Friedrich-Schiller-Universität Jena SS 2019
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Julian Lenz

Aufgaben zu „Symmetrien in der Physik“

Blatt 5

Aufgabe 17: Globale Eigenschafen von SO(3)

Zeigen Sie, dass SO(3) nicht einfach zusammenhängend ist.
Erinnerung: Ein Raum ist einfach zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist und jeder geschlossene Weg stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.

Aufgabe 18: Die Nicht-kompakte Gruppe SU(1, 1)

Die Matrixgruppe SU(1, 1) ist nahe verwandt mit der Gruppe SU(2) und definiert als

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{U \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})\,|U^\dagger G U = G,\, G = \mathrm{diag}(1,-1)\right\}$$

1. Versuchen Sie eine ähnliche Parametrisierung zu finden, wie wir sie schon für SU(2) verwendet haben. Vervollständigen Sie dazu

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad |a|^2 - \dots\,.$$

2. Parametrisieren Sie a and b gemäß

$$a = \cosh(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \quad b = \sinh(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$$

   and extrahieren Sie die Metrikkoeffizienten g_{ij} aus $\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(U^{-1}\mathrm{d}UU^{-1}\mathrm{d}U)$.

3. Bestimmen Sie das (invariante) Volumenelement $\mathrm{d}\mu = \sqrt{-g}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\psi$?
   Bemerkung: Das ist das Haar-Maß der nicht-kompakten Gruppe SU(1, 1), welches später in der Vorlesung noch behandelt wird.

4. Zeigen Sie, dass die Gruppenmanigfaltigkeit von SU(1, 1) gerade der AdS_3-Raum. Dessen Einbettung in $\mathbb{R}^4$ ist gegeben durch as

$$\mathrm{AdS}_3 = \{X \in \mathbb{R}^4\,|\,X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = 1\}\,.$$

5. Finden Sie die Fundamentalgruppe von SU(1, 1).

6. Überzeugen Sie sich davon, dass $\mathrm{SU}(1,1) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.
   Hinweis: Es existiert eine Matrix C, sodass CUC^{-1} reell ist für alle $U \in \mathrm{SU}(1,1)$.

Aufgabe 19: Invariante Integration

Es gibt viele Wege das eindeutige invariante Haar-Maß auf (kompakten) Lie-Gruppen zu bestimmen. Sie können für die folgende Aufgabe jede dieser Methoden verwenden. Motivierte Studenten verwenden eine andere als in der vorigen Aufgabe.

Berechnen Sie das Haar-Maß für die Integration über SU(2) in der Parametrisierung

$$U = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta} & -\sin\vartheta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} \\ \sin\vartheta\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta} & \cos\vartheta\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta} \end{pmatrix} .$$

Normieren Sie das Integrationsmaß, sodass $\mathrm{Vol}(\mathrm{SU}(2)) = 1$.

Aufgabe 20: Landautheorie des Ferromagnetismus

In Landaus Theorie des Ferromagnetismus hat die freie Energie als Funktion der absoluten Temperatur und der Magnetisierung $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^3$ die folgende Form (für Konstanten $a, b, T_c > 0$):

$$F(\boldsymbol{m}, T) = a(T_c - T)\boldsymbol{m}^2 + b(\boldsymbol{m}^2)^2 , \quad T \text{ absolute Temperatur.}$$

1. Die Symmetrien der freien Energie definieren die ungebrochene Symmetriegruppe G. Was ist G für das obige F?
2. Die Menge der Ordnungsparameter $\boldsymbol{m}$, die die freie Energie (bei festgehaltener Temperatur) minimieren, heißt der reduzierte Raum $\mathcal{M}$ (in der Teilchenphysik: Vakuummanigfaltigkeit). Was ist $\mathcal{M}$ unter und oberhalb der kritischen Temperatur T_c?
3. Wir sagen, dass eine Symmetrie spontan gebrochen ist, wenn die Stabilisator-Gruppe (engl.: „little group“) $H = \{R \in G | R\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}\}$ kleiner als die ungebrochene Symmetriegruppe ist. Was ist H ober- und unterhalb der kritischen Temperatur? Kommt es in dieser Theorie zu spontaner Symmetriebrechung?
4. Wir betrachten eine festgehaltene Magnetisierung $\boldsymbol{m}_0 \in \mathcal{M}$ unterhalb der kritischen Temperatur. Zeigen Sie, dass die Wirkung von G auf $\boldsymbol{m}_0$ ganz $\mathcal{M}$ reproduziert.
5. Ist die Linkswirkung von G auf $\mathcal{M}$ treu, frei oder transitiv?
6. Bestimmen Sie G/H.