Friedrich-Schiller-Universität Jena SS 2020
Prof. Dr. Andreas Wipf
M.Sc. Julian Lenz

Aufgaben zu „Symmetrien in der Physik“

Blatt 2

Aufgabe 5: Diedergruppen*

Zeigen Sie, dass die Diedergruppe $\mathcal{D}_4$ (die Symmetriegruppe des Quadrats bestehend aus Drehungen und Rotationen) das semidirekte Produkt $\mathcal{D}_4 \cong \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ ist. Zeigen Sie allgemeiner, dass $\mathcal{D}_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$.

**Bemerkung: Diese Aufgabe wurde in der ersten Übung schon besprochen. Bitte formulieren Sie konkrete Fragen, falls etwas nicht klar geworden ist. Sie wird nur auf Nachfrage noch einmal diskutiert.*

Aufgabe 6: Gruppen von Primordnung

Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe der Ordnung p isomorph zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_p$ ist, wenn p eine Primzahl ist.

Hinweis: Das Theorem von Lagrange könnte hilfreich sein.

Aufgabe 7: Gruppenwirkungen und die Euklidische Gruppe

Prüfen Sie, ob die (Standard-)Gruppenwirkung der Euklidische Gruppe auf $\mathbb{R}^n$ transitiv, frei und/oder treu ist. Definieren wir weiterhin $\Phi^R : \mathrm{E}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi^R_{(\boldsymbol{a},R)}(\boldsymbol{x}) = R\boldsymbol{x}$$

und $\Phi^a : \mathrm{E}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi^a_{(\boldsymbol{a},R)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}.$$

Sind dies ebenfalls Gruppenwirkungen? Falls ja, sind sie transitiv/frei/treu? Was würde sich ändern, wenn anstelle von $\mathrm{E}_n \simeq \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$ das direkte Produkt $\mathbb{R}^n \times \mathrm{O}(n)$ verwendet worden wäre?

Aufgabe 8: Galilei-Gruppe

Eine Galilei-Transformation

$$t' = t + \tau, \quad \boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}t + \boldsymbol{a}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3, \quad R^\top R = \mathbb{1}\,,$$

ist durch die 10 Parameter $(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, R)$ bestimmt. Führe nun eine zweite Galilei-Transformation mit Parameter $(\tau', \boldsymbol{a'}, \boldsymbol{u'}, R')$ durch.

1. Zeigen Sie, dass die zusammengesetzte Transformation wieder eine Galilei-Transformation ist.
2. Was ist die zu $(\tau, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}, R)$ inverse Galilei-Transformation?
3. Ihre Rechnung sollte zeigen, dass die Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden es ist die Galilei-Gruppe. Finden Sie die invarianten Untergruppen der Galilei-Gruppe.
4. Können Sie diese Gruppe als semi-direktes Produkt einer Gruppe und eines Normalteilers schreiben?

Aufgabe 9: Lorentz-Gruppe

Die Menge der d-dimensionalen Matrizen

$$\mathcal{L} = \{\Lambda \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R}) \big| \Lambda^T G \Lambda = G, \quad G = \mathrm{diag}\big(1,-1,\ldots,-1\big)\}$$

definiert die Lorentz-Gruppe in d Dimensionen. Der metrische Tensor G definiert das Linienelement in d Dimensionen: $ds^2 = (dx^0)^2 - \sum (dx^i)^2 = dx^\mu G_{\mu\nu} dx^\nu$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ eine Untergruppe von $GL(d,\mathbb{R})$ ist.
2. Welche Dimension hat die Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$?
3. Beweisen Sie, dass jedes $\Lambda \in \mathcal{L}$ eine Determinante $\det \Lambda = \pm 1$ hat.
4. Beweisen Sie, dass die Menge $\mathcal{L}^+ = \{\Lambda \in \mathcal{L} | \det \Lambda = 1\}$ ein Normalteiler von $\mathcal{L}$ ist. Sie besteht aus den *eigentlichen* Lorentz-Transformationen.

Aufgabe 10: Symmetriewiederherstellung in Monte-Carlo-Simulationen

In modernen Monte-Carlo-Simulationen von Quantenfeldtheorien muss eine d-dimensionale Theorie mit euklidischer Symmetriegruppe $E_d \cong \mathbb{R}^d \rtimes \mathrm{O}(d)$ auf ein endliches Gitter abgebildet werden. Nehmen wir an, dieses Gitter sei kubisch mit Gitterabstand a, L Punkten in jeder Richtung und mit periodischen Radbedingungen ausgestattet.

1. Welche diskrete Untergruppe der Translationen $\mathbb{R}^d$ und welche endliche Untergruppe der Rotationen $\mathrm{O}(d)$ realisieren wir dadurch? Welches ist die insgesamt erhaltene Untergruppe?
2. Ist die geerbte Gruppenwirkung Φ dieser Untergruppe treu? Falls nein, bestimmen Sie den Normalteiler $N = \ker \Phi$ und die Faktorgruppe E_d/N.

Während es relativ intuitiv ist, dass die diskreten Translationen für $a \to 0$ und $La \to \infty$ den richtigen Grenzfall haben, ist das bei den Rotationen nicht so klar. Wesentliche physikalische Information steckt in dem Propagator G, der für ein freies, diskretisiertes Skalarfeld in $d = 4$ im Impulsraum durch

$$\tilde{G}(\boldsymbol{p}) = \left[2 - 4\kappa \sum_{\nu=0}^{3} \cos \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_\nu \right]^{-1} \quad \text{mit} \quad \sinh \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-8\kappa}{\kappa}} \tag{1}$$

gegeben ist, wobei letztere Gleichung den Parameter κ implizit mit dem Gitterabstand verbindet.

3. Stellen Sie die Konturlinien[1] von $\tilde{G}$ in der p_x-p_y-Ebene für verschiedene Werte von κ dar. Nähern sie sich Kreisen für $a \to 0$?
4. Eine geeignete Größe, um die Abweichung von voller Rotationssymmetrie zu charakterisieren, ist

$$\mathcal{N}(|\boldsymbol{p}|,\kappa) = \sqrt{\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} \left[\frac{\tilde{G}(\varphi) - \tilde{G}(\varphi_0)}{\tilde{G}(\varphi_0)}\right]^2}, \tag{2}$$

   wobei die Integrationsvariable φ der Winkel (bei festgehaltenem Abstand $|\boldsymbol{p}|$ vom Ursprung) in der p_x-p_y-Ebene und φ_0 das Minimum von $\tilde{G}(\varphi)$ ist. Stellen Sie $\mathcal{N}$ für verschiedene κ bzw. a und verschiedene Abstände $|\boldsymbol{p}|$ dar. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Diese Aufgabe basiert auf dem Artikel von Lang, C.B., und Winkler, U., in PRD 47, 4705 (1993).

Bonusaufgabe: Für alle, die schon eine QFT-Vorlesung gehört haben, ist es eine schöne Übung die Gl. (1) *nachzuvollziehen. Die verwendete Gitterwirkung finden Sie im obigen Artikel in Gl.* (14).

[1] Mit der Annahme, dass $\boldsymbol{p}$ kontinuierlich ist, setzen Sie dabei implizit voraus, im unendlichen Volumen zu arbeiten.