Symmetrien in der Physik

Andreas Wipf

Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-University Jena

Sommersemester 2020

Einleitung

- Theorie: Nother, Wigner, Weyl, . . . :
  tiefgründige Beziehung zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen
  - Verschiebungen in der Zeit $\longrightarrow$ Energieerhaltung
  - Verschiebungen im Ortsraum $\longrightarrow$ Impulserhaltung
  - Drehungen im Ortsraum $\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung
- in klassischer Physik (Kepler Problem)
- in Quantenmechanik (Wasserstoffatom, harmonischer Oszillator)
- in Festkörperphysik (Kristallsymmetrien, Raumgruppen)
- in Atom- und Molekülphysik (Punktgruppen, Drehgruppen, Auswahlregeln)
- Teilchenphysik (Klassifikation der Elementarteilchen)
- Supersymmetrie, konforme und integrable Systeme, Stringtheorie
- Erzeugung und Klassifikation von Lösungen in der ART
- Lese Kapitel 1 des Skripts!

Literatur

Folgende Literatur könnte nützlich sein:

- J.F. CORNWELL, *Group Theory in Physics*, Academic Press, 1984.
- H. GEORGI, *Lie Algebras in Particle Physics*, Reading, Benjamin 1982.
- M. HAMERMESH, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Dover 1989.
- W. HEIN, *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*, Springer, 1990.
- V. HEINE, *Group Theory in Quantum Mechanics*, Dover 1993.
- H.F. JONES, *Groups, Representations and Physics*, Bristol, 1998.
- S. STERNBERG, *Group Theory and Physics*, CUP, 1994.
- J. TITS, *Liesche Gruppen und Algebren*, Springer 1992.
- M. WAGNER, *Gruppentheoretische Methoden in der Physik*, Vieweg 1998.

Organisation

- 2 Stunden Vorlesung (Wipf)
  Montag 10:15, HS2 Abbeanum
- 2 Stunden Übung/Seminar (Lenz, Mandl)
  Freitag 8:15, HW 4, SR 5
- Übungsblätter auf vorerst auf Moodle
  mind. 2 Lösungen von Aufgaben in Seminar präsentieren
- mündliche Klausur am Ende der Vorlesung
- anfänglich auch mal Vorlesung anstelle von Seminar

Elemente der Gruppentheorie

Definition (Gruppe)

Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Menge G, für die eine Verknüpfung $\circ$ definiert ist mit folgenden Eigenschaften (Gruppenaxiome):

Abgeschlossenheit: $g_1, g_2 \in G \mapsto g_1 \circ g_2 \in G$
Assoziativgesetz: $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$
existiert Einselement $e \in G$ mit $e \circ g = g \circ e = g$ für jedes Element $g \in G$
jedes $g \in G$ hat Inverses $g^{-1} \in G$ mit $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

- inverses Element ist eindeutig
- inverse eines Products

$$(g \circ g') \circ (g \circ g')^{-1} = e \iff (g \circ g')^{-1} = g'^{-1} \circ g^{-1}.$$

$$(g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n)^{-1} = g_n^{-1} \circ g_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ g_1^{-1}.$$

Beispiele und Eigenschaften

Beispiele von Gruppen

- $\{1\}$ mit der Gruppenoperation $=$ Multiplikation.
- $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ mit Multiplikation als Verknüpfung: $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$.
  Multiplikation assoziativ und $g^{-1} = g$
- $\{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$ mit $a^n = e$ $(a \circ a = a^2,\ a \circ a \circ a = a^3, \dots)$
  zyklische Gruppe der Ordnung n: $\mathcal{C}_n$.
- komplexen Zahlen vom Betrage 1 mit Multiplikation
  kontinuierliche Gruppe U(1).

Eigenschaften

- Anzahl Elemente $= |G|$: Ordnung der Gruppe
- $\mathcal{C}_n$ endliche Gruppe, Ordnung n
- $\{\mathbb{Z}, +\}$ diskrete Gruppe (abzählbar)
- U(1) überabzählbar unendlich, kontinuierliche Gruppe

Gruppentafel (Cayley-Tafel)

- alle Information enthalten
- nützlich für kleine Gruppen

G	e	g_2	g_3	$\dots$	g_n
e	e	g_2	g_3	$\dots$	g_n
g_2	g_2	$g_2 \circ g_2$	$g_2 \circ g_3$	$\dots$	$g_2 \circ g_n$
g_3	g_3	$g_3 \circ g_2$	$g_3 \circ g_3$	$\dots$	$g_3 \circ g_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
g_n	g_n	$g_n \circ g_2$	$g_n \circ g_3$	$\dots$	$g_n \circ g_n$

- g^{-1} eindeutig $\to$ in jeder Zeile e einmal
- $gg_p = gg_q \Rightarrow g_p = g_q \Rightarrow$ jede Zeile ist Umordnung der ersten Zeile
  $g_pg = g_qg \Rightarrow g_p = g_q \Rightarrow$ jede Spalte ist Umordnung der ersten Spalte

Gruppentafel (Cayley-Tafel)

Cayley-Tafel

- Zeile zu g =Permutation $\pi_g(g_p)$ der ersten Zeile
- insbesondere $\pi_g(e) = \pi_e(g) = g$.

$$\mathrm{T}(G) = \begin{pmatrix} \pi_e(e) & \pi_e(g_2) & \pi_e(g_3) & \dots & \pi_e(g_n) \\ \pi_{g_2}(e) & \pi_{g_2}(g_2) & \pi_{g_2}(g_3) & \dots & \pi_{g_2}(g_n) \\ \pi_{g_3}(e) & \pi_{g_3}(g_2) & \pi_{g_3}(g_3) & \dots & \pi_{g_3}(g_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \pi_{g_n}(e) & \pi_{g_n}(g_2) & \pi_{g_n}(g_3) & \dots & \pi_{g_n}(g_n) \end{pmatrix}$$

Gruppentafel von $\mathcal{C}_4$

$$\mathrm{T}(\mathcal{C}_4) = \begin{pmatrix} e & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & e \\ a^2 & a^3 & e & a \\ a^3 & e & a & a^2 \end{pmatrix}$$

Gruppentafel symmetrisch ist, d.h. $g_1 g_2 = g_2 g_1$ für alle $g_1, g_2 \Rightarrow$ abelsche Gruppe

Matrixgruppen

Definition (Die Gruppen GL(n,$\mathbb{K}$) und SL(n,$\mathbb{K}$) mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots\}$ Körper)

- invertierbare $n \times n-$Matrizen

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \big| \det A \neq 0\}$$

  Verknüpfung = Matrixmultiplikation: Gruppe

- Teilmenge

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) | \det A = 1\}$$

  ebenfalls Gruppe

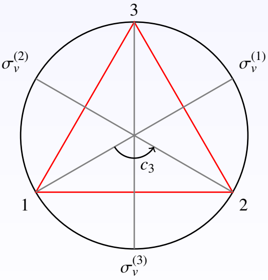
- ist Untergruppe = Teilmenge, die selbst eine Gruppe bildet

- abgeschlossen, da $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$
- assoziativ da Matrixmultiplikation assoziativ
- Einselement = Einsmatrix
- inverses Element = inverse Matrix

Diedergruppen

Definition (Diedergruppen $\mathcal{D}_n$)

Decktransformationen des gleichseitigen n-Ecks



- n Drehungen c_i, n Spiegelungen $\sigma_v^{(i)}$
- Ordnung $|\mathcal{D}_n| = 2n$
- Beispiel

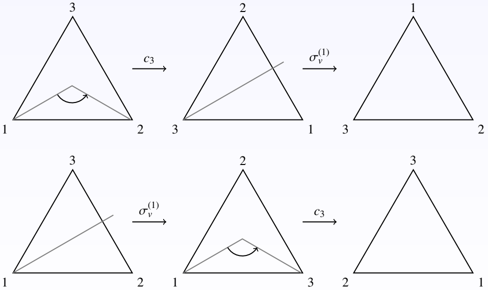
$$c_3 : (1,2,3) \longmapsto (3,1,2)$$
$$\sigma_v^{(1)} : (1,2,3) \longmapsto (1,3,2)$$
$$\sigma_v^{(2)} : (1,2,3) \longmapsto (3,2,1),$$

- nicht-Abelsch

$$(1,2,3) \xmapsto{c_3} (3,1,2) \xmapsto{\sigma_v^{(1)}} (3,2,1), \quad \sigma_v^{(1)} \circ c_3 = \sigma_v^{(2)}$$
$$(1,2,3) \xmapsto{\sigma_v^{(1)}} (1,3,2) \xmapsto{c_3} (2,1,3), \quad c_3 \circ \sigma_v^{(1)} = \sigma_v^{(3)}$$
$$\sigma_v^{(1)} \circ c_3 \neq c_3 \circ \sigma_v^{(1)}$$

Diedergruppe $\mathcal{D}_n$

$$
\mathrm{T}(\mathcal{D}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
e & c_3 & c_3^2 & \sigma_v^{(1)} & \sigma_v^{(2)} & \sigma_v^{(3)} \\
c_3 & c_3^2 & e & \sigma_v^{(3)} & \sigma_v^{(1)} & \sigma_v^{(2)} \\
c_3^2 & e & c_3 & \sigma_v^{(2)} & \sigma_v^{(3)} & \sigma_v^{(1)} \\
\hline
\sigma_v^{(1)} & \sigma_v^{(2)} & \sigma_v^{(3)} & e & c_3 & c_3^2 \\
\sigma_v^{(2)} & \sigma_v^{(3)} & \sigma_v^{(1)} & c_3^2 & e & c_3 \\
\sigma_v^{(3)} & \sigma_v^{(1)} & \sigma_v^{(2)} & c_3 & c_3^2 & e
\end{array}\right) .
$$



- Verknüpfung = nacheinander ausführen
- c_3 Drehung um $2\pi/3$
- $(c_3)^3 = e$
- kleinste nicht-Abelsche Gruppe
- 3×3-Block links oben: abgeschlossen $\to \mathcal{C}_3$

Homomorphismen und Klasseneinteilungen

- $\mathrm{T}(G)$ bis auf Umordnung von Zeilen/Spalten gleich $\mathrm{T}(G')$:
  G identisch zu G' bis auf Umbenennung von Elementen
  G isomorph zu G'

Definition (Homomorphismus, Isomorphismus)

Gruppen G, G' und $\varphi : G \mapsto G'$ mit $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ heißt Gruppenhomorphismus. Ein bijektiver Homomorphismus heißt Isomorphismus

- Existiert ein Isomorphismus φ, dann heißen G und G' isomorph, $G \cong G'$.
- $\mathrm{Hom}(G, G') = \{\text{Homomorpismen } \ G \to G'\}$

Lemma

G und G' seien Gruppen mit Einselementen e und e' und $\varphi \in Hom(G, G')$. Dann ist $\varphi(e) = e'$ und $\varphi(g^{-1}) = \left[\varphi(g)\right]^{-1}$ für alle $g \in G$.

Automorphismengruppe

Beweis.

$$\varphi(g) = \varphi(ge) = \varphi(g)\varphi(e) \Longrightarrow \varphi(e) = e'$$
$$e' = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) \Longrightarrow \varphi(g^{-1}) = \left[\varphi(g)\right]^{-1}.$$

□

Definition (Automorphismen)

$\mathrm{Aut}(G) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(G,G)\,|\varphi \text{ ist Isomorphismus}\}$

Gruppe der Automorphismen

Die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Gruppe und heißt Automorphismengruppe von G.

Gruppenverknüpfung = Komposition von Abbildungen, Einselement ist φ mit $\varphi(g) = g$, inverse Element = inverse Abbildung.

Kern, Bild

- jedes $g \in G$ definiert eine Konjugation

$$\varphi_g : \quad G \mapsto G, \qquad \varphi_g(g') = gg'g^{-1}$$

- φ_g ist innerer Automorphismus
- $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ aber $\varphi \neq \varphi_g\ \forall g$: äußerer Automorphismus

Aufgabe

Überzeugen Sie sich davon, dass die Abbildungen φ_g Automorphismen sind.

Definition

Der *Kern* eines Homomorphismus $\varphi : G \to G'$ ist die Menge

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g) = e'\} \subset G$$

Das *Bild* eines Homomorphismus ist die Menge

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) | g \in G\}$$

Untergruppen

Definition (Untergruppe $H \leq G$)

Teilmenge $H \subset G$, die unter der Multiplikation in G abgeschlossen ist und eine Gruppe bildet.

Satz

$H \subset G$ ist Untergruppe von G, wenn für alle $a, b \in H$ gilt $ab \in H$ und $a^{-1} \in H$.

- Es gelten $G \leq G$ und $\{e\} \leq G$
- $e \in G$ liegt immer in $H \leq G$

Satz (Kern und Bild sind UG)

Gruppen G, G' und $\varphi \in Hom(G, G')$. Dann gilt $\mathrm{Im}(\varphi) \leq G'$ *und* $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \leq G$.

G abelsch und $m \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi_m : \quad G \longmapsto G, \qquad \varphi_m(g) = g^m$$

ist Gruppenhomomorphismus. Für $G = (\mathbb{Z}, +)$ ist $\mathrm{Ker}(\varphi_m) = \{0\}$ und $\mathrm{Im}(\varphi_m) = m\mathbb{Z}$.

Untergruppen cont.

Beweis des Satzes.

$\mathrm{Im}(\varphi) \leq G'$ abgeschlossen unter Multiplikation und Inversion:

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) \in \mathrm{Im}(G) \quad , \quad [\varphi(g)]^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in \mathrm{Im}(\varphi)\,.$$

Ker $(\varphi) \leq G$ abgeschlossen unter Multiplikation und Inversion: $g, \tilde{g} \in \mathrm{Kern}(\varphi) \Rightarrow$

$$\varphi(g\tilde{g}) = \underbrace{\varphi(g)}_{e'}\underbrace{\varphi(\tilde{g})}_{e'} = e' \quad , \quad \varphi(gg^{-1}) = e' = \underbrace{\varphi(g)}_{e'}\varphi(g^{-1}) \Rightarrow \varphi(g^{-1}) = e',$$

$\square$

Lemma

$\varphi \in Hom(G, G')$ und $H \leq G \Rightarrow \varphi(H) \leq \varphi(G)$.

Die Gruppe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ als Kern des Determinanten-Homomorphismus

- $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ multiplikative Gruppe, det: $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}^*$ ist in $\mathrm{Hom}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \mathbb{K}^*))$
  Beweis mit $\det(AB) = \det A \det B$, det ist surjektiv, Kern ist spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{Ker}(\det) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) | \det A = 1\} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$$

Zyklische (Unter)gruppen

Definition (von $g \in G$ erzeugte zyklische Untergruppe $\leq G$)

$$H = (g) = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\} \leq G, \quad \text{wobei} \quad g^0 = e \quad \text{und} \quad g^{-k} := (g^k)^{-1}.$$

- Ordnung von(g) endlich $\Rightarrow$ gibt $k > l \in \mathbb{Z}$ mit $g^k = g^l \Leftrightarrow g^n = e$ mit $n = k - l$
  n kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft $\Rightarrow$

$$(g) = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1} | g^n = e\}$$

Lemma (zyklische Gruppen endlicher Ordnung)

$G = (g)$ habe Ordnung $n \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (Addition modulo n).

- Ordnung von (g) unendlich $\Rightarrow$ alle g^k verschieden $\Rightarrow$

$$\mathbb{Z} \ni k \mapsto g^k \in (g) \quad \text{ist Isomorphismus}$$

Lemma (zyklische Gruppen von unendlicher Ordnung)

$G = (g)$ habe unendliche Ordnung $\Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}, +)$.

Relevante Untergruppen

Lemma (konjugierte Untergruppe)

Es sei $H \leq G$. Dann ist

$$\varphi_g(H) \equiv gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$$

eine zu H isomorphe Untergruppe von G. Sie heißt zu H konjugierte Untergruppe.

Beweis.

φ_g (innerer) Automorphismus $\Rightarrow \varphi_g(H) \leq G$. φ_g bijektiv $\Rightarrow \varphi_g(H) \cong H$. □

Von Bedeutung für die Klassifikation von Gruppen und Darstellungstheorie sind

Definition (invariante Untergruppe, Normalteiler)

$N \leq G$ heißt invariante Untergruppe oder Normalteiler von G, wenn

$$\varphi_g(N) = gNg^{-1} = N \quad \text{für alle} \quad g \in G$$

- $\{e\}$ und G sind immer triviale Normalteiler von G.

einfache Gruppen

Definition (einfache und halb-einfache Gruppen)

Eine einfache Gruppe hat nur triviale Normalteiler
eine halbeinfache Gruppe hat keinen Abelschen Normalteiler

- G einfach $\Rightarrow$ G halbeinfach
- G abelsch mit eigentlicher Untergruppe $\Rightarrow$ G nicht halbeinfach

Klassen von einfachen Gruppen

Man kann alle einfachen Gruppen in wenige Klassen einteilen:

- $\mathcal{C}_n$ mit n Primzahl
- alternierende Gruppen $\mathcal{A}_n$ mit $n \geq 5$ (siehe unten)
- Lie-Typ Gruppen (Chevalley- oder getwistete Chevalley-und Titsgruppen)
- 26 sporadische Gruppen.

  z.B. Monster“= Gruppe von Drehungen im 196 883-dimensionalen Raum.
  |Monstergruppe| ist 54-stellige Zahl

Vermutung von Burnside

G endlich, einfach und nicht-Abelsch $\Rightarrow |G|$ gerade Zahl

Es existiert ein nützlicher Zusammenhang zwischen Normalteiler und Homomorphismen

Satz (Normalteiler)

Es sei $\varphi \in Hom(G, G')$ und $N \leq G$ Normalteiler. Dann gelten

- *$Ker(\varphi)$ ist Normalteiler in G.*
- *$\varphi(N)$ ist Normalteiler in $G' \;\Rightarrow\; \varphi(G)$ Normalteiler in G'.*

Beweis.

- Es ist $\mathrm{Ker}(\varphi) \leq G$. Sei nun $n \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ und $g \in G$ beliebig. Dann ist

$$\varphi\big(gng^{-1}\big) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\, e' \, [\varphi(g)]^{-1} = e' \Longrightarrow gng^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi).$$

- zweite Eigenschaft folgt unmittelbar aus

$$\varphi(g)\varphi(N)\big(\varphi(g)\big)^{-1} = \varphi(gNg^{-1}) = \varphi(N).$$

$\square$

Zentrum

Definition (Zentrum von G)

Dies ist die nicht-leere Untergruppe

$$Z = \{z \in G | zg = gz \quad \forall g \in G\} \leq G$$

Beweis.

Z nicht leer da $e \in Z$. Ist Untegruppe:

$$z, z' \in Z \Longrightarrow zz'g = zgz' = gzz' \quad \text{und} \quad gz^{-1} = z^{-1}(zg)z^{-1} = z^{-1}(gz)z^{-1} = z^{-1}g.$$

$\square$

- G abelsche $\Rightarrow Z = G$
- stark nicht-Abelsche Gruppe $Z = \{e\}$
- Z ganz spezielle invariante Untergruppe: $gzg^{-1} = z$ gilt elementweise!

Äquivalenzrelation, Klasseneinteilung

Definition (Äquivalenzrelation $\sim$ auf Menge M)

- reflexiv: $a \sim a$
- symmetrisch: $a \sim b \leftrightarrow b \sim a$
- transitiv: $a \sim b, b \sim c \rightarrow a \sim c$.

nützlich für Klassifikation von Gruppen und Aufdeckung von Strukturen

Aufgabe

Überzeugen Sie sich davon, dass M in disjunkte Äquivalenzklassen zerfällt, $M = K_1 \cup K_2 \cup \dots$ mit $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Definition (Nebenklassen, Restklassen)

Sei $H \leq G$. Restklassen modulo H (die Nebenklassen von H):

$$a \dot{\sim} b \quad \text{falls} \quad a^{-1} b \in H \Longleftrightarrow a \dot{\sim} b \quad \text{falls} \quad b \in aH .$$

Nebenklassen

- $H \leq G$ zerlegt G in durchschnittsfreie Teilmengen
- Nebenklassen (englisch: cosets): $G \ni a \mapsto aH = \{ah|h \in H\}$
- $aH = bH \Leftrightarrow a \dot{\sim} b$
- Zerlegung in disjunkte (linke) Nebenklassen

$$G = eH \cup aH \cup a'H \cup \ldots \quad \text{Anzahl Elemente in}(aH) = |H|$$

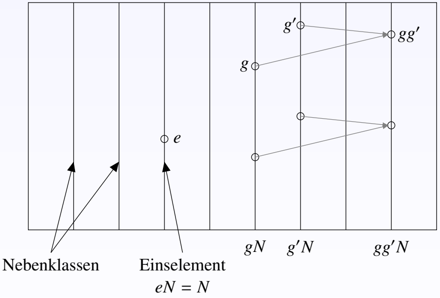


Abbildung: *G als Vereinigung von disjunkten Nebenklassen.*

Faktorgruppe

Satz (Lagrange)

$H \leq G \Rightarrow$ Index $j = |G|/|H|$ der Untergruppe H in G ist natürliche Zahl

- analoge Zerlegung in disjunkte rechte Nebenklassen $H, Ha, \ldots$
- für abelsche G: rechte NK $=$ linke NK

Gruppen mit Primzahlordnung

Es folgt: $|G|$ eine Primzahl $\Rightarrow$ G hat keine eigentliche Untergruppe, G ist einfach

Zyklische Gruppen

$\mathcal{C}_n$ ist genau dann einfach, wenn n eine Primzahl ist

Definition (Faktorgruppe)

$N \leq G$ Normalteiler $\Rightarrow$ Menge der Nebenklassen $\{gN|g \in G\}$ mit der Verknüpfungsrelation

$$(gN) \cdot (g'N) = gNg'N = (gg')N.$$

bilden die Faktorgruppe G/N.

Isomorphiesatz

Beweis.

wohldefiniert: Resultat hängt nicht vom Repräsentanten ab: N Normalteiler $g'N = g'N \Rightarrow$

$$(gN)(g'N) \overset{\text{assoziativ}}{=} gNg'N \overset{\text{Normalteiler}}{=} gg'N$$

Einselement $eN = N : eN \cdot gN = gN$, inverse Klasse $(gN)^{-1} = g^{-1}N$ □

- e, G Normalteiler: $G/e = G$ und $G/G = e$.
- $m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ Normalteiler $\Rightarrow \; Z/m\mathbb{Z} =$ Restklassen von $\mathbb{Z}$ mod m.

- Kern von $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, G') \leq G$ ist Normalteiler in G
- Restklassen $G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ Gruppe in G.

Satz (1. Isomorphiesatz)

Sei $\varphi \in Hom(G, G')$ surjektiv. Dann gilt

$$G/\mathrm{Ker}\;(\varphi) \cong G'$$

- präziser: π surjektiver Homomorphismus (Projektion)

$$\begin{aligned} \pi: \quad & G \longmapsto G/\mathrm{Ker}(\varphi) \\ & g \longmapsto g\,\mathrm{Ker}(\varphi), \end{aligned}$$

- Isomorphismus $\psi: G/\mathrm{Ker}(\varphi) \to G'$ gegeben durch

$$\psi\big(\pi(g)\big) = \psi\big(g\,\mathrm{Ker}(\varphi)\big) = \varphi(g) \quad \text{oder} \quad \psi \circ \pi = \varphi.$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & & G' \\ G/K \arrow[urr, "\cong\,\psi"'] & & \end{tikzcd}$$

Abbildung: *$\varphi \in Hom(G, G')$ ist Komposition von Projektion π und Isomorphismus ψ.*

Aufgabe

Beweisen Sie explizit, dass ψ ein bijektiver Homomorphismus ist

Homomorphismen vs. Normalteiler

Alle Homomorphismen einer Gruppe G sind von G bestimmt: Betrachte $\pi : G \mapsto G/N$ für alle Normalteiler $N \leq G$

G nicht-abelsch:

- im allgemeinen $gg' \neq g'g$
- Kommutator $[g, g'] \equiv gg'g^{-1}g'^{-1} \neq e$ für einige g, g'

Definition (Kommutatorgruppe)

$[G, G]$ ist die von den Kommutatoren $\{[a, b]|a, b \in G\}$ erzeugte Untergruppe von G.

- $[G, G]$ abgeschlossen (nach Definition), assoziativ und $e \in [G, G]$
- Inverses

$$(aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} \in [G, G] \,,$$

- Ordnung $|[G,G]|$ Maß dafür, wie weit G nicht-Abelsch ist

Satz (Kommutator)

$[G,G] \leq G$ *ist Normalteiler*

Beweis.

Konjugation bildet Kommutator in Kommutator ab:

$$g(aba^{-1}b^{-1})g^{-1} = \underbrace{(gag^{-1})}_{a'}\underbrace{(gbg^{-1})}_{b'}(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1} = a'b'a'^{-1}b'^{-1} \in [G,G].$$

beliebiges $c \in [G,G] \Rightarrow c = c_1c_2\cdots c_k$, mit Kommutatoren $c_i \Rightarrow$

$$gcg^{-1} = g(c_1c_2\cdots c_k)g^{-1} = \underbrace{(gc_1g^{-1})}_{c_1'\in[G,G]}(gc_2g^{-1})\cdots(gc_kg^{-1}) \in [G,G]$$

$\square$

- G abelsch $\Rightarrow [G,G]=e,\ G/[G,G]\cong G$
- $G=A_n$ gerade Permutationen $[A_n,A_n]=A_n$ und $A_n/[A_n,A_n]\cong e$
- Was wissen wir über $G/[G,G]$

Satz

Die Faktorgruppe $G/[G,G]$ ist stets Abelsch.

Beweis.

$[G,G]=N$ ist Normalteiler; wollen $gNg'N=g'NgN$ zeigen:

$$gNg'Ng^{-1}Ng'^{-1}N=\underbrace{gg'g^{-1}g'^{-1}}_{\in N}N=N(=e\text{ der Faktorgruppe}).$$

□

Konjugationsklassen

- Relation $a \sim b \Leftrightarrow gag^{-1} = b$ (b konjugiert zu a)
- reflexiv, symmetrisch und transitiv $\Rightarrow$ Ähnlichkeitsrelation

$$\text{transitiv:} \quad b = gag^{-1} \sim a, \quad c = \tilde{g}b\tilde{g}^{-1} \sim b \Longrightarrow c = (\tilde{g}g)a(\tilde{g}g)^{-1} \sim a\,.$$

- $\Rightarrow$ disjunkte Konjugationsklassen

$$K_a = \{gag^{-1} | g \in G\}, \qquad a \in K_a$$

- Jedes Zentrumselement bildet eine Klasse für sich
- durchnummerieren $G = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \dots$ mit $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$
- Anzahl Elemente von K_i sei $n(K_i) \Longrightarrow$

$$\sum_i n(K_i) = |G|\,.$$

Satz

Alle Elemente in festem K_i haben gleiche Ordnung und $n(K_i)$ ist Teiler von $|G|$

Konjugationsklassen cont.

Beweis, erster Teil.

$$a^n = e, \quad b = gag^{-1} \Longrightarrow b^n = (gag^{-1})(gag^{-1})\cdots(gag^{-1}) = ga^n g^{-1} = e.$$

$\square$

Für zweite Aussage: jedes $a \in G$ definiert $N_a \le G$:

Definition (Normalisator, Stabilisator von $a \in G$:)

$$N_a = \{g \in G | gag^{-1} = a\} \le G$$

- N_a ist Untergruppe von G und $a \in N_a$
- Satz von Lagrange $\Rightarrow$ $|N_a|$ teilt $|G|$

Satz (Anzahl Konjugationsklassen)

Anzahl Elemente der Konjugationsklasse $n(K_a)$ = Anzahl Nebenklassen von N_a

$$n(K_a) = |G|/|N_a| = j(N_a) \quad \textit{index von } N_a \textit{ in } G$$

Beweis.

zwei Elemente in K_a sind gleich, wenn

$$g'ag'^{-1} = gag^{-1} \iff g^{-1}g' \in N_a \iff g' \in gN_a.$$

deshalb zählt die Anzahl Nebenklassen die Elemente in K_a:

$$g' \notin gN_a \iff g'ag'^{-1} \neq gag^{-1}$$

□

- $|G|$ Primzahl $\Rightarrow n(K_a) = 1$ für alle a
- gag^{-1} for alle a, g

Lemma

Ist $|G|$ eine Primzahl, dann ist G Abelsch.

- Es gibt also keine nicht-abelschen endlichen Gruppen mit $3, 5, 7 \ldots$ Elementen

direktes Produkt

Definition (direktes Produkt zweier Gruppen A und B)

Produkt $G = A \times B$ besteht aus Paaren $g = (a, b)$ mit $a \in A,\ b \in B$ mit Verknüpfung

$$gg' = (a, b)(a', b') \equiv (aa', bb').$$

Aufgabe

Beweisen Sie, dass $A \times B$ eine Gruppe ist und A, B Normalteiler in $A \times B$ sind
Zeigen Sie $(A \times B)/A \cong B$ und $(A \times B)/B \cong A$ (im allgemeinen ist $N \times (G/N) \neq G$)

Kleinsche Vierergruppe

Sie ist das direkte Produkt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und hat folgende Gruppentafel

$$\mathrm{T(Vierergruppe)} = \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (1,0) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

Semidirekte Produkt von Gruppen (wichtig in Physik)

Definition (Semidirektes Produkt)

Seien N und H Gruppen und sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Aut}(N))$. Verknüpfung auf $G := N \times H$

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) := \big(n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1 h_2\big)$$

wobei die Verknüpfungen in N und H verwendet werden

Beweis.

(e_N, e_H) ist Einselement:

$$(e_N, e_H) * (n, h) = \big(e_N\,\underbrace{\varphi(e_H)(n)}_{n}, e_H h\big) = (n, h).$$

zu (n, h) inverses Element ist $\big([\varphi(h^{-1})(n)]^{-1}, h^{-1}\big)$:

$$\big([\varphi(h^{-1})(n)]^{-1}, h^{-1}\big) * (n, h) = \big([\varphi(h^{-1})(n)]^{-1}\varphi(h^{-1})(n), h^{-1}h\big) = (e_N, e_H).$$

□

Semidirektes Produkt von Gruppen, cont.

- Gruppe $(G, *)$ wird mit $N \rtimes H$ bezeichnet (semidirektes Produkt von H mit N)

Satz (Untergruppen des semidirekten Prodults)

Die Gruppe $N \rtimes H$ enthält $N \times \{e_H\}$ als Normalteiler und $\{e_N\} \times H$ als Untergruppe.

Bewegungsgruppe, Euklidsche Gruppe

- direktes Produkt von Verschiebungen ($N \sim \mathbb{R}^3$) und Drehungen im $H \sim O(3)$ im $\mathbb{R}^3$
- $\varphi(R)(\boldsymbol{a}) = R\boldsymbol{a}$ für $R \in \mathrm{O}(3)$ und $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ definiert φ

$$\text{Verknüfung} \quad (\boldsymbol{a}, R) * (\boldsymbol{a}', R') = (\boldsymbol{a} + R\boldsymbol{a}', RR') \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{a}, R)^{-1} = (-R^{-1}\boldsymbol{a}, R^{-1}) .$$

- Konjugation, Inversion

$$(\boldsymbol{a}, R) * (\boldsymbol{a}', \mathbb{1}) * (\boldsymbol{a}, R)^{-1} = (R\boldsymbol{a}', \mathbb{1}),$$

- Verschiebungen definieren Normalteiler in Bewegungsgruppe