Friedrich-Schiller-Universität Jena
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Julian Lenz

SS 2019

Aufgaben zu „Symmetrien in der Physik“

Blatt 3

Aufgabe 9: Ordnung von Gruppenelementen

Seien eine Gruppe G und daraus Elemente $a_1, \ldots, a_n \in G$ gegeben. Sei $b = a_1 a_2 \ldots a_n$. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen die Produkte $a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(n)}$ für beliebige Permutationen $\pi \in \mathcal{S}_n$ nicht von derselben Ordnung wie b sind. Zeigen Sie weiterhin, dass dies aber für zyklische Permutationen π gilt.
Hinweis: Zum Aufwärmen lohnt es sich, die ersten paar Beispiele explizit nachzuvollziehen: $|a_1 a_2| = |a_2 a_1|$, $|a_1 a_2 a_3| = |a_2 a_3 a_1| = |a_3 a_1 a_2|$, ...

Aufgabe 10: Drehungen

Wir betrachten die Gruppe SO(3) der eigentlichen Drehungen im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ und die Menge $\mathrm{SO}(\boldsymbol{e}, 2)$ der Drehungen um die feste Achse definiert durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{SO}(\boldsymbol{e}, 2)$ eine Untergruppe von SO(3) ist. Zeigen Sie zudem, dass für jedes Paar $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{e'}$ von Einheitsvektoren die Untergruppen $\mathrm{SO}(\boldsymbol{e}, 2)$ und $\mathrm{SO}(\boldsymbol{e'}, 2)$ zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 11: Gruppenwirkungen und die Euklidische Gruppe

Prüfen Sie, ob die (Standard-)Gruppenwirkung der Euklidische Gruppe of $\mathbb{R}$ transitiv, frei und/oder treu ist. Definieren wir weiterhin $\Phi^R : \mathrm{E}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi^R_{(\boldsymbol{a},R)}(\boldsymbol{x}) = R\boldsymbol{x}$$

und $\Phi^a : \mathrm{E}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi^a_{(\boldsymbol{a},R)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}.$$

Sind dies ebenfalls Gruppenwirkungen? Falls ja, sind sie transitiv/frei/treu? Was würde sich ändern, wenn anstelle von $\mathrm{E}_n \simeq \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$ das direkte Produkt $\mathbb{R}^n \times \mathrm{O}(n)$ verwendet worden wäre?

Aufgabe 12: Galilei-Gruppe

Eine Galilei-Transformation

$$t' = t + \tau, \quad \boldsymbol{x'} = R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{a}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3, \quad R^\top R = \mathbb{1}\,,$$

ist durch die 10 Parameter $(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, R)$ bestimmt. Führe nun eine zweite Galilei-Transformation mit Parameter $(\tau', \boldsymbol{a'}, \boldsymbol{u'}, R')$ durch.

- Zeigen Sie, dass die zusammengesetzte Transformation wieder eine Galilei-Transformation ist.
- Was ist die zu $(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, R)$ inverse Galilei-Transformation?
- Ihre Rechnung sollte zeigen, dass die Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden – es ist die Galilei-Gruppe. Finden Sie die invarianten Untergruppen der Galilei-Gruppe.
- Können Sie diese Gruppe als semi-direktes Produkt einer Gruppe und eines Normalteilers schreiben?