergruppe)

$\{$*geraden Permutationen*$\}$ = *alternierende Gruppe* $\mathcal{A}_n \le \mathcal{S}_n$

$$\pi_{\rm g} \circ \pi'_{\rm u} = \pi''_{\rm u}, \quad \pi_{\rm u} \circ \pi'_{\rm u} = \pi''_{\rm g}, \quad \pi_{\rm u}^{-1} = \pi'_{\rm u} \Longrightarrow \pi \mathcal{A}_n \pi^{-1} \subset \mathcal{A}_n \quad \forall\, \pi \in \mathcal{S}_n$$

Satz ($\mathcal{A}_n$ ist Normalteiler)

Alternierende Gruppe $\mathcal{A}_n$ *ist Normalteiler in symmetrischen Gruppe* $\mathcal{S}_n$

Zyklen und Konjugationsklassen

- $\mathcal{A}_n \leq \mathcal{S}_n$ der größte eigentliche Normalteiler
- der einzige Normalteiler für $n = 3$ und $n \geq 5$
- Faktorgruppe $\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n = \mathbb{Z}_2$

Beispiel: Konjugationsklassen von $\mathcal{S}_n$

- Zyklen nach abnehmender Länge anordnen

$$\mathcal{S}_6 \ni \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim (1,4,6)(3,5)(2)\,.$$

- Zerlegung in elementfreie Zyklen bis auf Reihenfolge gleich langer Zyklen eindeutig
- Permutationen vom gleichen Typ

$$(1,3,8)(4,5)(2,6)(7), \quad (1,4,6)(3,5)(7,8)(2) \quad \text{vom Typ} \quad (.,.,.)(.,.)(.,.)(.)$$

- 1 Zyklus der Länge 1, 2 Zyklen der Länge 2, 1 Zyklus der Länge 3

Partitionen von $n \in \mathbb{N}$

- allgemein: Zyklenzerlegung von π (Permutation von n Elementen)
  $\Rightarrow \{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_n\}$ mit $\nu_\ell =$ Anzahl Zyklen der Länge ℓ

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n = n$$

- Anzahl verschiedener Typen = Anzahl von Partitionen $P(n)$ der Zahl n

Beispiel: Partitionen von 4

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \Longrightarrow P(4) = 5$$

Anzahl Partitionen von n nach Euler

$$(q)_\infty = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \dots$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(q)_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} P(n)\, q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 15q^7 +$$

Charakterisierung von Konjugationsklassen

Satz (Konjugationsklassen von $\mathcal{S}_n$)

Permutationen π und π' in $\mathcal{S}_n$ sind zueiander konjugiert $\Longleftrightarrow$ π, π' sind vom gleichen Typ.
$\Longrightarrow$ *Anzahl Konjugationsklassen = Anzahl Partitionen $P(n)$ von n.*

Beispiel: Konjugation mit Transposition in $\mathcal{S}_6$

- Es seien $\pi = (1,2,3)(4,5)(6)$ und $\pi_0 = (2,5) = \pi_0^{-1}$
- Konjugation von π mit Transposition π_0

$$\pi' = \pi_0 \pi \pi_0^{-1} = \pi_0(1,2,4,5,3)(6) = (1,5,3)(2,4)(6)$$

- π' bis auf den Austausch der Einträge 2 und 5 gleich π
- Konjugation mit Transposition π_0 vertauscht 2 Einträge in π ohne Typ von π zu ändern. vertauscht werden die in π_0 stehenden Einträge

Aufgabe

Überlegen Sie sich, das letzte Aussage allgemein in $\mathcal{S}_n$ gilt

Konjugationsklasse von $\mathcal{S}_5$

Beweis.

jedes π ist Produkt von Transpositionen $\Rightarrow$ Typ ändert sich nicht bei Konjugation mit beliebiger Permutationen.
Umgekehrt: π, π' vom selben Typ können durch Vertauschen von Elementpaaren (= Konjugation mit Transposition) ineinander überführt werden. $\square$

Beispiel: Konjugationsklassen von $\mathcal{S}_5$, $P(5) = 7$

$\mathcal{S}_5$	Partition		ν_5	ν_4	ν_3	ν_2	ν_1	$P(n,\nu)$
1	5	(.....)	1	0	0	0	0	24
2	$4+1$	(....)(.)	0	1	0	0	1	30
3	$3+2$	(...)(..)	0	0	1	1	0	20
4	$3+1+1$	(...)(.)(.)	0	0	1	0	2	20
5	$2+2+1$	(..)(..)(.)	0	0	0	2	1	15
6	$2+1+1+1$	(..)(.)(.)(.)	0	0	0	1	3	10
7	$1+1+1+1+1$	(.)(.)(.)(.)(.)	0	0	0	0	5	1

Satz (Anzahl Permutationen von festem Typ)

Die Anzahl Permutationen vom Typ $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ *ist*

$$P(n,\nu) = n! \left(\prod_{\ell=1}^{n} \nu_\ell! \cdot \ell^{\nu_\ell} \right)^{-1} \Longrightarrow \sum_{\nu} P(n,\nu) = n!$$

Kleine Gruppen zum Verständnis der Liste (via GAP)

- p Primzahl $\Rightarrow$ gibt nur die Gruppe $\mathcal{C}_p \cong \mathbb{Z}_p$.
- p Primzahl $\Rightarrow$ gibt nur zwei Gruppen der Ordnung p^2, nämlich $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{Z}_{p^2}$
- p, q keinen gemeinsamen Teiler: es gilt $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$.
- Zur Zeit existiert Liste von Gruppen mit $|G| \leq 2000$ mit 49 910 529 484 Gruppen[1]
- zur Notation: a: abelsch, na: nicht-abelsch, z: zyklisch, aufl: auflösbar, $a^b \equiv bab^{-1}$
- Liste mithilfe von GAP: `SmallGroupsInformation(6)`

[1] H.U. Besche, B. Eick, E.A. O'Brien, Electon. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 7 (2001) 1-4.

Liste aller Gruppen mit $|G| \leq 15$

$\lvert G\rvert$	**Isomorphie typ von G**	**Präsentation**	**isomorphe Gruppen**	**Wichtige Eigenschaften**
2	$\mathbb{Z}_2$			z
3	$\mathbb{Z}_3$			z
4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$			a, Kleinsche Vierergr.
	$\mathbb{Z}_4$			z
5	$\mathbb{Z}_5$			z
6	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$		$\mathbb{Z}_6$	z
	$\mathcal{S}_3$	$a^3 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$	$\mathcal{D}_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$	Diedergruppe
			$\mathrm{SL}_2(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	na, aufl
7	$\mathbb{Z}_7$			z
8	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$			a
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$			a
	$\mathbb{Z}_8$			z
	$\mathcal{D}_4$	$a^4 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$	na, aufl, Diedergruppe
	$\mathcal{Q}_8$	$a^4 = e, b^2 = a^2, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{H}_2$	na, aufl, Quanterniongr.

Liste aller Gruppen mit $|G| \leq 15$

9	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$			a
	$\mathbb{Z}_9,$			z
10	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$		$\mathbb{Z}_{10}$	z
	$\mathcal{D}_5$	$a^5 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}_2$	na, aufl, Diedergruppe
11	$\mathbb{Z}_{11}$			z
12	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	a
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$		$\mathbb{Z}_{12}$	z
	$\mathcal{A}_4$	$a^3 = b^3 = (ab)^2 = e$	$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3$	na, aufl, alternierende Gr.
	$\mathcal{D}_6$	$a^6 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_6 \rtimes \mathbb{Z}_2$	na, aufl, Diedergruppe
	$\mathbb{H}_3$	$a^6 = e, b^2 = a^3, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$	na, aufl, Dizyklische Gruppe
13	$\mathbb{Z}_{13}$			z
14	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$		$\mathbb{Z}_{14}$	z
	$\mathcal{D}_7$	$a^7 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_2$	na, aufl, Diedergruppe
15	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$		$\mathbb{Z}_{15}$	z

Quaternionengruppe Q_8

- erzeugt von

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Relationen $a^4 = \mathbb{1},\ a^2 = b^2,\ bab^{-1} = a^{-1}$
- Ordnung $= 8$, Elemente

$$Q = \{\mathbb{1}, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}\,.$$

- äquivalent: Teilmenge $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ der Quaternionen-Algebra

Aufgabe

Dies ist eine sogenannte Präsentation von Q_8

Die Darstellung einer Gruppe durch erzeugende Elemente mit Relationen wird im Skript im Anhang 2.5: „Präsentation einer Gruppe“ besprochen.