Friedrich-Schiller-Universität Jena SS 2020
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Julian Lenz

Aufgaben zu „Symmetrien in der Physik“

Blatt 3

Aufgabe 13: Differentialgeometrie

0. Rufen Sie sich die Definitionen von *Mannigfaltigkeit, Karte, Zusammenhang* und *Diffeomorphismus* ins Gedächtnis.

1. Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^{2/3}$, also $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2\}$, eine Mannigfaltigkeit ist.

2. Zeigen Sie, dass der Doppelkegel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2\}$ keine Mannigfaltigkeit ist. *Hinweis: Es ist ein einziger Punkt, der Probleme macht.*

3. Seien M, M' differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass jedes differenzierbare $f : M \to M'$ stetig ist.

Aufgabe 14: Die Gruppen $\mathrm{U}(1)$ und $\mathrm{SO}(2)$

Parametrisieren Sie die Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ der eigentlichen Drehungen im $\mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, dass diese isomorph zu $\mathrm{U}(1)$ ist.

Aufgabe 15: Unitäre Matrizen

Zeigen Sie, dass für zwei beliebige komplexe Zahlen α, β mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} \tag{1}$$

in $\mathrm{SU}(2)$ liegt. Zeigen Sie umgekehrt, dass jedes $A \in \mathrm{SU}(2)$ diese Form hat und durch die beiden Zahlen eindeutig gegeben ist. Warum beweist dies, dass $\mathrm{SU}(2)$ eine drei-dimensionale Sphäre in $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ ist? Die letzte Bemerkung zeigt auch, dass $\mathrm{SU}(2)$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 16: $\mathrm{U}(n)$ ist nicht gleich $\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1)$

Beweisen Sie den Isomorphismus

$$\mathrm{U}(n) \cong \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1)/\mathbb{Z}_n. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi(U, e^{i\lambda}) = e^{i\lambda}U$ *einen surjektiven Homomorphismus von* $\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1) \to \mathrm{U}(n)$ *definiert und bestimmen Sie dessen Kern.*