

# Symmetrien in der Physik

Andreas Wipf

Theoretisch-Physikalisches-Institut

Friedrich-Schiller-Universität, Max Wien Platz 1

07743 Jena

11. Auflage, SS 2023

1. Auflage, SS 2002

©2023 Andreas Wipf, Friedrich-Schiller-Universität Jena

Kopieren für den privaten Gebrauch unter Angabe des Autors gestattet. Kommerzielle Verwertung ist nicht gestattet.

Hinweise auf Druckfehler nehme ich gerne entgegen ([wipf@tpi.uni-jena.de](mailto:wipf@tpi.uni-jena.de))

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
1.1	Symmetrien und Gruppen . . . . .	4
1.2	Gruppentheorie in Mathematik und Physik . . . . .	5
1.3	Literatur, Software . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Elemente</b>	<b>10</b>
2.1	Gruppen und Gruppentafeln . . . . .	10
2.2	Matrixgruppen . . . . .	13
2.2.1	Die Gruppen $GL(n,K)$ und $SL(n,K)$ . . . . .	14
2.3	Diedergruppen . . . . .	15
2.4	Anhang A: Matrizen mit Elementen in einem Ring . . . . .	17
2.5	Anhang B: Präsentation einer Gruppe . . . . .	21
2.6	Aufgaben zu Kapitel 2 . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Homomorphismen</b>	<b>26</b>
3.1	Homomorphismen und isomorphe Gruppen . . . . .	26
3.2	Untergruppen . . . . .	28
3.2.1	Kern und Bild eines Homomorphismus sind Untergruppen . . . . .	29
3.2.2	Zyklische Untergruppen . . . . .	29
3.2.3	Eigenschaften von wichtigen Untergruppen . . . . .	30
3.3	Nebenklassen, Faktorgruppen und Konjugationsklassen . . . . .	32
3.4	Konjugationsklassen . . . . .	37
3.5	(Semi)Direktes Produkt von Gruppen . . . . .	39
3.6	Aufgaben zu Kapitel 3 . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Endliche Gruppen</b>	<b>42</b>
4.1	Untergruppen der Permutationsgruppen . . . . .	42
4.2	Symmetrische und alternierende Gruppen . . . . .	43
4.2.1	Zyklen und Konjugationsklassen . . . . .	46
4.3	Kleine Gruppen . . . . .	49
4.4	Aufgaben zu Kapitel 4 . . . . .	50

<b>5</b>	<b>Raumzeit-Symmetrien</b>	<b>53</b>
5.1	Gruppenwirkungen . . . . .	53
5.1.1	Spezielle Typen von Gruppenwirkungen . . . . .	54
5.2	Drehungen im Raum . . . . .	56
5.3	Die Euklidischen Gruppen $\mathbf{E}_n$ . . . . .	59
5.4	Die Galileigruppe . . . . .	61
5.5	Poincaré Transformationen . . . . .	64
5.5.1	Zusammenhangskomponenten der Lorentzgruppe . . . . .	68
5.6	Anhang A: Normalformen . . . . .	71
5.6.1	Normalformen für Drehungen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	71
5.6.2	Normalformen für Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	71
5.7	Aufgaben zu Kapitel 5 . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Punktgruppen</b>	<b>76</b>
6.1	Symmetrieelemente . . . . .	76
6.2	Platonische Gruppen . . . . .	79
6.3	Eigentliche Punktgruppen . . . . .	83
6.4	Uneigentliche Punktgruppen . . . . .	86
6.4.1	Trägheitstensor symmetrischer Körper . . . . .	89
6.5	Molekülsymmetrien . . . . .	90
6.5.1	Das Massenpunktsystem Allen $\text{C}_3\text{H}_4$ und Schoenflies-Notation . . . . .	90
6.5.2	Trans-Dichlorethylen . . . . .	93
6.6	Aufgaben zu Kapitel 6 . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Raumgruppen</b>	<b>95</b>
7.1	Gittervektoren und Elementarzelle . . . . .	95
7.1.1	Das reziproke Gitter . . . . .	97
7.2	Raumgruppen . . . . .	99
7.3	Bravais-Gitter . . . . .	101
7.4	Kristallographischen Punktgruppen . . . . .	105
7.5	Aufgaben zu Kapitel 7 . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Lie-Gruppen</b>	<b>109</b>
8.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	110
8.1.1	Lie-Gruppen . . . . .	113
8.1.2	(Wege)Zusammenhängende Lie-Gruppen . . . . .	114
8.1.3	Lie-Untergruppen . . . . .	114
8.2	Die Lie-Gruppen $U(2)$ und $SU(2)$ . . . . .	116
8.2.1	Pauli-Matrizen . . . . .	120
8.3	Matrixgruppen . . . . .	121
8.3.1	Untergruppen der $GL(n, \mathbb{K})$ . . . . .	122

8.4	Globale Eigenschaften von Lie-Gruppen . . . . .	125
8.4.1	Homotopiegruppen . . . . .	126
8.4.2	Universelle Überlagerungsgruppen . . . . .	129
8.5	Aufgaben zu Kapitel 8 . . . . .	131
<b>9</b>	<b>Invariante Integration</b>	<b>135</b>
9.1	Invariante Mittelbildung auf $U(1)$ und $SU(2)$ . . . . .	137
9.1.1	Haar-Maß auf $U(1)$ . . . . .	137
9.1.2	Haar-Maß auf $SU(2)$ . . . . .	137
9.1.3	Reduziertes Haar-Maß auf $SU(2)$ . . . . .	138
9.2	Haar-Maß für beliebige Lie-Gruppen . . . . .	139
9.2.1	Invariante 1-Formen und invariante Integration . . . . .	141
9.3	Haar-Maße für kompakte Matrixgruppen . . . . .	142
9.3.1	Haar-Maße für unitäre Gruppen . . . . .	143
9.4	Invariante Integration auf $SU(1,1)$ und $SL(2,R)$ . . . . .	146
9.5	Aufgaben zu Kapitel 9 . . . . .	147
<b>10</b>	<b>Darstellungen</b>	<b>150</b>
10.1	Darstellungen . . . . .	150
10.2	Reguläre Darstellung . . . . .	152
10.3	Reduzible Darstellungen . . . . .	156
10.4	Darstellungen von Gruppen mit Mittelwertbildung . . . . .	158
10.4.1	Komplex-konjugierte, reelle und pseudo-reelle Darstellungen . . . . .	158
10.5	Tensorprodukt von Darstellungen . . . . .	159
10.6	Aufgaben zu Kapitel 10 . . . . .	160
<b>11</b>	<b>Charaktere und Lemma von Schur</b>	<b>163</b>
11.1	Charakter einer Darstellung . . . . .	163
11.2	Das Lemma von Schur . . . . .	165
11.2.1	Systeme mit invariantem Hamilton-Operator . . . . .	170
11.3	Orthogonalitätsrelationen . . . . .	172
11.3.1	Ausreduktion einer beliebigen Darstellung . . . . .	173
11.4	Alle Darstellungen einer endlichen Gruppe . . . . .	175
11.4.1	Die Charakterenmatrix . . . . .	176
11.5	Darstellungen der $S_n$ . . . . .	177
11.5.1	Young-Diagramme und Young-Tableaux . . . . .	178
11.5.2	Irreduzible Darstellungen von $S_3$ . . . . .	179
11.5.3	Irreduzible Darstellungen von $S_4$ . . . . .	182
11.6	Irreduzible Darstellungen von Liegruppen . . . . .	183
11.7	Charaktere von $U(1)$ und Satz von Peter und Weyl . . . . .	183
11.8	Alle irreduzible Darstellungen von $SU(2)$ . . . . .	184
11.8.1	Die dreidimensionale Darstellung $SO(3)$ . . . . .	185

11.8.2 Höherdimensionale Darstellungen . . . . .	186
11.9 Darstellungen von $SU(3)$ . . . . .	188
11.10 Anhang A: Charaktertafeln der Punktgruppen . . . . .	191
11.11 Aufgaben zu Kapitel 11 . . . . .	193
<b>12 Theorie der Lie-Algebren</b>	<b>197</b>
12.1 Lie-Algebren . . . . .	198
12.2 Lie-Unteralgebren . . . . .	199
12.2.1 Invariante Lie-Unteralgebren (Ideale) . . . . .	200
12.2.2 Einfache und Halbeinfache Lie-Algebren . . . . .	200
12.2.3 Zentrum, Zentralisatoren und Normalisatoren . . . . .	201
12.3 Homomorphismen und Adjungierte Darstellung . . . . .	202
12.3.1 Adjungierte Darstellung . . . . .	203
12.4 Invariante Killing-Form . . . . .	203
12.4.1 Matricelemente der Killing-Form . . . . .	206
12.5 Aufgaben zu Kapitel 12 . . . . .	207
<b>13 Lie-Algebren von Lie-Gruppen</b>	<b>209</b>
13.1 Infinitesimale Erzeugende . . . . .	209
13.1.1 Die Erzeugenden bilden eine Lie-Algebra . . . . .	210
13.2 Adjungierte Darstellung . . . . .	212
13.3 Darstellungen von $G$ induzieren Darstellungen von $\mathfrak{g}$ . . . . .	213
13.4 Klassische Lie-Algebren . . . . .	216
13.5 Die Exponentialabbildung . . . . .	218
13.6 Lorentz-Gruppe und Lorentz-Algebra . . . . .	221
13.6.1 Eine alternative Basis von Generatoren . . . . .	224
13.7 Die Poincare-Liealgebra . . . . .	225
13.8 Allgemeinere Lie-Gruppen . . . . .	226
13.9 Anhang A: Linksinvariante Vektorfelder . . . . .	227
13.9.1 Vektoren . . . . .	227
13.9.2 Tangentialabbildung . . . . .	229
13.10 Aufgaben zu Kapitel 13 . . . . .	229
<b>14 Wurzelsysteme</b>	<b>230</b>
14.1 Wurzeln einer einfachen Lie-Algebra . . . . .	230
14.2 Quantisierung der Wurzeln . . . . .	232
14.2.1 Weyl-Reflektionen . . . . .	234
14.3 Wurzelsysteme von Lie-Algebren mit Rang 1 und 2 . . . . .	235
14.3.1 Explizite Basis für die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(3)$ . . . . .	239
14.4 Eigenschaften von Wurzelsystemen . . . . .	240
14.5 Cartan-Matrix und Dynkin-Diagramme . . . . .	245
14.6 Anhang: Explizite irreduzible Wurzelsysteme . . . . .	247

14.7 Aufgaben zu Kapitel 14 . . . . .	250
<b>15 Darstellungen von Lie-Algebren</b>	<b>252</b>
15.1 Gewichte einer Darstellung . . . . .	253
15.1.1 Fundamentale und dominante Gewichte . . . . .	254
15.1.2 Höchstes Gewicht . . . . .	255
15.2 Tensorprodukt von Darstellungen . . . . .	257
15.3 Young diagrams . . . . .	260
15.4 Und so weiter . . . . .	260
15.5 Aufgaben zu Kapitel 15 . . . . .	260
<b>16 Relativistische Feldtheorien</b>	<b>262</b>
16.1 Langrange'scher Formalismus . . . . .	262
16.2 Hamilton'scher Formalismus . . . . .	265
16.3 Noether Theorem für innere Symmetrien . . . . .	267
16.4 Noether-Theorem für Translationen . . . . .	269
16.4.1 Verbesserung von Noetherströmen . . . . .	273
16.5 Lorentztransformationen und Drehimpuls . . . . .	274
16.5.1 Noetherladungen für die Lorentzsymmetrie . . . . .	275
16.6 Symmetrien in Quantenfeldtheorien . . . . .	276
16.6.1 Konsequenzen für Korrelationsfunktionen . . . . .	278
16.7 Aufgaben zu Kapitel 16 . . . . .	279
<b>17 Konforme Feldtheorien</b>	<b>282</b>
17.1 Konforme Symmetrie . . . . .	282
17.1.1 Konforme Abbildungen . . . . .	283
17.1.2 Konform invariante Feldtheorien . . . . .	284
17.2 Konforme Feldtheorien in 1 + 1 Dimensionen . . . . .	287
17.2.1 Virasoro-Algebra . . . . .	287
17.2.2 Kac-Moody Algebra . . . . .	287
17.3 Aufgaben zu Kapitel 17 . . . . .	287
<b>18 Eichtheorien</b>	<b>288</b>
18.1 Eichtransformationen und minimale Kopplung . . . . .	288
18.2 Minimale Kopplung und kovariante Ableitung . . . . .	290
18.2.1 Minimale Kopplung von geladenen Fermionen . . . . .	293
18.3 Nicht-Abelsche Eichtheorien . . . . .	295
18.3.1 Lokale Eichinvarianz . . . . .	296
18.3.2 Infinitesimale Eichtransformationen . . . . .	298
18.3.3 Feldgleichungen . . . . .	299
18.4 Quantenchromodynamik . . . . .	300
18.4.1 Die QCD ist eine SU(3)-Eichtheorie . . . . .	304

---

18.4.2	Infinitesimale Flavoursymmetrien und spontane Symmetriebrechung . . .	305
18.5	Weinberg-Salam Modell . . . . .	306
18.5.1	Massenerzeugung . . . . .	309
18.6	Aufgaben zu Kapitel 18 . . . . .	310

# 1 Einführung

*Die Symmetrie ist ... diejenige Idee, mit deren Hilfe der Mensch im Laufe der Jahrhunderte versuchte, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen und zu schaffen.* HERMANN WEYL

Symmetrien und ihre Brechung sind fundamentale und weit über das Gebiet der Physik hinausweisende Konzepte. Dies wird klar, wenn man den Symmetrie-Begriff möglichst allgemein fasst. Zum Beispiel schließt die Formulierung,

es liegt immer dann eine Symmetrie vor, wenn man eine durchgeführte Transformation nachträglich nicht mehr feststellen kann,

Anwendungen ein, die weit über unsere Fachrichtung hinausgehen. Grundlage für die Ausnutzung von Symmetrien ist deren mathematische Formulierung. Diese wird von der Gruppentheorie geleistet, weil Symmetrioperationen immer Elemente einer Gruppe sind.

## 1.1 Symmetrien und Gruppen

Symmetrien spielen eine wichtige Rolle beim Auffinden von Erhaltungsgrößen und Auswahlregeln in vielen Teilgebieten der Physik. So lernt man in der Newton'schen Mechanik, dass die Symmetrien der Raumzeit eine Gruppe, die Galilei-Gruppe, bilden. Die Invarianz eines physikalischen Systems gegenüber Galilei-Transformationen bedingt Erhaltungssätze:

Verschiebungen in der Zeit  $\longrightarrow$  Energieerhaltung  
Verschiebungen im Ortsraum  $\longrightarrow$  Impulserhaltung  
Drehungen im Ortsraum  $\longrightarrow$  Drehimpulserhaltung.

Diese tiefgründige Beziehung zwischen Symmetrien und der Existenz von Erhaltungsgrößen gilt auch in der Quantentheorie. In der Tat finden sich die wichtigsten physikalischen Anwendungen der Gruppentheorie in der Quantenmechanik. Man denke nur an das Wasserstoffatom: Dessen geometrische Symmetrien, die Raumdrehungen, führen auf die Klassifikation der Eigenzustände nach den Eigenwerten des Drehimpulses. Insbesondere der Grundzustand erbt die Drehsymmetrie des Hamilton-Operators und ist invariant unter Drehungen.



Es gibt allerdings wichtige Ausnahmen zur Regel, dass der Grundzustand unter Symmetrietransformationen, die  $H$  nicht ändern, invariant ist. Ein Beispiel ist der Ferromagnet. Im Gegensatz zum Hamilton-Operator ändert sich der Grundzustand, in dem alle Spins ausgerichtet sind, bei einer gleichzeitigen Umkehr aller Spins. Wir werden im Laufe dieser Vorlesung auf dieses Phänomen der *spontanen Symmetriebrechung* zurückkommen.

Was versteht man unter den *Symmetrien eines Moleküls*? Dies sollen Transformationen zwischen verschiedenen Anordnungen oder Lagen der Atomkerne und Elektronen des Moleküls sein. Dabei sollen die Anordnungen physikalisch nicht unterscheidbar sein und identische Messergebnisse liefern. Beispiele können sein: Permutationen der Koordinaten von identischen Kernen oder Elektronen, eine Inversion der Teilchenkoordinaten am Massenschwerpunkt oder eine Drehung des Moleküls um eine raumfeste Achse, die durch den Massenschwerpunkt geht.

Symmetrieüberlegungen sind nicht nur in Atom- und Molekülphysik, sondern auch in der *Festkörpertheorie* von großer Bedeutung. Hier treten diskrete Gruppen (*Raumgruppen*) in den Vordergrund, entsprechend dem gitterperiodischen Aufbau der Kristalle. Die Raumgruppen werden in dieser Vorlesung besprochen.

Bei der Beschreibung und Klassifikation der *Elementarteilchen* spielen neben einfachen diskreten Symmetrien vor allem kontinuierliche Lie-Gruppen eine wesentliche Rolle. Dies sind die Poincaré-Gruppe und innere Symmetriegruppen. Für halbeinfache kompakte Lie-Gruppen existiert eine vorwiegend von CARTAN und WEYL entwickelte abgeschlossene Theorie. Diese ist Inhalt der zweiten Hälfte der Vorlesung.

Die Gruppentheorie war anfänglich eine mathematische Disziplin ziemlich abstrakter Art. Ihre große Bedeutung für die Physik gewinnt sie im Rahmen der Darstellungstheorie bei der Beschreibung von Symmetrien. Die Gruppen- und Darstellungstheorie ist seit Jahrzehnten ein nützliches Instrument der Festkörper-, Kern- und Elementarteilchenphysiker und wird es in der Zukunft auch bleiben. Zum Beispiel versucht man in der modernen Elementarteilchentheorie mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen möglichst viele Eigenschaften der „elementaren Bausteine“ zu erklären, ohne die den Wechselwirkungen zugrunde liegende Dynamik im Einzelnen zu verstehen. Fundierte Kenntnisse der Gruppen- und Darstellungstheorie gehören zum Rüstzeug eines Physikers.

## 1.2 Gruppentheorie in Mathematik und Physik

Gruppen wurden benutzt, lange bevor sie axiomatisch definiert wurden. So erfüllen alle Symmetrien eines Körpers, zum Beispiel eines Platon'schen Körpers, automatisch die Gruppenaxiome. Die nach PLATON benannten regulären Polyeder sind in Abbildung 1.1 gezeigt.

Schon ihm war bekannt, dass es genau fünf reguläre konvexe Polyeder gibt:

- Tetraeder aus 4 (tetra) Dreiecken
- Hexaeder aus 6 (hexa) Quadraten
- Oktaeder aus 8 (okta) Dreiecken
- Dodekaeder aus 12 (dodeka) Fünfecken
- Ikosaeder aus 20 (eikosi) Dreiecken.

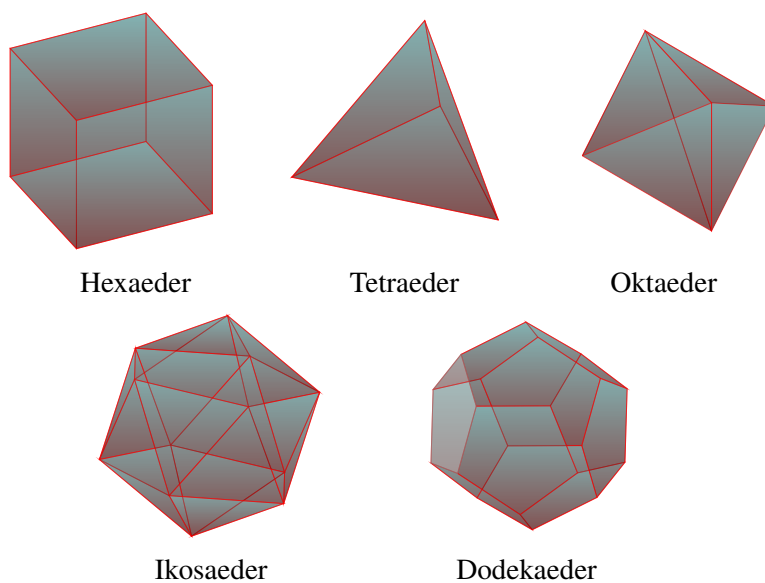
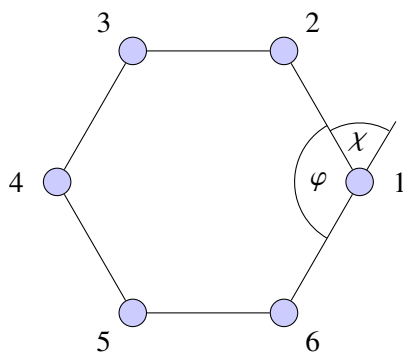


Abbildung 1.1: Die fünf Platon'schen Körper

Abbildung 1.2: Außenwinkel  $\chi$  und Innenwinkel  $\varphi$  im regelmäßigen  $n$ -Eck.

Zur Begründung betrachten wir das regelmäßige  $n$ -Eck in Abbildung 1.2. Für den Außenwinkel

$\chi$  einer Ecke gilt die Beziehung  $2\pi = n\chi = n(\pi - \varphi)$ , bzw.

$$\varphi = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180^\circ = \begin{cases} 60^\circ & 3 - \text{Eck} \\ 90^\circ & 4 - \text{Eck} \\ 108^\circ & 5 - \text{Eck} \\ 120^\circ & 6 - \text{Eck} . \end{cases}$$

In der Ecke jedes Polyeders müssen mindestens drei Vielecke zusammenstoßen, um eine räumliche Ecke zu bilden. Da das reguläre Polyeder konvex ist, muss die Winkelsumme aller  $n$ -Ecke, die in einer Ecke des Polyeders zusammenstoßen, stets kleiner als  $360^\circ$  sein. Es können also nur 3, 4 oder 5 regelmäßige Dreiecke, 3 Quadrate oder 3 regelmäßige Fünfecke an einer Polyederecke stoßen. Diese fünf möglichen Fälle lassen sich gerade durch die angegebenen Platon'schen Körper realisieren.

### Platon'sche Gruppen

Diejenigen Drehungen im Raum, welche einen Platon'schen Körper in sich überführen, bilden eine diskrete Untergruppe der Rotationsgruppe. Wir werden diese Symmetrien der fünf Platon'schen Körper im Verlauf der Vorlesung analysieren.

Die Grundlagen der modernen Gruppentheorie gehen zu großen Teilen auf EVARISTE GALOIS (1811-1832) und NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) zurück. Mit Hilfe des Gruppenbegriffs gelang



Abbildung 1.3: Galois



Abbildung 1.4: Abel

es Ihnen zu beweisen, dass es für Gleichungen fünften oder höheren Grades keine Auflösungsformel geben kann oder dass man einen Winkel im allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht in 3 gleiche Teile teilen kann.

Die auf GALOIS und ABEL folgende Generation von Mathematikern, CAYLEY (1821-1895), DEDEKIND (1831-1916), KRONECKER (1823-1891) und JORDAN (1838-1922) entwickelten die

Gruppentheorie weiter und brachten sie in die Form wie wir sie heute kennen. Die Bezeichnung *Gruppe* für derartige Strukturen wurde erstmals 1868 von JORDAN benutzt, obwohl er nur das Axiom der Abgeschlossenheit gegenüber der Verknüpfung von zwei Gruppenelementen explizit forderte. Da er Symmetriegruppen untersuchte, waren die anderen Gruppeneigenschaften automatisch erfüllt. Im Jahre 1854 erkannte CAYLEY die Notwendigkeit des Assoziativgesetzes und die Existenz des Einselements. Er definierte die Gruppenverknüpfung mittels einer Tabelle, die heutzutage *Cayley-Tafel* genannt wird. Zwei Jahre später gab HAMILTON (1805-1865) eine sehr platzsparende Methode zur Darstellung einer konkreten Gruppe an. Im Vergleich zur Cayley-Tabelle für die Ikosaedergruppe mit  $60 \times 60$  Einträgen, kam Hamilton bei deren Darstellung mit einer Zeile aus.

Die erste Definition einer Gruppe mit den heute üblichen Axiomen erfolgte 1882 unabhängig voneinander durch VAN DYCK (1856-1934) und WEBER (1842-1913). Danach bildet eine Menge  $G$  von Elementen bezüglich einer binären Operation  $\circ : G \times G \rightarrow G$ , oft Multiplikation genannt, eine Gruppe, falls die Multiplikation abgeschlossen und assoziativ ist, ein Einselement existiert und falls jedes Element ein inverses Element hat. Eine (für die Physik) wichtige Station bei der Entwicklung der Gruppentheorie war die Einführung des Gruppenbegriffs in die Geometrie durch KLEIN (1849-1925) und LIE (1842-1899).

Im Jahre 1879 führte KILLING (1847-1923) die Lie-Algebren, die Cartan-Unteralgebren und die Cartan-Matrizen ein. Diese Strukturen werden wir im zweiten Teil der Vorlesung besprechen. Die Klassifikation der halbeinfachen Lie-Algebren wurde 1894 von CARTAN (1869-1951), einem der herausragenden Mathematiker seiner Zeit, vollendet. Er begann die Untersuchung der Darstellungen von halbeinfachen Gruppen, die von WEYL (1885-1955) fortgesetzt wurde. WEYL hat die Gruppen- und Darstellungstheorie sehr erfolgreich auf Probleme der Quantenmechanik angewandt.

Eine ähnlich wichtige Entwicklung begann mit der Bestimmung aller 230 Raumgruppen durch den russischen Kristallographen FEDEROV im Jahre 1890, und unabhängig von ihm durch SCHOENFLIES und BARLOW. Raumgruppen sind Symmetriegruppen der drei-dimensionalen Punktgitter und jedes Punktgitter kann eindeutig durch seine Symmetrien charakterisiert werden. Periodische Punktgitter wurden schon früh als Modelle für den Aufbau von Kristallen aus Atomen angesehen, obwohl Gitterstrukturen erst 1912 von LAUE (1879-1960) und 1913 von BRAGG (1862-1942) experimentell bestätigt wurden. Diese Arbeiten wurden von COXETER (1907-2003) weitergeführt, der 1934 alle heute nach ihm benannten sphärischen und Euklidischen Coxetergruppen klassifizierte. Unabhängig von DYNKIN (1924-2014) entdeckte er die *Dynkin-Diagramme* zur Klassifikation von halbeinfachen Lie-Algebren.

Die Gruppen- und Darstellungstheorie der endlichen und kontinuierlichen Gruppen ist nach wie vor ein aktuelles Forschungsgebiet. Es wäre ein hoffnungsloses Unterfangen in einer Vorlesung diese schöne und für die Physik wichtige Theorie vollständig darlegen zu wollen. Deshalb werde ich eine Auswahl von mir interessant erscheinenden Themen über Symmetrien sowie Gruppen- und Darstellungstheorie treffen müssen. Dabei werden an einigen Stellen Beweise ganz weggelas-

sen oder nur skizziert. Der Schwerpunkt liegt auf Methoden und Resultaten, die in der Physik Anwendung finden. Zur Illustration werden Symmetrien in der Atom-, Molekül-, Festkörper- und Teilchenphysik besprochen. Der aufmerksame Zuhörer sollte nach Besuch dieser Vorlesung in der Lage sein, bei der Lösung physikalischer Probleme Symmetrieüberlegungen anzustellen und entsprechende gruppentheoretische Methoden erfolgreich anzuwenden.

### 1.3 Literatur, Software

Folgende *Literatur* kann für diese Vorlesung empfohlen werden:

J.H. CONWAY et.al, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, 1965.

J.F. CORNWELL, *Group Theory in Physics*, Academic Press, 1984.

H. GEORGI, *Lie Algebras in Particle Physics*, Reading, Benjamin 1982.

M. HAMERMESH, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Dover 1989.

W. HEIN, *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*, Springer, 1990.

V. HEINE, *Group Theory in Quantum Mechanics*, Dover 1993.

H.F. JONES, *Groups, Representations and Physics*, Institut of Phys. Publ., Bristol, 1998.

S. STERNBERG, *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, 1994.

J. TITS, *Liesche Gruppen und Algebren*, Springer 1992.

M. WAGNER, *Gruppentheoretische Methoden in der Physik*, Vieweg 1998.

H. WEYL, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel-Verlag, 1928.

E. WIGNER, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press 1959.

Wenn sie weitere Informationen über die Geschichte der Gruppentheorie und bei Ihrer Entwicklung beteiligte Mathematiker und Physiker suchen, verweise ich Sie auf die Seiten von St Andrews in Schottland und Eric Weisstein. Im Verlauf der Vorlesung werden an mehreren Stellen algebraische Computerprogramme zum Einsatz kommen. Dies sind weniger die bekannten Programme Maple, Mathematica oder MuPad, sondern GAP und LiE. Das erste Programm ist hervorragend für die Analyse von endlichen Gruppen geeignet, während das zweite bei der Untersuchung von Lie-Algebren nützlich sein kann. Beide sind frei erhältlich.

## 2 Elemente der Gruppentheorie

*The Theory of Groups is a branch of mathematics in which one does something to something and then compares the result with the result obtained from doing the same thing to something else, or something else to the same thing.*

JAMES R. NEWMAN, 1956

Wir verlassen uns darauf, dass die Naturgesetze morgen genauso gelten wie heute. Diese Eigenschaft ist eine Symmetrieeigenschaft, eine Invarianz der Gesetze gegenüber Verschiebungen der Zeit. Ähnliches gilt für die Verschiebung des Koordinatenursprungs oder einer Drehung des Koordinatensystems. Die Stärke der Schwerkraft auf der Erde ist von der auf dem Mond verschieden, das Gravitationsgesetz aber dasselbe.

Derartige Symmetrien kann man durch Gruppen beschreiben. Die Verschiebungen und Drehungen sind dabei Elemente einer Symmetriegruppe. Gruppen können aber auch abstraktere Elemente enthalten, die entweder keine geometrische Realisierung zulassen oder deren geometrische Bedeutung nicht offensichtlich ist.

### 2.1 Gruppen und Gruppentafeln

Wir werden zuerst definieren was eine Gruppe ist und danach einige bekannte Gruppen betrachten, die auch in späteren Kapiteln wieder aufgegriffen werden.

**Definition 1 (Gruppe)** Eine Gruppe  $(G, \circ)$  ist eine Menge  $G$ , für die eine Verknüpfung  $\circ$  definiert ist mit folgenden Eigenschaften (Gruppenaxiome):

1. *Abgeschlossenheit:*  $g_1, g_2 \in G \mapsto g_1 \circ g_2 \in G$
2. *Assoziativgesetz:*  $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$
3. *Es existiert ein Einselement  $e \in G$  mit  $e \circ g = g \circ e = g$  für jedes Element  $g \in G$*
4. *Jedes  $g \in G$  hat eine Inverses  $g^{-1} \in G$  mit  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$*

Gelten nur die ersten beiden Eigenschaften, dann handelt es sich um eine *Halbgruppe*. Eine Halbgruppe mit Einselement heißt *Monoid*.

Man kann aus diesen Eigenschaften die Eindeutigkeit des Einselements  $e$  und des zu  $g$  inversen Elements  $g^{-1}$  beweisen. Sind nämlich  $e$  und  $g$  beide Einselemente, dann gilt

$$g \circ g = g \xrightarrow{g^{-1} \circ} \overbrace{g^{-1} \circ (g \circ g)}^{=g} = g^{-1} \circ g = e \implies g = e.$$

Sind  $g'$  und  $g''$  inverse Elemente zu  $g$ , dann folgt

$$g' \circ g = e = g \circ g'' \implies g' = g' \circ e = g' \circ (g \circ g'') = (g' \circ g) \circ g'' = e \circ g'' = g'' \implies g' = g''.$$

Es kann also nur ein Einselement und zu jedem  $g$  nur ein inverses Element geben.

Das inverse Element eines Produktes ist

$$(g \circ g') \circ (g \circ g')^{-1} = e \iff (g \circ g')^{-1} = g'^{-1} \circ g^{-1}. \quad (2.1)$$

Entsprechend ist das Inverse eines mehrfachen Produktes  $g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n$  gleich dem Produkt der inversen Elemente in umgekehrter Reihenfolge,

$$(g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n)^{-1} = g_n^{-1} \circ g_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ g_1^{-1}. \quad (2.2)$$

### Beispiele von Gruppen

- Die einfachste Gruppe ist die Menge  $\{1\}$  mit der Gruppenoperation Multiplikation.
- Die Menge  $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$  mit der Multiplikation als Verknüpfung definiert die Gruppe  $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$ . Die Multiplikation ist assoziativ und jedes der beiden Gruppenelemente hat ein inverses Element: sich selbst.
- Die Menge  $\{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$ , wobei wir zum Beispiel  $a \circ a = a^2$  gesetzt haben, mit der Identifikation  $a^n = e$ , ist eine Gruppe. Sie heißt *zyklische Gruppe*  $\mathcal{C}_n$ .
- Die Menge der komplexen Zahlen vom Betrage 1 mit der Multiplikation als Verknüpfung bilden die kontinuierliche Gruppe  $U(1)$ .

?

Überlegen Sie sich, dass die Menge  $U(1)$  tatsächlich eine Gruppe ist.

Die Anzahl Elemente einer Gruppe  $G$  heißt *Ordnung* der Gruppe und wird mit  $|G|$  bezeichnet. Ist  $|G|$  endlich, dann heißt  $G$  endlich. Die zyklische Gruppe  $\mathcal{C}_n$  ist eine endliche Gruppe der Ordnung  $n$ . Sind die Elemente einer Gruppe abzählbar, dann spricht man von einer *diskreten Gruppe*. Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit der Addition als Verknüpfung bilden eine diskrete Gruppe. Dagegen ist die Ordnung von  $U(1)$  überabzählbar unendlich – es ist eine *kontinuierliche Gruppe*.

### Gruppen-Tafel (Cayley-Tafel)

Für endliche Gruppen kann man die Verknüpfung der Elemente tabellieren. Die entsprechende *Cayley-Tafel*, *Gruppentafel* oder *Gruppenmultiplikationstabelle* in (2.1) enthält alle Verknüpfungen:

$G$	$e$	$g_2$	$g_3$	$\dots$	$g_n$
$e$	$e$	$g_2$	$g_3$	$\dots$	$g_n$
$g_2$	$g_2$	$g_2 \circ g_2$	$g_2 \circ g_3$	$\dots$	$g_2 \circ g_n$
$g_3$	$g_3$	$g_3 \circ g_2$	$g_3 \circ g_3$	$\dots$	$g_3 \circ g_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$g_n$	$g_n$	$g_n \circ g_2$	$g_n \circ g_3$	$\dots$	$g_n \circ g_n$

Tabelle 2.1: Jeder Eintrag in der Gruppentafel ist das Ergebnis der Multiplikation des Element ganz links in der Zeile mit dem Element ganz oben in der Spalte.

Sämtliche Eigenschaften der Gruppe sind aus der Tafel ablesbar. Die Existenz eines Einselements bedingt, dass eine Spalte identisch mit der Spalte ganz links und eine Zeile identisch mit der Kopfzeile ist. Die Spalte ganz links und die Kopfzeile sind offensichtlich redundant und wir können Gruppentafeln etwas kompakter wie folgt schreiben:

$$T(G) = \begin{pmatrix} e & g_2 & g_3 & \dots & g_n \\ g_2 & g_2 \circ g_2 & g_2 \circ g_3 & \dots & g_2 \circ g_n \\ g_3 & g_3 \circ g_2 & g_3 \circ g_3 & \dots & g_3 \circ g_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & g_n \circ g_2 & g_n \circ g_3 & \dots & g_n \circ g_n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Die Existenz eines eindeutigen Inversen impliziert, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte das Einselement genau einmal auftritt. Wegen  $gg^{-1} = g^{-1}g = e$  erscheint dieses Element symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

Tatsächlich tritt in jeder Reihe und in jeder Spalte jedes Element genau einmal auf. Denn aus  $gg_p = gg_q$  folgt nach Multiplikation mit  $g^{-1}$ , dass  $g_p = g_q$  sein muß. Analog folgt aus  $g_p g = g_q g$ , dass  $g_p = g_q$  ist. Die Gruppenelemente der Zeile zu  $g$  sind eine *Permutation*  $\pi_g(g_p)$  der Elemente



in der ersten Zeile, und insbesondere gilt  $\pi_g(e) = \pi_e(g) = g$ .

$$T(G) = \begin{pmatrix} \pi_e(e) & \pi_e(g_2) & \pi_e(g_3) & \dots & \pi_e(g_n) \\ \pi_{g_2}(e) & \pi_{g_2}(g_2) & \pi_{g_2}(g_3) & \dots & \pi_{g_2}(g_n) \\ \pi_{g_3}(e) & \pi_{g_3}(g_2) & \pi_{g_3}(g_3) & \dots & \pi_{g_3}(g_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \pi_{g_n}(e) & \pi_{g_n}(g_2) & \pi_{g_n}(g_3) & \dots & \pi_{g_n}(g_n) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Genauso sind die Gruppenelemente jeder Spalte eine Permutation der Elemente der ersten Spalte. Als erstes einfaches Beispiel betrachten wir die Gruppentafel der Abelschen Gruppe  $\mathcal{C}_4$ .

#### Gruppentafel der zyklischen Gruppe $\mathcal{C}_4$

Die Tafel dieser Gruppe ist symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen:

$$T(\mathcal{C}_4) = \begin{pmatrix} e & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & e \\ a^2 & a^3 & e & a \\ a^3 & e & a & a^2 \end{pmatrix}$$

Für eine Gruppe mit symmetrischer Tafel ist die Verknüpfung kommutativ, d.h.  $gg' = g'g$  für alle  $g, g' \in G$ . Derartige Gruppen heißen *Abel'sch*.

## 2.2 Matrixgruppen

Eine wichtige Klasse von Gruppen sind die *Matrixgruppen*. Wir wollen zuerst definieren, was wir unter einer Matrix mit Elementen in einem Körper verstehen:

**Definition 2 (Matrix)** Eine  $m \times n$ -Matrix mit Koeffizienten in einem Körper  $\mathbb{K}$  ist eine Abbildung

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \mathbb{K}, \quad (i, j) \mapsto a_{i,j}.$$

Eine Matrix wird üblicherweise als Familie

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

geschrieben, wobei  $a_{ij}$  den Koeffizienten in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte von  $A$  bezeichnet. Anstelle von Matrix-Koeffizienten spricht man auch von Matrix-Einträgen oder Matrixelementen.

Die Menge der  $n \times n$  Matrizen mit Matrixelementen im Körper  $\mathbb{K}$  werden mit  $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$  bezeichnet. Sie können addiert und multipliziert werden. Bezüglich der Matrixmultiplikation bilden sie im Allgemeinen keine Gruppe, da das Inverse einer Matrix nur existiert, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Man kann auch Matrixgruppen mit Matrixelementen in einem Ring definieren, siehe Anhang 2.4.

### 2.2.1 Die Gruppen $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ und $\text{SL}(n, \mathbb{K})$

Die Menge der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen

$$\text{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$$

bilden bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Die Teilmenge mit Determinante 1,

$$\text{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$$

definiert ebenfalls eine Gruppe. Sie ist eine Untergruppe (dies ist eine Teilmenge, die selbst eine Gruppe bildet) von  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ . Hier bezeichnet 1 das Einselement im Körper  $\mathbb{K}$ .

- In den meisten Anwendungen ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und die entsprechenden Gruppen

$$\begin{aligned} \text{GL}(n, \mathbb{R}) &= \{A \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n, \det A \neq 0\} \\ \text{GL}(n, \mathbb{C}) &= \{A \mid a_{ij} \in \mathbb{C}, i, j = 1, \dots, n, \det A \neq 0\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

sind kontinuierlich. Es sind die *allgemeinen linearen Gruppen* (general linear groups). Ihre Untergruppen  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$  und  $\text{SL}(n, \mathbb{C})$  sind die *speziellen linearen Gruppen*.

- Ist  $\mathbb{K}$  endlich, dann ist  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$  eine endliche Gruppe.

#### Die endliche Matrixgruppe $\text{GL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Die Menge  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  mit der Addition modulo  $p$  ist für jede Primzahl  $p$  ein Körper, siehe die Ausführungen in Anhang 2.4 und die Aufgabe 2.2. Wir betrachten hier die endliche Gruppe der  $2 \times 2$  Matrizen mit Koeffizienten im Körper  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{0, 1\}$ . Darin ist nur 1 invertierbar, und invertierbare Matrizen haben Determinante 1, so dass  $\text{GL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  ist. Die Gruppe hat die Ordnung 6 und besteht aus

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Die Gruppentafel ist unsymmetrisch

$$T(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} e & a & b & c & d & f \\ a & b & e & f & c & d \\ b & e & a & d & f & c \\ \hline c & d & f & e & a & b \\ d & f & c & b & e & a \\ f & c & d & a & b & e \end{array} \right), \quad (2.7)$$

d.h. die Gruppe ist nicht-Abelsch. Die Elemente  $\{e, a, b\}$  bilden eine Abelsche Untergruppe. Sie ist invariant (siehe nächstes Kapitel), und damit ist  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  nicht einfach.

Die Elemente von  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  können mit dem Computerprogramm GAP definiert werden, und danach ist eine Analyse der Gruppe möglich:

#### GAP

```
e:=Z(2)*[[1,0],[0,1]];c:=Z(2)*[[1,1],[0,1]];
a:=Z(2)*[[0,1],[1,1]];d:=Z(2)*[[1,0],[1,1]];
b:=Z(2)*[[1,1],[1,0]];f:=Z(2)*[[0,1],[1,0]];
g:=Group(e,a,b,c,d,f);g1:=Group(e,a,b);
IsSubgroup(g,g1);IsSimple(SL(2,2));IsNormal(g,g1);
```

## 2.3 Diedergruppen

Die Elemente der Diedergruppe  $\mathcal{D}_n$  sind die Symmetrietransformationen des regelmäßigen  $n$ -Polygons in der Ebene, d.h. alle linearen Transformationen, die das Polygon in sich überführen. Sie werden auch *Decktransformationen* des Polygons genannt. Die Gruppe  $\mathcal{D}_n$  enthält  $2n$  Elemente, nämlich  $n$  Drehungen und  $n$  Spiegelungen.

### Decktransformationen des gleichseitigen Dreiecks

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Decktransformationen des gleichseitigen Dreiecks in der Ebene. Es sind die 3 Drehungen des Dreiecks um seinen Schwerpunkt mit Vielfachen von  $2\pi/3$  und die 3 Spiegelungen  $\sigma_v$ , siehe Abbildung 2.1.

Die Gruppenoperation ist die Komposition von Transformationen. Man bezeichnet die Drehung um  $2\pi/3$  mit  $c_3$  und die Spiegelung an der durch den  $i$ -ten Eckpunkt gehende Gerade mit  $\sigma_v^{(i)}$ .

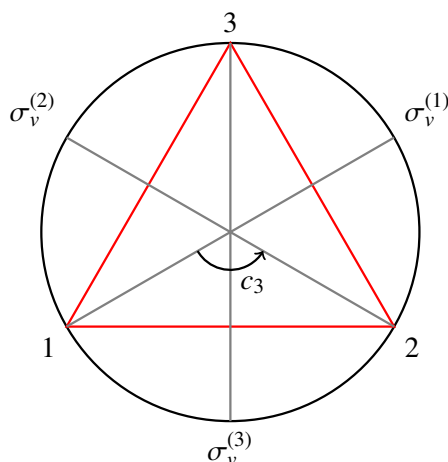


Abbildung 2.1: Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks.

Die Decktransformationen wirken auf den Eckpunkten des Dreiecks. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} c_3 &: (1, 2, 3) \mapsto (3, 1, 2) \\ \sigma_v^{(1)} &: (1, 2, 3) \mapsto (1, 3, 2) \\ \sigma_v^{(2)} &: (1, 2, 3) \mapsto (3, 2, 1), \end{aligned}$$

wie man aus Abbildung 2.1 abliest<sup>1</sup>. Führen wir diese Symmetrietransformationen hintereinander aus, siehe Abb. 2.2, so erhalten wir zum Beispiel

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) &\xrightarrow{c_3} (3, 1, 2) \xrightarrow{\sigma_v^{(1)}} (3, 2, 1), \quad \text{d.h. } \sigma_v^{(1)} \circ c_3 = \sigma_v^{(2)} \\ (1, 2, 3) &\xrightarrow{\sigma_v^{(1)}} (1, 3, 2) \xrightarrow{c_3} (2, 1, 3), \quad \text{d.h. } c_3 \circ \sigma_v^{(1)} = \sigma_v^{(3)} \\ (1, 2, 3) &\xrightarrow{\sigma_v^{(1)}} (1, 3, 2) \xrightarrow{\sigma_v^{(2)}} (2, 3, 1), \quad \text{d.h. } \sigma_v^{(2)} \circ \sigma_v^{(1)} = c_3^2. \end{aligned}$$

Mithilfe ähnlicher Betrachtungen für die restlichen Produkte findet man die Gruppentafel für  $\mathcal{D}_3$ :

$$\Gamma(\mathcal{D}_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} e & c_3 & c_3^2 & \sigma_v^{(1)} & \sigma_v^{(2)} & \sigma_v^{(3)} \\ c_3 & c_3^2 & e & \sigma_v^{(3)} & \sigma_v^{(1)} & \sigma_v^{(2)} \\ c_3^2 & e & c_3 & \sigma_v^{(2)} & \sigma_v^{(3)} & \sigma_v^{(1)} \\ \hline \sigma_v^{(1)} & \sigma_v^{(2)} & \sigma_v^{(3)} & e & c_3 & c_3^2 \\ \sigma_v^{(2)} & \sigma_v^{(3)} & \sigma_v^{(1)} & c_3^2 & e & c_3 \\ \sigma_v^{(3)} & \sigma_v^{(1)} & \sigma_v^{(2)} & c_3 & c_3^2 & e \end{array} \right). \quad (2.8)$$

<sup>1</sup>Das Element  $c_3$  ist beispielsweise wie folgt zu lesen: In der Ecke, in der vor der Drehung die 1 war, ist nach der Drehung die 3, wo die 2 war, ist nach der Drehung die 1, usw.

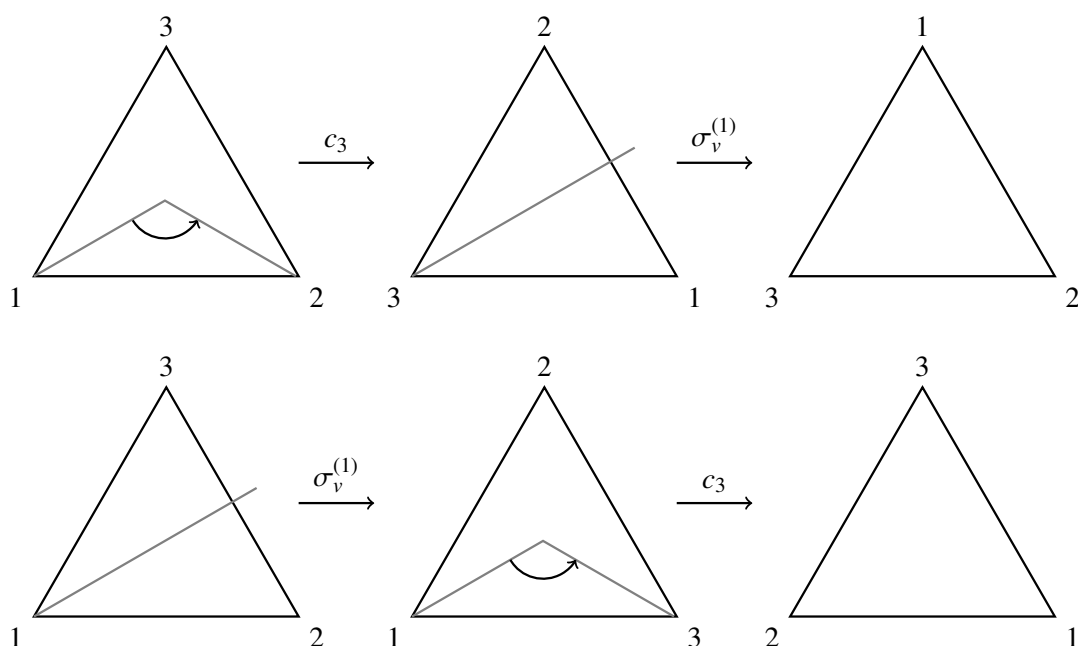


Abbildung 2.2: Die Verknüpfung ist das Hintereinander-Ausführen von Deckoperationen.

Die Symmetrietransformationen bilden die *kleinste nicht-Abelsche Gruppe*  $\mathcal{D}_3$  der Ordnung 6. Man beachte, dass im linken oberen Block die Gruppentafel der zyklischen Untergruppe  $\mathcal{C}_3$  steht. Die Gruppentafel von  $\mathcal{D}_3$  ist identisch zu derjenigen von  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  in (2.7).

## 2.4 Anhang A: Matrizen mit Elementen in einem Ring

Die Elemente  $a_{ij}$  einer Matrix brauchen nicht Elemente eines Körpers sein. Es genügt, dass sie Elemente eines Rings sind. Die Axiome eines Rings sind den Rechenregeln für ganze Zahlen nachgebildet:

**Definition 3 (Ring)** Eine Menge  $R$  mit zwei binären Operationen, der Addition  $+$  :  $R \times R \rightarrow R$  und der Multiplikation,  $\cdot$  :  $R \times R \rightarrow R$  ist ein Ring, wenn sie bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe bildet und bezüglich der Multiplikation eine Halbgruppe mit Einselement ist<sup>2</sup>, und beide Operationen über die Distributivgesetze

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad , \quad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

zusammenhängen. Das neutrale Element bzgl. der Addition heißt Null,  $a + 0 = a$ . Ist die Multiplikation kommutativ, so ist  $R$  ein kommutativer Ring.

<sup>2</sup>Man findet auch die Definition ohne die Annahme der Existenz des Einselements.

In einem Ring kann demnach addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Ein kommutativer Ring heißt *Körper*, wenn jedes Element in  $R \setminus \{0\}$  invertierbar ist<sup>3</sup>. Die *Division* in einem Körper ist dann wie folgt definiert:

$$a/b := ab^{-1}, \quad b \neq 0.$$

### Beispiele von Ringen

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sind Körper, also auch spezielle Ringe.
- $\mathbb{Z}$  ist ein kommutativer Ring.
- die Menge aller geraden Zahlen  $2\mathbb{Z}$  ist ein kommutativer Ring, allerdings ohne 1.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist ein kommutativer Ring.

Die letzte Aussage wollen wir beweisen: Dazu definieren wir die *Restklassen modulo  $n$* . Zwei ganze Zahlen  $m_1$  und  $m_2$  liegen in derselben Klasse, wenn  $m_1 = m_2 + kn$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  gilt. Es gibt offensichtlich  $n$  Klassen und als Repräsentanten können wir  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  wählen. Auf der Menge der Klassen definieren wir eine Addition durch die Addition von Repräsentanten,

$$\underbrace{[m_1]}_{\text{Klasse von } m_1} + \underbrace{[m_2]}_{\text{Klasse von } m_2} = \underbrace{[m_1 + m_2]}_{\text{Klasse von } m_1 + m_2}.$$

Diese ist wohldefiniert, da  $[m_1 + m_2]$  nicht von den Repräsentanten der Klassen abhängt. In diesem Ring gilt beispielsweise

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = 0.$$

Die Restklassen mod  $n$  mit dieser Addition bilden die Abelsche Gruppe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  der Ordnung  $n$ .

Mithilfe von

$$[m_1] \cdot [m_2] = [m_1 \cdot m_2]$$

ist auf den Klassen zusätzlich eine Multiplikation definiert und  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  wird zu einem kommutativen Ring. Allerdings hat nur dann jedes Element  $\neq 0$  ein Inverses, wenn  $n$  eine Primzahl ist.

---

?

---

Zeigen Sie: für eine Primzahl  $n$  ist der kommutative Ring  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sogar ein Körper.

---

**Definition 4 (Matrix)** Eine  $m \times n$ -Matrix mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring  $R$  (oder eine  $m \times n$ -Matrix über  $R$ ) ist eine Abbildung

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \mapsto R, \quad (i, j) \mapsto a_{ij}.$$

<sup>3</sup>Man findet auch die Definition ohne die Annahme, dass die Multiplikation kommutativ ist.

Man schreibt auch  $A = (a_{ij})$ .

Die Menge der  $m \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring  $R$  wird mit  $\text{Mat}(m, n, R)$  bezeichnet. Matrizen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Q}$  werden kurz ganzzahlige oder rationale Matrizen genannt. Matrizen können addiert und mit Skalaren multipliziert werden:

**Definition 5** Seien  $A, B \in \text{Mat}(m, n, R)$  und  $\alpha \in R$ . Dann heißt

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$$

die Summe von  $A$  und  $B$ , und

$$\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})$$

das  $\alpha$ -fache skalare Vielfache von  $A$ .

Wir schreiben im Folgenden statt  $\alpha \cdot A$  kurz  $\alpha A$ . Zwei  $n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in einem Ring  $R$  können multipliziert werden,

$$A \cdot B = C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

**Satz 1 (Matrixring)** Die Menge  $\text{Mat}(n, R)$  der  $n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in  $R$  ist bezüglich der Addition und der Multiplikation von Matrizen wieder ein Ring. Ist  $n \geq 2$  und hat  $R$  mindestens 2 Elemente, so ist  $\text{Mat}(n, R)$  nicht-kommutativ.

Hier drängt sich die Frage auf, wann eine Matrix mit Matrixelementen in einem kommutativen Ring, invertierbar ist. Es gilt der

**Satz 2** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Eine Matrix  $A \in \text{Mat}(n, R)$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \in R$  invertierbar ist.

Die bezüglich der Multiplikation invertierbaren Elemente in  $R$  heißen Einheiten. Der Satz besagt also, dass  $A$  invertierbar ist, wenn  $\det(A)$  eine Einheit ist. Zum Beweis erinnern wir uns an den

**Satz 3 (Cayley-Hamilton)** Sei  $R$  ein kommutativer Ring,  $A \in \text{Mat}(n, R)$  und  $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_0$  das charakteristische Polynom von  $A$ . Dann gilt

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \dots + a_1A + a_0 \cdot \mathbb{1} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Die Koeffizienten  $a_{n-1} = -\text{Sp}(A)$ ,  $a_{n-2}, \dots, a_0 = (-1)^n \det A$  sind Polynome in den Matrixelementen und liegen damit in  $R$ . In der Vorlesung über lineare Algebra wird dieser Satz meist nur für  $R = \mathbb{R}$ ,  $R = \mathbb{C}$  oder  $R = \mathbb{Q}$  bewiesen.

---

?

---

Machen Sie sich klar, dass beim Beweis nur vorausgesetzt wird, dass  $R$  ein kommutativer Ring ist.

---

Mit der Formel von Cayley und Hamilton können wir nun beweisen, dass für invertierbares  $\det A$  die Matrix  $A$  invertierbar ist. Nach Voraussetzung ist  $\det A$  eine Einheit und wir können in

$$A \cdot (A^{n-1} - \operatorname{Sp}A A^{n-2} + \dots + a_1 \mathbb{1}) = (-)^{n-1} \det A \mathbb{1},$$

mit dem Inversen von  $\det A$  multiplizieren. Wir erhalten

$$AA^{-1} = \mathbb{1}, \quad A^{-1} = (-)^{n-1} (A^{n-1} - \operatorname{Sp}A A^{n-2} + \dots + a_1 \mathbb{1}) (\det A)^{-1},$$

was zeigt, dass die zu  $A$  inverse Matrix (mit Elementen in  $R$ ) existiert, wenn  $\det A$  in  $R$  invertierbar ist.

### Inverse Matrizen in zwei Dimensionen

Für eine beliebige  $2 \times 2$  Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom die Form

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - \operatorname{Sp}A \lambda + \det A.$$

Das Theorem von Cayley-Hamilton impliziert für derartige Matrizen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} ((\operatorname{Sp}A)\mathbb{1} - A) = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Für  $3 \times 3$  Matrizen kann man ähnlich vorgehen.

### Inverse Matrizen in drei Dimensionen

Die Inverse einer beliebigen  $3 \times 3$  Matrix lautet

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^2 - (\operatorname{Sp}A)A + \Delta \mathbb{1}), \quad \text{mit} \\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}. \quad (\text{A.3})$$

Die Menge der invertierbaren Matrizen

$$\operatorname{GL}(n, R) = \{A \in \operatorname{Mat}(n, R) \mid \det A \text{ invertierbar}\}$$



bildet also bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Sie wird General Linear Group  $GL(n, \mathbb{R})$  genannt. Der Kern des Determinanten-Homomorphismus (Homomorphismen und deren Kerne werden in Kapitel 3 besprochen)

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

definiert die Special Linear Group  $SL(n, \mathbb{R})$ , eine Untergruppe der Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$ .

## 2.5 Anhang B: Präsentation einer Gruppe

Eine ausgezeichnete Rolle spielen jene Elemente einer Gruppe, durch deren faktorielle Anwendung jedes beliebige Element dargestellt werden kann. Sie heißen *Erzeugende (Generatoren)*. Eine minimale Menge von Erzeugenden, deren Anzahl als *Rang*  $r$  bezeichnet wird, nennt man Basis der Gruppe. Eine elegante Methode Gruppen kompakt zu präsentieren ist die Angabe von erzeugenden Elementen und Relationen zwischen diesen. Zum Beispiel hat die Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$  die Erzeugenden  $c_3$  und  $\sigma_v$  mit den Relationen

$$c_3^3 = \sigma_v^2 = 1, \quad \sigma_v c_3 \sigma_v^{-1} = c_3^{-1}.$$

Dieses einfache Verfahren ist aber wenig intuitiv: man weiß oft über die entstehende Gruppe sehr wenig. Einer *Präsentation* anzusehen, welche Eigenschaften die Gruppe besitzt, kann schwierig sein. Häufig ist es nicht einmal klar, ob die präsentierte Gruppe endlich ist. Zwei Präsentationen sieht man auch nicht immer an, ob sie isomorphe Gruppen beschreiben. Dennoch spielen Präsentationen eine wichtige Rolle bei der Klassifikation von Gruppen.

Wir kommen zu  $\mathcal{D}_3$  mit der *Präsentation* (wir setzen  $c_3 = a$  und  $\sigma_v = b$ ):

$$\mathcal{D}_3 = \{a, b \mid a^3 = b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \iff ba = a^2b\} \quad (\text{B.1})$$

zurück. Die von  $a$  und  $b$  erzeugte Gruppe enthält alle Produkte von  $a$  und  $b$ , die sogenannten Wörter des aus  $a$  und  $b$  bestehenden Alphabets, zum Beispiel

$$a, ab, ab^2, abab^2a^3, \dots$$

Wir dürfen die Relationen (B.1) benutzen, um die Wörter zu vereinfachen. Die letzte Relation erlaubt uns, in einem Wort alle  $a$  nach links und alle  $b$  nach rechts zu bringen. Benutzen wir dann noch die Relationen  $a^3 = b^2 = e$ , so kann jedes Wort auf eine der folgenden Wörter reduziert werden:

$$\{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$$

Mithilfe der Relationen in (B.1) gewinnt man die Multiplikationstafel von  $\mathcal{D}_3$  in (2.8):

$$T(\mathcal{D}_3) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} e & a & a^2 & b & ab & a^2b \\ a & e & a & ab & a^2b & b \\ a^2 & e & a & a^2b & b & ab \\ \hline b & a^2b & ab & e & a^2 & a \\ ab & b & a^2b & a & e & a^2 \\ a^2b & ab & b & a^2 & a & e \end{array} \right). \quad (\text{B.2})$$

Eine ähnliche Präsentation findet man für alle Diedergruppen. Die Erzeugenden der Gruppe  $\mathcal{D}_n$  sind die Drehung  $c_n$  mit dem Winkel  $2\pi/n$  und die Spiegelung an einer Symmetrieachse. Als Beispiel betrachten wir die Symmetriegruppe  $\mathcal{D}_6$  des regulären Sechsecks in Abbildung 2.3. Offensichtlich sind  $c_6$  und  $\sigma$  Symmetrien des Sechsecks und  $c_6^2 \equiv c_3$ . Es gelten die Relationen

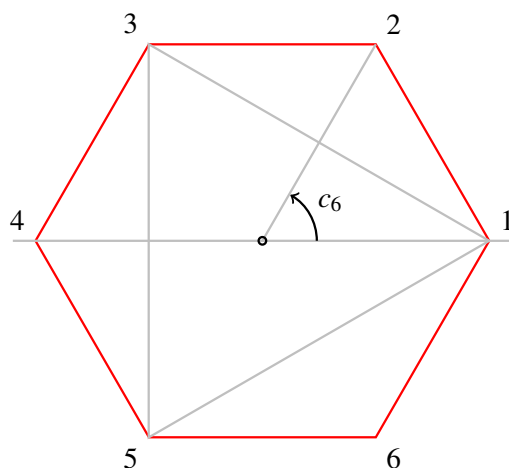


Abbildung 2.3: Symmetrien des gleichseitigen Sechsecks.

$$c_6^6 = \sigma^2 = e, \quad \sigma c_6 \sigma^{-1} = c_6^{-1}.$$

Eine Präsentation der Decktransformationen des regulären  $n$ -Eck's (mit  $c_n = a$  und  $\sigma = b$ ) ist dann

$$\mathcal{D}_n = \{a, b \mid a^n = b^2 = e, ba = a^{n-1}b\}. \quad (\text{B.3})$$

Diese Relationen bedingen, dass jedes Wort aus dem Alphabet mit den Buchstaben  $a, b$  in eines der folgenden Wörter umgewandelt werden kann:

$$\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}.$$

Die Gruppentafel kann nun wie für  $\mathcal{D}_3$  unter Ausnutzung der Relationen (B.3) berechnet werden.

Mit dem Computerprogramm GAP ist es möglich, die Eigenschaften einer Präsentation zu erfragen. Zum Beispiel definiert

**GAP**

```
f:=FreeGroup("a","b");
f1:=f/[f.1^6,f.2^2,f.2*f.1*f.2*f.1];
```

die Diedergruppe  $\mathcal{D}_6$ , die unter GAP mit Dihedral(12) aufgerufen wird:

```
Order(f1); f2:=DihedralGroup(12); Order(f2);
```

Eine Gruppe kann verschiedene Präsentationen haben, die sich in der Anzahl der Erzeugenden und/oder Relationen unterscheiden. Beispiele findet man auf der Webseite Atlas der endlichen Darstellungen.

## 2.6 Aufgaben zu Kapitel 2

### Aufgabe 2.1: Gruppenaxiome

Man beweise, dass bereits folgende Axiome eine Gruppe  $G$  mit Verknüpfung  $\circ$  definieren:

- Abgeschlossenheit:  $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 \circ g_2 \in G$
- Assoziativgesetz:  $g_1, g_2, g_3 \in G \Rightarrow g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$
- Existenz eines linksneutralen Elements:  $\exists e \in G : \forall g \in G, e \circ g = g$
- Existenz eines linksinversen Elements:  $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g^{-1} \circ g = e$

### Aufgabe 2.2: Die Körper $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Zeigen Sie, dass für eine Primzahl  $n$  der kommutative Ring  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sogar ein Körper ist.

### Aufgabe 2.3: Decktransformationen des Quadrats

Die Elemente der Diedergruppe  $\mathcal{D}_4$  sind die Decktransformationen des gleichseitigen Vierecks,

$$\{e, c_4, c_2, c_4^3, \sigma_v, \sigma'_v, \sigma_d, \sigma'_d\},$$

siehe Abbildung 2.4.

- Die Decktransformationen wirken auf den Eckpunkten des Vierecks. Zum Beispiel ist

$$c_4 : (1, 2, 3, 4) \mapsto (4, 1, 2, 3)$$

Wie lauten die restlichen Decktransformationen?

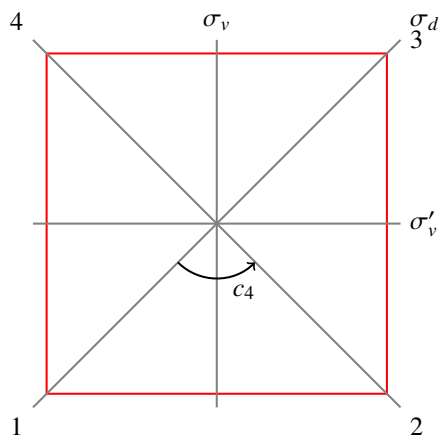


Abbildung 2.4: Symmetrien des gleichseitigen Vierecks.

- Überzeugen Sie sich davon, dass die Gruppentafel folgende Form hat:

$$T(\mathcal{D}_4) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} e & c_4 & c_2 & c_4^3 & \sigma_v & \sigma'_v & \sigma_d & \sigma'_d \\ c_4 & c_2 & c_4^3 & e & \sigma'_d & \sigma_d & \sigma_v & \sigma'_v \\ c_2 & c_4^3 & e & c_4 & \sigma'_v & \sigma_v & \sigma'_d & \sigma_d \\ c_4^3 & e & c_4 & c_2 & \sigma_d & \sigma'_d & \sigma'_v & \sigma_v \\ \hline \sigma_v & \sigma_d & \sigma'_v & \sigma'_d & e & c_2 & c_4 & c_4^3 \\ \sigma'_v & \sigma'_d & \sigma_v & \sigma_d & c_2 & e & c_4^3 & c_4 \\ \sigma_d & \sigma'_v & \sigma'_d & \sigma_v & c_4^3 & c_4 & e & c_2 \\ \sigma'_d & \sigma_v & \sigma_d & \sigma'_v & c_4 & c_4^3 & c_2 & e \end{array} \right)$$

#### Aufgabe 2.4: Cayley-Tafel

Wir wollen hier mit Gruppentafeln etwas vertrauter werden:

- Ergänzen Sie die folgenden Schemata, so dass es Gruppentafeln einer Gruppe mit Elementen  $e, a, b, c$  werden:

$$\begin{array}{cccc} e & a & b & c \\ a & e & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & e & \cdot \\ c & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \begin{array}{cccc} e & a & b & c \\ a & c & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & e & \cdot \\ c & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \begin{array}{cccc} e & a & b & c \\ a & c & \cdot & \cdot \\ b & \cdot & c & \cdot \\ c & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

- Sind die Gruppen, die zur ersten und letzten Tafel gehören isomorph?
- Welche der Gruppen ist die „Vierergruppe von Klein“ (vgl. Literatur über diese wohl-bekanntere Gruppe)

- Bestimmen Sie die Gruppentafel der von den Elementen  $a$  und  $b$  erzeugten Gruppe, welche die Relationen  $a^2 = b^3 = (ab)^2 = e$  erfüllen. Kennen Sie diese Gruppe?

**Aufgabe 2.5: Präsentationen**

Welche beiden Gruppen werden durch folgende Präsentationen definiert:

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 = (ab)^3 = e, \quad \text{and} \\ a^5 = b^2 = e, \quad bab^{-1} = a^{-1} \end{aligned}$$

# 3 Homomorphismen und Klasseneinteilungen

*Strukturen sind die Waffen der Mathematiker.*

BOURBAKI

Erste Strukturen von Gruppen werden durch deren Einteilung in Äquivalenzklassen sichtbar. In diesem Kapitel diskutieren wir Nebenklassen und Konjugationsklassen. Letztere sind für die Darstellungstheorie von Gruppen von Bedeutung. Wir beginnen das Kapitel mit Abbildungen zwischen Gruppen, welche Strukturen erhalten. Dies führt auf den Begriff von isomorphen Gruppen, die als abstrakte Gruppen nicht unterscheidbar sind. Viele Gruppen treten als Untergruppen von größeren Gruppen auf. Wichtige Beispiele sind Normalteiler oder Zentrum einer Gruppe. Schlussendlich definieren und diskutieren wir das semidirekte Produkt zweier Gruppen. Diese Konstruktion tritt in der Geometrie und Physik öfter auf.

## 3.1 Homomorphismen und isomorphe Gruppen

Die Gruppentafel der Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$  in 2.8 ist identisch zur Gruppentafel von  $SL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  in 2.7, wenn wir folgende Identifikationen vornehmen:

$$(e, c_3, c_3^2, \sigma_v^{(1)}, \sigma_v^{(2)}, \sigma_v^{(3)}) \longleftrightarrow (e, a, b, c, d, f).$$

Die Gruppen sind bis auf Umbenennung der Gruppenelemente identisch, d.h. sie sind isomorph. Allgemeiner definieren wir homomorphe und isomorphe Gruppen wie folgt:

**Definition 6 (Homomorphismus, Isomorphismus)** *Eine Abbildung zwischen zwei Gruppen  $\varphi : G \mapsto G'$  mit der Eigenschaft  $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$  heißt Gruppenhomomorphismus. Ein bijektiver Homomorphismus heißt Isomorphismus. Existiert ein Isomorphismus  $\varphi$ , dann heißen  $G$  und  $G'$  isomorph,  $G \cong G'$ .*

Ist  $G = G'$ , so nennt man einen Homomorphismus *Endomorphismus* und einen Isomorphismus *Automorphismus* von  $G$ . Zwei isomorphe endliche Gruppen haben bis auf Umbenennung der Gruppenelemente identische Gruppentafeln. Es gilt der

**Satz 4** Es seien  $G$  und  $G'$  Gruppen mit Einselementen  $e$  und  $e'$  und  $\varphi \in \text{Hom}(G, G')$ . Dann ist  $\varphi(e) = e'$  und  $\varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}$  für alle  $g \in G$ .

Die Beweise der beiden Eigenschaften sind einfach:

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= \varphi(ge) = \varphi(g)\varphi(e) \implies \varphi(e) = e' \\ e' &= \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) \implies \varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

### Menge der Homomorphismen/Automorphismen

Mit  $\text{Hom}(G, G')$  bezeichnet man die Menge aller Gruppenhomomorphismen von  $G$  nach  $G'$  und mit  $\text{Aut}(G)$  die Menge aller Automorphismen von  $G$ .

**Definition 7 (Automorphismengruppe von  $G$ )** Die Menge

$$\text{Aut}(G) = \{\varphi : G \mapsto G \mid \varphi \text{ ist Isomorphismus}\}$$

bildet eine Gruppe und heißt Automorphismengruppe von  $G$ .

Die Gruppenverknüpfung ist die Komposition von Abbildungen. Das Einselement von  $\text{Aut}(G)$  ist der Automorphismus  $\varphi : g \rightarrow g$  und das zu  $\varphi$  inverse Element die inverse Abbildung.

Zu jedem Gruppenelement  $g$  existiert die Abbildung

$$\varphi_g : G \mapsto G, \quad \varphi_g(g') = gg'g^{-1}.\tag{3.2}$$

Die Konjugation  $\varphi_g$  ist ein Automorphismus. Konjugationen heißen *innere* Automorphismen.

?

Überzeugen Sie sich davon, dass die Abbildungen  $\varphi_g$  Automorphismen sind.

Wir kehren zu den Homomorphismen zurück. Der *Kern* eines Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow G'$  ist die Menge

$$\text{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\} \subset G,\tag{3.3}$$

wobei  $e'$  das Einselement in  $G'$  bezeichnet. Das *Bild eines Homomorphismus* ist die Menge

$$\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) \mid g \in G\}.\tag{3.4}$$

Es sei  $G$  eine Abelsche Gruppe. Dann ist für jede ganze Zahl  $m$  die Abbildung

$$\varphi_m : G \mapsto G, \quad \varphi_m(g) = g^m$$

ein Gruppenhomomorphismus. Für  $G = (\mathbb{Z}, +)$  ist  $\text{Ker}(\varphi_m) = \{0\}$  und  $\text{Im}(\varphi_m) = m\mathbb{Z}$ .

Die invertierbaren Elemente  $\mathbb{K}^*$  eines Körpers  $\mathbb{K}$  bilden eine multiplikative Gruppe und die Determinanten-Abbildung  $\det: \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mapsto (\mathbb{K}^*, \cdot)$  ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Dies folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz.

### Determinantenabbildung

Der Kern der Abbildung  $\det: \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mapsto (\mathbb{K}^*, \cdot)$  ist die *spezielle lineare Gruppe*,

$$\text{SL}(n, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\det) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\}. \quad (3.5)$$

## 3.2 Untergruppen

Als *Untergruppe* von  $G$  bezeichnet man eine Teilmenge  $H \subset G$ , die unter der Multiplikation in  $G$  abgeschlossen ist und eine Gruppe bildet. Es gilt der

**Satz 5** *Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subset G$ . Dann ist  $H$  eine Untergruppe von  $G$ , wenn für alle  $a, b \in H$  gilt  $ab \in H$  und  $a^{-1} \in H$ .*

Eine Gruppe hat stets die uneigentlichen Untergruppen  $G$  und  $\{e\}$ .

?

Überzeugen Sie sich davon, dass  $e \in G$  immer in  $H$  liegt.

Ist  $H$  eine Untergruppe, dann schreibt man  $H \leq G$ . Ist die Untergruppe echt kleiner als  $G$ , dann schreibt man  $H < G$ .  $H$  heißt *maximal*, wenn es keine Untergruppe echt größer  $H$  und echt kleiner  $G$  gibt.

- Eine Untergruppe von  $\mathbb{C}^*$  ist

$$\text{U}(1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, \cdot\} < (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3.6)$$

- $\mathbb{Z}$  enthält die Untergruppe  $(m\mathbb{Z}, +)$  mit den ganzzahligen Vielfachen von  $m$  als Elemente.
- Die Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$  enthält die zyklische Gruppe  $\mathcal{C}_3$  als Untergruppe. Sie enthält



auch dreimal die Untergruppe  $C_2$ . Deren Elemente sind jeweils das Einselement und eine Spiegelung.

### 3.2.1 Kern und Bild eines Homomorphismus sind Untergruppen

Jeder Homomorphismus  $\varphi \in \text{Hom}(G, G')$  definiert je eine Untergruppe von  $G$  und von  $G'$ :

**Satz 6** *Es seien  $G$  und  $G'$  Gruppen und  $\varphi \in \text{Hom}(G, G')$ . Dann gilt  $\text{Im}(\varphi) \leq G'$  und  $\text{Ker}(\varphi) \leq G$ .*

Die erste Eigenschaft ist schnell bewiesen: Wir müssen zeigen, dass  $\text{Im}(\varphi)$  abgeschlossen ist und mit jedem Element das inverse Element enthält:

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1g_2) \in \text{Im}(\varphi) \quad , \quad [\varphi(g)]^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in \text{Im}(\varphi) .$$

Der Kern des Homomorphismus soll dieselben Eigenschaften besitzen. Es seien  $g_1, g_2$  und  $g$  im Kern des Homomorphismus  $\varphi$ . Dann folgt

$$\varphi(g_1g_2) = \underbrace{\varphi(g_1)}_{e'} \underbrace{\varphi(g_2)}_{e'} = e' \quad , \quad \varphi(gg^{-1}) = e' = \underbrace{\varphi(g)}_{e'} \varphi(g^{-1}) \Rightarrow \varphi(g^{-1}) = e' ,$$

was beweist, dass auch der Kern von  $\varphi$  eine Untergruppe ist. Es folgt nun unmittelbar

**Lemma 1** *Sei  $\varphi \in \text{Hom}(G, G')$  und  $H \leq G$ . Dann ist  $\varphi(H)$  eine Untergruppe von  $\varphi(G)$ .*

### 3.2.2 Zyklische Untergruppen

Die einfachen zyklischen Gruppen  $C_n$  wurden bereits in Abschnitt 2.1 auf Seite 11 eingeführt. Jede Gruppe  $G$  hat nun mindestens eine zyklische Gruppe als Untergruppe. Um dies einzusehen, wählen wir irgendein  $g \in G$  und definieren die von diesem  $g$  erzeugte Untergruppe

$$H = (g) = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\} \leq G, \quad \text{wobei} \quad g^0 = e \quad \text{und} \quad g^{-k} := (g^k)^{-1} .$$

Diese Untergruppe ist zyklisch. Wenn  $(g) = G$  ist, dann ist  $G$  eine zyklische Gruppe. Zyklische Gruppen sind stets Abelsch,

$$g^k g^l = g^{k+l} = g^{l+k} = g^l g^k .$$

Die Ordnung der Untergruppe  $(g) \subset G$  heißt Ordnung des Gruppenelements  $g$  in  $G$ . Zyklische Gruppen können endliche oder unendliche Ordnung haben.

**Es kann mehrere erzeugende Elemente geben**

Ein Beispiel für zyklischen Gruppen ist  $\mathbb{Z}$  mit dem erzeugenden Element 1. Auch  $-1$  ist erzeugendes Element. Es kann also mehr als ein erzeugendes Element geben.

**Endliche zyklische Gruppen**

Ist die Ordnung von  $g$  endlich, dann gibt es Zahlen  $k > l \in \mathbb{Z}$  für die  $g^k = g^l$  beziehungsweise  $g^{k-l} = e$  ist. Daher gibt es ein  $n > 0$  mit  $g^n = e$ . Es sei  $n$  die kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft. Die zyklische Gruppe besteht dann aus den Elementen

$$(g) = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1} | g^n = e\}. \quad (3.7)$$

Es folgt dann, dass zyklische Gruppen derselben Ordnung isomorph sind:

**Satz 7** Eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (Addition modulo  $n$ ).

**Unendliche zyklische Gruppen**

Ist die Ordnung von  $g$  unendlich, so sind alle  $g^k$  verschieden, und die Abbildung

$$\mathbb{Z} \ni k \mapsto g^k \in (g) \quad (3.8)$$

ist ein Isomorphismus.

**Satz 8** Eine unendliche zyklische Gruppe ist isomorph zu  $(\mathbb{Z}, +)$ .

---

?

---

Überzeugen Sie sich selbst davon, dass dies der Fall ist.

---

**3.2.3 Eigenschaften von wichtigen Untergruppen**

Wir diskutieren nun einige öfter auftretende Untergruppen. Kennt man eine Untergruppe  $H \leq G$ , so kann man sich durch Konjugation der Elemente in  $H$  mit einem festen Element  $g \in G$  eine neue Untergruppe beschaffen:

**Satz 9 (konjugierte Untergruppe)** Es sei  $H \leq G$ . Dann ist die konjugierte Untergruppe

$$\varphi_g(H) \equiv gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}, \quad (3.9)$$

eine zu  $H$  isomorphe Untergruppe von  $G$ . Sie heißt zu  $H$  konjugierte Untergruppe.

Beweis: Die Konjugation  $\varphi_g$  ist ein (innerer) Automorphismus, siehe 3.2, und damit ist das Bild  $\varphi_g(H)$  eine Untergruppe von  $G$ . Da  $\varphi_g$  bijektiv ist, gilt  $\varphi_g(H) \cong H$ .

Von Bedeutung sind *invariante* Untergruppen. Dies sind spezielle Untergruppen, die für alle Gruppenelemente selbstkonjugiert sind:

**Definition 8 (Normalteiler)** Eine Untergruppe  $N$  von  $G$  heißt *invariante Untergruppe, normale Untergruppe oder Normalteiler* von  $G$ , wenn gilt

$$\varphi_g(N) = gNg^{-1} = N \quad \text{für alle } g \in G. \quad (3.10)$$

Eine Gruppe besitzt immer zwei triviale Normalteiler, nämlich das Einselement und sich selbst. Nun definiert man zwei für die Klassifikation von Gruppen wichtige Familien von Gruppen:

**Definition 9 (Einfache Gruppe)** Eine Gruppe wird *einfach* genannt, wenn sie keinen (nicht-trivialen) Normalteiler enthält; sie heißt *halbeinfach*, wenn sie keinen Abelschen Normalteiler enthält.

Offensichtlich ist jede einfache Gruppe auch halbeinfach. Eine Abelschen Gruppe mit eigentlichen Untergruppen ist nicht halbeinfach.

#### Klassen von einfachen Gruppen

Man kann alle einfachen Gruppen in wenige Klassen einteilen:

- $C_n$  mit  $n$  Primzahl
- alternierende Gruppen  $A_n$  mit  $n \geq 5$  (siehe unten)
- Lie-Typ Gruppen (Chevalley- oder gewristete Chevalley- und Titsgruppen)
- 26 sporadische Gruppen.

Unter den sporadischen Gruppen findet sich auch „das Monster“, eine endliche Gruppe von Drehungen im 196 883-dimensionalen Raum. Die Ordnung dieser Gruppe ist eine 54-stellige Zahl. Erwähnenswert ist auch die folgende Vermutung:

#### Vermutung von Burnside

Die Ordnung jeder einfachen nicht-Abelschen Gruppe ist eine gerade Zahl.

Wir notieren noch ein weiteres bemerkenswertes Resultat, nach dem jeder Gruppenhomomorphismus einen Normalteiler definiert:

**Satz 10** Es sei  $\varphi : G \rightarrow G'$  ein Homomorphismus. Dann ist  $\text{Ker}(\varphi)$  ein Normalteiler von  $G$ .

Beweis: Wir haben bereits bewiesen, dass  $\text{Ker}(\varphi) \leq G$  ist. Es sei nun  $n \in \text{Ker}(\varphi)$  und  $g \in G$  beliebig. Dann ist

$$\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)e'[\varphi(g)]^{-1} = e' \implies gng^{-1} \in \text{Ker}(\varphi).$$

Es gilt auch der

**Satz 11** Sei  $\varphi \in \text{Hom}(G, G')$ . Dann ist das Bild  $\varphi(N)$  eines Normalteilers  $N \leq G$  ein Normalteiler im Bild  $\varphi(G) \leq G'$ .

Dies folgt unmittelbar aus

$$\varphi(g)\varphi(N)(\varphi(g))^{-1} = \varphi(gNg^{-1}) = \varphi(N).$$

Wenn jedes Element einer Untergruppe von  $G$  mit allen Elementen von  $G$  vertauscht, dann ist sie ein Abelscher Normalteiler. Die größte Untergruppe mit dieser Eigenschaft nennt man Zentrum:

**Definition 10 (Zentrum)** Das Zentrum einer Gruppe  $G$ ,

$$Z = \{z \in G \mid zg = gz \quad \forall g \in G\} \leq G \quad (3.11)$$

ist eine nicht-leere Untergruppe von  $G$ .

Beweis: Die Menge  $Z$  ist nicht leer, da sie  $e$  enthält. Sie ist eine Untergruppe von  $G$ ,

$$z, z' \in Z \implies zz'g = zgz' = gzz' \quad \text{und} \quad gz^{-1} = z^{-1}(zg)z^{-1} = z^{-1}(gz)z^{-1} = z^{-1}g.$$

Eine Abelsche Gruppe ist mit ihrem Zentrum identisch. Für eine stark nicht-Abelsche Gruppe ist dagegen  $Z = \{e\}$ . Das Zentrum  $Z$  ist eine ganz besondere invariante Untergruppe: Nicht nur die Menge  $Z$  ist invariant unter Konjugation, sondern jedes einzelne seiner Elemente.

### 3.3 Nebenklassen, Faktorgruppen und Konjugationsklassen

Hat Peter dieselbe Klausurnote wie Paul, dann hat Paul dieselbe Note wie Peter. Wenn Maria dieselbe Note wie Paul hat, dann haben auch Maria und Peter dieselbe Note. Dies ist ein Beispiel für eine *Äquivalenzrelation*, die allgemein die folgende Eigenschaft haben soll:

**Definition 11 (Äquivalenzrelation)** Eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf einer Menge  $M$  ist eine Relation mit folgenden Eigenschaften:

- reflexiv:  $a \sim a$
- symmetrisch:  $a \sim b \leftrightarrow b \sim a$

- *transitiv*:  $a \sim b, b \sim c \rightarrow a \sim c$ .

Eine Menge äquivalenter Objekte bezeichnet man mit *Äquivalenzklasse* oder kurz nur mit *Klasse* von  $M$ . In unserem Fall bilden alle Studierenden mit der gleichen Note eine Klasse. Klasseneinteilungen sind nützlich, um Mengen zu unterteilen und Strukturen aufzuzeigen. Sie dienen damit zu deren „Klassifikation“.

---

?

---

Überzeugen Sie sich davon, dass die Menge  $M$  in lauter *disjunkte* Äquivalenzklassen zerfällt,  $M = K_1 \cup K_2 \cup \dots$  mit  $K_i \cap K_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .

---

Bei Gruppen gibt es zwei wichtige Arten der Unterteilungen in Klassen, die *Konjugationsklassen* und die *Nebenklassen*. Wir beginnen mit den Nebenklassen.

**Definition 12 (Nebenklassen, Restklassen)** *Es sei  $H \leq G$  eine beliebige Untergruppe von  $G$ . Wir bilden die Restklassen modulo  $H$  (die Nebenklassen von  $H$ ):*

$$a \sim b \text{ falls } a^{-1}b \in H \iff a \sim b \text{ falls } b \in aH.$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation

$$a \sim a, \quad a \sim b \iff b \sim a, \quad a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c.$$

Mithilfe einer Untergruppe  $H$  kann man deshalb jede Gruppe in durchschnittsfreie Teilmengen aufteilen, die sogenannten *Nebenklassen* (englisch: cosets). Dazu bildet man für jedes Element  $a \in G$  die linke Nebenklasse  $aH = \{ah | h \in H\}$  von  $a$ . Offensichtlich ist  $aH = bH$  genau dann wenn  $a \sim b$  ist. Nun zerlegen wir die Gruppe in disjunkte Nebenklassen

$$G = eH \cup aH \cup a'H \cup \dots$$

Die Anzahl Elemente  $|aH|$  der Nebenklasse  $aH$  ist gleich der Ordnung  $|H|$  von  $H$ . Deshalb gilt der

**Satz 12 (Lagrange)**  *$H$  sei eine Untergruppe der endlichen Gruppe  $G$ . Dann ist der Index  $j = |G|/|H|$  der Untergruppe  $H$  in der Gruppe  $G$  eine natürliche Zahl.*

### Gruppen mit Primzahlordnung

Aus diesem Satz folgt, dass eine endliche Gruppe von Primzahlordnung keine eigentliche Untergruppe haben kann. Sie ist deshalb einfach.

Statt linke kann man auch rechte Nebenklassen  $Ha$  definieren. Sie erlauben ebenfalls eine Aufteilung der Gruppe. Bei Abelschen Gruppen sind die rechten Nebenklassen gleich den linken Nebenklassen. Man beachte: Nebenklassen sind keine Untergruppen - mit Ausnahme von  $H$  selbst.

Ist die Untergruppe  $N$  ein *Normalteiler* in  $G$ , dann sind ihre Nebenklassen

$$gN = \{gn | n \in N\} \quad (g \in G)$$

Elemente einer Gruppe, der sogenannten *Quotientengruppe* oder *Faktorgruppe*.

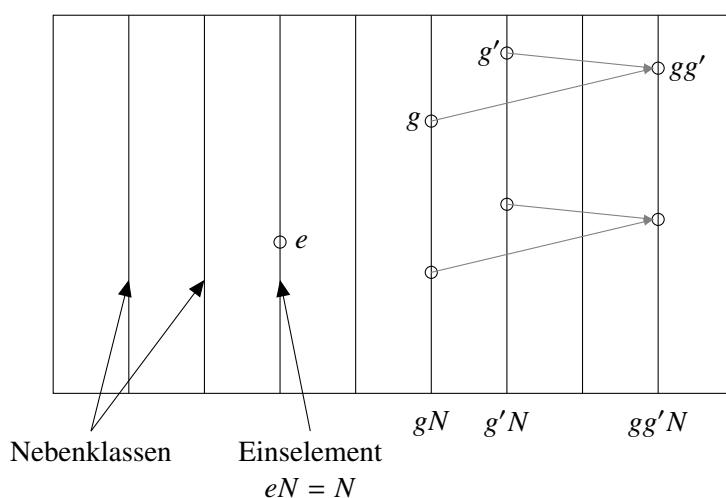


Abbildung 3.1: Die Gruppe ist die Vereinigung von disjunkten Nebenklassen. Die Restklassen modulo eines Normalteilers bilden selbst eine Gruppe.

**Definition 13 (Faktorgruppe)** Es sei  $N$  ein Normalteiler in  $G$ . Die Elemente der Faktorgruppe  $G/N$  sind die Nebenklassen  $\{gN | g \in G\}$  mit der Verknüpfungsrelation

$$(gN) \cdot (g'N) = gNg'N = (gg')N.$$

Also ist  $gN \cdot g'N$  diejenige Restklasse, in welcher  $gg'$  liegt (siehe Abb. 3.1).

Die Menge ist abgeschlossen:

$$(gN)(g'N) \stackrel{\text{assoziativ}}{=} gNg'N \stackrel{\text{Normalteiler}}{=} gg'N$$

Die Restklasse  $eN = N$  bildet das Einselement, da  $eN \cdot gN = gN$  ist, und das Inverse von  $gN$  ist  $g^{-1}N$ .

**Beispiele von Faktorgruppen**

- Für eine beliebige Gruppe  $G$  sind  $G/e = G$  und  $G/G = e$ .
- $m\mathbb{Z}$  ist Normalteiler in  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  ist die Gruppe der Restklassen von  $\mathbb{Z}$  mod  $m$ .

Der Kern jedes Homomorphismus ist ein Normalteiler und definiert die Untergruppe  $G/\text{Ker}(\varphi)$  von  $G$ . Es gilt der sogenannte

**Satz 13 (1. Isomorphiesatz)** *Es sei  $\varphi$  ein surjektiver Homomorphismus  $G \mapsto G'$ . Dann gilt*

$$G/\text{Ker}(\varphi) \cong G'. \quad (3.12)$$

Noch etwas präziser: ist  $\pi$  der surjektive Homomorphismus

$$\begin{aligned} \pi : G &\mapsto G/\text{Ker}(\varphi) \\ g &\mapsto g \text{Ker}(\varphi), \end{aligned}$$

auch Projektion oder kanonische Abbildung genannt, dann ist der Isomorphismus  $\psi : G/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow G'$  gegeben durch

$$\psi(\pi(g)) = \psi(g \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(g) \quad \text{oder} \quad \psi \circ \pi = \varphi.$$

Dies ist in Abb. 3.2 gezeigt.

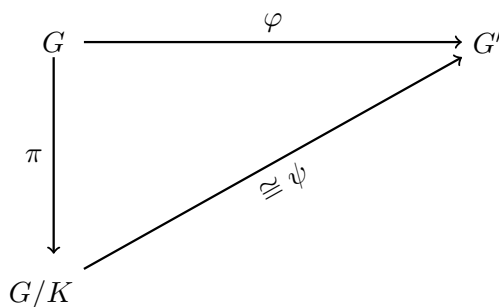


Abbildung 3.2: Der Homomorphismus  $\varphi$  ist die Komposition der Projektion  $\pi$  und des Isomorphismus  $\psi$ .

**Homomorphismen und Normalteiler**

Es folgt, dass alle möglichen Homomorphismen einer Gruppe  $G$  allein durch  $G$  bestimmt sind, und zwar indem man die kanonischen Abbildungen  $G \mapsto G/N$  für alle Normalteiler  $N \leq G$  betrachtet.

In einer nicht-Abelschen Gruppe ist im Allgemeinen  $gg' \neq g'g$  und der Kommutator  $gg'g^{-1}g'^{-1}$  zweier Gruppenelemente  $g$  und  $g'$  nicht gleich dem Einselement. Man definiert deshalb die

**Definition 14 (Kommutatorgruppe)** Die Kommutatorgruppe  $[G, G]$  ist die von den Kommutatoren  $\{[a, b] \equiv aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$  erzeugte Untergruppe von  $G$ .

Nach Definition ist  $[G, G]$  abgeschlossen und enthält das Einselement (man nehme  $a = b$ ). Weiterhin ist

$$(aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} \in [G, G],$$

was bedeutet, dass  $[G, G]$  eine Untergruppe von  $G$  ist. Die Ordnung  $|[G, G]|$  ist ein Maß dafür, wie weit die Gruppe  $G$  nicht-Abelsch ist. Es gilt der

**Satz 14** Die Kommutatorgruppe  $[G, G]$  ist ein Normalteiler von  $G$ .

Beweis: Die Konjugation eines Kommutators ist wieder ein Kommutator:

$$g(aba^{-1}b^{-1})g^{-1} = \underbrace{(gag^{-1})}_{a'} \underbrace{(gbg^{-1})}_{b'} (gag^{-1})^{-1} (gbg^{-1})^{-1} = a'b'a'^{-1}b'^{-1} \in [G, G].$$

Ein beliebiges Element in  $[G, G]$  hat die Form  $c_1c_2 \cdots c_k$ , mit Kommutatoren  $c_i$ . Für dieses allgemeine Element ist

$$g(c_1c_2 \cdots c_k)g^{-1} = \underbrace{(gc_1g^{-1})}_{c'_1 \in [G, G]} (gc_2g^{-1}) \cdots (gc_kg^{-1}) \in [G, G]$$

ebenfalls in der Kommutatorgruppe von  $G$ . Für jede Gruppe können wir die Faktorgruppe  $G/N$  mit  $N = [G, G]$  bilden. Es gilt der

**Satz 15** Die Faktorgruppe  $G/[G, G]$  ist stets Abelsch.

Beweis:

$$gNg'Ng^{-1}Ng'^{-1}N = \underbrace{gg'g^{-1}g'^{-1}}_{\in N} N = N (= e \text{ der Faktorgruppe}).$$

Mit GAP ist es einfach, die Kommutatorgruppe einer definierten Gruppe zu berechnen. Zum Beispiel definiert man die symmetrische Gruppe  $S_3$  mit den Erzeugenden  $(1, 2)$  und  $(1, 2, 3)$  wie folgt:

### GAP

```
s3 := Group((1, 2), (1, 2, 3));
```

Man erhält die Antwort `Group([(1, 2), (1, 2, 3)])`. Nun definieren wir die Kommutator-Untergruppe:

```
a3 := DerivedSubgroup(s3); .
```

Das Programm antwortet mit `Group([(1, 2, 3)])`. Diese hat die Ordnung 3, wie man mit `Order(a3)`

nachprüft. Es ist die alternierende Gruppe  $A_3$  der geraden Permutationen von drei Elementen.



ten. Man kann  $[\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3]$  auch mit dem Befehl

```
CommutatorSubgroup(s3, s3);
```

finden. Man kann nachprüfen, dass die Faktorgruppe  $\mathcal{S}_8/[\mathcal{S}_8, \mathcal{S}_8]$  zwei Elemente hat und Abelsch ist. Zuerst berechnen wir die Faktorgruppe:

```
s8:=SymmetricGroup(8);; a8:=DerivedSubgroup(s8);;
g:=FactorGroup(s8, a8);;
```

Nun bestimmt man den Index der Kommutatorgruppe  $\leq \mathcal{S}_8$  und prüft, ob die Faktorgruppe Abelsch ist:

```
Index(s8, a8); IsAbelian(g);
```

### 3.4 Konjugationsklassen

Wir führen eine weitere nützliche Äquivalenzrelation auf Gruppen ein. Ähnliche Elemente sind dabei zueinander konjugiert und Klassen ähnlicher Elemente bilden die Konjugationsklassen. Diese sind verschieden von der soeben untersuchten Nebenklassen.

**Definition 15 (konjugierte Elemente)** *Zwei Elemente  $a, b \in G$  heißen zueinander konjugiert,  $a \sim b$ , wenn es ein  $g \in G$  gibt, so dass*

$$gag^{-1} = b.$$

Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Transitivität folgt aus:

$$b = gag^{-1} \sim a, \quad c = \tilde{g}b\tilde{g}^{-1} \sim b \implies c = \tilde{g}(gag^{-1})\tilde{g}^{-1} = (\tilde{g}g)a(\tilde{g}g)^{-1} \sim a.$$

Aus diesen Eigenschaften folgt unmittelbar, dass wir jede Gruppe in disjunkte Konjugationsklassen  $K_i$  zerlegen können. Die Konjugationsklasse eines Elementes  $a$ ,

$$K_a = \{gag^{-1} | g \in G\}, \tag{3.13}$$

enthält immer das Element  $a$ . Jedes Zentrumselement (und insbesondere das Einselement) bildet eine Klasse für sich. Die Anzahl Elemente von  $K_i$  sei  $n(K_i)$ . Dann gilt für eine endliche Gruppe

$$\sum_i n(K_i) = |G|. \tag{3.14}$$

Es gilt der in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen hilfreiche

**Satz 16** *Die Anzahl Elemente  $n(K_i)$  der Konjugationsklasse  $K_i$  ist ein Teiler der Anzahl der Gruppenelemente. Alle Elemente einer Konjugationsklasse haben die gleiche Ordnung.*

Beweis: Die zweite Aussage folgt aus

$$a^n = e, \quad b = gag^{-1} \implies b^n = (gag^{-1})(gag^{-1}) \cdots (gag^{-1}) = ga^n g^{-1} = e.$$

Um die erste Aussage zu beweisen betrachten wir spezielle Untergruppen in  $G$ :

**Definition 16 (Normalisator, Stabilisator)** Für jedes Gruppenelement  $a$  definieren wir den Normalisator (Stabilisator)  $N_a$  von  $a$  gemäß

$$N_a = \{g \in G \mid gag^{-1} = a\} \leq G. \quad (3.15)$$

Offensichtlich ist  $a \in N_a$  und  $N_a$  ist eine Untergruppe von  $G$ . Nach dem Lagrange'schen Satz ist  $|N_a|$  ein Teiler von  $|G|$  für jedes  $a \in G$ . Nun ist

$$g'ag'^{-1} = gag^{-1} \iff g^{-1}g' \in N_a \iff g' \in gN_a.$$

Damit folgt

$$g'ag'^{-1} \neq gag^{-1} \iff g' \notin gN_a.$$

Die Anzahl Elemente in der Konjugationsklasse  $K_a$  von  $a$  ist also gleich der Anzahl Nebenklassen des Normalisators  $N_a$  von  $a$  oder gleich dem Index  $j(N_a)$  von  $N_a$  in  $G$ ,

$$n(K_a) = j(N_a) = |G|/|N_a|. \quad (3.16)$$

Dies beweist, dass die Anzahl Elemente jeder Konjugationsklasse die Gruppenordnung  $|G|$  teilt.

**Lemma 2** Ist  $|G|$  eine Primzahl, dann ist  $G$  Abelsch.

Ist die Anzahl Gruppenelemente eine Primzahl, dann hat nach obigem Satz jede Konjugationsklasse nur ein Element. Also bildet jedes Element eine Klasse für sich, d.h. es ist  $gag^{-1} = a$  oder  $ag = ga$  für zwei beliebige Gruppenelemente  $g$  und  $a$ . Also ist die Gruppe Abelsch.

Jede Untergruppe  $H \leq G$  hat ihren eigenen Normalisator:

**Definition 17 (Normalisator einer Untergruppe  $H \leq G$ )**

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

$N_G(H)$  ist eine Untergruppe von  $G$ , welche die Untergruppe  $H$  enthält. Es ist die größte Untergruppe von  $G$ , in der  $H$  ein Normalteiler ist.

### 3.5 (Semi)Direktes Produkt von Gruppen

Mit obiger Definition des direkten Produktes von Gruppen sind sowohl  $A$  als auch  $B$  Normalteiler von  $A \times B$ , wobei  $G/A = B$  und  $G/B = A$  ist. Im allgemeinen gilt die Umkehrung für Faktorgruppen nicht, also  $G \neq N \times (G/N)$ .

Eine weitere in der Physik wichtige Konstruktion ist das semidirekte Produkt zweier Gruppen:

**Definition 18 (Semidirektes Produkt)** Seien  $N$  und  $H$  Gruppen und sei  $\varphi : H \mapsto \text{Aut}(N)$  ein Gruppenhomomorphismus. Auf der Menge  $G := N \times H$  kann man eine Verknüpfung  $*$  wie folgt definieren:

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) := (n_1 \varphi(h_1)(n_2), h_1 h_2), \quad (3.17)$$

wobei jeweils die Verknüpfungen in  $N$  und  $H$  verwendet werden.

Das Einselement im semidirekten Produkt ist  $(e_N, e_H)$  wie man leicht einsieht,

$$(e_N, e_H) * (n, h) = (e_N \underbrace{\varphi(e_H)(n)}_n, e_H h) = (n, h).$$

Das zu  $(n, h)$  inverse Element ist  $([\varphi(h^{-1})(n)]^{-1}, h^{-1})$ :

$$([\varphi(h^{-1})(n)]^{-1}, h^{-1}) * (n, h) = ([\varphi(h^{-1})(n)]^{-1} \varphi(h^{-1})(n), h^{-1} h) = (e_N, e_H).$$

Die Gruppe  $(G, *)$  wird mit  $N \rtimes H$  bezeichnet und heißt *semidirektes Produkt* von  $H$  mit  $N$ . Es gilt der

**Satz 17** Die Gruppe  $N \rtimes H$  enthält  $N \times \{e_H\}$  als Normalteiler und  $\{e_N\} \times H$  als Untergruppe.

?

Beweisen Sie diese Aussage über die Gruppen  $N$  und  $H$  im semidirekten Produkt  $N \rtimes H$ .

#### Euklidische Gruppe (Bewegungsgruppe)

Die Bewegungsgruppe oder Euklidische Gruppe  $E_3$  ist das semidirekte Produkt der Abelschen Gruppe  $\mathbb{R}^3$  der Verschiebungen und der Gruppe  $O(3)$  der Drehspiegelungen im Raum (eine Diskussion dieser Gruppen folgt später). Der Homomorphismus  $\varphi : O(3) \mapsto \text{Aut}(\mathbb{R}^3)$  ist dabei durch  $\varphi(R)(\mathbf{a}) = R\mathbf{a}$  für  $R \in O(3)$  und  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  gegeben, so dass

$$(\mathbf{a}, R) * (\mathbf{a}', R') = (\mathbf{a} + R\mathbf{a}', RR') \quad \text{und} \quad (\mathbf{a}, R)^{-1} = (-R^{-1}\mathbf{a}, R^{-1}).$$

Es folgt insbesondere

$$(\mathbf{a}, R) * (\mathbf{a}', \mathbb{1}) * (\mathbf{a}, R)^{-1} = (R\mathbf{a}', \mathbb{1}),$$

was bedeutet, dass die Gruppe der Verschiebungen ein Normalteiler in  $E_3$  ist.

## 3.6 Aufgaben zu Kapitel 3

### Aufgabe 3.1: Isomorphe Gruppen

Bestimmen Sie, welche der folgenden Gruppen isomorph zueinander sind und geben Sie dann die Isomorphismen an.

1. die komplexen Zahlen  $\{1, i, -1, -i\}$  mit der Multiplikation;
2. die ganzen Zahlen  $\{2, 4, 6, 8\}$  bezüglich der Multiplikation modulo 10;
3. die Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

4. die Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

### Aufgabe 3.2: Automorphismengruppe

Es sei  $G$  eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge der Abbildungen  $\text{Aut}(G) = \{\varphi : G \rightarrow G \mid \varphi \text{ ist Isomorphismus}\}$  eine Gruppe definieren. Es ist die in der Vorlesung eingeführte Automorphismengruppe von  $G$ .

### Aufgabe 3.3: Zentrum einer Gruppe

Das Zentrum einer Gruppe  $G$  besteht aus den Elementen  $z \in G$  mit  $zg = gz$  für alle  $g$  in der Gruppe. Beweisen Sie, dass das Zentrum eine Abelsche Untergruppe von  $G$  ist.

### Aufgabe 3.4: Konjugierte Untergruppen

Sei  $H$  eine Untergruppe der Gruppe  $G$ . Man zeige, dass für alle  $g \in G$  die Menge  $gHg^{-1}$  eine Untergruppe von  $G$  ist, und dass alle diese Untergruppen isomorph zu  $H$  sind.

### Aufgabe 3.5: Dieder-Gruppe

Zeigen Sie, dass die Diedergruppe  $\mathcal{D}_4$  (die Decktransformationen eines Quadrats)) ein semidirektes Produkt ist,  $\mathcal{D}_4 = \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$ . Etwas allgemeiner, beweisen Sie  $\mathcal{D}_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ .

### Aufgabe 3.6: Normalteiler

Sei  $N$  eine Untergruppe der Gruppe  $G$ . Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- $N$  ist ein Normalteiler, d.h.  $gNg^{-1} = N$  für alle  $g \in G$ .
- $gN = Ng$  für alle  $g \in G$ .
- $gNg^{-1} \subseteq N$  für alle  $g \in G$ .

**Aufgabe 3.7: Normalisator**

Sei  $H$  eine Untergruppe der Gruppe  $G$ . Es ist zu zeigen, dass der Normalisator von  $H$ ,

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\},$$

eine Untergruppe von  $G$  bildet

**Aufgabe 3.8: Gruppen der Ordnung  $n$ ,  $n$  Primzahl**

Beweisen Sie die Aussage, dass eine endliche Gruppe deren Ordnung eine Primzahl ist, isomorph zu einer zyklischen Gruppe ist.

Hinweis: Betrachte die von einem Element  $g \neq e$  erzeugte Untergruppe und erinnern Sie sich an den Satz von Lagrange.

**Aufgabe 3.9: Semidirektes Produkt**

Man beweise folgenden Satz im Skript: Seien  $N$  und  $H$  Gruppen. Die Gruppe  $N \rtimes H$  enthält  $N \times \{e_H\}$  als Normalteiler und  $\{e_N\} \times H$  als Untergruppe.

## 4 Endliche Gruppen

*The universe is an enormous direct product of representations of symmetry groups.*

HERMANN WEYL

Die Elemente der symmetrischen Gruppe  $\mathcal{S}_n$  – auch Permutationsgruppe genannt – sind die  $n!$  Permutationen von  $n$  Objekten. Diese Gruppen sind aus gruppentheoretischer Sicht so kompliziert wie möglich: Es gibt nämlich den Satz von Cayley, der besagt, dass jede endliche Gruppe  $G$  eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $\mathcal{S}_{|G|}$  ist.

### 4.1 Untergruppen der Permutationsgruppen

In der Gruppentafel einer endlichen Gruppe der Ordnung  $|G| = n$  (siehe Abschnitt 2.1) wird der Kopfzeile mit den Elementen  $\{e = g_1, g_2, \dots, g_n\}$  einem Element  $g$  der linken Spalte die Zeile mit den permutierten Elementen

$$\{gg_1, \dots, gg_n\} = \{\pi_g(g_1), \dots, \pi_g(g_n)\}$$

zugeordnet. Da zwei Zeilen der Gruppentafel notwendigerweise verschieden sind, sind die  $n$  Permutationen  $\pi_{g_1}, \dots, \pi_{g_n}$  verschieden. Die Abbildung

$$G \mapsto \mathcal{S}_n, \quad g \mapsto \pi_g$$

von irgendeiner Gruppe  $G$  der Ordnung  $n$  in die Gruppe  $\mathcal{S}_n$  ist ein *Gruppenhomomorphismus*, wie man leicht nachprüft:

$$(\pi_g \pi_{g'})(g'') = (\pi_g)(g'g'') = gg'g'' = \pi_{gg'}(g'') \implies \pi_g \pi_{g'} = \pi_{gg'}. \quad (4.1)$$

Die Menge  $\{\pi_g\}$  ist abgeschlossen und die zu  $e \in G$  gehörende Permutation  $\pi_e$  ist das Einselement in  $\mathcal{S}_n$ . Wegen

$$\pi_g^{-1} = \pi_{g^{-1}}$$

definieren die  $\{\pi_g | g \in G\}$  eine *Untergruppe* der Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_n$ . Die Gruppe  $G$  ist deshalb isomorph zu einer Untergruppe von  $\mathcal{S}_n$  und es gilt der

**Satz 18 (Cayley)** *Jede endliche Gruppe der Ordnung  $n$  ist isomorph zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_n$  von  $n$  Elementen.*

Die  $n$  verschiedenen Permutationen  $\{\pi_g | g \in G\}$ , werden im Allgemeinen nur eine kleine Untergruppe der  $n!$  Permutationen in  $\mathcal{S}_n$  definieren.

Nach dem Satz von Cayley sind unter den endlichen Gruppen die *Permutationsgruppen*  $\mathcal{S}_n$  der Ordnung  $n!$  ausgezeichnet.

## 4.2 Symmetrische und alternierende Gruppen

Wie soll man nun die Elemente von  $\mathcal{S}_n$  darstellen? Eine Möglichkeit ist, bei gegebener Ausgangsordnung der  $n$  Elemente die neue Ordnung einfach anzugeben.

### Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$

Man kann die Ausgangsordnung  $(1, 2, 3)$  und die neue Anordnung  $(2, 3, 1)$  gleichzeitig angeben,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

entsprechend der Permutation  $(1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1)$ . Führt man die Permutation zweimal hintereinander aus, so wird die Anordnung  $(1, 2, 3)$  nach dem zweiten Schritt die Form  $(3, 1, 2)$  haben. Die 6 Elemente der Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_3$  sind

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & a &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & b &= a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & d &= ca = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & f &= cb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dabei bedeutet  $ca$  zuerst  $a$  und dann  $c$  ausführen. Die Gruppenmultiplikation ist nicht kommutativ.

---

?

---

Überzeugen Sie sich davon, dass  $\mathcal{S}_3$  dieselbe Gruppentafel wie  $\mathcal{D}_3$  hat. Damit ist  $\mathcal{S}_3 \cong \mathcal{D}_3$ .

Eine Permutation kann man auch darstellen, indem man nur diejenigen Positionen angibt, die sich ändern, mit der Angabe, wie sie sich ändern. Man notiert dann nur die in sich *abgeschlossenen Unterzyklen*.

**Zyklendarstellung von Elementen aus  $\mathcal{S}_4$** 

Die Permutation  $(1, 2, 3, 4) \rightarrow (1, 3, 4, 2)$  wird mit  $(1)(2, 3, 4)$  bezeichnet, im Sinne von: 1 bleibt 1, 2 wird zu 3, 3 wird zu 4 und 4 wird zu 2. Wenn es mehrere Zyklen gibt, so trennt man diese durch Klammern. Das Element  $(1, 2, 3, 4) \rightarrow (2, 1, 4, 3)$  schreibt sich dann  $(1, 2)(3, 4)$ . Auf diese Art kann man die Gruppenmultiplikation, d.h. aufeinander folgende Permutationen, einfach berechnen. So ist etwa  $(2, 3, 4) \circ (2, 3, 4) = (2, 4, 3)$  oder  $(2, 3, 4) \circ (1, 2, 3) = (1, 3)(2, 4)$  (erst rechts, dann links!).

Die einfachste Permutation ist eine *Transposition*, dies ist die Vertauschung zweier Elemente. Ein Zyklus kann mittels der Formel

$$(m_1, m_2, \dots, m_k) = (m_1, m_k) \dots (m_1, m_3)(m_1, m_2) \quad (4.3)$$

durch ein Produkt von  $k-1$  Transpositionen dargestellt werden. Damit ist auch jede Permutation ein Produkt von Transpositionen. Wenn es sich um eine gerade Anzahl von Transpositionen handelt, nennt man die Permutation *gerade*, sonst *ungerade*.  $\mathcal{S}_n$  enthält gleich viele gerade wie ungerade Permutationen. Das Produkt von zwei geraden Permutationen ist gerade und die inverse Permutation einer geraden Permutation ist ebenfalls gerade. Weil auch das Einselement gerade ist, folgern wir:

Die geraden Permutationen bilden eine Untergruppe  $\mathcal{A}_n$ , auch *alternierende Gruppe* genannt.

Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Permutation ist ungerade, das Produkt zweier ungeraden Permutationen ist gerade und das Inverse einer ungeraden Permutation ist ebenfalls ungerade. Wir folgern

$$g\mathcal{A}_ng^{-1} \subset \mathcal{A}_n \quad \text{für alle } g \in \mathcal{S}_n.$$

Dies beweist folgende Aussage:

Die alternierende Gruppe  $\mathcal{A}_n$  ist ein *Normalteiler* der Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_n$ .

$\mathcal{A}_n$  ist der größte eigentliche Normalteiler in  $\mathcal{S}_n$  und der einzige Normalteiler für  $n = 3$  und  $n \geq 5$ . Dagegen hat  $\mathcal{S}_4$  zwei Normalteiler: die alternierende Gruppe  $\mathcal{A}_4$  und die Kleinsche Vierergruppe  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .  $\mathcal{A}_n$  ist gleichzeitig die Kommutator-Untergruppe von  $\mathcal{S}_n$ . Die Faktorgruppe ist Abelsch,

$$\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2. \quad (4.4)$$

Als erzeugende Elemente von  $\mathcal{S}_n$  können wir zum Beispiel die Zyklen  $(1, 2, \dots, n)$  und  $(1, 2)$  wählen.

In GAP kann man eine symmetrische Gruppe über ihre Erzeugenden definieren:



**GAP**

```
s5:=Group((1,2,3,4,5),(1,2));
```

oder auch mit

```
s5:=SymmetricGroup(5);
```

Die Erzeugenden können dann wie folgt gefunden werden:

```
GeneratorsOfGroup(s5);
```

Wir berechnen die *Stabilisatoren* (*Normalisatoren*) folgender Gruppenelemente in  $\mathcal{S}_3$ :

$$e, \quad a = (1, 2, 3), \quad b = (1, 3, 2), \quad c = (2, 3) \quad d = (1, 3) \quad \text{und} \quad f = (1, 2).$$

Die Elemente  $a$  und  $b$  definieren die Untergruppe  $\mathcal{A}_3$ . Mit GAP ( $\mathcal{S}_3$  sei definiert):

**GAP**

```
na:=Stabilizer(s3,(1,2,3));
```

mit der Antwort `Group([(1,2,3)])`. Damit ist der Normalisator (Stabilisator)  $N_a$  die von  $a$  erzeugte zyklische Gruppe  $\mathcal{C}_3$ . Analog erhält man auf

```
nc:=Stabilizer(s3,(2,3));Order(nc);
```

die Antwort 2 und entsprechend ist  $N_c$  die von  $c$  erzeugt zyklische Gruppe  $\mathcal{C}_2$ . Ähnliches findet man für die restlichen Gruppenelemente:

$$N_e = \mathcal{S}_3, \quad N_a = N_b = \mathcal{C}_3, \quad N_c = \{e, c\}, \quad N_d = \{e, d\} \quad \text{und} \quad N_f = \{e, f\}. \quad (4.5)$$

Man sieht hier explizit, dass die Ordnungen der Normalisatoren die Ordnung 6 der Gruppe teilen. Die Indizes der Stabilisatoruntergruppen sind

$$j(N_e) = 1, \quad j(N_a) = j(N_b) = 2 \quad \text{und} \quad j(N_c) = j(N_d) = j(N_f) = 3.$$

Die Konjugationklassen sind

$$K_e = e, \quad K_a = K_b = \{a, b\}, \quad K_c = K_d = K_f = \{c, d, f\}. \quad (4.6)$$

Wir sehen, dass für jedes  $g \in G$  die Anzahl Elemente der Konjugationsklasse  $K_g$  gleich dem Index der Stabilisatorgruppe  $N_g$  in  $G$  ist,  $|K_g| = j(N_g)$ , in Übereinstimmung mit der allgemeinen Analyse in Abschnitt 3.4.

Die Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_5$  hat 7 Konjugationsklassen. Auf die Frage

**GAP**

```
ConjugacyClasses(s5);
```

antwortet GAP  $[()^G, (1, 2)^G, (1, 2)(3, 4)^G, (1, 2, 3)^G, (1, 2, 3)(4, 5)^G, (1, 2, 3, 4)^G, (1, 2, 3, 4, 5)^G]$ .

Die Anzahl Elemente in jedem Orbit kann wie folgt bestimmt werden:

```
OrbitLength(s5, ());
OrbitLength(s5, (1, 2));
OrbitLength(s5, (1, 2)(3, 4));
OrbitLength(s5, (1, 2, 3));
OrbitLength(s5, (1, 2, 3)(4, 5));
OrbitLength(s5, (1, 2, 3, 4));
OrbitLength(s5, (1, 2, 3, 4, 5));
```

Die Resultate sind 1, 10, 15, 20, 20, 30 und 24. In Einklang mit dem allgemeinen Resultat (3.14) gilt

$$1 + 10 + 15 + 20 + 20 + 30 + 24 = 120 = 5! = |\mathcal{S}_5|.$$

### 4.2.1 Zyklen und Konjugationsklassen

Beim Studium von Darstellungen einer Gruppe ist die Kenntnis ihrer Konjugationsklassen hilfreich. Wir werden nun die Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppen charakterisieren. Bei der Zykelschreibweise für Permutationen wollen wir die Zyklen nach abnehmender Länge anordnen, zum Beispiel

$$\mathcal{S}_6 \ni g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim (1, 4, 6)(3, 5)(2).$$

Jede Permutation ist ein Produkt von *elementfremden* Zyklen und die Zerlegung einer Permutation in Zyklen ist, bis auf die Reihenfolge gleich langer Zyklen, eindeutig.

Zwei Permutationen sind vom *gleichen Typus*, wenn in beiden Permutationen Zyklen der Länge  $\ell$  genau gleich oft auftreten. Zum Beispiel sind die Permutationen

$$(1, 3, 8)(4, 5)(2, 6)(7) \quad \text{und} \quad (1, 4, 6)(3, 5)(7, 8)(2) \quad (4.7)$$

vom gleichen Typus. Für jede Permutation seien nun  $\nu_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, n$ , die Anzahl Zyklen der Länge  $\ell$  in ihrer Zerlegung. Da die totale Anzahl Elemente gleich  $n$  ist, gilt

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n = n. \quad (4.8)$$

Für die Permutationen in (4.7) ist  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \dots, \nu_8) = (1, 2, 1, 0, \dots, 0)$ . Die Anzahl verschiedener Typen ist gleich der Anzahl von Partitionen  $P(n)$  der Zahl  $n$ , also der Anzahl Möglichkeiten, die natürliche Zahl  $n$  als Summe von positiven natürlichen Zahlen zu schreiben. Zum

Beispiel,

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \implies P(4) = 5.$$

Von EULER stammt eine elegante Methode, die Zahlen  $P(n)$  zu berechnen. Dazu betrachtet man die sogenannte  $q$ -Reihe

$$\begin{aligned} (q)_\infty &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2} \\ &= 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} + \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Exponenten  $0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, \dots$  sind die sogenannte *pentagonalen Zahlen*, und das Vorzeichen des  $k$ -ten Terms ist  $(-1)^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$ . Dann ist die Anzahl Partitionen  $P(n)$  gegeben durch die erzeugende Funktion

$$\frac{1}{(q)_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} P(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 15q^7 + 22q^8 + \dots \quad (4.10)$$

Eine andere erzeugende Funktion ist

$$\left( \frac{2t^{1/8}}{\vartheta_1'(0, \sqrt{t})} \right)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)t^n, \quad (4.11)$$

wobei  $\vartheta_1'(0, x)$  die Ableitung der Jacobi-Thetafunktion der ersten Art ist. HARDY und RAMANUJAN fanden 1918 die asymptotische Lösung

$$P(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}. \quad (4.12)$$

Die Anzahl Partitionen einer natürlichen Zahl kann mit GAP wie folgt bestimmt werden:

### GAP

```
NrPartitions(5); NrPartitions(100);
```

Die Antworten sind 7 und 190 569 292. Die Partitionen im Einzelnen erhält man mit

```
Partititons(5);
```

Mit der Antwort  $[[1, 1, 1, 1, 1], [2, 1, 1, 1], [2, 2, 1], [3, 1, 1], [3, 2], [4, 1], [5]]$ .

Zwei Permutationen vom gleichen Typus sind zueinander konjugiert. Als illustratives Beispiel konjugieren wir ein  $g \in \mathcal{S}_6$  mit einer Transposition  $a$ :

$$g = (1, 2, 3)(4, 5)(6) \quad \text{und} \quad a = (2, 5) = a^{-1}.$$

Wir berechnen das zu  $g$  konjugierte Element,

$$aga^{-1} = a(1, 2, 4, 5, 3)(6) = (1, 5, 3)(2, 4)(6).$$

Das konjugierte Element ist identisch zu  $g$ , bis auf den Austausch der Elemente 2 und 5. Die Konjugation mit  $a = (2, 5)$  vertauscht also nur die beiden Elemente 2 und 5 ohne den Typus zu ändern. Konjugiert man mit  $a = (4, 5)$ , dann bleibt  $g$  sogar fest, da ein Austausch dieser Elemente  $g$  nicht ändert,  $(4, 5) = (5, 4)$ . Da bei jeder Konjugation mit einer Transposition nur zwei Elemente vertauscht werden, ändert sich der Typus nicht. Da aber jede Permutation ein Produkt von Transpositionen ist, ändert der Typus auch bei einer Konjugation mit einer beliebigen Permutationen nicht. Umgekehrt können zwei Permutationen vom selben Typus durch das Vertauschen von Elementpaaren ineinander überführt werden. Damit gilt der

**Satz 19** *Zwei Permutationen  $g$  und  $g'$  der symmetrischen Gruppe  $\mathcal{S}_n$  sind genau dann zueinander konjugiert,  $g' = aga^{-1}$ , wenn sie vom gleichen Typus sind.*

Damit bilden *alle* Permutationen vom selben Typus *eine* Konjugationsklasse. Die Anzahl Konjugationsklassen ist gleich der Anzahl der geordneten Partitionen  $P(n)$  von  $n$ .

Ohne Beweis notieren wir den

**Satz 20** *Die Anzahl Permutationen vom Typus  $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  ist*

$$P(n, \nu) = n! \left( \prod_{\ell=1}^n \nu_\ell! \cdot \ell^{\nu_\ell} \right)^{-1} \implies \sum_{\nu} P(n, \nu) = n!. \quad (4.13)$$

$P(n, \nu)$  ist die Anzahl Elemente der durch  $\nu_1, \dots, \nu_n$  bestimmten Konjugationsklasse.

Die  $P(5) = 7$  Konjugationsklassen von  $\mathcal{S}_5$  sind in der folgenden Tabelle angegeben.

#### Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_5$

$\mathcal{S}_5$	Partition		$\nu_5$	$\nu_4$	$\nu_3$	$\nu_2$	$\nu_1$	$P(n, \nu)$
1	5	(.....)	1	0	0	0	0	24
2	4 + 1	(...)(.)	0	1	0	0	1	30
3	3 + 2	(..)(..)	0	0	1	1	0	20
4	3 + 1 + 1	(..)(.)(.)	0	0	1	0	2	20
5	2 + 2 + 1	(..)(.)(.)	0	0	0	2	1	15
6	2 + 1 + 1 + 1	(.)(.)(.)(.)	0	0	0	1	3	10
7	1 + 1 + 1 + 1 + 1	(.)(.)(.)(.)(.)	0	0	0	0	5	1

Die Zahlen in der letzten Spalte addieren zu der Ordnung  $5! = 120$  der Gruppe.

Nach dem Satz von Cayley ist die *zyklische Gruppe*

$$\mathcal{C}_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1} | g^n = e\}$$

eine Untergruppe der Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_n$ . Sie wird von der zyklische Vertauschung von  $n$  Elementen,

$$g = (1, 2, \dots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Damit kann  $\mathcal{C}_n$  entweder als zyklische Vertauschungen von  $n$  Elementen oder äquivalent dazu als Drehungen in der Ebene um Vielfache von  $2\pi/n$  realisiert werden.

### 4.3 Kleine Gruppen

Mehrere endliche Gruppen haben wir bereits eingeführt und diskutiert. Die Tabelle 4.1 enthält alle Gruppen bis zur Ordnung 15 (natürlich nur bis auf Isomorphie) und deren wichtigste Eigenschaften. Dabei steht *a* für Abelsch, *na* für nicht-Abelsch, *z* für zyklisch, *aufl* für auflösbar und *a<sup>b</sup>* ist die Abkürzung für  $bab^{-1}$ . Diese Eigenschaften gewinnt man zum Beispiel mithilfe von GAP nach Eingabe von

#### GAP

```
SmallGroupsInformation(6)
```

und dem Resultat

```
There are 2 groups of order 6, 1 of type  $\mathcal{S}_3$ , 2 of type  $\mathbb{Z}_6$ .
```

Folgende Bemerkungen helfen beim Verständnis der Liste:

- Für jede Primzahl  $p$  gibt es nur die Gruppe  $\mathcal{C}_p \cong \mathbb{Z}_p$ .
- Für jede Primzahl  $p$  existieren zwei Gruppen der Ordnung  $p^2$ , nämlich  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$  und  $\mathbb{Z}_{p^2}$ .
- Für teilerfremde  $p$  und  $q$  gilt:  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$ .
- Zur Zeit existiert eine Liste von Gruppen der Ordnung  $\leq 2000$  und diese enthält 49 910 529 484 Gruppen<sup>1</sup>.

In der Liste tritt die Gruppe der *Quaternionen* auf. Diese wird von den Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>H.U. Besche, B. Eick, E.A. O'Brien, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 7 (2001) 1-4.

erzeugt. Es gelten die Relationen

$$a^4 = \mathbb{1}, \quad a^2 = b^2 \quad \text{und} \quad bab^{-1} = a^{-1}.$$

Die Gruppe hat die Ordnung 8 und besteht aus den Elementen

$$Q = \{\mathbb{1}, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}.$$

Sie kann auch als Teilmenge  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  der Quaternionen-Algebra beschrieben werden.

## 4.4 Aufgaben zu Kapitel 4

### Aufgabe 4.1: Permutationsgruppe $\mathcal{S}_3$

Berechnen Sie die Multiplikationstabelle für die Permutationsgruppen  $\mathcal{S}_3$  und  $\mathcal{S}_4$  von drei und vier Elementen.

### Aufgabe 4.2: Symmetrische und alternierende Gruppen

Es sei  $\mathcal{S}_n$  die Permutationsgruppe von  $n$  Elementen. Diese hat  $n!$  Elemente. Es sei weiterhin  $\mathcal{A}_n$  die alternierende Gruppe der geraden Permutationen.

1. Welche Permutationen in  $\mathcal{S}_3$  sind gerade und welche ungerade?
2. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}_n$  eine Untergruppen on  $\mathcal{S}_n$  ist.
3. Was ist die Ordnung von  $\mathcal{A}_n$ ?
4. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A}_n$  ein Normalteiler in  $\mathcal{S}_n$  ist.
5. Welche Gruppe ist die Faktorgruppe  $\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n$ .

### Aufgabe 4.3: Konjugatinklassen von $\mathcal{S}_6$

Betrachten Sie die die Permutationsgruppe (symmetrische Gruppe)  $\mathcal{S}_6$  mit  $6! = 720$  Elementen. Wie viele Konjugationsklassen hat diese Gruppe. Bestimmen Sie die Tabelle der Konjuationsklassen (wie für  $\mathcal{S}_5$  in der Vorlesung).

### Aufgabe 4.4: Gruppen mit Primzahlordnung

Zeige, dass eine endliche Gruppe, deren Ordnung  $n$  eine Primzahl ist, isomorph zur zyklischen Gruppe  $\mathcal{C}_n$  ist.

### Aufgabe 4.5: Quaternionengruppe

Die Gruppe der *Quaternionen* wird von den Matrizen

$$a = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$ G $	Isomorphie typ von $G$	Präsentation	isomorphe Gruppen	Wichtige Eigenschaften
2	$\mathbb{Z}_2$			z
3	$\mathbb{Z}_3$			z
4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_4$			a, Kleinsche Vierergr. z
5	$\mathbb{Z}_5$			z
6	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ $\mathcal{S}_3$	$a^3 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_6$ $\mathcal{D}_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$ $SL_2(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	z Diedergruppe na, aufl
7	$\mathbb{Z}_7$			z
8	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}_8$ $\mathcal{D}_4$ $Q_8$	$a^4 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$ $a^4 = e, b^2 = a^2, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ $\mathbb{H}_2$	a a z na, aufl, Diedergruppe na, aufl, Quaterniongr.
9	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_9$ ,			a z
10	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ $\mathcal{D}_5$	$a^5 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_{10}$ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$	z na, aufl, Diedergruppe
11	$\mathbb{Z}_{11}$			z
12	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ $\mathcal{A}_4$ $\mathcal{D}_6$ $\mathbb{H}_3$	$a^3 = b^3 = (ab)^2 = e$ $a^6 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$ $a^6 = e, b^2 = a^3, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}_{12}$ $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$	a z na, aufl, alternierende Gr. na, aufl, Diedergruppe na, aufl, Dzyklische Gruppe
13	$\mathbb{Z}_{13}$			z
14	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$ $\mathcal{D}_7$	$a^7 = b^2 = e, a^b = a^{-1}$	$\mathbb{Z}_{14}$ $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_2$	z na, aufl, Diedergruppe
15	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$		$\mathbb{Z}_{15}$	z

Tabelle 4.1: Liste aller endlichen Gruppen bis zur Ordnung 15

erzeugt. Es gelten die Relationen

$$a^4 = e, \quad a^2 = b^2 \quad \text{und} \quad bab^{-1} = a^{-1},$$

wobei das neutrale Element gleich die Einheitsmatrix ist. Was ist die Ordnung der Gruppe? Geben Sie alle Elemente der Gruppe an, ausgedrückt durch die erzeugenden Elemente  $a$  und  $b$ , also  $Q = \{e, a, b, a^2, \dots\}$ . Finden Sie eine Untergruppe von  $Q$ . Ist diese Normalteiler von  $Q$ ?



## 5 Raumzeit-Symmetrien

*Wenn ein System eine gewisse Gruppe von Symmetrioperationen besitzt, dann muss jede physikalische Beobachtungsgröße dieses Systems ebenfalls dieselbe Symmetrie besitzen.*

Prinzip von NEUMANN

Es wurde schon mehrfach betont, dass in den Naturwissenschaften Gruppen vorwiegend als Symmetriegruppen auftreten. Diese spielen eine wichtige Rolle in *allen* Bereichen der Physik: die Drehungen und Verschiebungen (Translationen) im Raum sowie die Verschiebung der Zeit in der klassischen Mechanik und Quantenmechanik, die Galileigruppe in der nicht-relativistischen Physik und die Lorentz- und Poincaré-Gruppen in der relativistischen Physik. Punktgruppen der Molekülphysik sind endliche Untergruppen der Drehgruppe und Kristallgruppen der Festkörpertheorie diskrete Untergruppen der Bewegungsgruppe.

### 5.1 Gruppenwirkungen

In der Physik werden Symmetrien durch ihre Wirkung auf Elemente eines physikalischen Modells realisiert. Diese Elemente können materielle Objekte wie Elementarteilchen, Atome, Moleküle oder Kristalle sein oder abstraktere Größen wie Felder oder Zustandsvektoren in einem Hilbertraum. Die Wirkungsmenge kann, aber braucht kein linearer Raum zu sein. In der klassischen Physik ist sie oft eine Mannigfaltigkeit mit zusätzlicher Struktur und in der Quantenmechanik ein linearer Raum mit Skalarprodukt. Eine Gruppenwirkung auf einem linearen Raum heißt auch Darstellung der Gruppe. Im Folgenden sei  $G$  eine beliebige Gruppe und  $M$  eine nichtleere Menge. Im ersten Abschnitt wollen wir einige Eigenschaften von Gruppenwirkungen auf beliebigen Wirkungsmengen diskutieren.

**Definition 19 (Gruppenwirkung)** *Eine Gruppenwirkung ist eine Funktion  $\Phi : G \times M \mapsto M$  mit*

- $\Phi(e, p) = p$  für alle  $p \in M$
- $\Phi(g_1, \Phi(g_2, p)) = \Phi(g_1 g_2, p)$  für alle  $g_1, g_2 \in G$  und  $p \in M$ .

$G$  heißt dann auch Transformationsgruppe auf  $M$ , und man sagt  $G$  wirke von links auf  $M$ . Es gilt das

**Lemma 3** *Setzen wir  $\Phi_g(p) = \Phi(g, p)$ , dann ist die Abbildung  $\Phi_g : M \rightarrow M$  für jedes Gruppenelement  $g$  bijektiv. Die zu  $\Phi_g$  inverse Abbildung ist  $\Phi_{g^{-1}}$ .*

Der Beweis folgt unmittelbar aus

$$\Phi_g \circ \Phi_{g^{-1}} = \Phi_{gg^{-1}} = \Phi_e = \mathbb{1}_M.$$

Die Menge der *bijektiven Abbildungen*

$$S(M) = \{f : M \rightarrow M : f \text{ bijektiv}\} \quad (5.1)$$

mit der Komposition von zwei Abbildungen als Multiplikation,  $fg = f \circ g$ , bildet eine Gruppe. Für eine endliche Menge ist  $S(M)$  gerade die Gruppe der Permutation der Elemente. Das neutrale Element ist die Identität  $\mathbb{1}_M : p \rightarrow p$  und das inverse Element zu  $f \in S(M)$  ist die Umkehrabbildung.

Die Abbildung  $g \rightarrow \Phi_g$  ist ein Gruppen-Homomorphismus  $G \rightarrow S(M)$ , d.h.  $\Phi_{gg'} = \Phi_g \circ \Phi_{g'}$ .

Umgekehrt induziert jeder Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow S(M)$  durch

$$\Phi(g, p) = \varphi(g)(p) \quad (5.2)$$

eine Gruppenwirkung von  $G$  auf  $M$ , da sich die Homomorphiseigenschaft von  $\varphi$  in  $\Phi(g_1 g_2, p) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, p))$  übersetzt. Neben der Links-Wirkung kann man auch eine Wirkung von rechts definieren, siehe Aufgabe 5.1.

### 5.1.1 Spezielle Typen von Gruppenwirkungen

Gruppenwirkungen können *treu*, *transitiv* oder *frei* sein. Wir wollen diese Begriffe zuerst einführen.

**Definition 20 (treue, freie, transitive Wirkungen)** *Eine Linkswirkung heißt*

- *treu*, wenn  $\Phi_g$  nur für  $g = e$  die identische Abbildung ist,
- *frei*, wenn für jedes  $p \in M$  nur die Abbildung  $\Phi_e$  den Punkt  $p$  fest lässt,
- *transitiv*, wenn für jedes Paar  $p, q \in M$  ein Gruppenelement  $g$  mit  $\Phi_g(p) = q$  existiert.

Für eine treue Wirkung enthält der Kern von  $\text{Hom}(G, S(M))$  nur  $e \in G$  und deshalb ist  $g \rightarrow \Phi_g$  injektiv.

Der Begriff der Bahn eines Punktes in der Wirkungsmenge kann bei Symmetrieüberlegungen auftreten. Allgemein definiert man

**Definition 21 (Bahn, Orbit)** Die Bahn oder das Orbit eines Punktes  $p \in M$  unter der Wirkung von  $G$  ist die Menge

$$B(p) = \{q = \Phi(g, p) \mid g \in G\} \subset M. \quad (5.3)$$

Die Bahnen sind die Äquivalenzklassen bezüglich folgender Äquivalenzrelation:  $p$  ist ähnlich zu  $q$  falls es ein Gruppenelement  $g$  gibt mit  $q = \Phi(g, p)$ .

Eine Gruppe  $G$  wirkt offensichtlich genau dann transitiv auf  $M$ , wenn es einen Punkt  $p$  gibt mit  $B(p) = M$ . Wirkt eine Gruppe nicht frei, dann existieren Punkte in  $M$ , die unter der Wirkung von  $G$  inert bleiben. Dies führt auf die

**Definition 22 (Stabilisator)** Der Stabilisator (bzw. die Isotropiegruppe) von  $p \in M$  ist

$$N_p = \{g \in G \mid \Phi_g(p) = p\} \leq G. \quad (5.4)$$

Die Menge  $N_p$  bildet eine Untergruppe von  $G$ , da mit  $g, g'$  auch  $gg'$  und  $g^{-1}$  in  $G$  liegen,

$$\Phi_g(p) = \Phi_{g'}(p) = p \implies \Phi(g'g, p) = \Phi(g', \Phi(g, p)) = \Phi(g', p) = p.$$

Es gilt das

**Lemma 4** Wirkt  $G$  auf  $M$  transitiv, dann sind alle Stabilisatoren  $N_p$  zueinander konjugiert.

Zum Beweis betrachten wir zwei beliebige Punkte  $p, q$  in  $M$ . Nach Voraussetzung gibt es ein Gruppenelement  $g'$  mit  $\Phi(g', p) = q$ . Dann gilt

$$\Phi(g, p) = p \iff \Phi(g'gg'^{-1}, q) = \Phi(g'g, p) = \Phi(g', p) = q.$$

Deshalb sind die Stabilisatoren von  $p$  und  $q$  konjugiert,

$$N_q = g'N_pg'^{-1}. \quad (5.5)$$

Dies beweist, dass zwei Punkte  $p, q$  im gleichen Orbit isomorphe Stabilisatoren besitzen.

### Adjungierte Wirkung

Für die adjungierte Wirkung ist  $M = G$ . Die Wirkung auf der Gruppe ist definiert durch

$$\text{Ad}_g(a) = gag^{-1}, \quad a, g \in G. \quad (5.6)$$

Offensichtlich ist  $\text{Ad}_{gg'} = \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_{g'}$  und  $\text{Ad}_e = \text{id}_G$ . Die adjungierte Wirkung ist genau dann treu, wenn die Gruppe ein triviales Zentrum hat. Sie ist weder frei, da  $\text{Ad}_g(g) = g$  ist, noch transitiv, da  $\text{Ad}_g(e) = e$  für alle  $g$  gilt. Die Bahnen der adjungierten Wirkung sind die Konjugationsklassen von  $G$ .

## 5.2 Drehungen im Raum

Die Bedeutung der kontinuierlichen Drehungen im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  wird schon in der klassischen Mechanik betont, zum Beispiel bei der Diskussion starrer Körper. Auch die weiter unten untersuchten Galilei-Transformationen enthalten neben den Verschiebungen in Raum und Zeit die Drehungen als nicht-Abelsche Untergruppe.

Die Diskussion von Drehungen im  $\mathbb{R}^n$  ist nicht viel aufwändiger als im  $\mathbb{R}^3$ . Deshalb betrachten wir hier gleich den  $n$ -dimensionalen Fall. Wir führen eine kartesische Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  im  $\mathbb{R}^n$  ein, d.h. eine orientierte Basis mit  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ . Unter einer Drehung geht  $\mathbf{e}_i$  über in

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j R_{ji} \equiv \mathbf{e}_j R_{ji}, \quad (5.7)$$

wobei wir die Einstein'sche Summenkonvention benutzen: über Indexpaare wird summiert. Bei Drehungen verändern sich weder die Längen von Vektoren noch die Winkel zwischen Vektoren. Deshalb ist das Skalarprodukt invariant und es gilt

$$\delta_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \left( \sum_p \mathbf{e}_p R_{pi}, \sum_q \mathbf{e}_q R_{qj} \right) = \sum_p R_{pi} R_{pj}. \quad (5.8)$$

Wir fassen die  $n^2$  reellen Zahlen  $R_{ij}$  zu einer reellen Matrix zusammen,

$$(R_{ij}) = R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}.$$

Auf der rechten Seite in (5.8) steht das Produkt der zu  $R$  transponierten Matrix  $(R^T)_{ij} = R_{ji}$  und der Matrix  $R$ . Daher können wir diese Bedingung wie folgt schreiben,

$$(R^T R)_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{oder} \quad R^T R = \mathbb{1}.$$

Wir haben damit den

**Satz 21** Die Matrix einer Drehung bezüglich einer kartesischen Basis erfüllt die Bedingung

$$R^T = R^{-1} \quad \text{oder} \quad R^T R = R R^T = \mathbb{1}. \quad (5.9)$$

Bei fester Basis  $\mathbf{e}_i$  identifizieren wir eine Drehung mit „ihrer Matrix“  $R$ . Das Nacheinanderausführen von zwei Drehungen entspricht dem Produkt der zugeordneten Matrizen:

$$R_2 R_1 \sim \text{zuerst die Drehung } R_1 \text{ und danach die Drehung } R_2.$$

Die Komposition von zwei Drehungen  $R_1$  und  $R_2$  ist eine Drehung, die Identitätsabbildung ist eine (triviale) Drehung, und die zu einer Drehung inverse Abbildung ist eine Drehung. Wir folgern:

Die Drehungen im  $\mathbb{R}^n$  bilden eine kontinuierliche Gruppe. Sie heißt *orthogonale Gruppe*  $O(n)$ .

?

Rechnen Sie nach, daß die Menge der reellen  $n \times n$ -Matrizen mit  $R^T R = R R^T = \mathbb{1}$  eine Gruppe bilden.

Die Einheitsmatrix liegt offensichtlich in dieser Menge. Wir müssen noch nachprüfen, ob das Matrixprodukt oder die Inversen von Matrizen aus dieser Menge wieder in dieser Menge liegen:

$$(R_2 R_1)^T (R_2 R_1) = R_1^T \underbrace{R_2^T R_2}_{=\mathbb{1}} R_1 = R_1^T R_1 = \mathbb{1} \quad , \quad (R^{-1})^T R^{-1} = (R R^T)^{-1} = \mathbb{1} .$$

Man sollte zwischen *aktiven* und *passiven Transformationen* unterscheiden. Bei einer aktiv interpretierten Drehung wird der Ortsvektor auf einen neuen Ortsvektor abgebildet,

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{r}' = x_i \mathbf{e}'_i \equiv x'_i \mathbf{e}_i . \quad (5.10)$$

Bei *festgehaltener Basis* entspricht dies der Transformation

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = R \mathbf{x} . \quad (5.11)$$

Alternativ können wir uns denken, dass *derselbe Vektor* von verschiedenen Systemen aus beschrieben wird. Im gedrehten System ist die kartesische Basis  $\mathbf{e}'_i$  und der Vektor hat die transformierten Koordinaten  $x'_i$ , so dass gilt

$$x_i \mathbf{e}_i = x'_i \mathbf{e}'_i . \quad (5.12)$$

Bei einer passiv interpretierten Drehung kompensiert die Transformation (5.11) gerade die Drehung (5.7) der Basis. Ob eine Transformation passiv oder aktiv zu interpretieren ist, geht meistens aus dem Zusammenhang hervor. Gerade beim Übergang zwischen Intertialsystemen, wie er später diskutiert wird, ist die passive Sichtweise vorzuziehen.

Für eine Drehmatrix ist  $\det(R^T R) = 1$  und damit  $\det R = \pm 1$ . Aus

$$\det \left( \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right) = \det R \quad (5.13)$$

folgt, dass Drehungen mit  $\det R = 1$  die Orientierung erhalten und Drehungen  $\det R = -1$  sie umkehren.

Die orientierungserhaltenen Drehungen nennt man *eigentlich*, die anderen *uneigentlich*. Als Kern der Determinantenabbildung bilden die eigentlichen Drehungen den Normalteiler  $SO(n) \leq O(n)$ . Die Gruppe  $SO(n)$  heißt *spezielle orthogonale Gruppe*.

**Satz 22 (Euler)** *In ungeraden Dimensionen hat jede eigentliche Drehung und in geraden Dimensionen jede uneigentliche Drehung einen 1-dimensionalen Unterraum aus lauter Fixpunkten. Speziell in 3 Dimensionen hat jede eigentliche Drehung eine Drehachse.*

Wir müssen zeigen, dass  $R\mathbf{n} = \mathbf{n}$  für ein  $\mathbf{n} \neq 0$  lösbar ist. Die von  $\mathbf{n}$  definierte Gerade ist dann die Fixpunktachse von  $R$ . Eine Lösung existiert genau dann, wenn  $R$  den Eigenwert 1 hat oder wenn  $\det(R - \mathbb{1})$  verschwindet. Wegen

$$\begin{aligned} \det(R - \mathbb{1}) &= \det(R - \mathbb{1})^T = \det(R^{-1} - \mathbb{1}) = \det[R^{-1}(\mathbb{1} - R)] \\ &= \det R^{-1} \det(\mathbb{1} - R) = (-)^n \det R \det(R - \mathbb{1}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

verschwindet die Determinante für ungerades  $n$  und  $\det R = 1$ , beziehungsweise für gerades  $n$  und  $\det R = -1$ . In beiden Fällen hat  $R$  den Eigenwert 1 und besitzt damit eine Fixpunktachse. Wiederholt man das Argument für die Determinante von  $R + \mathbb{1}$ , dann folgt das

**Lemma 5 (Drehspiegelung)** *Eine uneigentliche Drehung hat in allen Dimensionen den Eigenwert  $-1$ .*

Wir betrachten nun den wichtigen 3-dimensionalen Fall etwas genauer: Gemäß dem soeben bewiesenen Euler'schen Satz hat jede eigentliche Drehung  $R$  eine Drehachse. Deshalb kann sie mit einer zweiten eigentlichen Drehung  $S$  (welche die Drehachse in die 3-Richtung dreht) in eine Drehung um die dritte Achse überführt werden,  $SRS^{-1} = R(\mathbf{e}_3, \varphi)$ . Wir betrachten zuerst derartige Drehungen um die 3-Achse mit dem Winkel  $\varphi$ , siehe Abbildung 5.1.

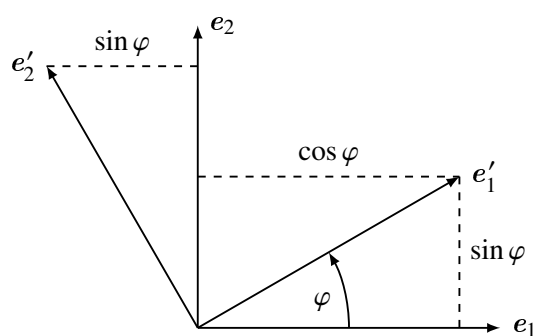


Abbildung 5.1: Drehung der Basisvektoren um 3-Achse.

Für diese Drehungen ist  $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$  und, wie aus der Abbildung ersichtlich, lauten die Transformationsformeln für die Basisvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi \\ \mathbf{e}'_2 &= -\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die entsprechende Drehmatrix hat die Form

$$R(\mathbf{e}_3, \varphi) = \begin{pmatrix} R_2(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Die entsprechende Transformation der kartesischen Koordinaten gewinnt man aus  $x_i \mathbf{e}_i = x'_i \mathbf{e}_i$  und lautet

$$x'_1 = \cos \varphi x_1 - \sin \varphi x_2, \quad x'_2 = \sin \varphi x_1 + \cos \varphi x_2, \quad x'_3 = x_3.$$

Analog findet man folgende Drehmatrizen für Drehungen um die beiden anderen Achsen:

$$R(\mathbf{e}_1, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_2(\varphi) \end{pmatrix}, \quad R(\mathbf{e}_2, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Für jede *eigentliche Drehung* kann die kartesische Basis  $\{\mathbf{e}_i\}$  im  $\mathbb{R}^3$  derart gewählt werden, dass die Drehung die einfache Form (5.16) hat.

In der *Theorie des Kreisels* benutzt man eine alternative Parametrisierung von Drehungen mit Hilfe der Euler-Winkel. Man zeigt, dass jede eigentliche Drehung das Produkt von drei elementaren Drehungen um die dritte und erste Achse ist,

$$R(\varphi, \vartheta, \psi) = R(\mathbf{e}_3, \varphi)R(\mathbf{e}_1, \vartheta)R(\mathbf{e}_3, \psi). \quad (5.18)$$

### 5.3 Die Euklidischen Gruppen $E_n$

Die Bewegungen sind diejenigen affinen Transformationen, die den Abstand zwischen zwei Punkten im Euklidischen Raum invariant lassen.

Wir wählen eine *kartesische Basis*  $\mathbf{e}_i$  und einen Ursprung  $\mathcal{O}$ , so daß jeder Punkt  $P$  durch einen Vektor  $\overline{\mathcal{O}P} = \mathbf{r} = \sum x_i \mathbf{e}_i$  und damit durch sein Koordinatentripel  $\mathbf{x}$  eindeutig charakterisiert ist. Der Abstand zweier Punkte  $P$  und  $Q$  mit Koordinaten  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  ist

$$d(P, Q) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_1^n x_i^2. \quad (5.19)$$

Bei einer Bewegung geht  $\mathbf{x}$  über in  $R\mathbf{x} + \mathbf{a}$  und  $\mathbf{y}$  in  $R\mathbf{y} + \mathbf{a}$ . Sie soll den Abstand zwischen zwei Punkten invariant lassen. Dies bedeutet, dass  $R$  eine Drehung ist:

**Bewegungsgruppe**

Eine Bewegung besteht aus Drehungen und Verschiebungen,

$$(\mathbf{a}, R) : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad R \in O(n). \quad (5.20)$$

Bewegungen mit  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  haben keinen Fixpunkt. Da Bewegungen über eine Invarianzeigenschaft definiert sind bilden sie eine Gruppe. Diese heißt *Euklidische Gruppe* oder *Bewegungsgruppe*, und wird mit  $E_n$  bezeichnet.

Es sei nun

$$(\mathbf{a}', R') : \mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x}'' = R'\mathbf{x}' + \mathbf{a}' \quad (5.21)$$

eine weitere Bewegung. Dann gilt für die Hintereinanderausführung der beiden Transformationen (5.20) und (5.21)

$$(\mathbf{a}', R') \circ (\mathbf{a}, R) : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'' = R'(R\mathbf{x} + \mathbf{a}) + \mathbf{a}' = R'R\mathbf{x} + R'\mathbf{a} + \mathbf{a}'.$$

**Verknüpfungsgesetz für Bewegungsgruppe**

Die Komposition zweier Bewegungen im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  ist gegeben durch

$$(\mathbf{a}', R') \circ (\mathbf{a}, R) = (R'\mathbf{a} + \mathbf{a}', R'R). \quad (5.22)$$

Entsprechend ist die zu  $(\mathbf{a}, R)$  inverse Bewegung

$$(\mathbf{a}, R)^{-1} = (-R^{-1}\mathbf{a}, R^{-1}) \in E_n. \quad (5.23)$$

Beschreiben wir eine Bewegung bezüglich eines um  $\mathbf{a}_1$  verschobenen Ursprungs und einer mit  $R_1 \in SO(n)$  gedrehten kartesischen Basis, dann hat sie die Form

$$(\mathbf{a}', R') = (\mathbf{a}_1, R_1)(\mathbf{a}, R)(\mathbf{a}_1, R_1)^{-1} = (\mathbf{a}_1 + R_1\mathbf{a} - R_1RR_1^{-1}\mathbf{a}_1, R_1RR_1^{-1}). \quad (5.24)$$

In jeder Konjugationsklasse gibt es besonders einfache Repräsentanten. Diese beschreiben die Bewegung in einem angepassten System von orthonormierten Basisvektoren. Diese Repräsentanten, man spricht von der Normalform einer Bewegung, werden in Anhang A dieses Kapitels diskutiert.

In Abschnitt 3.5 haben wir bereits gesehen, dass die Euklidische Gruppe im  $\mathbb{R}^3$  das *semidirekte Produkt* der Abelschen Translationsgruppe und der Gruppe der Drehungen ist. Dasselbe gilt auch in  $n$  Dimensionen, d.h.  $E_n = \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ . Die Euklidische Gruppe enthält die Verschiebungen als *Abelschen Normalteiler* und die Drehungen als *Untergruppe*. Dies folgt unmittelbar aus (5.24).

Eine weitere Untergruppe ist diejenige der *eigentlichen Bewegungen*

$$E_n^+ = \{(\mathbf{a}, R) | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, R \in SO(n)\}. \quad (5.25)$$



Zerlegen wir die Euklidische Gruppe  $E_n$  nach ihrer Untergruppe  $E_n^+$  in Rechtsnebenklassen, so erhalten wir zwei, die Klasse  $E_n^+$  der eigentlichen Bewegungen und die Klasse der *uneigentlichen Bewegungen*

$$E_n^- = \{(\mathbf{a}, R) \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, R \in O(n), \det R = -1\}. \quad (5.26)$$

Sie sind zugleich Linksnebenklassen, also gilt:

Die eigentlichen Bewegungen in  $E_n^+$  bilden einen Normalteiler der Bewegungsgruppe  $E_n$ .

Wir beweisen noch den nützlichen

**Satz 23 (Fixpunkte)** *Jede endliche Untergruppe  $G$  der Bewegungsgruppe  $E_n$  hat einen Fixpunkt. Dies gilt insbesondere für alle Punktgruppen.*

Beweis: Es seien  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  die Koordinaten eines festen Punktes  $p$  im euklidischen Raum und

$$B(\mathbf{x}) = \{R_i \mathbf{x} + \mathbf{a}_i \mid (\mathbf{a}_i, R_i) \in G\}$$

die *Bahn* dieses Punktes unter der Gruppenwirkung. Für eine endliche Gruppe besteht die Bahn aus endlich vielen Punkten. Wir schreiben  $B(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  mit  $\mathbf{x}_i = R_i \mathbf{x} + \mathbf{a}_i$ . Der Schwerpunkt der Bahn

$$\mathbf{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \quad (5.27)$$

ist offensichtlich ein Fixpunkt für jedes Gruppenelement  $g \in G$ , denn dieses permutiert die Elemente der Bahn nur, so dass gilt  $g\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

## 5.4 Die Galileigruppe

Raumzeitmodelle, bei denen die Struktur von Raum und Zeit unabhängig von der vorhandenen Materie ist, sind das *Galilei-Newtonsche Modell* mit einer absoluten Zeit und das *Einstein-Poincaré Modell*, in dem das Zeitmaß vom Bezugssystem abhängt. Das erste Modell ist ein Grenzfall des zweiten. In beiden Modellen gibt es ausgezeichnete Bezugssysteme. Ein solches ist nahezu ideal oder inertial, wenn in ihm für einen hinreichend kräftefreien Körper das Galileische Trägheitsgesetz hinreichend genau gilt, also wenn der Körper in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung beharrt. Für drei Massenpunkte, die sich auf nicht parallelen Geraden bewegen, scheint dies eine leere Aussage zu sein, aber für jede weitere kräftefreie Bewegung liefert dies eine operative Definition von Inertialsystemen.

### Realisierung eines Inertialsystems

Innerhalb eines frei auf die Erde fallenden Kastens oder in einem weit weg von Himmelskörpern antriebslos fliegenden Raumschiff hat man in guter Näherung ein (lokales) Inertialsys-

tem.

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf den nichtrelativistischen Grenzfall und untersuchen das Modell von GALILEI und NEWTON. Zwei beliebige Inertialsysteme  $I$  und  $I'$  können sich dadurch unterscheiden, dass ihre Ursprünge  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}'$

- durch eine (zeitunabhängige) *räumliche Translation*  $\mathbf{a}$  gegeneinander verschoben sind und/oder
- sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  relativ zueinander bewegen.

Eine äquivalente Formulierung ist

### Transformation

Hat ein Teilchen im Inertialsystem  $I$  den Ortsvektor  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}t$ , dann hat es im Inertialsystem  $I'$  den Ortsvektor  $\mathbf{r}'(t) = (\mathbf{r}(0) + \mathbf{a}) + (\mathbf{v} + \mathbf{u})t$ .

Wir haben dabei nur die Beschreibung der Bewegung des Massenteilchens geändert und nicht die Bewegung selbst (passive Sichtweise). Wir wählen in jedem Inertialsystem ein kartesisches Basis und identifizieren einen Vektor  $\mathbf{r}$  mit „seinem“ 3-Tupel  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ . Die Menge der *räumlichen Verschiebungen*<sup>1</sup>

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (5.28)$$

sind Elemente der oben diskutierten 3-parametrischen kommutativen Translationsgruppe. Ebenso bildet die Menge der *speziellen Galilei-Transformationen*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}t \quad (5.29)$$

eine 3-parametrische kommutative Gruppe. Die Zeitursprünge in den Inertialsystemen können verschieden sein, und beim Übergang ist eine *Zeittranslation* vorzunehmen,

$$t \mapsto t' = t + \tau. \quad (5.30)$$

Diese bilden eine 1-parametrische kommutative Gruppe.

Nun wollen wir annehmen, dass die Zeit- und Ortsursprünge der Inertialsysteme zusammenfallen,  $\mathbf{a} = 0$ , und sie keine Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$  haben. Dann können die *kartesischen* Basen in  $I$  und  $I'$  wie in (5.7) noch gegeneinander gedreht sein,

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j R_{ji}. \quad (5.31)$$

Die entsprechende Drehung des 3-Tupels lautet

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = R \mathbf{x}, \quad R^T R = \mathbb{1}. \quad (5.32)$$

Fassen wir zusammen:

<sup>1</sup>Wir wählen für den Verschiebungsvektor und sein 3-Tupel dasselbe Symbol  $\mathbf{a}$ .

**Galileitransformationen**

Charakterisieren  $(t, \mathbf{x})$  und  $(t', \mathbf{x}')$  ein festes Ereignis bezüglich zweier Inertialsysteme mit Ursprüngen  $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$  und kartesischen Basen  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_i$ , dann sind folgende Transformationen zwischen den zwei Koordinatensystemen möglich:

Art der Transformation	Zeitkoordinate	Raumkoordinaten
Verschiebung des Ortursprungs	$t' = t$	$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$
Verschiebung des Zeitursprungs	$t' = t + \tau$	$\mathbf{x}' = \mathbf{x}$
Drehung der Systeme	$t' = t$	$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$
spezielle Galileitransformation	$t' = t$	$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}t$

(5.33)

Zeitintervalle und räumliche Abstände in Schichten gleicher Zeit sind unabhängig vom Inertialsystem. Sie ändern nicht bei Galileitransformationen. Die Galileitransformationen bilden die *Galilei Gruppe*. Sie ist die Symmetriegruppe der Newtonschen Mechanik.

Ein beliebiges Element dieser Gruppe ist eine Zusammensetzung von Translationen, Drehungen und speziellen Galileitransformationen und hat die Form

$$t' = t + \tau \quad \text{und} \quad \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{u}t + \mathbf{a}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \quad R^T R = \mathbb{1}. \quad (5.34)$$

Eine *Galilei-Transformation* ist durch die 10 Parameter  $(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R)$  bestimmt. Wechseln wir vom Bezugssystem  $I$  ins System  $I'$  mit (5.34) und anschließend mit  $(\tau', \mathbf{a}', \mathbf{u}', R')$  von  $I'$  nach  $I''$ , dann ergibt sich folgende zusammengesetzte Galileitransformation für den Übergang von  $I \rightarrow I''$ :

$$(\tau', \mathbf{a}', \mathbf{u}', R')(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R) = (\tau' + \tau, \mathbf{a}' + R'\mathbf{a} + \mathbf{u}'\tau, \mathbf{u}' + R'\mathbf{u}, R'R). \quad (5.35)$$

Den Galilei-Transformationen können wir  $5 \times 5$  Matrizen zuordnen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ t' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \mathbf{u} & \mathbf{a} \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Zum Einselement gehört die Matrix  $\mathbb{1}_5$  und zur inversen Galilei-Transformation die Matrix

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}\mathbf{u} & R^{-1}(\mathbf{u}\tau - \mathbf{a}) \\ 0 & 1 & -\tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Diese Darstellung zeigt, dass sich die Galilei-Gruppe als Untergruppe von  $GL(5, \mathbb{R})$  auffassen

lässt. Unter einer Konjugation mit  $(\tau_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{u}_1, R_1)$  transformiert eine Galileitransformation in

$$\begin{aligned} R' &= R_1 R R_1^{-1}, \\ \mathbf{u}' &= R_1 \mathbf{u} + \mathbf{u}_1 - R' \mathbf{u}_1, \\ \mathbf{a}' &= R'(\tau_1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{a}_1) - R_1(\tau_1 \mathbf{u} - \mathbf{a}) + (\tau - \tau_1) \mathbf{u}_1 + \mathbf{a}_1, \\ \tau' &= \tau. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Man erkennt folgende Normalteiler:

- Die raumzeitlichen Translationen  $(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbb{1})$ .
- Die räumlichen Translationen und speziellen Galileitransformationen  $(0, \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbb{1})$ .

### Galilei-Gruppe als semidirektes Produkt

Die Galilei-Gruppe ist das semidirekte Produkt  $\mathbb{R}^4 \rtimes E_3$  der Gruppe  $\mathbb{R}^4$  der Translationen in Zeit und Raum mit Elementen  $(\tau, \mathbf{a})$  und der Euklidischen Gruppe mit Elementen  $(\mathbf{u}, R)$ .

Die Wirkung von  $(\mathbf{u}, R) \in E_3$  auf  $(\tau, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^4$  ist gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{u}, R)(\tau, \mathbf{a}) = (\tau, R\mathbf{a} + \tau\mathbf{u}). \tag{5.39}$$

---

?

---

Beweisen Sie diese Aussage. Man beachte, dass  $E_3$  nicht etwa  $(\mathbf{a}, R)$ , sondern  $(\mathbf{u}, R)$  als Elemente enthält.

Wir hatten früher gesehen, dass der Faktor  $E_3$  selbst ein semidirektes Produkt ist,  $E_3 = \mathbb{R}^3 \rtimes O(3)$ .

## 5.5 Poincaré Transformationen

Im Folgenden sei  $M$  die 4-dimensionale affine Minkowski-Raumzeit, deren Punkte  $\{P, Q, \dots\}$  *Ereignisse* beschreiben. Als Bezugssysteme wählen wir Inertialsysteme. Ein Ereignis  $P$  wird durch Zeit und kartesische Ortskoordinaten, also durch Angabe von 4-Standardkoordinaten

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

eindeutig charakterisiert. Oft schreiben wir auch  $x = (x^\mu)$  mit  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Alle Inertialsysteme seien mit Familien von identischen und synchronisierten Uhren ausgestattet und in allen

Inertialsystemen sollen gleiche Einheiten für Längen und Zeiten benutzt werden<sup>2</sup>.

Die Differenzen von Ereignissen definieren einen 4-dimensionalen Vektorraum  $V$ , den *Tangentia-  
lraum* zu  $M$ . In einem Koordinatensystem haben Elemente aus  $V$  die Form

$$\xi^T = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad \text{bzw.} \quad \xi = (\xi^\mu).$$

Auf dem Tangentialraum  $V$  führen wir eine Bilinearform ein,

$$(\xi, \eta) = \xi^0 \eta^0 - \xi^1 \eta^1 - \xi^2 \eta^2 - \xi^3 \eta^3, \quad (5.41)$$

die mithilfe des *metrischen Tensors*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g_{\mu\nu}) \quad \text{bzw.} \quad G^{-1} = (g^{\mu\nu})$$

folgendermaßen geschrieben werden kann

$$(\xi, \eta) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \xi^\mu \eta^\nu = \xi^T G \eta. \quad (5.42)$$

Dann ist der lorentzinvariante Abstand zweier Ereignisse mit Raumzeit-Koordinaten  $x$  und  $y$  gleich

$$d(x, y) = (\xi, \xi), \quad \text{wobei} \quad \xi = y - x \quad (5.43)$$

der Differenzvektor zwischen den Ereignissen ist. Indizes werden mit  $g_{\mu\nu}$  und  $g^{\mu\nu}$  hinunter- oder hinaufgezogen, zum Beispiel

$$\xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu \quad \text{bzw.} \quad \xi^\mu = g^{\mu\nu} \xi_\nu, \quad \text{so dass} \quad (\xi, \eta) = \xi^\mu \eta_\mu = \xi_\mu \eta^\mu.$$

Die Raumzeitpunkte  $x$ , an denen eine am Raumzeitpunkt  $y$  emittierte Kugelwelle aufleuchtet, erfüllen die Bedingung

$$|\boldsymbol{\eta}| = \pm \eta^0 \quad \text{oder} \quad (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \text{mit} \quad \eta = x - y. \quad (5.44)$$

Für eine feste Zeitdifferenz  $\eta^0$  beschreibt diese Gleichung eine Kugeloberfläche deren Radius  $\eta^0$  mit der Lichtgeschwindigkeit anwächst. In Raum und Zeit beschreiben diese Oberflächen eine Doppelkegel deren Spitzen bei  $y$  liegen. Abbildung (5.2) zeigt die Situation in einer Raumdimension. Hier sind die Lichtkegel die durchgezogenen Geraden mit Steigungen  $\pm 1$ .

Wir betrachten nun ein zweites Inertialsystem  $I'$ , welches relativ zum ursprünglichen Inertialsystem  $I$  in konstanter gleichförmiger Bewegung ist.

<sup>2</sup>Für eine Diskussion von Maßstäben und Uhren in einem Inertialsystem konsultiere man ein Lehrbuch über spezielle Relativitätstheorie [15, 16, 17, 18]. Der Begriff der Standardkoordinaten in einem Inertialsystem wird in [15] benutzt.

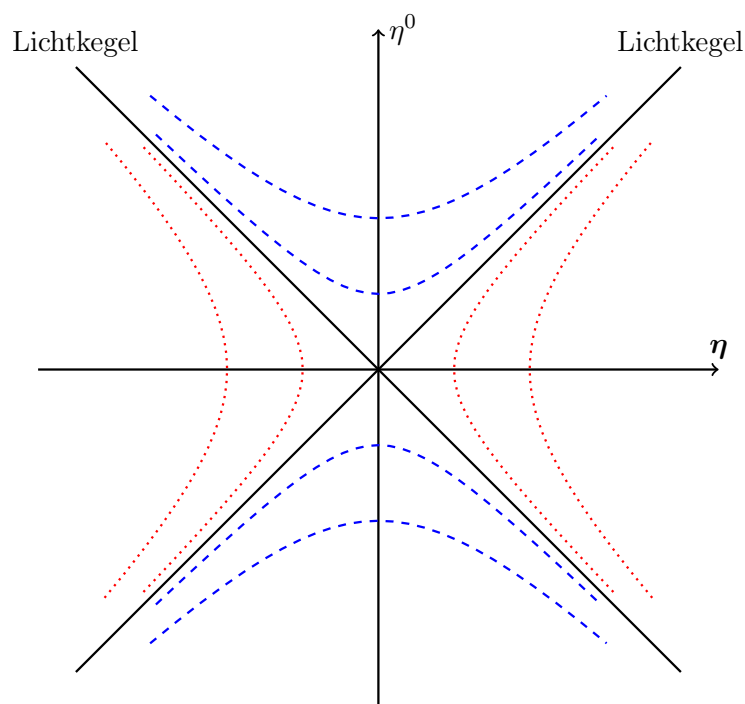


Abbildung 5.2: Kausale Struktur des Minkowski-Raums: die durchgezogenen Geraden sind die Bahnen von lichtartigen Vektoren und beschreiben die Lichtfortpflanzung; die gepunkteten roten Hyperboloide sind Bahnen von raumartigen Vektoren und die gestrichelten blauen Hyperboloide Bahnen von zeitartigen Vektoren.

### Äquivalenzprinzip

Die Naturgesetze sehen in allen Inertialsystemen gleich aus. Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich.

Aus diesem Prinzip lassen sich die Lorentztransformationen ableiten, wie dies in Einführungen in die spezielle Relativitätstheorie zu finden ist. Man argumentiert etwa wie folgt: Ein Punkt ereignis werde in den Inertialsystemen  $I$  und  $I'$  durch die Standardkoordinaten  $x$  und  $x'$  beschrieben. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten hat die Form

$$x' = a + f(x), \quad \text{mit } f(0) = 0 \quad \text{und } a \in \mathbb{R}^4 \text{ konstant.}$$

Wegen der Homogenität des Raumes sind  $x'' = x' - a$  ebenfalls Standardkoordinaten in einem dritten, verschobenen Inertialsystem  $I''$ . Es gilt dann  $x'' = f(x)$  mit  $f(0) = 0$ . Nun kann nun auf verschiedene Weisen zeigen, dass die vier Funktionen  $f^\mu$  linear sein müssen. Zum Beispiel wird in [15] diese Linearität mithilfe des ersten Newton'schen Gesetzes und der Homogenität von Raum und Zeit begründet. Dann gilt offensichtlich  $x'' = \Lambda x$  mit einer Matrix  $\Lambda$ , beziehungsweise

$$x' = \Lambda x + a \quad \text{mit } \Lambda \in \text{GL}(4, \mathbb{R}). \quad (5.45)$$

Seien nun  $x$  die Standardkoordinaten einer zur Zeit  $y^0$  am Orte  $\mathbf{y}$  ausgesandten Lichtwelle in  $I$ . Bezüglich  $I'$  wird dieselbe Lichtwelle zur Zeit  $y'^0$  am Orte  $\mathbf{y}'$  ausgesandt und hat die Koordinaten  $x'$ . In beiden Inertialsystemen ist die Lichtgeschwindigkeit gleich, so dass gilt

$$0 = (\xi, \xi) = (\xi', \xi'), \quad \xi = x - y, \quad \xi' = \Lambda \xi .$$

Eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür ist

$$\Lambda^T G \Lambda = \kappa(\Lambda) G \quad \text{mit} \quad \kappa(\mathbb{1}) = 1 \quad \text{und} \quad \kappa(\Lambda) \geq 0 .$$

Ist  $\kappa \neq 1$ , dann können wir durch eine Maßstabsänderung

$$x' \mapsto \sqrt{\kappa} x'$$

stets  $\kappa = 1$  erreichen. Wir brauchen deshalb nur Matrizen  $\Lambda$  betrachten, welche die Bedingung

$$\Lambda^T G \Lambda = G \iff \Lambda^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = g_{\mu\nu} \quad (5.46)$$

erfüllen. Für solche Transformationen ist das relativistische Abstandsquadrat zweier Ereignisse  $x, y$  im Minkowski-Raum unabhängig vom Inertialsystem,  $(\xi', \xi') = (\xi, \xi)$ . Wir fassen zusammen:

### Poincaré-Gruppe

Die Abbildungen (5.45) zwischen Inertialsystemen bilden die sogenannte Poincaré- oder inhomogene Lorentz-Gruppe wenn  $\Lambda$  die Bedingung (5.46) erfüllt. Diese wird mit  $iL$  oder  $iO(1, 3)$  bezeichnet,

$$iO(1, 3) = \{ (a, \Lambda) \mid a \in V, \Lambda \in \mathcal{L}(V), \Lambda^T G \Lambda = G \} , \quad (5.47)$$

Die Gruppenmultiplikation lautet

$$(a_2, \Lambda_2) (a_1, \Lambda_1) = (a_2 + \Lambda_2 a_1, \Lambda_2 \Lambda_1) , \quad (5.48)$$

und die inverse Transformation hat die Form

$$(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}) . \quad (5.49)$$

?

Überlegen Sie sich, dass eine Konjugation durch

$$(a_1, \Lambda_1) (a, \Lambda) (a_1, \Lambda_1)^{-1} = (a_1 + \Lambda_1 a - \Lambda' a_1, \Lambda') , \quad \Lambda' = \Lambda_1 \Lambda \Lambda_1^{-1} \quad (5.50)$$

gegeben ist und die Verschiebungen  $(a, \mathbb{1})$  einen Normalteiler definieren.

Die Poincaré-Gruppe ist das semidirekte Produkt der *invarianten Abelschen Untergruppe* der Translationen  $\mathbb{R}^4$  in Raum und Zeit,

$$x' = x + a, \quad a \in \mathbb{R}^4 \quad (5.51)$$

mit der *Untergruppe* der Lorentz-Transformationen, bestehend aus den räumlichen Drehungen und Lorentz-Boosts,

$$x' = \Lambda x, \quad \Lambda^T G \Lambda = G, \quad (5.52)$$

wobei eine Lorentztransformation in ihrer natürlichen Wirkung als Automorphismus auf  $\mathbb{R}^4$  wirkt.

### 5.5.1 Zusammenhangskomponenten der Lorentzgruppe

Der Differenzvektor  $\xi = y - x$  verbinde die Ereignisse  $P$  mit  $Q$ . Diese sind raumartig, zeitartig oder lichtartig getrennt wenn  $(\xi, \xi)$  negativ, positiv oder Null ist. Unter einer Lorentztransformation mit  $\Lambda$  geht  $\xi$  über in  $\eta = \Lambda \xi$ . Die Frage ist nun, was für ein geometrisches Gebilde ist die Bahn von  $\xi$  unter der Lorentzgruppe. Wegen

$$(\eta^0)^2 - \boldsymbol{\eta}^2 = (\xi^0)^2 - \boldsymbol{\xi}^2 = \text{const}$$

bildet die Bildmenge  $\{\eta^0, \boldsymbol{\eta}\}$  ein Hyperboloid. Für eine positive Konstante eine zweischaliges Hyperboloid und für eine negative Konstante ein einschaliges Hyperboloid. Für sehr große  $|\eta^0|$  oder  $|\boldsymbol{\eta}|$  können wir die Konstante in der quadratischen Gleichung für das Hyperboloid vernachlässigen, so dass sich das Hyperboloid asymptotisch einem Lichtkegel anschmiegt.

#### Kausalstruktur

1. Für raumartige  $\xi$  ist  $(\xi, \xi) = (\eta, \eta) < 0$  und die Menge  $\{\eta\}$  beschreibt einen einschaliges Hyperboloid. Auf jedem dieser (gepunkteten) Hyperboloide gibt es einen Punkt mit  $\eta^0 = 0$ . In anderen Worten, es existiert immer ein Inertialsystem für das  $(\Lambda \xi)^0$  verschwindet, oder in dem  $P$  und  $Q$  gleichzeitig sind. Auch wechselt das Vorzeichen von  $\eta^0$  auf jedem Hyperboloiden und deshalb kann die Zeitreihenfolge vertauscht werden.
2. Für zeitartige  $\xi$  ist  $(\xi, \xi) = (\eta, \eta) > 0$ , und die Menge  $\{\eta\}$  beschreibt ein zweischaliges Hyperboloid. Eine Schale liegt im Vorwärtslichtkegel mit positiven  $\eta^0$  und eine im Rückwärtslichtkegel mit negativen  $\eta^0$ . Die beiden Schalen bilden zwei disjunkte unzusammenhängende Teilmengen. Jede Schale schneidet die  $\eta^0$ -Achse, auf der  $\boldsymbol{\eta}$  verschwindet. Im entsprechenden Inertialsystem sind  $P$  und  $Q$  am selben Punkte.
3. Für lichtartig getrennte Ereignisse liegt der Differenzvektor  $\eta$  auf dem Vorwärts- oder Rückwärtslichtkegel. Wählen wir Koordinaten für die  $x$  im Ursprung liegt, dann beschreiben die



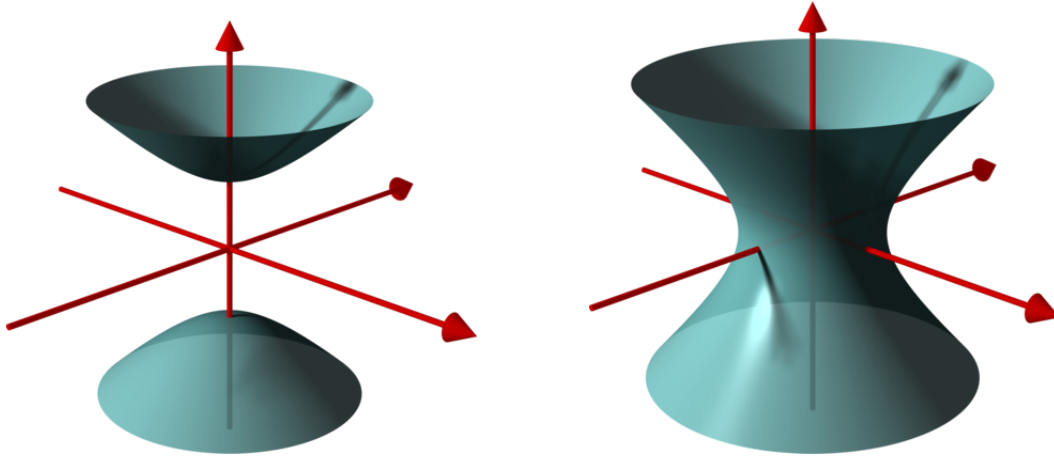


Abbildung 5.3: Zweischaliges Hyperboloid der zeitartigen  $\xi$  (linke Figur) und einschaliges Hyperboloid der raumartigen  $\xi$  (rechte Figur).

Punkte  $\eta = \Lambda y$  einen in die Zukunft oder in die Vergangenheit gerichteten Kegel mit Öffnungswinkel von 45 Grad und Kegelspitze bei  $x$ .

### Globale Struktur der Lorentzgruppe

Die 00-Komponente der Matrixgleichung (5.46) impliziert  $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$ . Für  $\Lambda_0^0 \geq 1$  wird der Vorwärtslichtkegel in sich abgebildet und die Zeitrichtung bleibt erhalten. Für  $\Lambda_0^0 \leq -1$  wird der Vorwärtslichtkegel mit einer Zeitumkehr in den Rückwärtslichtkegel abgebildet. Wegen (5.46) gilt auch  $\det \Lambda = \pm 1$ . Die Vorzeichen von  $\det(\Lambda)$  und  $\Lambda_0^0$  bestimmen die *Zusammenhangskomponenten* der Lorentzgruppe,

$$O(1, 3) = O_+^\uparrow(1, 3) \cup O_-^\uparrow(1, 3) \cup O_+^\downarrow(1, 3) \cup O_-^\downarrow(1, 3), \quad (5.53)$$

mit folgender Bedeutung der Indizes:

$$\pm : \det \Lambda = \pm 1, \quad \uparrow : \text{keine Zeitumkehr } (\Lambda_0^0 \geq 1), \quad \downarrow : \text{Zeitumkehr } (\Lambda_0^0 \leq -1).$$

Mit Einführung von Raumspiegelung  $P$ , Zeitumkehr  $T$  und Raumzeit-Spiegelung  $PT$  (gegeben durch  $P = -T = G$  und  $PT = -\mathbb{1}_4$ ) ist jede Lorentz-Transformation dann aus

$$O(1, 3)_+^\uparrow \cup P O_+^\uparrow(1, 3) \cup PT O_+^\uparrow(1, 3) \cup T O_+^\uparrow(1, 3). \quad (5.54)$$

Die Klasse der eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen enthält weder Zeitumkehr noch Spiegelungen und bildet einen *Normalteiler*. Die Elemente der zweiten Restklasse heißen uneigentlich orthochron, diejenigen der dritten Restklasse zeitspiegelungsartig und diejenigen der letzten Restklasse raumzeitspiegelungsartig.

Der Normalteiler der eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen bezeichnet man mit

$$\mathrm{SO}^\uparrow(1, 3) \equiv \mathrm{O}(1, 3)_+^\uparrow = \{ \Lambda \in \mathrm{O}(1, 3) \mid \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 \geq 1 \}. \quad (5.55)$$

Das S in SO zeigt an, dass die Transformationen eigentlich sind,  $\det(\Lambda) = 1$ .

Die Faktorgruppe der Lorentzgruppe nach der Gruppe der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe ist

$$\mathrm{O}(1,3)/\mathrm{SO}^\uparrow(1,3) = \{ \mathbb{1}, P, T, PT \} \cong \text{Kleinsche Vierergruppe } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \quad (5.56)$$

Ohne Beweis notieren wir noch die vier verschiedenen Arten von Konjugationsklassen in  $\mathrm{SO}^\uparrow(1, 3)$ :

#### Konjugationsklassen der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe

- *Elliptische Transformationen* sind konjugiert zu einer räumlichen Drehung mit Winkel  $\varphi$  um die dritte Achse,

$$\Lambda_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & R(\mathbf{e}_3, \varphi) & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (5.57)$$

- *Hyperbolische Transformationen* sind konjugiert zu einem Lorentz-Boost mit Rapidität  $\beta$  in Richtung der dritten Achse,

$$\Lambda_h = \begin{pmatrix} \cosh \beta & 0 & 0 & \sinh \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \beta & 0 & 0 & \cosh \beta \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

- *Loxodrome Transformationen* sind konjugiert zur Zusammensetzung der obigen zwei Transformationen,

$$\Lambda_l = \Lambda_e \Lambda_h. \quad (5.59)$$

- *Parabolische Transformationen* sind konjugiert zu

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^2/2 & \alpha & 0 & -\alpha^2/2 \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ c\alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^2/2 & \alpha & 0 & 1 - \alpha^2/2 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Mit der Lorentzgruppe zerfällt auch die Poincaré-Gruppe in vier Zusammenhangskomponenten,

$$i\mathrm{O}(1, 3) = i\mathrm{O}_+^\uparrow(1, 3) \cup i\mathrm{O}_-^\uparrow(1, 3) \cup i\mathrm{O}_+^\downarrow(1, 3) \cup i\mathrm{O}_-^\downarrow(1, 3). \quad (5.61)$$

## 5.6 Anhang A: Normalform der Drehungen und Bewegungen

Die Konjugationsklassen der Drehungen und Bewegungen im  $\mathbb{R}^n$  haben einfache Repräsentanten. Diese werden oft mit „Normalform“ bezeichnet.

### 5.6.1 Normalformen für Drehungen im $\mathbb{R}^n$

Indem man die Drehmatrizen im Komplexen zuerst diagonalisiert und danach wieder zu einer reellen Basis zurückkehrt beweist man:

- In geraden Dimensionen  $n$  ist jede *eigentliche Drehung* konjugiert zur Normalform

$$N_n(\varphi) \equiv D_n(\varphi) = \begin{pmatrix} R_2(\varphi_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2(\varphi_2) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_2(\varphi_{n/2}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

und jede *uneigentliche Drehung* zur Normalform

$$N_n(\varphi) = \begin{pmatrix} D_{n-2}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Dabei bezeichnet  $R_2(\varphi)$  die Drehmatrix in (5.16) und  $D_{n-2}$  die eigentliche Drehung (A.1) in  $n - 2$  Dimensionen.

- In ungeraden Dimensionen  $n$  ist jede *eigentliche Drehung* konjugiert zu

$$N_n(\varphi) = \begin{pmatrix} D_{n-1}(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

und jede *uneigentliche Drehung* zu

$$N_n(\varphi) = \begin{pmatrix} D_{n-1}(\varphi) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Diese Normalformen der eigentlichen und uneigentlichen Drehungen sind in Einklang mit dem Euler'schen Theorem auf Seite 58.

### 5.6.2 Normalformen für Bewegungen im $\mathbb{R}^n$

Wir können nun die gewonnenen Resultate auf die Bewegungen im Raum, bestehend aus Drehungen und Translationen, anwenden.

**Satz 24 (Normalform von Bewegungen)** Für jede Bewegung  $(\mathbf{a}, R)$  im  $\mathbb{R}^n$  gibt es eine kartesische Basis  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  und einen Ursprung  $\mathcal{O}$ , bezüglich der sie eine der folgenden Normalformen annimmt:

1. Ist 1 Eigenwert von  $R$ , dann ist die Normalform  $\mathbf{x}' = N_n(\varphi)\mathbf{x} + a\mathbf{e}_n$ .
2. Ist 1 nicht Eigenwert von  $R$ , dann ist die Normalform  $\mathbf{x}' = N_n(\varphi)\mathbf{x}$ .

Beweis: Es sei  $R_1$  eine Drehung, die  $R$  auf seine Normalform  $N_n$  transformiert,

$$R_1 R R_1^{-1} = N_n. \quad (\text{A.5})$$

Verschieben wir noch den Ursprung um  $\mathbf{a}_1$ , dann hat nach (5.24) das transformierte  $\mathbf{a}$  die Form

$$\mathbf{a}' = R_1 \mathbf{a} + (\mathbb{1} - N_n) \mathbf{a}_1. \quad (\text{A.6})$$

Nun zerlegen wir  $\mathbb{R}^n$  in zwei orthogonale Unterräume,

$$\mathbb{R}^n = K \oplus K^\perp \quad \text{mit} \quad K \equiv \text{Kern}(\mathbb{1} - N_n). \quad (\text{A.7})$$

Ist 1 nicht Eigenwert von  $R$  (und damit nicht Eigenwert von  $N_n$ ) dann ist  $K = \emptyset$ .

Die Zerlegung (A.7) ist invariant unter der Wirkung von  $N_n$ : Der Kern  $K$  ist offensichtlich invariant und sein orthogonales Komplement ist es ebenfalls, da für ein beliebiges  $\mathbf{b} \in K^\perp$  gilt

$$0 = (K, \mathbf{b}) = (N_n K, N_n \mathbf{b}) = (K, N_n \mathbf{b}).$$

Wir zerlegen beide Seiten der Beziehung (A.6) in ihren  $K$ -Anteil, bezeichnet mit  $\parallel$ , und ihren  $K^\perp$ -Anteil, bezeichnet mit  $\perp$ ,

$$\mathbf{a}'_{\parallel} = (R_1 \mathbf{a})_{\parallel} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}'_{\perp} = (R_1 \mathbf{a})_{\perp} + (\mathbb{1} - N_n) \mathbf{a}_{1\perp}. \quad (\text{A.8})$$

Auf  $K^\perp$  ist  $\mathbb{1} - N_n$  invertierbar und deshalb existiert ein  $\mathbf{a}_1$ , für das  $\mathbf{a}'_{\perp}$  verschwindet. Nach Wahl eines derartigen  $\mathbf{a}_1$  ist  $\mathbf{a}' = \mathbf{a}'_{\parallel}$ . Für das weitere Vorgehen notieren wir, dass  $R_1$  in (A.5) nicht eindeutig bestimmt ist. Anstelle von  $R_1$  können wir auch  $S R_1$  wählen für ein  $S$  im Stabilisator von  $R_1$ ,

$$S N_n S^{-1} = N_n. \quad (\text{A.9})$$

Da die Drehung  $S$  mit  $N_n$  vertauscht respektiert sie ebenfalls die Zerlegung (A.7):

$$S : K \mapsto K \quad \text{und} \quad S : K^\perp \mapsto K^\perp.$$

Daher wirkt sich eine Ersetzung von  $R_1$  in der ersten Gleichung in (A.8) durch  $S R_1$  wie folgt aus,

$$\mathbf{a}'_{\parallel} = S(R_1 \mathbf{a})_{\parallel}. \quad (\text{A.10})$$

Nun kann  $S$  so gewählt werden, dass  $\mathbf{a}'_{\parallel}$  in eine beliebige Richtung in  $K$  zeigt. Da  $\mathbf{a}'_{\perp} = 0$  gewählt wurde, beweist dies den Satz. Ist insbesondere 1 nicht Eigenwert von  $R$ , dann ist  $K = \emptyset$  und damit  $\mathbf{a}' = 0$ .

### Typen von Bewegungen

- Eine *eigentliche Bewegung* in ungeraden Dimensionen ist eine Schraubung um die  $e_n$ -Achse.
- Eine *uneigentliche Bewegung* in geraden Dimensionen ist eine Gleitspiegelung an der Hyperebene senkrecht zu  $e_n$ .
- Für eigentliche Bewegungen in geraden oder uneigentlichen Bewegungen in ungeraden Dimensionen ist generisch 1 nicht Eigenwert von  $R$ . Dann handelt es sich um eine Drehung im ersten Fall und eine Drehspiegelung im zweiten Fall. Ist aber mindestens einer der Winkel  $\varphi_i$  in (A.1) ein Vielfaches von  $2\pi$ , dann wird auch in geraden Dimensionen eine eigentliche Bewegung zur Schraubung oder uneigentliche Bewegung in ungeraden Dimensionen zur Gleitspiegelung.

In drei Dimensionen hat jede eigentliche Drehung den Eigenwert 1 und eine uneigentlichen Drehung genau dann, wenn  $\text{Sp}R = 1$  ist. Also gilt das

**Lemma 6 (Normalformen von Bewegungen im  $\mathbb{R}^3$ )** Für jede Bewegung im  $\mathbb{R}^3$  gibt es eine kartesische Basis und einen Ursprung, bezüglich der sie eine der folgenden Normalformen annimmt:

- Für  $\det(R) = 1$  eine Schraubung um die dritte Achse

$$\mathbf{x}' = R(e_3, \varphi) \mathbf{x} + a e_3. \quad (\text{A.11})$$

- Für  $\det(R) = -1$  und  $\text{Sp}R < 1$  eine Drehspiegelung

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} R_2(\varphi) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (\text{A.12})$$

- Für  $\det(R) = -1$  und  $\text{Sp}(R) = 1$  eine Gleitspiegelung an der  $xy$ -Ebene

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + a e_2 \quad (\text{A.13})$$

## 5.7 Aufgaben zu Kapitel 5

### Aufgabe 5.1: Gruppenwirkungen von rechts

Ähnlich der Links-Gruppenwirkung definiert man eine Recht-Gruppenwirkung:

**Definition 23** Eine Recht-Gruppenwirkung ist eine Funktion  $\Phi_r : G \times M \mapsto M$  so dass:

- $\Phi_r(e, p) = p$  für alle  $p \in M$
- $\Phi_r(g_1, \Phi_r(g_2, p)) = \Phi_r(g_2 g_1, p)$  für alle  $g_1, g_2 \in G$  und  $p \in M$ .

Zeigen Sie folgenden Zusammenhang zwischen Links- und Rechtswirkungen: Ist  $(g, p) \rightarrow \Phi(g, p)$  eine Linkswirkung, dann ist  $(g, p) \rightarrow \Phi_r(g, p) = \Phi(g^{-1}, p)$  eine Rechtswirkung.

Es kann nützlich sein, eine Rechtswirkung mit der zugehörigen Linkswirkung zu identifizieren.

### Aufgabe 5.2: Drehungen

Wir betrachten die Gruppe  $SO(3)$  der eigentlichen Drehungen im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  und die Menge  $SO(\mathbf{e}, 2)$  der Drehungen um die feste Achse definiert durch den Einheitsvektor  $\mathbf{e}$ . Zeigen Sie, dass die Menge  $SO(\mathbf{e}, 2)$  eine Untergruppe von  $SO(3)$  ist. Zeigen Sie zudem, dass für jedes Paar  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{e}'$  von Einheitsvektoren die Untergruppen  $SO(\mathbf{e}, 2)$  und  $SO(\mathbf{e}', 2)$  zueinander konjugiert sind.

### Aufgabe 5.3: Galilei-Gruppe

Eine Galilei-Transformation

$$t' = t + \tau, \quad \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{u}t + \mathbf{a}, \quad \text{mit } \mathbf{u}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \quad R^\top R = \mathbb{1},$$

ist durch die 10 Parameter  $(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R)$  bestimmt. Führe nun eine zweite Galilei-Transformation mit Parameter  $(\tau', \mathbf{a}', \mathbf{u}', R')$  durch.

- Zeigen Sie, dass die zusammengesetzte Transformation wieder eine Galilei-Transformation ist.
- Was ist die zu  $(\tau, \mathbf{a}, \mathbf{u}, R)$  inverse Galilei-Transformation?
- Ihre Rechnung sollte zeigen, dass die Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden – es ist die Galilei-Gruppe. Finden Sie die invarianten Untergruppen der Galilei-Gruppe.
- Können Sie diese Gruppe als semi-direktes Produkt einer Gruppe und eines Normalteilers schreiben?

### Aufgabe 5.4: Lorentz-Gruppe

Eine 4-dimensionale Matrix  $\Lambda$  heißt Lorentz-Matrix, wenn gilt

$$\Lambda^\top G \Lambda = G, \quad \text{worin } G = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

der metrische Tensor ist. Wir bezeichnen die Menge dieser Matrizen mit  $\mathcal{L}$ .

- zeigen Sie, dass  $\mathcal{L}$  eine Untergruppe von  $GL(4, \mathbb{R})$  ist,
- zeigen Sie, dass für  $\Lambda \in \mathcal{L}$  die Determinante gleich  $\det \Lambda = \pm 1$  ist,

- beweisen Sie, dass die Menge  $\mathcal{L}^+ = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \det \Lambda = 1\}$  ein Normalteiler in  $\mathcal{L}$  ist. Es sind die eigentlichen Lorentz-Transformationen.

**Aufgabe 5.5: Intervalle im Minkowski-Raum**

Zwei Ereignisse  $P_1$  und  $P_2$  seien durch ein 1) raumartiges, 2) zeitartiges und 3) lichtartiges Intervall getrennt. Zeigen Sie, dass

1. ein Inertialsystem existiert, in dem die  $P_i$  gleichzeitig sind und das ihre Zeitreihenfolge durch eine geeignete Wahl des Systems vertauscht werden kann,
2. ein Inertialsystem existiert, in dem die  $P_i$  am selben Raumpunkt sind.
3. Bestimmen Sie die Hyperfläche in der Raumzeit, auf der  $P_2$  bezüglich  $P_1$  liegen kann.

Hinweis: Wählen Sie  $P_1$  als Koordinatenursprung.

**Aufgabe 5.6: Zeitdilatation**

Leiten Sie mit den Lorentz-Transformationsgleichungen die Formel für die Zeitdilatation her. Legen Sie zunächst zwei Ereignisse für die Ablesung einer im Inertialsystem  $I$  bewegten und im Inertialsystem  $I'$  ruhenden Uhr fest. Beachten Sie, dass die Ablesung in  $I'$  am gleichen Ort und diejenige in  $I$  an verschiedenen Orten erfolgt.

## 6 Punktgruppen

*My work always tried to unite the true with the beautiful, but when I had to choose one over the other, I usually chose the beautiful.*

HERMANN WEYL

Endliche Untergruppen der Drehgruppe  $O(3)$  treten als Symmetriegruppen in Molekül- und Atomphysik auf. Man nennt sie *Punktgruppen*, weil wenigstens ein Punkt Fixpunkt unter der Gruppenwirkung ist. Mit Punktgruppen kann man Symmetrien von Atomen, Molekülen und starren Körpern erfassen. Beispiele von Punktgruppen bilden die Decktransformationen der Platon'schen Körper. Die Decktransformationen eines Molekül nennt man Punktgruppe des Moleküls oder kurz *Molekülsymmetrie*. Auch die Decktransformationen eines idealen Kristalls, welche einen Punkt fest lassen, bilden eine Punktgruppe. Man definiert:

**Definition 24** *Eine endliche Untergruppe der Drehgruppe  $O(3)$  heißt Punktgruppe. Sie heißt eigentlich oder von erster Art, wenn sie keine Spiegelungen enthält, sonst uneigentlich oder von zweiter Art.*

Da es viele Anwendungen der Punktgruppen gibt, wollen wir uns diese im vorliegenden Kapitel etwas genauer ansehen. Unsere Untersuchungen werden zeigen, dass es nur fünf Typen von eigentlichen und neun Typen von uneigentlichen Punktgruppen gibt.

### 6.1 Symmetrieelemente

Punktgruppen endlicher Ordnung können Drehungen um endliche Winkel, Spiegelungen an Ebenen oder die Punktspiegelung am Ursprung enthalten. Wir beginnen mit den Drehungen und machen dabei von den Ergebnissen in Abschnitt 5.2 Gebrauch.

Man bezeichnet Drehungen um eine  $n$ -zählige Achse, charakterisiert durch einen Einheitsvektor  $\mathbf{e}$ , mit

$$c_n(\mathbf{e}) = R(\mathbf{e}, \varphi_n) \quad \text{mit} \quad \varphi_n = \frac{2\pi}{n}. \quad (6.1)$$

Führen wir diese Drehung  $n$  mal hintereinander aus, dann erhalten wir das Einselement, d.h. die Drehung  $c_n(\mathbf{e})$  hat die Ordnung  $n$ ,  $c_n^n(\mathbf{e}) = e$ .



Die Transformationsmatrix hat im speziellen Fall einer Drehung um die  $z$ -Achse die Form

$$c_n(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n & 0 \\ \sin \varphi_n & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

### Drehungen und Referenzachse

Zeigt  $\mathbf{e}$  in Richtung der *Referenzachse* – dies ist die Drehachse mit maximaler Zähligkeit – so schreibt man anstelle von  $c_n(\mathbf{e})$  nur  $c_n$ . Eine  $m$ -zählige Drehung um eine Achse senkrecht zu  $\mathbf{e}$  bezeichnet man dann mit  $c_{h,m}$ .

Eine Spiegelung  $\sigma$  an einer Ebene hat die Ordnung 2. Elementar sind die Spiegelungen an den Ebenen durch den Ursprung und senkrecht zu den Basisvektoren,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Die Lage der Spiegelebene relativ zur Referenzachse  $\mathbf{e}$  wird in der Bezeichnung zum Ausdruck gebracht:

### Spiegelungen

1. Eine Spiegelung an der zu  $\mathbf{e}$  senkrechten Ebene wird mit  $\sigma_h$  (horizontal) bezeichnet.
2. Eine Spiegelung an einer Ebene, welche  $\mathbf{e}$  enthält wird mit  $\sigma_v$  (vertikal) bezeichnet.
3. Eine Spiegelung an einer dihedralen Ebene, welche  $\mathbf{e}$  enthält und den Winkel zwischen zwei benachbarten und zu  $\mathbf{e}$  orthogonalen, zweizähligen Drehachsen halbiert, wird mit  $\sigma_d$  bezeichnet.

Ist die  $z$ -Achse Referenzachse, dann ist  $\sigma_h$  die Spiegelung an der  $(x, y)$ -Ebene,

$$\sigma_h = \sigma_z \quad \text{mit} \quad \sigma_h c_n = c_n \sigma_h \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

Die Spiegelung an der die Referenzachse enthaltende  $(y, z)$ -Ebene hat die die Form

$$\sigma_v = \sigma_x \quad \text{mit} \quad \sigma_v c_n \neq c_n \sigma_v \quad \text{für} \quad n = 3, 4, \dots \quad (6.5)$$

Das Produkt zweier Spiegelungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ist eine Drehung  $c$ , deren Drehachse mit der Schnittgeraden der beiden Spiegelebenen zusammenfällt,

$$\sigma_1 \sigma_2 = c(\varphi) \implies \sigma_2 \sigma_1 = c^{-1}(\varphi) = c(-\varphi). \quad (6.6)$$

Der Drehwinkel  $\varphi$  ist der doppelte Winkel, der durch die beiden Spiegelebenen eingeschlossen wird. Durch Links-Multiplikation der ersten Beziehung mit  $\sigma_1$  ergibt sich

$$\sigma_2 = \sigma_1 c(\varphi). \quad (6.7)$$

Danach kann das Produkt aus einer Drehung mit einer Spiegelung, deren Ebene die Drehachse enthält, durch eine Spiegelung ersetzt werden, die wiederum die Drehachse enthält. Wegen (6.6) vertauschen zwei Spiegelungen genau dann, wenn  $c(\varphi) = c(-\varphi)$  gilt, oder wenn der Drehwinkel die Werte 0 oder  $\pi$  annimmt. Im ersten Fall ist  $c = e$  und die Spiegelungen sind identisch im zweiten Fall ist  $c = c_2$  und es handelt sich um Spiegelungen an aufeinander senkrechten Spiegelebenen.

Neben den Spiegelungen an Ebenen gibt es die Spiegelung  $i$  an einem festen Punkt, dem Inversionszentrum. Die *Inversion*  $i$  hat die Ordnung 2. Fällt das Inversionszentrum mit dem Ursprung zusammen, dann ist  $i = \sigma_x \sigma_y \sigma_z$ . Eine andere Zerlegung der Inversion enthält eine zweizählige Drehung und eine Spiegelung an der Ebene senkrecht zur Drehachse,

$$i = c_2 \sigma_h = \sigma_h c_2. \quad (6.8)$$

Daraus folgt  $\sigma_h = i c_2$ , was bedeutet, dass eine Spiegelung durch eine zweizählige Drehung um eine Achse senkrecht zur Spiegelebene und eine nachfolgende Inversion zu ersetzen ist.

### Drehspiegelungen

Das Produkt einer  $n$ -zähligen Drehung  $c_n$  mit einer Spiegelung  $\sigma_h$  an einer Ebene senkrecht zur Drehachse führt auf eine  $n$ -zählige Drehspiegelung  $s_n = c_n \sigma_h$ .

Die Drehspiegelung  $s_2$  ist die Inversion und deshalb folgt  $c_2 \sigma_h = i$ . Für den speziellen Fall einer Drehung um die  $z$ -Achse erhält man die Transformationmatrix

$$s_n = \begin{pmatrix} \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n & 0 \\ \sin \varphi_n & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Die  $n$ -fache Anwendung einer  $n$ -zähligen Drehspiegelung liefert

$$s_n^n = c_n^n \sigma_h^n = \sigma_h^n = \begin{cases} e & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sigma_h & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (6.10)$$

Entsprechend ist die Drehspiegelung  $s_n$  von der Ordnung  $n$  für gerades  $n$  und von der Ordnung  $2n$  für ungerades  $n$ .

### Diedergruppen

Die eigentlichen Decktransformationen eines senkrechten Prismas über dem regelmäßigen  $n$ -Eck bilden die Diedergruppe  $\mathcal{D}_n$ , vgl. Abbildung 6.1. Diese enthält eine  $n$ -zählige Drehung  $c_n$  um die Symmetrieachse – dies ist die Referenzachse – und  $n$  zweizählige Drehungen  $c_{h,2}$  um Achsen senkrecht zur Referenzachse. Lassen wir auch uneigentliche Transformationen zu, dann kommt  $\sigma_h$  als Decktransformation dazu. Wegen  $s_n = c_n\sigma_h$  treten noch die Drehspiegelungen  $s_n$  und die  $n$  Spiegelungen  $\sigma_v = c_{2,h}\sigma_h$  an Ebenen, welche die Referenzachse enthalten.

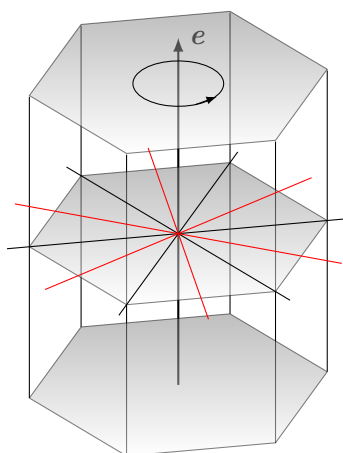


Abbildung 6.1: Die Decktransformationen eines Prismas über einem gleichseitigen  $n$ -Eck bilden die Diedergruppe  $\mathcal{D}_n$ .

## 6.2 Platonische Gruppen

Die eigentlichen Decktransformationen der fünf platonischen Körper *Tetraeder*, *Oktaeder*, *Würfel*, *Dodekaeder* und *Ikosaeder* bilden die Platonischen Gruppen<sup>1</sup>. Um diese Transformationen zu studieren zählen wir zuerst die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen dieser Körper:

	E = Ecken	K = Kanten	F = Flächen
Tetraeder	4	6	4
Würfel	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Ikosaeder	12	30	20
Dodekaeder	20	30	12

<sup>1</sup>Ein Besuch der Wikipedia-Seite über die Platon'schen Körper lohnt sich.

Wir werden nun die 12 Elemente der Tetraedergruppe  $\mathcal{T}$ , die 24 Elemente der Würfelgruppe  $\mathcal{O}$  und die 60 Elemente der Dodekaedergruppe bestimmen.

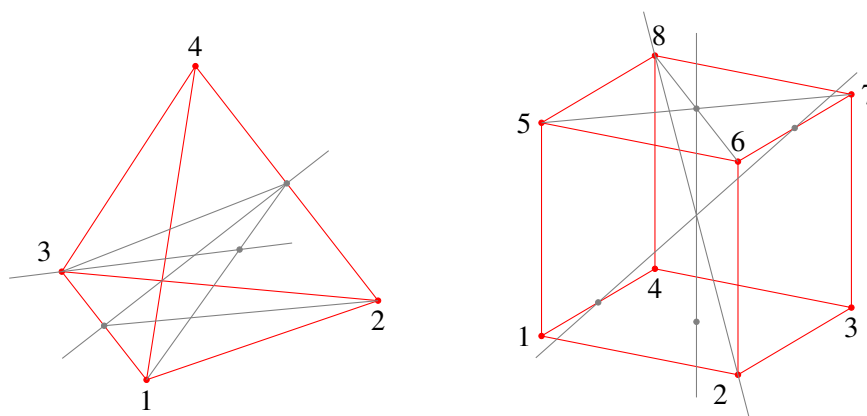


Abbildung 6.2: Die Decktransformationen von Tetraeder und Würfel definieren die Tetraedergruppe  $\mathcal{T}$  und Würfelgruppe  $\mathcal{O}$ .

### Tetraedergruppe

Die Decktransformationen eines *Tetraeders* sind in Abbildung 6.2 gezeigt. Dieser Körper hat vier dreizählige und drei zweizählige Drehachsen. Jede dreizählige Achse verbindet eine Ecke mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Fläche. Jede zweizählige Achse verläuft durch die Mitten von gegenüberliegenden Kanten. Die Tetraedergruppe  $\mathcal{T}$  hat die Ordnung

$$|\mathcal{T}| = 1 + E \times 2 + \frac{K}{2} \times 1 = 12. \quad (6.11)$$

Sie besitzt die zyklischen Untergruppen  $\mathcal{C}_3$  und  $\mathcal{C}_2$ .

### Würfelgruppe

Die Symmetrien eines *Würfels* sind aus Abbildung (6.2) ablesbar. Der Würfel hat drei Drehachsen vierter Ordnung durch die Mittelpunkte von gegenüberliegenden Flächen, sechs zweizählige Drehachsen durch die Mittelpunkte von gegenüberliegenden Kanten sowie vier Raumdiagonalen als Drehachsen dritter Ordnung. Die Ordnung der *Würfelgruppe* ist

$$|\mathcal{O}| = 1 + \frac{F}{2} \times 3 + \frac{K}{2} \times 1 + \frac{E}{2} \times 2 = 24. \quad (6.12)$$

Die Würfelgruppe ist isomorph zur *Oktaedergruppe* und beide sind isomorph zur  $\mathcal{S}_4$ .

Dies ist kein Zufall, da Oktaeder und Würfel dual zueinander sind: Man kann einen Oktaeder derart in einen Würfel legen, dass die Eckpunkte des Oktaeders gleich den Zentren der Würfelflächen sind.

### Dodekaedergruppe

Der *Dodekaeder* hat sechs fünfzählige Drehachsen durch die Zentren gegenüberliegender Flächen, zehn dreizählige Achsen durch zwei gegenüberliegende Ecken und fünfzehn zweizählige Drehachsen durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender, zueinander paralleler Kanten. Damit ist die Ordnung der Dodekaedergruppe  $\mathcal{Y}$  gleich

$$|\mathcal{Y}| = 1 + \frac{F}{2} \times 4 + \frac{E}{2} \times 2 + \frac{K}{2} \times 1 = 60. \quad (6.13)$$

Die *Ikosaedergruppe* ist isomorph zur Dodekaedergruppe, da die beiden Körper dual zueinander sind.

Die Dodekaedergruppe ist isomorph zur Ikosaedergruppe und beide sind isomorph zur  $\mathcal{A}_5$ .

Wir wollen die Würfelgruppe noch etwas genauer analysieren. Als erzeugende Elemente wählen wir die Vierteldrehung um die  $z$ -Achse und die Vierteldrehung um die  $x$ -Achse:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zuerst definieren wir die Gruppe über ihre Erzeugenden,

#### GAP

```
a := [[0, -1, 0], [1, 0, 0], [0, 0, 1]]; b := [[1, 0, 0], [0, 0, -1], [0, 1, 0]];
g := Group(a, b);
```

und analysieren sie. Die Ordnung ist `Order(g)=24`. Wir definieren weiter die Kommutator-Untergruppe und Faktorgruppe  $G/[G, G]$ :

```
gk := CommutatorSubgroup(g, g);
gf := FactorGroup(g, gk); Order(gf);
```

Die Ordnung von `gk` ist 12 und diejenige von `gf` ist 2. Wir können auch noch die Ordnung der Stabilisatoren der Elemente in  $g$  erfragen:

```
Order(Stabilizer(g, a)); Order(Stabilizer(g, a*b));
```

und erhalten die Antworten 4 und 3. Die Anzahl Konjugationsklassen von  $g$  ist 5,

```
NrConjugacyClasses(g);
```

Die Repräsentanten der Konjugationsklassen erfragt man mit

```
ConjugacyClasses(g);
```

mit dem Resultat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl Elemente in den entsprechenden Orbits sind 1, 3, 6, 8 und 6. Die Würfelgruppe hat 8 maximale Untergruppen, die alle nicht-Abelsch sind:

```
msg:=MaximalSubgroups(g);
```

Deren Ordnungen erhält man mit

```
Order(msg[1]); Order(msg[2]); Order(msg[3]); Order(msg[4]);
Order(msg[5]); Order(msg[6]); Order(msg[7]); Order(msg[8]);
```

Sie sind 12, 8, 8, 8, 6, 6, 6, 6. Wir können diese Untergruppen noch genauer analysieren. Insbesondere interessieren uns die Erzeugenden der Untergruppen:

```
GeneratorsOfGroup(msg[1]); GeneratorsOfGroup(msg[2]);
GeneratorsOfGroup(msg[5]);
```

Die Untergruppe der Ordnung 12 wird von den 3 Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_3, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_2$$

erzeugt. Die Indizes deuten die Ordnung dieser Elemente an und können mit

```
Order([[0, -1, 0], [0, 0, -1], [1, 0, 0]]);
```

abgefragt werden. Die Matrizen gehören zu einer Drehung mit  $2\pi/3$  um die Achse von der Ecke  $(1, -1, 1)$  zur gegenüberliegenden Ecke und je eine Drehung mit  $\pi$  um die  $x$  und  $y$ -Achse. Alle Elemente dieser Untergruppe werden generiert durch

```
Orbits(g, msg[1]);
```

Eine Untergruppe der Ordnung 8 wird von den 3 Matrizen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_2,$$

und eine Untergruppe der Ordnung 6 von den 2 Matrizen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_2, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_3.$$

erzeugt. Die letzten beiden Matrizen gehören zu einer Drehung mit  $\pi$  um die Achse durch den Kantenmittelpunkt bei  $(0, 1, 1)$  zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante und eine Drehung mit  $2\pi/3$  um die durch die Ecke bei  $(1, -1, 1)$  laufende Drehachse.

### 6.3 Eigentliche Punktgruppen

Die Elemente einer eigentlichen Punktgruppe sind orientierungserhaltend. Neben den soeben eingeführten Platon'schen Gruppen gibt es nur wenige davon und diese sind uns alle schon begegnet.

**Satz 25** *Es gibt nur 5 Klassen von eigentlichen Punktgruppen: die zwei unendliche Serien  $\mathcal{C}_n$  und  $\mathcal{D}_n$  und die drei besonderen Punktgruppen  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{Y}$ .*

**Darstellung der zyklischen Gruppen im  $\mathbb{R}^3$ :** Die Abelsche Gruppe  $\mathcal{C}_n$  enthält die Decktransformationen einer Pyramide über dem regelmäßigen  $n$ -Eck und hat eine  $n$ -zählige Drehachse. Die  $n$ -zählige Drehung  $c_n$  erzeugt die Gruppe.

**Darstellung der Diedergruppen im  $\mathbb{R}^3$ :** Die nicht-Abelsche Gruppe  $\mathcal{D}_n$  wurde schon als Symmetriegruppe eines senkrechten Prismas über dem regelmäßigen  $n$ -Eck erkannt. Sie enthält eine  $n$ -zählige Drehung  $c_n$  um die Referenzachse und  $n$  zweizählige Drehungen  $c_{h,2}$ . Die Gruppe wird von  $c_n$  und einem  $c_{h,2}$  erzeugt. Die Anzahl ihrer Konjugationsklassen ist  $k(\mathcal{D}_{2n}) = n + 3$  und  $k(\mathcal{D}_{2n+1}) = n + 2$ .

#### Eigenschaften der eigentlichen Punktgruppen

$G$	zykl. Untergruppen	max. Untergruppen	$ G $	$k(G)$	$\cong$
$\mathcal{C}_n$	$\mathcal{C}_m, m \text{ teilt } n$		$n$	$n$	
$\mathcal{D}_n, n \text{ gerade}$	$\mathcal{C}_m, m \text{ teilt } n$	$\mathcal{D}_m, m \text{ teilt } n$	$2n$	$\frac{n}{2} + 3$	
$\mathcal{D}_n, n \text{ unger.}$	$\mathcal{C}_m, m \text{ teilt } n$	$\mathcal{D}_m, m \text{ teilt } n$	$2n$	$\frac{n}{2} + \frac{3}{2}$	
$\mathcal{T}$	$3\mathcal{C}_2, 4\mathcal{C}_3$	$\mathcal{D}_2$	12	4	$\mathcal{A}_4$
$\mathcal{O}$	$6\mathcal{C}_2, 4\mathcal{C}_3, 3\mathcal{C}_4$	$4\mathcal{D}_3, 3\mathcal{D}_4, \mathcal{A}_4$	24	5	$\mathcal{S}_4$
$\mathcal{Y}$	$15\mathcal{C}_2, 10\mathcal{C}_3, 6\mathcal{C}_5$	$10\mathcal{D}_3, 6\mathcal{D}_5, 5\mathcal{A}_4$	60	5	$\mathcal{A}_5$

Angegeben sind die zyklischen Untergruppen, nicht-Abelschen maximalen Untergruppen, die Gruppenordnung  $|G|$ , die Anzahl Konjugationsklassen  $k(G)$  und isomorphe Gruppen.

Wir beweisen nun die Vollständigkeit dieser Liste [2]. Es sei also  $G < SO(3)$  eine eigentliche Punktgruppe. Nach dem Euler'schen Satz (Seite 58) ist jedes Element in  $G$  eine Drehung um eine Achse, welche die Einheitssphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  in zwei Punkten schneidet. Wir nennen diese Punkte die *Pole des Gruppenelements*. Wir definieren die endliche Menge aller Pole,

**Definition 25** Die Menge  $P := \{\mathbf{x} \in S^2 \mid R\mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ für ein } R \in G \setminus \mathbb{1}\}$  heißt Polmenge von  $G$ ,

?

Überlegen Sie sich, das zu jedem  $R \neq \mathbb{1}$  genau zwei Pole gehören.

Für jeden Pol definieren wir die nicht-triviale Untergruppe  $H_x$ , die den Pol  $\mathbf{x} \in P$  nicht bewegt,

**Definition 26** Die Untergruppe  $H_x = \{R \in G \mid R\mathbf{x} = \mathbf{x}\} \leq G$  heißt Stabilisator von  $\mathbf{x}$ .

Die Elemente der Punktgruppe bilden Pole in Pole ab:

**Lemma 7** Die Polmenge  $P$  ist invariant unter der Wirkung von  $G$ .

Zum Beweis betrachten wir den Pol  $\mathbf{x}$  einer Drehung  $R$  und eine beliebige zweite Drehung  $R' \in G$ . Es gilt

$$(R'RR'^{-1})(R'\mathbf{x}) = R'R\mathbf{x} = R'\mathbf{x}, \quad (6.14)$$

und damit ist  $R'\mathbf{x}$  ebenfalls in der Polmenge.

Die Abbildung  $\Phi(R, \mathbf{x}) = R\mathbf{x}$  definiert eine Wirkung der Punktgruppe  $G$  auf der Polmenge. Entsprechend definiert  $\Phi_R(\mathbf{x}) = R\mathbf{x}$  einen Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow S(P)$ . Nach diesen Vorbereitungen teilen wir nun die Polmenge  $P$  in *Orbits (Bahnen)* unter der Gruppenwirkung ein. Man erinnere sich daran, dass die Orbits Äquivalenzklassen in der Polmenge bilden. Da



die Gruppe auf jedem Orbit transitiv wirkt, sind nach den Ergebnissen von Abschnitt 5.1.1 die Stabilisatorgruppen zweier Pole im selben Orbit isomorph. Wegen (6.14) gilt

**Lemma 8** Die Stabilisatoren zweier Pole  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$  sind zueinander konjugiert,  $H_{\mathbf{x}'} = RH_xR^{-1}$ .

Nun bringen wir die Anzahl Elemente eines Orbits und die Ordnung der Stabilisatoren der Pole im Orbit in Verbindung:

**Satz 26** Der Orbit von  $\mathbf{x}$  enthält  $n/m$  Pole, wobei  $n$  und  $m$  die Ordnungen von  $G$  und  $H_x$  sind.

Die Punktgruppe ist Vereinigung der disjunkten Links-Restklassen  $R_1H_x, \dots, R_rH_x$  mit  $r = n/m$ . Alle Elemente einer Restklasse  $R_iH_x$  bilden  $\mathbf{x}$  in denselben Punkt  $R_i\mathbf{x}$  ab,  $R_iH_x\mathbf{x} = R_i\mathbf{x}$ . Liegen  $R_i$  und  $R_j$  in verschiedenen Restklassen, dann ist  $R_i\mathbf{x} \neq R_j\mathbf{x}$ , da aus  $R_i\mathbf{x} = R_j\mathbf{x}$  sofort  $R_i^{-1}R_j \in H_x$  folgen würde. Deshalb enthält das Orbit von  $\mathbf{x}$  die  $n/m$  Elemente  $\{R_1\mathbf{x}, \dots, R_r\mathbf{x}\}$ .

Die  $n - 1$  nicht-trivialen Drehungen in  $G$  bestehen aus  $m - 1$  Drehungen für jeden Pol, also  $\frac{1}{2}(m_o - 1)n/m_o$  für das Orbit  $O$  von  $\mathbf{x}$ . Zu jedem nicht-trivialen  $R$  gehören zwei Pole und dies erklärt den Faktor  $1/2$ . Entsprechend gilt die Summenregel

$$n - 1 = \frac{1}{2} \sum_{\text{Orbits } o} (m_o - 1) \frac{n}{m_o} \iff 2 - \frac{2}{n} = \sum_{\text{Orbits}} \left(1 - \frac{1}{m_o}\right). \quad (6.15)$$

Für jeden Orbit ist  $m_o \geq 2$  und deshalb ist jeder Summand in der letzten Summe größer gleich  $1/2$ . Die Polmenge kann demnach nur 1, 2 oder 3 Orbits haben.

- **Ein Orbit:** Gäbe es nur ein Orbit dann würde  $n(1 + m) = 2m$  gelten, was für  $G \neq \{e\}$  unmöglich ist. Also gibt es mindestens zwei Orbits.

Die Polmenge zerfällt in mindestens 2 aber höchstens 3 Orbits.

- **Zwei Orbits:** Diese haben  $n/m_1$  beziehungsweise  $n/m_2$  Elemente. Die Formel (6.15) impliziert für zwei Orbits

$$2 = \frac{n}{m_1} + \frac{n}{m_2}. \quad (6.16)$$

Da  $m_1$  und  $m_2$  die Gruppenordnung  $n$  teilen, existiert nur die Lösung  $m_1 = m_2 = n$ . Demnach enthalten die beiden Orbits jeweils genau einen Pol. Da diese unter allen Drehungen nicht ändern ist  $G$  die zyklische Gruppe  $\mathcal{C}_n$  erzeugt von einer Drehung um  $2\pi/n$ .

- **Drei Orbits:** Für drei Orbits führt (6.15) auf

$$1 + \frac{2}{n} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}. \quad (6.17)$$

Sind alle  $m_i \geq 3$  dann ist die rechte Seite nie größer Eins und die Gleichung ist nie erfüllt. Demnach existiert mindestens eine Stabilisatorgruppe mit zwei Elementen. Wir wählen  $m_1 = 2$ . Es folgt

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \iff (m_2 - 2)(m_3 - 2) = 4 \left(1 - \frac{m_2 m_3}{n}\right) < 4.$$

Es gibt nur wenige Möglichkeiten, diese Ungleichung zu erfüllen:

$m_1$	$n/m_1$	$m_2$	$n/m_2$	$m_3$	$n/m_3$	$n$	Punktgruppe
2	$m$	2	$m$	$m$	2	$2m$	$\mathcal{D}_m$
2	6	3	4	3	4	12	$\mathcal{T}$
2	12	3	8	4	6	24	$\mathcal{O}$
2	30	3	20	5	12	60	$\mathcal{Y}$

Die zugehörige Identifikation der Gruppen in der rechten Spalte ist nicht allzu schwierig. So müssen zum Beispiel im Fall  $(m_1, m_2, m_3) = (2, 2, m)$  die zweizähligen Achsen senkrecht zur  $m$ -zähligen Referenzachse sein. Zum Beispiel, für die Gruppe  $\mathcal{Y}$  gibt es  $n/2m_1 = 15$  zweizählige, 10 dreizählige und 6 fünfzählige Drehachsen.

## 6.4 Uneigentliche Punktgruppen

Uneigentliche Punktgruppen enthalten die gleiche Anzahl orientierungserhaltende wie orientierungsumkehrende Drehungen. Ist nämlich  $G_0$  der Normalteiler der eigentlichen Drehungen in  $G$  und  $\sigma$  eine uneigentliche Drehung, dann lautet die Nebenklasseneinteilung von  $G$

$$G = G_0 \cup G_1, \quad G_1 = \sigma \cdot G_0. \quad (6.18)$$

Insbesondere gilt dies für die Gruppe der Ordnung zwei, erzeugt vom Einselement und der Inversion,

$$\mathcal{C}_i = \{e, i\} \cong \mathbb{Z}_2. \quad (6.19)$$

Bei einer Klassifikation der uneigentlichen Punktgruppen ist der folgende Satz nützlich:

**Satz 27** *Eine uneigentliche Punktgruppe, welche die Inversion nicht enthält, ist zu einer eigentlichen Punktgruppe isomorph.*

Beweis: Es sei  $G$  eine uneigentliche Punktgruppe und  $G = G_0 \cup G_1$  mit  $G_1 = \sigma \cdot G_0$  für ein uneigentliches  $\sigma \neq i$  die Zerlegung von  $G$  nach dem Normalteiler  $G_0$ . Dann ist  $G' = G_0 \cup iG_1$  eine eigentliche Punktgruppe mit  $G_0 \cap iG_1 = \emptyset$ . Die Abbildung  $\varphi: G \rightarrow G'$  mit

$$\varphi(R_0) = R_0 \quad \text{für } R_0 \in G_0 \quad \text{und} \quad \varphi(R_1) = i \cdot R_1 \quad \text{für } R_1 \in G_1$$

ist dann ein Isomorphismus.

?

Überzeugen Sie sich davon, dass die letzte Aussage richtig ist. Vermutlich brauchen Sie dafür, dass  $i^2 = \mathbb{1}$  ist und alle Gruppenelement mit  $i$  vertauschen.

Neue Gesichtspunkte werden also solche Punktgruppen bringen, welche die Inversion  $i$  enthalten. Weil die Inversion mit allen Drehungen vertauscht sind diese Punktgruppen ein direktes Produkt,

$$G = G_0 \times \mathcal{C}_i = \{ge, gi \mid g \in G_0\}.$$

$G_0$  ist der Normalteiler bestehend aus den eigentlichen Drehungen in  $G$ .

#### Bildungsregeln für uneigentliche Punktgruppen aus eigentlichen

1. Bilde das direkte Produkt aus einer eigentlichen Punktgruppe mit  $\mathcal{C}_i$ ,
2. Zerlege die eigentliche Punktgruppe  $G$  in Nebenklassen bezüglich eines Normalteilers  $G_0$  vom Index 2,  $G = G_0 \cup gG_0$  mit  $g \notin G_0$  und forme sie um zu  $G' = G_0 \cup igG_0$ .

Mit diesen Regeln kann man neun Typen von uneigentlichen Punktgruppen konstruieren:

**Satz 28** *Es gibt neun Typen von uneigentlichen Punktgruppen: fünf Serien  $\mathcal{C}_{nh}, \mathcal{C}_{nv}, \mathcal{D}_{nd}, \mathcal{D}_{nh}, \mathcal{S}_{2n}$  sowie vier besondere Punktgruppen  $\mathcal{T}_d, \mathcal{T}_h, \mathcal{O}_h, \mathcal{Y}_h$ .*

Einge wichtige Eigenschaften der uneigentlichen Punktgruppen sind in Tabelle 6.1 angegeben. Insbesondere wurde notiert, mit welcher Bildungsvorschrift die Gruppen konstruiert sind und wie viele Konjugationsklassen  $k(G)$  in  $G$  es gibt.

Abschließend notieren wir noch mögliche Präsentationen aller Punktgruppen:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n &= \{c_n\} \\ \mathcal{C}_{nh} &= \{c_n, \sigma_h \mid [c_n, \sigma_h] = e\} \\ \mathcal{C}_{nv} &= \{c_n, \sigma_v \mid (c_n \sigma_v)^2 = e\} \\ \mathcal{D}_n &= \{c_n, c_{h,2} \mid (c_n c_{h,2})^2 = e\} \\ \mathcal{D}_{nd} &= \{s_{2n}, \sigma_v \mid (s_{2n} \sigma_v)^2 = e\} \\ \mathcal{D}_{nh} &= \{c_n, c_{h,2}, i \mid (c_n c_{h,2})^2 = [c_n, i] = [c_{h,2}, i] = e\} \\ \mathcal{S}_{2n} &= \{s_{2n}\} \end{aligned}$$

**Vollständige Liste der uneigentlichen Punktgruppen und ausgewählte Eigenschaften**

Gruppe		Normalteiler	isomorph zu	$ G $	$k(G)$
$C_{nv}$	$n$ gerade	$C_n$	$D_n$	$2n$	$(n+6)/2$
	$n$ ungerade	$C_n$	$D_n$	$2n$	$(n+3)/2$
$C_{nh}$	$n$ gerade	$C_n$	$C_n \times C_i$	$2n$	$2n$
	$n$ ungerade	$C_n$	$C_{2n}$	$2n$	$2n$
$D_{nd}$	$n$ gerade	$D_n$	$D_{2n}$	$4n$	$n+3$
	$n$ ungerade	$D_n$	$D_n \times C_i$	$4n$	$n+3$
$D_{nh}$	$n$ gerade	$D_n$	$D_n \times C_i$	$4n$	$n+6$
	$n$ ungerade	$D_n$	$D_{2n}$	$4n$	$n+3$
$S_n$	$n$ gerade	$C_{n/2}$	$C_n$	$n$	$n$
	$n$ ungerade	$C_n$	$C_n \times C_i$	$2n$	$2n$
$T_d$		$\mathcal{T}$	$\mathcal{O}$	24	5
$T_h$		$\mathcal{T}$	$\mathcal{T} \times C_i$	24	8
$\mathcal{O}_h$		$\mathcal{O}$	$\mathcal{O} \times C_i$	48	10
$\mathcal{Y}_h$		$\mathcal{Y}$	$\mathcal{Y} \times C_i$	120	10

Tabelle 6.1: Gruppen isomorph zu  $G \times C_i$  wurden mit der ersten Bildungsregel konstruiert. Die zweite Bildungsregel werde am Beispiel  $T_d$  erklärt: Die Ausgangsgruppe  $\mathcal{O}$  enthält den Normalteiler  $\mathcal{T}$  mit Index 2. Wir zerlegen  $\mathcal{O}$  in zwei Nebenklassen  $\mathcal{O} = \mathcal{T} \cup iG_1$ . Dann ist  $T_d = \mathcal{T} \cup G_1 \cong \mathcal{O}$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &= \{c_3, c'_2 \mid (c_3 c'_2)^3 = e\} \\
 \mathcal{T}_h &= \{c_3, c'_2, i \mid (c_3 c'_2)^3 = [c_3, i] = [c'_2, i] = e\} \\
 \mathcal{T}_d &= \{c_3, c'_2, \sigma_v \mid (c_3 c'_2)^3 = (c_3 \sigma_v)^2 = (c'_2 \sigma_v)^2 = e\} \\
 \mathcal{O} &= \{c_4, c'_4 \mid (c_4 c'_4)^2 = e\} \\
 \mathcal{O}_h &= \{c_4, c'_4, i \mid (c_4 c'_4)^2 = [c_4, i] = [c'_4, i] = e\} \\
 \mathcal{Y} &= \{c_5, c'_2 \mid (c_5 c'_2)^3 = e\} \\
 \mathcal{Y}_h &= \{c_5, c'_2, i \mid (c_5 c'_2)^3 = [c_5, i] = [c'_2, i] = e\}.
 \end{aligned}$$

Wir beenden die Diskussion der Punktgruppen mit der Bemerkung, dass in der *Kristallographie* nur 32 dieser Gruppen eine Rolle spielen.

### 6.4.1 Trägheitstensor symmetrischer Körper

Wir betrachten einen starren Körper bestehend aus  $N$  Punktmassen  $m_i$  an den Orten  $\mathbf{x}_i$ . Der charakterisierende Trägheitstensor

$$\Theta_{ab} = \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{ab} - x_{ia} x_{ib}) . \quad (6.20)$$

transformiert bei einer Drehung  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = R\mathbf{x}$  des starren Körpers wie ein Tensor zweiter Stufe,

$$\Theta'_{ab} = \sum_i m_i (r_i'^2 \delta_{ab} - x'_{ia} x'_{ib}) = R_{ac} R_{bd} \sum_i m_i (r_i^2 \delta_{cd} - x_{ic} x_{id}) ,$$

oder in Matrixnotation

$$\Theta \mapsto \Theta' = R\Theta R^{-1} . \quad (6.21)$$

Dieses Transformationsgesetz gilt auch für Körper mit kontinuierlicher Massenbelegung.

#### Symmetrien des Trägheitstensors

Führt eine Drehung  $R$  den starren Körper in sich über, dann muss gelten

$$\Theta' = \Theta \quad \text{oder} \quad \Theta = R\Theta R^{-1} . \quad (6.22)$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: nicht jede Symmetrie des Trägheitstensors ist eine Decktransformationen des Körpers.

Die Menge der Decktransformationen bildet die *Symmetriegruppe* des Körpers. Diese ist eine Untergruppe der Symmetrien des Trägheitstensors. Eine Vollkugel mit homogener Massendichte ist invariant unter allen Drehungen. Hier haben Trägheitstensor und Kugel dieselbe Symmetriegruppe  $O(3)$ . Ein Würfel mit identischen Massenpunkten an den Eckpunkten ist dagegen nur invariant unter der Würfelgruppe  $\mathcal{O}$  und deren uneigentliche Erweiterung  $\mathcal{O}_h$ . Aber weiter unten werden wir sehen, dass der Trägheitstensor immer noch die Symmetriegruppe  $O(3)$  hat.

Für die Untersuchung der Symmetriegruppe eines allgemeinen Körpers wählen wir als Koordinatenrichtungen die Hauptachsen des Trägheitstensors. Sind die Hauptträgheitsmomente in  $\Theta = \text{diag}(A, B, C)$  verschieden, dann vertauschen nur diagonale  $R$  mit  $\Theta$ .

Die Symmetriegruppe eines unsymmetrischen Kreisels ist eine Untergruppe der Abelschen Gruppe

$$\mathcal{C} = \{e, c_2(\mathbf{e}_1), c_2(\mathbf{e}_2), c_2(\mathbf{e}_3), \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, i\} . \quad (6.23)$$

Der Trägheitstensor eines symmetrischen Körpers  $\Theta = \text{diag}(A, A, C)$  mit  $C \neq A$  vertauscht dagegen mit allen Drehungen, welche die durch  $\mathbf{e}_3$  definierte Symmetrieachse fest lassen,

$$\mathcal{C}_s = \{R \in O(3) \mid R\mathbf{e}_3 = \pm\mathbf{e}_3\} .$$

Die Symmetriegruppe eines symmetrischen Kreisels ist deshalb eine Untergruppe von  $\mathcal{C}_s$ . Die eigentlichen endlichen Untergruppen von  $\mathcal{C}_s$  sind die Gruppen  $\mathcal{C}_n$  oder  $\mathcal{D}_n$ . Allgemeiner können die Gruppen  $\mathcal{S}_n$ ,  $\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{C}_{nh}$ ,  $\mathcal{C}_{nv}$ ,  $\mathcal{D}_n$ ,  $\mathcal{D}_{nh}$  oder  $\mathcal{D}_{nd}$  als Symmetriegruppe eines symmetrischen Kreisels auftreten. Umgekehrt gilt

**Lemma 9** *Enthält eine Symmetriegruppe eines Kreisels eine  $\mathcal{C}_n$  mit  $n \geq 3$  als Untergruppe, dann ist es ein symmetrischer Kiesel.*

Zum Beweis betrachte man die Bedingung  $R\Theta = \Theta R$  für eine symmetrische Matrix  $\Theta$  und eine Drehung  $R$  mit Winkel  $\varphi$  um die dritte Achse. Ist  $\sin \varphi$  nicht Null, dann findet man  $\Theta = \text{diag}(A, A, C)$ .

Enthält die Symmetriegruppe eine zweite, mindestens dreizählige Drehung  $c_n(\mathbf{e})$  um eine weitere Achse  $\mathbf{e} \neq \mathbf{e}_3$ , dann handelt es sich um einen Kugelkiesel mit  $\Theta = A\mathbb{1}$ . Es folgt daraus:

**Lemma 10** *Die platonischen Körper mit gleichschweren Massen an den Ecken sind Kugelkiesel mit Trägheitstensor  $\Theta = A\mathbb{1}$ .*

## 6.5 Molekülsymmetrien

Wir vernachlässigen die „Eigenbewegungen“ von Elektronen und Atomkerne und beziehen unsere Symmetriestudien am Molekül auf dessen Kerngerüst. Wir untersuchen also ein Massenpunktsystem aus endlich vielen starr verbundenen Atomen. Die Atome denken wir uns dabei mit ihren Kernen in den Punkten des Systems angeheftet. Zum Beispiel bilden der Stickstoffkern und die drei Wasserstoffkerne des *Ammoniakmoleküls*  $\text{NH}_3$  die vier Ecken eines Tetraeders. Auf diese Weise laufen Symmetrieuntersuchungen an Molekülen häufig auf das Studium von geometrischen Standardfiguren der Stereometrie hinaus. Die Symmetrien von mehreren Molekülen sind in Abbildung 6.3 gezeigt.

### 6.5.1 Das Massenpunktsystem Allen $\text{C}_3\text{H}_4$ und Schoenflies-Notation

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem betrachten wir den Quader in achsenparalleler Mittelpunktslage. Wie in Abbildung 6.4 skizziert, sei seine Höhe  $2h$  und seine Grundfläche quadratisch von der Kantenlänge  $2g < 2h$ . Dem Quader läßt sich dann gemäß der Abbildung das Kerngerüst eines Allen-Moleküls einbeschreiben: Die vier H-Atomkerne werden auf die Ecken

$$\text{H}_1 : (g, -g, -h), \quad \text{H}_2 : (g, g, h), \quad \text{H}_3 : (-g, g, -h), \quad \text{H}_4 : (-g, -g, h)$$

verteilt und die Kohlenstoffkerne auf die Punkte

$$(0, 0, -d), \quad (0, 0, 0), \quad (0, 0, d), \quad 0 < d < h$$

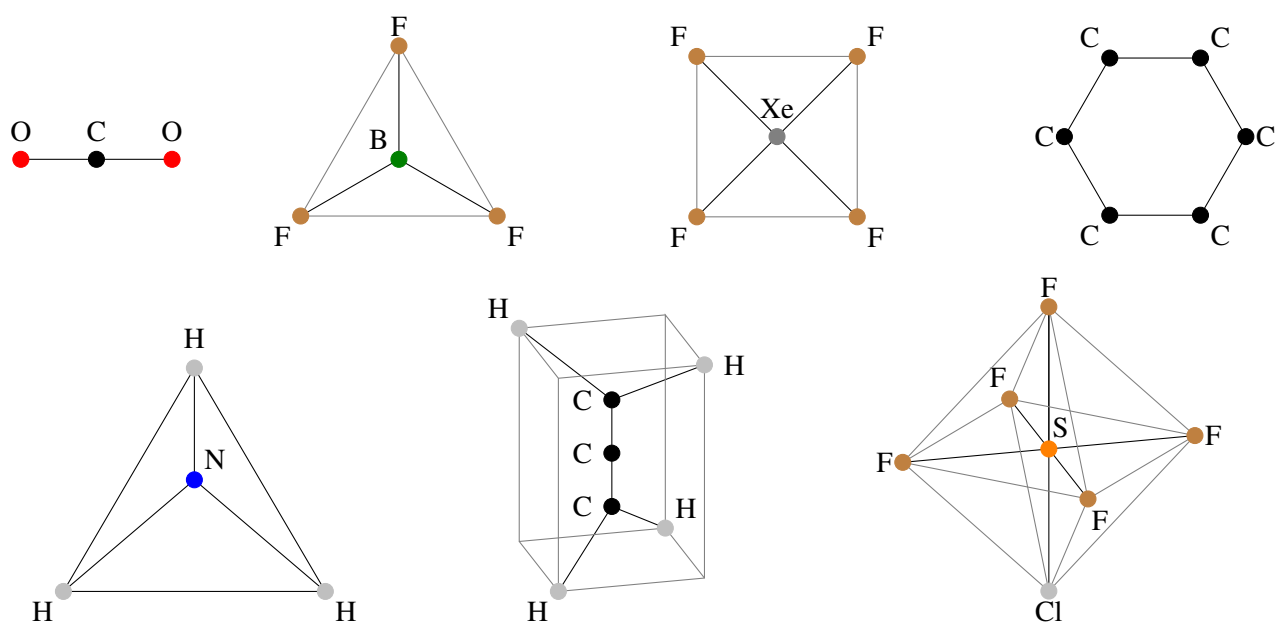
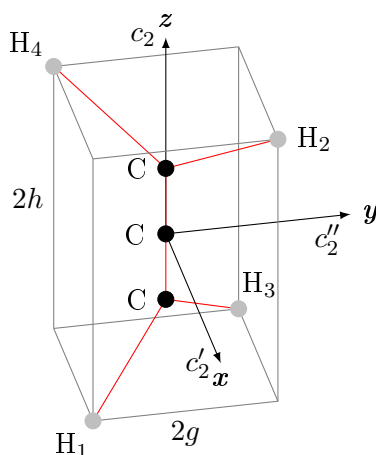


Abbildung 6.3: Die Symmetrien von Kohlendioxid ( $\text{CO}_2$ ), Bortrifluorid ( $\text{BF}_3$ ), Xenontetrafluorid ( $\text{XeF}_4$ ), Benzol ( $\text{C}_6\text{H}_6$ ), Ammoniak ( $\text{NH}_3$ ), Allen ( $\text{C}_3\text{H}_4$ ) und Schwefelchloro-pentafluorid ( $\text{SF}_5\text{Cl}$ ) sind die Decktransformationen der Geraden, des gleichseitigen Dreiecks, Quadrats, regelmäßigen Sechsecks, Tetraeders, Quaders und Oktaeders.

Abbildung 6.4: Die Lage der Atome im Allen-Molekül  $C_3H_4$ .

der  $z$ -Achse. Drehen wir mit  $180^\circ$  um die  $z$ -Achse, so kommt das Kerngerüst mit sich zur Deckung: Die drei C-Atomkerne bleiben fest,  $H_1$  und  $H_3$  sowie  $H_2$  und  $H_4$  tauschen ihre Plätze. Die Anfangs- und Endlage des Moleküls sind dabei ununterscheidbar.

Das Molekül gestattet auch eine Drehung mit  $180^\circ$  um die  $x$ - und eine um die  $y$ -Achse. *Drehsymmetrien* werden in der Symbolik von Schoenflies durchwegs mit dem gleichen Buchstaben  $\mathcal{C}$  bezeichnet. Die  $x$ ,  $y$  bzw.  $z$ -Achse sind zweizählige Drehachsen. Deshalb bezeichnet man die zu ihnen gehörigen Drehsymmetrieoperationen mit  $c'_2$ ,  $c''_2$  bzw.  $c_2$ . In diesen Bezeichnungen gilt

$$c'_2(H_1) = H_2, \quad c''_2(H_3) = H_2, \quad c_2(H_1) = H_3 \quad \text{usw.}$$

Außer  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}'_2$  und  $\mathcal{C}''_2$  besitzt das Allen-Molekül keine weiteren Drehsymmetrien. Wenn wir jedoch um  $90^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn um die  $z$ -Achse drehen und anschließend an der  $x, y$ -Ebene spiegeln, nimmt  $H_1$  den Platz von  $H_2$  ein,  $H_2$  den von  $H_3$ ,  $H_3$  den von  $H_4$ ,  $H_4$  den von  $H_1$  und das untere C-Atom tauscht mit dem oberen den Platz. Das mittlere C-Atom bleibt fest und sein Ort ist ein *Fixpunkt* der Symmetrieoperation. Diese Drehspiegelung, bestehend aus einer 4-zähligen Drehung und einer anschließenden Spiegelung an der zur Drehachse senkrecht stehenden Spiegelebene, wird mit  $s_4$  bezeichnet. Das Molekül gestattet weder die alleinige Drehung noch die Spiegelung, aus denen sich  $s_4$  zusammensetzt, sondern nur deren Zusammensetzung. Das Molekül gestattet auch die Drehspiegelung  $s_4^3$ , die durch eine Drehung um die  $z$ -Achse mit  $270^\circ$  und anschließender Spiegelung an der  $x - y$ -Ebene entsteht. Weitere Drehspiegelungen besitzt Allen nicht. *Drehspiegelungen* werden nach Schoenflies durchweg mit dem Buchstaben  $s$  bezeichnet. Speziell schreiben wir dabei  $s_n$ , wenn  $n$  die Ordnung von  $s_n$  ist. Für Allen ist  $n = 4$ . Als *Referenzachse* zeichnet man unter den Drehachsen und Drehspiegelachsen des Moleküls diejenige (oder eine unter mehreren) mit der höchsten Zähligkeit aus. Diese wird dann vertikal gezeichnet. Bei Allen ist die 4-zählige Drehspiegelachse die Referenzachse.

Aus obiger Figur ist ersichtlich, dass Allen die mit  $\sigma_d$  und  $\sigma'_d$  bezeichneten *Spiegelungen* der



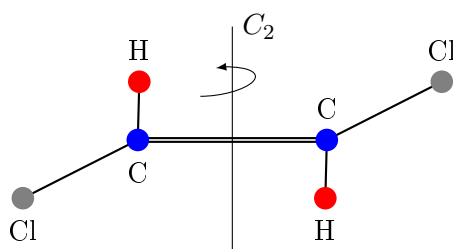


Abbildung 6.5: Das Kerngerüst von Dichlorethylen.

durch die Referenzachse und  $H_1$  bzw. die Referenzachse und  $H_2$  bestimmten Ebenen gestattet. Es gilt unter anderem

$$\sigma_d(H_1) = H_1, \quad \sigma_d(H_2) = H_4, \quad \sigma'_d(H_1) = H_3.$$

*Spiegelsymmetrien* werden in der Schoenflies-Symbolik stets mit  $\sigma$  bezeichnet. Um mehrere zu unterscheiden auch mit  $\sigma, \sigma'$  usw. Die Stellung der Spiegelachse zur Referenzachse bringt man gegebenenfalls durch einen Index an  $\sigma$  zum Ausdruck:  $\nu$  bedeutet, daß die Ebene senkrecht steht und die vertikale Referenzachse enthält. Jene Spiegelebenen, die den Winkel zwischen zwei benachbarten und bezüglich der Referenzachse orthogonalen, zweizähligen Drehachsen halbieren, bezeichnet man speziell mit  $\sigma_d$  ( $d$ : dihedral). Die vertikalen Spiegelebenen beim Allen-Molekül sind von dieser Art. Eine Spiegelung an einer horizontalen Ebene bezeichnet man mit  $\sigma_h$ . Außer  $\sigma_d$  und  $\sigma'_d$  besitzt Allen keine weiteren Spiegelsymmetrien.

#### Symmetriegruppe des Allen-Moleküls

Die Symmetriegruppe des Allen-Moleküls ist

$$\mathcal{D}_{2d} = \{e, s_4, s_4^2, s_4^3, c_2', c_2'', \sigma_d, \sigma'_d\}.$$

Wegen  $s_4^2 = c_2$  wurde nur  $s_4^2$  als Element notiert. Die Symmetriegruppe  $\mathcal{D}_{2d}$  hat die Ordnung 8. Sie ist eine uneigentliche Erweiterung der Diedergruppe  $\mathcal{D}_2$  (siehe Tabelle auf Seite 88).

### 6.5.2 Trans-Dichlorethylen

Das Kerngerüst des ebenen Moleküls Trans-Dichlorethylen  $H_2C_2Cl_2$  ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Es dient zur Illustration der Symmetrie  $C_{2h}$ . Die Drehung des Moleküls mit  $180^\circ$  um die Achse senkrecht zur Molekülebene und die Inversion am Schwerpunkt des Moleküls sind Decktransformationen. Wir fassen zusammen:

#### Symmetriegruppe von Trans-Dichlorethylen

Die Symmetriegruppe des  $\text{H}_2\text{C}_2\text{Cl}_2$  Moleküls ist gleich

$$\mathcal{C}_{2h} = \{1, c_2, \sigma_h, i\}.$$

Sie ist eine uneigentliche Erweiterung der eigentlichen Gruppe  $\mathcal{C}_2$  (siehe Tabelle auf Seite 88).

## 6.6 Aufgaben zu Kapitel 6

### Aufgabe 6.1: Punktgruppen in 2 Dimensionen

In zwei Dimensionen ist eine Punktgruppe eine endliche Untergruppe von  $O(2)$ . Klassifizieren Sie alle Punktgruppen in zwei Dimensionen.

# 7 Raumgruppen

*In den Werken der Natur und gerade in ihnen herrscht die Regel, nicht blinder Zufall.  
Der Endzweck aber, um dessentwillen ein Ding geschaffen oder geworden ist, liegt im  
Bereich des Schönen.*

ARISTOTELES

Ein *idealer Kristall* ist ein Festkörper, dessen mikroskopische atomare Struktur räumlich periodisch ist. Dies impliziert eine Periodizität der Kernlagen und der Elektronendichte, gegebenenfalls auch der Spindichte der Elektronen. Ein realer Kristall unterscheidet sich von einem idealen durch seine endliche Ausdehnung und durch strukturelle Fehler.

## 7.1 Gittervektoren und Elementarzelle

Die Decktransformationen eines Kristalls bilden die additive diskrete Translationsgruppe  $\mathcal{T} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Diese Gruppe wird von den Basisvektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , auch *primitiven Translationen* genannt, erzeugt:

$$\mathcal{T} = \{ \mathbf{a} \mid \mathbf{a} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3, n_i \in \mathbb{Z} \}. \quad (7.1)$$

Die Ortsvektoren die man durch Verschieben eines Gitterpunktes mit den  $\mathbf{a} \in \mathcal{T}$  erhält, bilden das Bravais-Gitter. Speziell die Basisvektoren  $\mathbf{a}_i$  spannen wie in Abb. 7.1 gezeigt, ein Parallelepiped – die *Elementarzelle* – auf.

Überlagern wir einem idealen Kristall sein Translationsgitter - die Wahl des Ursprungs ist dabei willkürlich - so zerfällt der Kristall in lauter äquivalente Elementarzellen, von denen jede zur

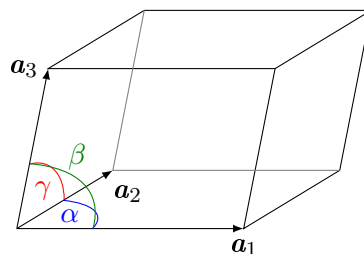


Abbildung 7.1: Eine Elementarzelle des Gitters mit Basisvektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  und  $\mathbf{a}_3$ .

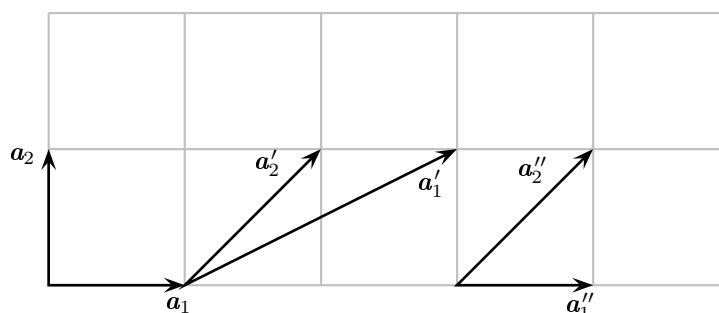


Abbildung 7.2: Die Basis einer Elementarzelle ist nicht eindeutig.

Beschreibung der Struktur ausreicht. Durch Verschieben der von einer Basis aufgespannten Elementarzelle wird der Raum in lauter gleichwertige Zellen aufgeteilt. Wie die Wahl des Ursprungs ist auch die Wahl der Basis primitiver Translationen und damit die Form der Elementarzelle nicht eindeutig. Abbildung 7.2 zeigt drei Basen (mit entsprechenden Elementarzellen) eines zweidimensionalen Gitters

Bilden die  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  eine Basis primitiver Translationen, dann bilden auch die Vektoren

$$\mathbf{a}'_i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{a}_j G_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad G_{ji} \in \mathbb{Z} \quad (7.2)$$

eine Basis, wenn gilt

$$|\det G| = 1, \quad G = (G_{ij}). \quad (7.3)$$

Beweis: Nach Definition führen alle ganzzahligen Linearkombinationen der Basistransformationen, und insbesondere die  $\mathbf{a}'_i$ , das Gitter in sich über. Wir müssen noch nachprüfen, dass die Volumen der durch die beiden Basen definierten Zellen,

$$\begin{aligned} V_e &= |\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3)| \\ V'_e &= |\mathbf{a}'_1 \cdot (\mathbf{a}'_2 \wedge \mathbf{a}'_3)| = |\det G| |\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3)| = |\det G| V_e \end{aligned}$$

gleich groß sind. Dies ist aber genau die Bedingung (7.3).

### Wigner-Seitz Zelle

Es gibt eine Vorschrift, eine eindeutige Elementarzelle zu definieren. Die entsprechende Zelle heisst *Wigner-Seitz-Zelle*. Als Mittelpunkt der Wigner-Seitz-Zelle wählt man einen Gitterpunkt aus, und ordnet der Zelle alle Raumpunkte zu, die dem ausgewählten Gitterpunkt näher als allen anderen Gitterpunkten sind.

Offenbar kann man eine Wigner-Seitz-Zelle dadurch konstruieren, dass man zu allen Verbindungsstrecken zwischen ihrem Mittelpunkt und den anderen Gitterpunkten die mittelsenkrechte Ebene errichtet. Diese paarweise parallelen Ebenen schneiden dann die Wigner-Seitz-Zelle aus,



Abbildung 7.3: Die Wigner-Seitz Zellen für zwei zweidimensionale Gitter.

wobei nur endlich viele zu den näheren Nachbarn gehörenden Ebenen zu berücksichtigen sind. Es zeigt sich, daß die Wigner-Seitz-Zellen in zwei Dimensionen von bis zu drei Geradenpaaren begrenzt werden, während in drei Dimensionen bis zu sieben Ebenenpaare benötigt werden.

### 7.1.1 Das reziproke Gitter

Bei Gitterrechnungen wird man zwangsläufig auf den Begriff des *reziproken Gitters* geführt. Sei  $f(\mathbf{r})$  eine beliebige gitterperiodische Funktion,

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{a} \in \mathcal{T}. \quad (7.4)$$

Sie kann als Fourierreihe mit Koeffizienten  $\tilde{f}(\mathbf{k})$  dargestellt werden,

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (7.5)$$

Für die Fourierkoeffizienten gilt die Umkehrformel

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{V_e} \int_{EZ} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}, \quad (7.6)$$

wobei über die von den Basisvektoren definierte Elementarzelle mit Volumen  $V_e$  zu integrieren ist. Damit die Funktion  $f$  gitterperiodisch ist, muss gelten

$$e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{a})} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad \text{bzw.} \quad e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} = 1$$

für alle Gittervektoren  $\mathbf{a}$ . Da aber jeder Gittervektor eine ganzzahlige Linearkombination der Basisvektoren ist, genügt es, diese Bedingung für die Basisvektoren zu fordern:

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i} = 1 \quad \text{oder} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i \in 2\pi \mathbb{Z}. \quad (7.7)$$

Genauso wie die Menge der Gittervektoren  $\mathcal{T}$  bildet die Menge der erlaubten  $\mathbf{k}$ -Vektoren eine diskrete additive Gruppe, die wir mit  $\mathcal{T}^*$  bezeichnen und die das *reziproke Gitter* definieren. Für  $\mathcal{T}^*$  existiert wieder eine Basis  $\{\mathbf{a}_i^*\}$ , so dass jeder  $\mathbf{k}$ -Vektor eine ganzzahlige Linearkombination der  $\mathbf{a}_i^*$  ist.

### Reziprokes Gitter

Eine Basis  $\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_3^*$  des reziproken Gitters wird durch die Gleichungen  $\mathbf{a}_i^* \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$  festgelegt.

Dies ist die in der Festkörperphysik verbreitete Definition. In der Kristallographie benutzt man eine andere Normierung der dualen Basis. Dort ist die Basis des reziproken Gitters durch  $\mathbf{a}_i^* \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$  charakterisiert.

Die explizite Lösung des Gleichungssystems für die  $\mathbf{a}_i^*$  lautet

$$\mathbf{a}_1^* = \frac{2\pi}{V_e} \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_2^* = \frac{2\pi}{V_e} \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_3^* = \frac{2\pi}{V_e} \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2. \quad (7.8)$$

Das Volumen der Elementarzelle des reziproken Gitters  $\mathcal{T}^*$  ist

$$V_e^* = \frac{(2\pi)^3}{V_e}. \quad (7.9)$$

**Die Translationssymmetrien des NaCl-Gitters:** Die Bausteine des Gitters sind die  $\text{Na}^+$  und  $\text{Cl}^-$ -Ionen: Die  $\text{Na}^+$  bzw.  $\text{Cl}^-$ -Ionen bilden je ein *kubisch flächenzentriertes Gitter* und zeigen die im folgenden Bild skizzierten und zum NaCl-Gitter ineinandergestellten Anordnungen, die durch die Translation um  $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$  auseinander hervorgehen. Die Elementarzelle wird durch die

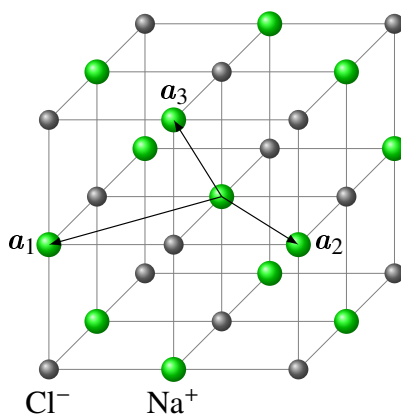


Abbildung 7.4: Das Gitter von NaCl

Vektoren  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  und  $\mathbf{a}_3$  aufgespannt. Die Dreh-, Spiegel- und Drehspiegelsymmetrien (einschließlich der Inversion) mit dem Koordinatenursprung als Fixpunkt sind leicht aus der Abbildung abzulesen.

## 7.2 Raumgruppen

Nachdem wir Punktgruppen und diskrete Translationen getrennt untersucht haben, wollen wir uns nun den Symmetrien eines Kristalls unter allgemeinen Bewegungen zuwenden, also Drehungen, Spiegelungen und Translationen.

### Raumgruppen

Alle Decktransformationen eines Gitters definieren eine Raumgruppe. Eine Raumgruppe ist also eine diskrete Untergruppe der Bewegungsgruppe  $E_3$

Es gibt also einen Satz von Drehungen und/oder Spiegelungen  $R$  sowie Translationen  $\mathbf{a}$ , so dass das Gitter unter den Bewegungen  $\mathbf{r}' = R\mathbf{r} + \mathbf{a}$  auf sich abgebildet wird. Zur Einstimmung

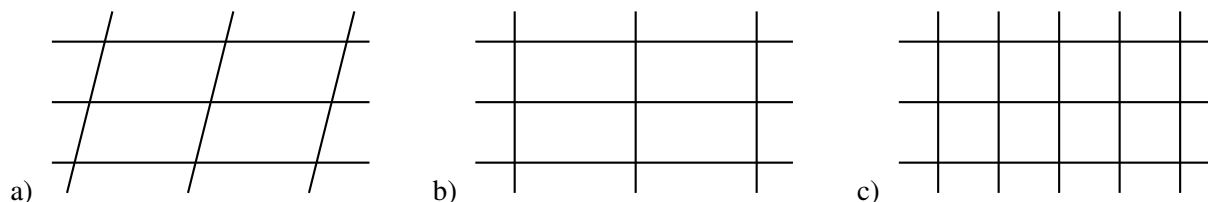


Abbildung 7.5: Zu den Punktsymmetrien in zwei Dimensionen

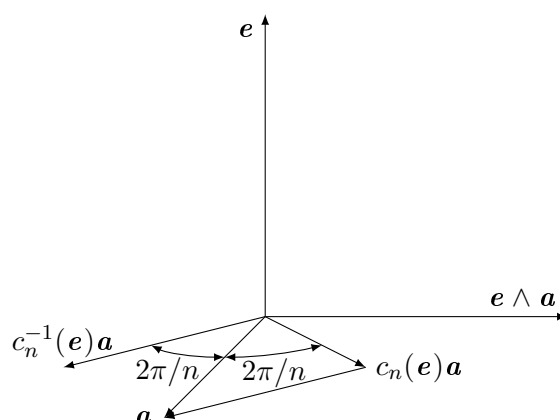
betrachten wir die Punktsymmetrien der obigen zweidimensionalen Gitter, d.h. alle Decktransformationen die einen Gitterpunkt fest lassen. Für das linke Gitter sind dies neben der Identität nur die Inversion. Die Punktsymmetriegruppe des mittleren Gitters enthält aufgrund der Rechtwinkligkeit zusätzlich zwei Spiegelungen an der Senkrechten und Waagerechten durch den festen Gitterpunkt, und damit vier Symmetrieelemente. Die Punktsymmetrien des rechten quadratischen Gitters schließlich enthält zusätzlich zwei Drehungen um  $\pi/2$  und  $3\pi/2$  sowie zwei weitere Spiegelungen an den Diagonalen und damit insgesamt acht Elemente.

Die Bestimmung der Symmetriegruppen eines *dreidimensionalen Gitters*  $\mathcal{T}$  wird erleichtert, nachdem man sich davon überzeugt hat, dass solche Gitter nur 2, 3, 4 oder 6-zählige Achsen haben können:

**Satz 29** Bei *eigentlichen Drehungen*, die ein Raumgitter in eine äquivalente Lage überführen, sind nur Drehachsen der Zähligkeit 2, 3, 4 und 6 zulässig.<sup>1</sup>

Dies beweist man durch folgende Überlegung: Wir betrachten eine  $n$ -zählige Drehung  $c_n(\mathbf{e})$  des Gitters um die Drehachse  $\mathbf{e}$ . Es gibt immer Gittervektoren, die senkrecht zu  $\mathbf{e}$  sind; ist nämlich

<sup>1</sup>1984 wurde ein ungewöhnlicher Quasikristall gefunden, der sich in vielen Experimenten wie ein Kristall mit einer 5-zähligen Symmetrie verhält.



$\mathbf{a}$  ein Gittervektor der nicht parallel zu  $\mathbf{e}$  ist, dann ist der Gittervektor  $c_n(\mathbf{e})\mathbf{a} - \mathbf{a}$  ungleich Null und senkrecht auf  $\mathbf{e}$ :

$$(\mathbf{e}, c_n(\mathbf{e})\mathbf{a} - \mathbf{a}) = (c_n(\mathbf{e})\mathbf{e}, c_n(\mathbf{e})\mathbf{a}) - (\mathbf{e}, \mathbf{a}) = 0.$$

Wir betrachten den kürzesten Gittervektor  $\mathbf{a}$  senkrecht zu  $\mathbf{e}$ . Jeder zu  $\mathbf{a}$  parallele Gittervektor  $\mathbf{a}'$  muss ein ganzzahliges Vielfaches von  $\mathbf{a}$  sein. Wäre nämlich  $\mathbf{a}' = \lambda\mathbf{a}$  mit einem nicht-ganzzahligen  $\lambda > 0$ , dann könnte man den zu  $\mathbf{a}$  parallelen Vektor  $\mathbf{a}' - [\lambda]\mathbf{a}$  konstruieren, der kürzer als  $\mathbf{a}$  ist, was unserer Annahme widersprechen würden.

Insbesondere gilt dann

$$\mathbf{a}' = c_n(\mathbf{e})\mathbf{a} + c_n^{-1}(\mathbf{e})\mathbf{a} = 2 \cos(2\pi/n)\mathbf{a} = m\mathbf{a}.$$

Da die Cosinus-Funktion Werte zwischen  $-1$  und  $1$  annimmt, gilt

$$-2 \leq m = 2 \cos \frac{2\pi}{n} \leq 2.$$

Die möglichen Werte von  $m$  mit zugehörigem Drehwinkel und Zähligkeit der Drehachse sind in der folgenden Tabelle gelistet:

$m$	2	1	0	-1	-2
Drehwinkel	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\pi$
Zähligkeit	1	6	4	3	2

Weitere hilfreiche Sachverhalte sind folgende: Jede Raumgruppe enthält die Inversion  $i$  an irgend einem Gitterpunkt, da mit  $\mathbf{a}$  auch  $-\mathbf{a}$  ein Gittervektor (und damit jeder Gitterpunkt mit Ortsvektor  $\mathbf{a}$  relativ zum gewählten Gitterpunkt) ist. Wenn ein Gitter invariant unter  $\mathcal{C}_n$  mit  $n > 2$  ist, dann ist es auch invariant unter  $\mathcal{C}_{nv}$ .

Die Gittersymmetrien sind also durch folgende drei Eigenschaften eingeschränkt:



1. Sie enthalten die Inversion.
2. Sie enthalten nur Drehachsen zweiter, dritter, vierter und sechster Ordnung.
3. Mit jeder Drehachse dritter, vierter oder sechster Ordnung enthalten sie auch eine Spiegelebene durch diese Achse.

Durchmustert man die im letzten Kapitel angegebenen Punktgruppen nach diesen Kriterien, dann bleiben genau sieben Symmetriegruppen übrig, und diese bilden die sieben Kristallsysteme.

Kristallsystem	Gruppe	Bravais-Gitter	kristallogr. Punktgruppen
kubisch oder regulär	$\mathcal{O}_h$	3	5
hexagonal	$\mathcal{D}_{6h}$	1	7
tetragonal oder quadratisch	$\mathcal{D}_{4h}$	2	7
rhombisch oder orthogonal	$\mathcal{D}_{2h}$	4	3
trigonal oder rhomboedrisch	$\mathcal{D}_{3d}$	1	5
monoklin	$\mathcal{C}_{2h}$	2	3
triklin	$\mathcal{S}_2$	1	2

Zum Beispiel treten hier die Ikosaedergruppe  $\mathcal{Y}_h$  und Diedergruppe  $\mathcal{D}_{5h}$  nicht auf, weil sie eine fünfzählige Achse haben.

## 7.3 Bravais-Gitter

Unabhängig von der Größe und Form der Elementarzelle wird die Geometrie der zugrunde liegenden periodischen Struktur durch ein sogenanntes *Bravais-Gitter* spezifiziert.

**Definition 27 (Bravais-Gitter)** *Ein Bravais-Gitter ist eine unendliche Anordnung diskreter Punkte, deren Orientierung und Ordnung von jedem Punkt aus gesehen gleich ist.*

Im Allgemeinen ist ein Kristallgitter durch Angabe des Bravais-Gitter und der Anordnung der Atome in der zugehörigen *Einheitszelle* bestimmt. Es gibt 14 Bravais-Gitter: 7 *primitive Gitter* mit einem Gitterpunkt pro Einheitszelle und 7 *zentrierte Gitter* mit mehreren Gitterpunkten pro Einheitszelle. Die Punkte eines Bravais-Gitters sind  $\mathbf{r} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3$  mit  $m_i \in \mathbb{Z}$ , wobei, wie wir schon früher betonten, die Basisvektoren nicht eindeutig sind. Je nachdem, ob man das Bravais-Gitter oder die Kristallstruktur betrachtet, unterscheidet man

	Bravais-Gitter	Kristallstruktur
Punktgruppe	7 Kristallsysteme	32 kristallographische Punktgruppen
Raumgruppe	14 Bravais-Gitter	230 Kristallklassen

Der Vorteil der Bravais-Gitter ist, dass sie die größtmögliche Symmetrie unmittelbar erkennen lassen. Der Nachteil ist, dass die *Einheitszelle* des Bravais-Gitters nicht immer eine *Elementarzelle* ist.

Das ist aber nur in seltenen Fällen ein Problem. In der Regel ist das Erkennen der Symmetrien wichtiger und hilfreicher und man benutzt Bravais-Gitter.

Nach Wahl einer Basis kann man Richtungen im Bravais-Gitter durch die *Miller-Indizes* angeben. Zum Beispiel bedeutet  $\langle 1\bar{2}3 \rangle$  die Richtung  $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$ . Dies ist für das primitive kubische Gitter in Abb. 7.6 für zwei Richtungen gezeigt.

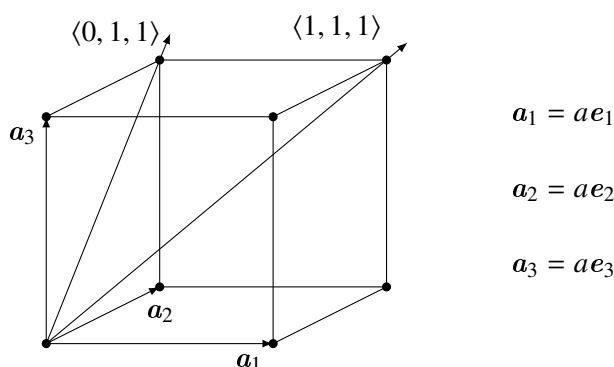
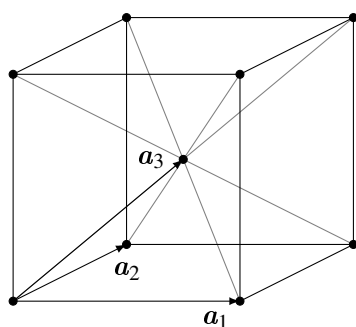


Abbildung 7.6: Für das primitive kubische Gitter (sc-Gitter) ist die Einheitszelle gleichzeitig Elementarzelle. Eine Richtung auf dem Gitter wird durch die Miller-Indizes charakterisiert.

### Kubische Bravais-Gitter

Eine primitive Basis  $\{\mathbf{a}_i\}$  für das *raumzentrierte kubische Gitter* (body-centered cubic, bcc) ist in Abb. 7.7 eingezeichnet. Anstelle der primitiven Elementarzelle wählt man oft die (konventionelle) Einheitszelle mit Basis  $\{\mathbf{a}'_i\}$ , deren Volumen ein ganzzahliges Vielfaches des Volumens der Elementarzelle ist. Für kubische Gitter hat die Einheitszelle die Form eines Würfels der Seitenlänge  $a$ . Für das bcc Gitter wird diese aufgespannt durch

$$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}'_3 = 2\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$$



$$\mathbf{a}_1 = a \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = a \mathbf{e}_2$$

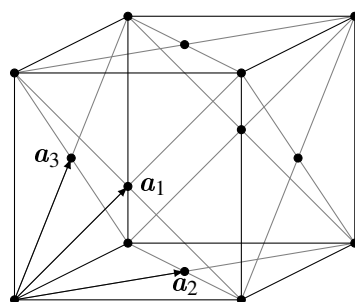
$$\mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

Abbildung 7.7: Das raumzentrierte kubische Gitter (bcc) mit primitiver Basis  $\{\mathbf{a}_i\}$

und hat das doppelte Volumen der Elementarzelle. Wie man an diesem Beispiel sieht, befinden sich innerhalb der Einheitszelle im Allgemeinen mehrere Atome. Die Orte der Atome in einer Einheitszelle sind durch  $r$  Tupel  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_r$  festgelegt,

$$\mathbf{r}_{m,i} = (m_1 + s_{1,i})\mathbf{a}'_1 + (m_2 + s_{2,i})\mathbf{a}'_2 + (m_3 + s_{3,i})\mathbf{a}'_3, \quad i = 1, \dots, r. \quad (7.10)$$

Würde man die Elementarzelle des flächenzentrierten kubischen Gitters (face-centered cubic, fcc) anstelle der Einheitszelle wählen, siehe Abb. 7.8, so würde man die einfache kubische Symmetrie des Gitters nicht sofort erkennen. Sie wird deshalb kaum verwendet, und man wählt anstelle der



$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

Abbildung 7.8: Das raumzentrierte kubische Gitter (fcc) mit primitiver Basis  $\{\mathbf{a}_i\}$

primitiven Basis  $\{\mathbf{a}_i\}$  die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_1 &= a \mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}'_2 &= a \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}'_3 &= a \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (7.11)$$

und gibt die Punkte des Gitters wie in (7.10) an. Die Einheitszelle hat das vierfache Volumen der Elementarzelle.

Die folgende Tabelle enthält die soeben vorgestellten drei kubischen Gitter – das einfach (simple cubic sc), raumzentrierte (body-centered cubic bcc) und flächenzentrierte (face-centred cubic fcc) Gitter. Die Größe der Elementarzelle relativ zur Einheitszelle ist in der letzten Spalte angegeben.

Gitter	$r$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$V_e$
sc	1	(000)				$a^3$
bcc	2	(000)	$(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2})$			$a^3/2$
fcc	4	(000)	$(0\frac{1}{2}\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}0\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}\frac{1}{2}0)$	$a^3/4$

### Orthorhombische Gitter

Als weiteres System betrachten wir das orthorhombische System mit 3 ungleich langen, senkrecht aufeinander stehenden Achsen,

$$a_1 \neq a_2 \neq a_3 \quad , \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ .$$

Ein Kristall gehört zu diesem System, wenn mindestens 2 zweizählige Drehachsen oder mindestens 2 Symmetrieebenen vorhanden sind. Es existieren die vier in Abb. 7.9 gezeigten orthorhombischen Bravaisgitter. Beachte, dass hier auch ein basisflächenzentriertes orthorhombisches

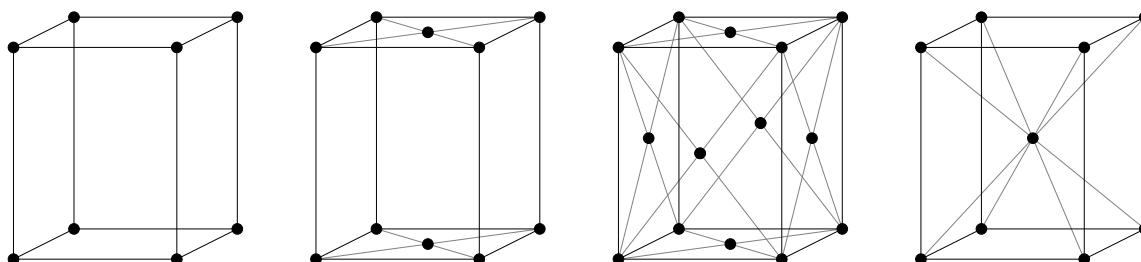


Abbildung 7.9: Die vier orthorhombischen Bravaisgitter.

Gitter auftritt.

Alle sieben Kristallsysteme enthalten das einfache Bravaisgitter. Es können auch – wie im orthorhombischen System – flächenzentrierte, raumzentrierte und/oder basisflächenzentrierte Gitter existieren.

Die sieben Kristallsysteme können also in verschiedenen Formen auftreten und man findet insgesamt 14 mögliche Bravaisgitter. Diese sind in der Tabelle 7.1 aufgeführt. Der internationalen Tabelle der Kristallographie folgend haben wir einfache Gitter mit P, flächenzentrierte mit F, raumzentrierte mit I und basisflächenzentrierte mit C bezeichnet. Man beachte, dass einige Systeme, zum Beispiel das triklin System, nur in einfacher Form vorliegen.

System	Gruppe	P	C	I	F	Längen	Winkel
triklin	$\mathcal{S}_2$	1	0	0	0	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90$
monoklin	$\mathcal{C}_{2h}$	1	1	0	0	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	$\alpha = \gamma = 90, \beta \neq 90$
orthorhombisch	$\mathcal{D}_{2h}$	1	1	1	1	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = \gamma = 90$
tetragonal	$\mathcal{D}_{4h}$	1	0	1	0	$a_1 = a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = \gamma = 90$
trigonal	$\mathcal{D}_{3h}$	1	0	0	0	$a_1 = a_2 = a_3$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90$
hexagonal	$\mathcal{D}_{6h}$	1	0	0	0	$a_1 = a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = 90, \gamma = 120$
kubisch	$\mathcal{O}_h$	1	0	1	1	$a_1 = a_2 = a_3$	$\alpha = \beta = \gamma = 90$

Tabelle 7.1: Die sieben Kristallsysteme bilden insgesamt 14 Bravaisgitter. Nur das orthorhombische System tritt als einfaches (P), basisflächenzentriertes (C), flächenzentriertes (F) und raumzentriertes (I) Bravaisgitter auf.

## 7.4 Kristallographischen Punktgruppen

Jedes der sieben Kristallsysteme kann mehrere Kristallklassen enthalten. So enthält das kubische System fünf Klassen. Es gibt insgesamt 32 Kristallklassen und deren Eigenschaften und Namen findet man zum Beispiel auf folgender Wikipedia-Seite.

$\mathcal{O}_h$ : **Das kubische oder reguläre System** mit drei gleich langen, senkrecht aufeinander stehenden Achsen ist das System mit der höchsten Symmetrie,

$$a_1 = a_2 = a_3 \quad , \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ .$$

Es gibt fünf kubischen Kristallklassen und diese sind in Tabelle 7.2 gelistet. Für jede Klasse sind die Anzahl Drehachsen für jede der möglichen Zähligkeiten und die Anzahl Spiegelebenen angegeben. Nur für die Klassen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{O}_h$  ist die Inversion eine Symmetrieoperation. Die  $\mathcal{T}$ -Klasse heisst tetraedisch und die  $\mathcal{T}_h$ -Klasse disdodekaedrisch (für die Namen der

$G$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{T}_h$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{T}_d$	$\mathcal{O}_h$
$c_2$	3	4	6	0	6
$c_3$	4	4	4	4	4
$c_4$	0	0	3	3	3
Spiegelebenen	0	3	0	6	9
Inversionszentrum	0	1	0	0	1

Tabelle 7.2: Die fünf kubischen Klassen. Davon existieren drei Bravaisgitter P, I, B.

anderen Klassen können Sie die obige Web-Adresse konsultieren). Beispiele von kubischen Systemen sind Steinsalz CaCl, Flußspat CaF<sub>2</sub> und Zinkblende ZnS.

$\mathcal{D}_{6h}$  : **Das hexagonale System** hat ein Achsenkreuz mit 2 gleich langen Achsen, die sich mit einem Winkel von 120 Grad schneiden, sowie einer senkrecht dazu stehende Achse die länger oder kürzer ist,

$$a_1 = a_2 \neq a_3 \quad , \quad \alpha = \beta = 90^0, \quad \gamma = 120^0 .$$

Ein Kristall gehört in das hexagonale System, wenn eine sechszählige Drehachse oder eine dreizählige mit dazu senkrechter Symmetrieebene vorhanden ist. Diese  $\mathbf{a}_3$ -Achse ist sechszählig, dazu kommen bis zu 6 zweizählige Achsen, sieben Spiegelebenen sowie das Inversionszentrum. Zum Beispiel heisst die Klasse  $\mathcal{D}_{6h}$  dihexagonal-dipyramidal. Hexagonale Systeme findet man in Quecksilberoxid HgO, Zink Zn, Magnesium Mg und Graphit C.

$G$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_{6h}$	$\mathcal{D}_6$	$\mathcal{D}_{6h}$	$\mathcal{C}_{6v}$	$\mathcal{D}_{3h}$	$\mathcal{C}_{3h}$
$c_2$	0	0	6	6	0	3	0
$c_3$	0	0	0	0	0	0	1
$c_6$	1	1	1	1	1	1	0
Spiegelebenen	0	1	0	7	6	3	1
Inversionszentrum	0	1	0	1	0	0	0

Tabelle 7.3: Die hexagonalen Kristallklassen. Es existiert nur das Bravaisgitter P.

$\mathcal{D}_{3h}$  : **Das trigonale System** hat ein Achsenkreuz mit gleichlangen Achsen und gleichen Winkeln,

$$a_1 = a_2 = a_3 \quad , \quad \alpha = \beta = \gamma \neq 90^0 .$$

Davon existieren die in Tabelle 7.4 aufgeführten fünf Klassen. Beispiele von trigonalen Systemen sind Calcit  $\text{CaCO}_3$ , Quarz  $\text{SiO}_2$  und Natriumnitrat  $\text{NaNO}_3$ .

$G$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_{3h}$	$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{C}_{3v}$	$\mathcal{D}_{3d}$
$c_2$	0	0	3	0	3
$c_3$	1	1	1	1	1
Spiegelebenen	0	1	0	3	3
Inversionszentrum	0	0	0	0	1

Tabelle 7.4: Die fünf trigonalen Kristallklassen. Es existiert nur das Bravaisgitter P.

$\mathcal{D}_{4h}$  : **Das tetragonale System** hat ein Achsenkreuz mit zwei gleich langen Achsen und einer davon verschiedenen  $\mathbf{a}_3$ -Achse. Diese Achse kann länger oder auch kürzer als die beiden anderen sein,

$$a_1 = a_2 \neq a_3 \quad , \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^0$$

Ein Kristall gehört zu diesem System, wenn eine einzige vierzählige Drehachse vorhanden ist. Es darf keine dreizählige Achse geben. Es existiert höchstens 1 vierzählige und 4 zweizählige Drehachsen, 5 Spiegelebenen sowie ein Inversionszentrum. Es gibt die in Tabelle 7.5 aufgeführten sieben Klassen im tetragonalen System. Beispiele von tetragonalen Systemen sind Zinndioxid  $\text{SnO}_2$ , Titandioxid  $\text{TiO}_2$  und Bleiwolframat  $\text{PbWO}_4$ .

$G$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{C}_{4h}$	$\mathcal{D}_4$	$\mathcal{C}_{4h}$	$\mathcal{D}_{2d}$	$\mathcal{D}_{4h}$
$c_2$	0	0	0	4	0	2	4
$c_4$	1	0	1	1	1	1	1
$s_4$	0	1	0	0	0	0	0
Spiegelebenen	0	0	1	0	4	2	5
Inversionszentrum	0	0	0	0	0	0	1

Tabelle 7.5: Die sieben tetragonalen Kristallklassen. Es gibt die Bravaisgitter  $P$  und  $I$ .

$\mathcal{D}_{2h}$ : **Das orthorhombische System** hat drei ungleich lange, senkrecht aufeinander stehende Achsen,

$$a_1 \neq a_2 \neq a_3 \quad , \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ .$$

Ein Kristall gehört in das orthorhombische System, wenn mindestens 2 zweizählige Drehachsen oder mindestens 2 Symmetrieebenen vorhanden sind. Es darf keine anderen Drehachsen geben. Die Klassen im orthorhombischen System sind in Tabelle 7.6 angegeben. Das System ist realisiert in Kaliumnitrat  $\text{KNO}_3$ , Bariumsulfat  $\text{BaSO}_4$  und Kaliumsulfat  $\text{K}_2\text{SO}_4$ .

$G$	$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{C}_{2v}$	$\mathcal{D}_{2h}$
$c_2$	3	1	3
Spiegelebenen	0	2	3
Inversionszentrum	0	1	1

Tabelle 7.6: Orthorhombische Kristallklassen. Davon existieren die Gitter  $P$ ,  $C$ ,  $I$  und  $F$ .

$\mathcal{C}_{2h}$ : **Das monokline System** hat drei ungleich langen Achsen, von denen sich zwei schiefwinklig kreuzen, während die dritte senkrecht zu diesen steht,

$$a_1 \neq a_2 \neq a_3 \quad , \quad \alpha = \beta = 90^\circ, \quad \gamma \neq 90^\circ .$$

Ein Kristall gehört in das monokline System, wenn nur eine zweizählige Drehachse und/oder eine Symmetrieebene vorhanden ist. Die drei Klassen sind in Tabelle 7.7 aufgezählt. Beispiele für monokline Systeme sind Gips  $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  und Borax  $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ .

$G$	$C_2$	$C_s$	$C_{2h}$
$c_2$	1	0	1
Spiegelebenen	0	1	1
Inversionszentrum	0	0	1

Tabelle 7.7: Die monoklinen Kristallklassen. Es gibt die Bravaisgitter  $P$  und  $C$ .

$S_2$  : **Das triklone System** hat 3 ungleich lange Achsen, die sich alle schiefwinklig kreuzen,

$$a_1 \neq a_2 \neq a_3 \quad , \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ .$$

Dieses System hat die kleinste Symmetrie aller Systeme. Ein Kristall ist triklin, wenn weder Symmetrieebenen noch Drehachsen vorhanden sind. Die zwei Klassen sind in Tabelle 7.8 angegeben. Es existierte jeweils nur das einfache Bravaisgitter. Beispiele für triklone Systeme sind Kupfervitriol  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  und Kaliumdichromat  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ .

$G$	$C_1$	$C_i$
Inversionszentrum	0	1

Tabelle 7.8: Die zwei triklinen Kristallklassen.

## 7.5 Aufgaben zu Kapitel 7

### Aufgabe 7.1: Gitter

Es sei  $e_1, e_2, \dots, e_n$  eine Basis von  $\mathbb{R}^n$ . Die Menge

$$\left\{ \sum_{k=1}^n m_k e_k \mid m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

nennt man das von der Basis erzeugte  $n$ -dimensionale Gitter.

1. Zeigen Sie, dass ein  $n$ -dimensionales Gitter eine Untergruppe von  $(\mathbb{R}^n, +)$  ist!
2. Zeigen Sie, dass jedes Gitter in  $\mathbb{R}^n$  isomorph zum  $n$ -fachen direkten Produkt von  $(\mathbb{Z}, +)$  mit sich selbst ist.



## 8 Lie-Gruppen

*... without fantasy one would never become a mathematician, and what gave me a place among the mathematicians of our day, despite my lack of knowledge and form, was the audacity of my thinking.*

SOPHUS LIE

Im Gegensatz zu diskreten Gruppen können bei kontinuierlichen Gruppen die Elemente durch stetige Änderungen ineinander überführt werden. Das einfachste Beispiel ist die Gruppe  $U(1)$  der unimodularen komplexen Zahlen. Ein Gruppenelement wird durch eine komplexe Zahl  $e^{i\alpha}$  dargestellt. Ein weniger einfaches Beispiel ist die früher besprochenen Gruppe  $O(3)$  der Drehungen im Euklidischen Raum.

Die Elemente kontinuierlicher Gruppen können durch Parameter charakterisiert werden  $g(\alpha)$  mit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und

$$g(\alpha)g(\beta) = g(\gamma), \quad \gamma = m(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n. \quad (8.1)$$

Die Anzahl  $n$  der notwendigen reellen Parameter ist gleich der Dimension der Gruppe. Je nach Art der Gruppe gibt es verschiedene Einschränkungen an diese Parametrisierung. Der Winkel war ein Beispiel für eine Parametrisierung der Gruppenelemente in  $U(1)$ . Obwohl  $\alpha \in [0, 2\pi]$  scheinbar am Rande springen muss, ändert sich das Gruppenelement dort dennoch stetig, da ja die Winkelfunktionen periodisch sind. Anders ausgedrückt: Man kann an jedem Wert des Winkels neue Koordinaten einführen, von denen die Gruppenelemente stetig abhängen. Kann die Gruppe auf diese Art durch Überdeckungen im Parameterraum dargestellt werden, und erfüllen diese Überdeckungen einige relativ natürliche Forderungen, dann handelt es sich um eine *Lie-Gruppe*. Die  $U(1)$  ist - genauso wie die schon besprochene Gruppe  $SO(3)$  - eine kompakte Lie-Gruppe. Dagegen bilden die *Translationen* im  $\mathbb{R}^3$ ,

$$T(\mathbf{a}) : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad \text{mit} \quad T(\mathbf{a})T(\mathbf{b}) = T(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

eine nichtkompakte Lie-Gruppe.

Eine Lie-Gruppe zeichnet sich dadurch aus, dass die Funktion, die im Parameterraum die Gruppemultiplikation ausdrückt, in (8.1) also die Funktion  $m(\alpha, \beta)$ , in ihren Argumenten analytisch ist. Wie wir bei der  $U(1)$  gesehen haben, sollte man geeignete Überdeckungen des Parameter-raums zulassen um die scheinbaren Unstetigkeiten zu beheben. Eine  $n$ -Parameter Lie-Gruppe ist kompakt, wenn der Parameterbereich kompakt (beschränkt und abgeschlossen) ist. Im Allgemeinen definiert man:

**Definition 28 (Lie-Gruppe)** Eine Lie-Gruppe  $G$  ist eine Gruppe, die zugleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, derart, dass die Multiplikation

$$G \times G \mapsto G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$$

und die Inversenbildung

$$G \mapsto G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

jeweils stetige und differenzierbare Abbildungen sind.

Um diese Definition zu verstehen, erinnere ich an die Definition einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit.

## 8.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit kann lokal mit einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^n$  identifiziert werden (siehe einschlägige Lehrbücher über Differentialgeometrie [19, 20]). Etwas genauer:

**Definition 29 (Mannigfaltigkeit)** Eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein topologischer Raum mit folgenden Eigenschaften

1. er ist Hausdorffsch,
2. er hat eine abzählbare Basis,
3. er ist lokal Euklidisch.

Die erste Eigenschaft bedeutet, dass zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen haben und deshalb getrennt werden können. Die zweite Bedingung besagt, dass es eine Menge  $\mathcal{B}$  von abzählbar vielen offenen Mengen gibt, so dass jede nicht-leere offene Menge eine Vereinigung von solchen aus  $\mathcal{B}$  ist. Charakteristisch ist die letzte Eigenschaft, die wir etwas genauer diskutieren wollen. Sie verlangt, dass es zu *jedem Punkt*  $p \in M$  eine Umgebung  $U$  und einen Homöomorphismus (bijektiv und beidseitig stetig) gibt,

$$\varphi : U \mapsto \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.}$$

Jeder Punkt besitzt also eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Menge im  $\mathbb{R}^n$  ist. Der Homöomorphismus  $\varphi$  heißt Karte von  $M$  und  $U$  das zugehörige Kartengebiet. Eine Menge von Karten  $\{\varphi_\alpha | \alpha \in A\}$  mit Gebieten  $U_\alpha$  heißt Atlas von  $M$ , wenn

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M. \tag{8.2}$$

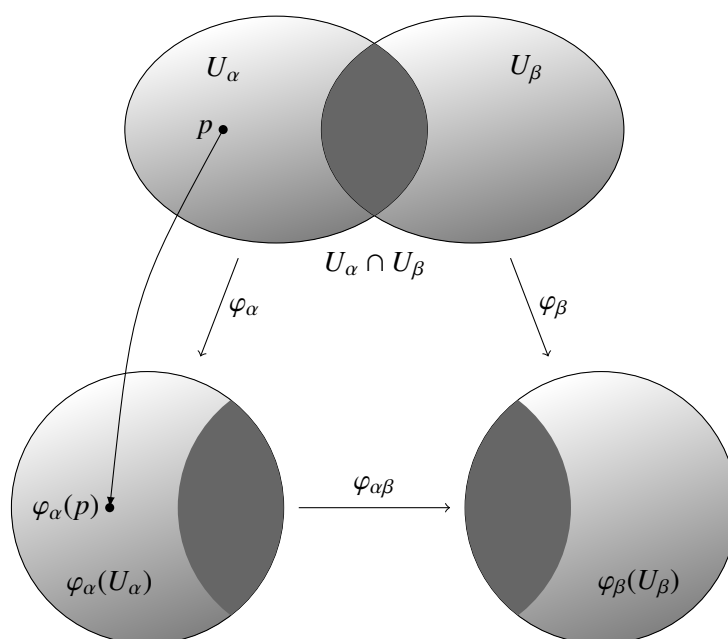


Abbildung 8.1: Die Gruppenmannigfaltigkeit wird lokal durch Karten beschrieben

### Modellierung einer Mannigfaltigkeit

Eine Mannigfaltigkeit lässt sich lokal durch Karten aus einem Atlas beschreiben.

Zu zwei Karten  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$  sind auf dem Durchschnitt ihrer Gebiete  $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$  beide Homöomorphismen  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$  definiert, wie in der Abbildung gezeigt. Man erhält daher einen *Kartenwechsel* (Koordinatentransformation)  $\varphi_{\alpha\beta}$  als Homöomorphismus zwischen offenen Mengen des  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \mapsto \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}), \quad U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta. \quad (8.3)$$

Eine Mannigfaltigkeit heißt *differenzierbar* (von der Klasse  $C^k$ ), wenn sich  $M$  so mit Karten überdecken lässt, dass alle auftretenden Kartenwechsel differenzierbar (von der Klasse  $C^k$ ) sind. Nach dieser Definition sind dann alle Koordinatentransformationen Diffeomorphismen. Wir erinnern an die

**Definition 30 (Diffeomorphismus)** Seien  $V, V' \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi : V \mapsto V'$  eine differenzierbare Abbildung. Hat  $\varphi$  ein differenzierbares Inverses  $\varphi^{-1}$ , dann nennt man  $\varphi$  einen *Diffeomorphismus*.

### Lineare Lie-Gruppen

In dieser Vorlesung haben wir es oft mit linearen Lie-Gruppen zu tun. Dies sind Untergruppen der linearen Gruppe  $GL(n, \mathbb{C})$  bzw.  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Dann genügt es, differenzierbare Mannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^n$  zu betrachten, und folgender Satz (den wir nicht beweisen) ist hier nützlich:

**Satz 30** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass  $Df(x)$  den Rang  $p$  hat, wenn immer  $f(x) = 0$  ist. Dann ist  $f^{-1}(0)$  eine  $n - p$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ .

Mit anderen Worten: jede Niveauläche einer differenzierbaren Abbildung ist eine Mannigfaltigkeit, wenn die Jacobi-Matrix  $Df$  auf der Niveauläche den maximal möglichen Rang  $p$  hat.

### Atlanten für Sphären

Aus diesem Satz folgt unmittelbar, dass die Sphäre  $S^n$  eine Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, denn  $S^n = f^{-1}(0)$  für die Funktion  $f : x \rightarrow \|x\| - 1$ . Dies folgt auch aus der ursprünglichen Definition einer Mannigfaltigkeit. Dazu überdecken wir  $S^n$  mit zwei Koordinatenumgebungen

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, x_{n+1} > -1/2\}$$

$$H_- = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, x_{n+1} < 1/2\}.$$

$H_+$  kann mit der stereographische Projektion vom Südpol und  $H_-$  mit der Projektion vom Nordpol homöomorph in eine offene Menge im  $\mathbb{R}^n$  abgebildet werden, siehe Abb. 8.2. Die Koordinatentransformation ist beliebig oft stetig differenzierbar. Damit ist  $S^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit

Aus differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kann man weitere differenzierbare Mannigfaltigkeiten gewinnen.

- Seien zum Beispiel  $M \sim \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  und  $M' \sim \{U'_\beta, \varphi'_\beta\}$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dann ist ihr Produkt  $M \times M' \sim \{U_\alpha \times U'_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi'_\beta\}$  ebenfalls eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.
- Jede offene Untermenge  $N$  einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist offensichtlich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Man wähle als Kartengebiete von  $N$  die offenen Mengen  $N \cap U_\alpha$ , wobei die  $U_\alpha$  die Mannigfaltigkeit  $M$  überdecken.

Eine Abbildung  $f : M \rightarrow M'$  zwischen Mannigfaltigkeiten lässt sich immer in lokalen Koordinaten beschreiben. Es sei  $f(p) = p' \in M'$  und  $(U, \varphi)$  sowie  $(U', \varphi')$  Umgebungen von  $p$  und  $p'$ . Seien weiter  $x = \varphi(p)$  und  $x' = \varphi'(p')$  die Koordinaten der Punkte  $p$  und  $p'$ . Dann ist

$$(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (\varphi' \circ f) \left( \underbrace{\varphi^{-1}(x)}_p \right) = \varphi'(p') = x'.$$

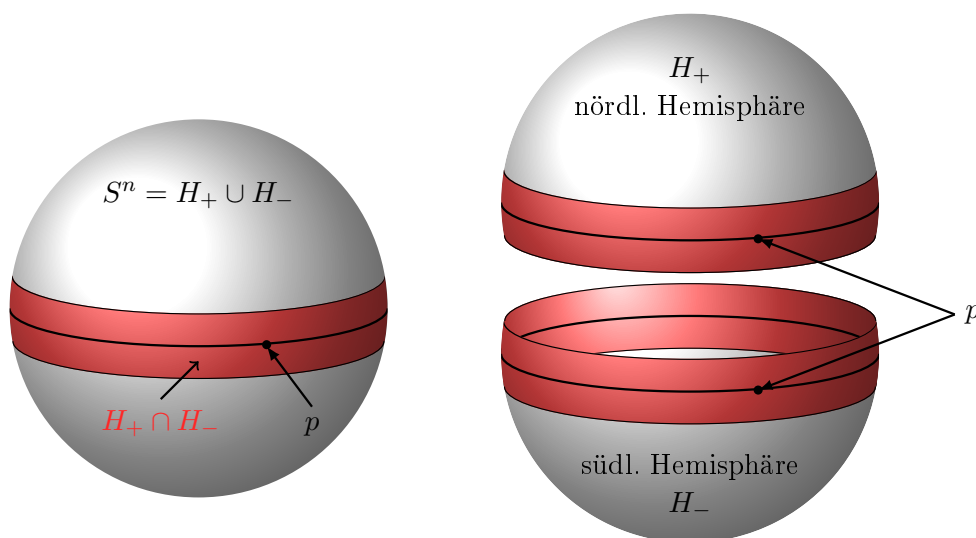


Abbildung 8.2: Die Sphäre kann mit zwei Karten überdeckt werden. Sie ist eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

### Differenzierbare Abbildungen

Bezüglich lokaler Koordinaten ist  $f : M \rightarrow M'$  gleich  $(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})$ . Die Abbildung heißt differenzierbar, wenn sie bezüglich lokaler Koordinaten differenzierbar ist.

Diese Eigenschaft ist unabhängig von den lokalen Koordinaten, da die Kartenwechsel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Diffeomorphismen sind.

#### 8.1.1 Lie-Gruppen

Eine Lie-Gruppe  $G$  ist nun gleichzeitig eine Gruppe und eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, derart, dass die Multiplikation und Inversion differenzierbare Abbildungen sind. Jedem Gruppenelement in einer Koordinatenumgebung  $U$  sind eindeutig  $n$  reelle Koordinaten zugeordnet,  $g \rightarrow \alpha \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Bezüglich dieser lokalen Koordinaten hat die Gruppenmultiplikation die Darstellung

$$(\alpha, \beta) \mapsto m(\alpha, \beta),$$

wobei  $m$  die Funktion in (8.1) bezeichnet. Die Inversion ist

$$g^{-1}(\alpha) = g(\text{inv}(\alpha))$$

und hat die Koordinatendarstellung

$$\alpha \mapsto \text{inv}(\alpha).$$

Wenn die beiden Abbildungen  $m$  und  $\text{inv}$  stetig differenzierbar sind, dann ist  $G$  eine Lie-Gruppe.

### 8.1.2 (Wege)Zusammenhängende Lie-Gruppen

Wichtig für die Theorie der kontinuierlichen Gruppen ist der Begriff *zusammenhängend*. Sei  $G$  eine kontinuierliche Gruppe versehen mit einer Topologie, so dass die Gruppenmultiplikation und die Inversion stetige Abbildungen sind. Eine derartige Gruppe heißt *topologische Gruppe*. Jede Lie-Gruppe ist eine topologische Gruppe. Ein *Weg* in  $G$  ist eine stetige Abbildung  $w : [0, 1] \rightarrow G$ . Zwei Gruppenelemente heißen *verbindbar*,  $g_1 \sim g_2$ , wenn ein Weg  $w$  in  $G$  existiert der sie verbindet,  $w(0) = g_1$  und  $w(1) = g_2$ . Alle  $g \in G$  sind über den konstanten Weg mit sich selbst verbindbar. Weiter folgt aus  $g_1 \sim g_2$  mit dem Weg  $w$ , dass  $g_2 \sim g_1$  mit dem Weg  $\tilde{w}(t) = w(1-t)$  verbindbar sind. Ist  $g_1$  mit  $g_2$  durch einen Weg  $w_1$  verbindbar und  $g_2$  mit  $g_3$  durch einen Weg  $w_2$ , so verbindet der zusammengesetzte Weg

$$(w_1 \circ w_2)(t) = \begin{cases} w_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ w_2(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (8.4)$$

die Elemente  $g_1$  mit  $g_3$ . Also ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation.

**Definition 31 (Wege-Zusammenhangskomponente)** Die Wege-Zusammenhangskomponenten von  $G$  sind die Äquivalenzklassen bezüglich  $\sim$ . Besteht  $G$  aus einer einzigen Komponente, so heißt  $G$  *wegzusammenhängend*.

Ein wegzusammenhängender Raum ist immer auch zusammenhängend. Für Mannigfaltigkeiten gilt auch die Umkehrung. Es gilt der folgende

**Satz 31** Es sei  $G_0$  die Zusammenhangskomponente von  $G$ , die das Einselement  $e$  enthält. Dann ist  $G_0$  ein Normalteiler von  $G$  und  $G/G_0 = \{\text{Zusammenhangskomponenten von } G\}$ .

Zum Beweis betrachten wir einen stetige Weg  $w$  der  $e$  mit  $g_0 \in G_0$  verbindet. Dann verbindet der stetige Weg

$$\tilde{w}(t) = gw(t)g^{-1}$$

das Element  $e$  mit  $gg_0g^{-1}$ . Daher ist mit  $g_0$  für jedes  $g \in G$  auch  $gg_0g^{-1}$  in  $G_0$ . Dies beweist die erste Aussage. Den Beweis der zweiten Aussage überlasse ich Ihnen.

### 8.1.3 Lie-Untergruppen

**Definition 32 (Lie-Untergruppe, Lie-Normalteiler)** Eine Lie-Untergruppe  $H$  einer Lie-Gruppe  $G$  ist eine Untermannigfaltigkeit  $H$  von  $G$ , die gleichzeitig eine Untergruppe von  $G$  ist. Ein Normalteiler  $N$ , der zugleich eine Lie-Untergruppe ist, heißt *Lie-Normalteiler*.

Es gilt der folgende nützliche, auf John von Neumann (für lineare Lie'sche Gruppen) und Elie Cartan zurückgehene Satz:

**Satz 32 (Cartanscher Untergruppensatz)** *Eine Untergruppe (Normalteiler)  $H$  einer Lie-Gruppe  $G$  ist genau dann eine Lie-Untergruppe (Lie-Normalteiler), wenn  $H$  abgeschlossen ist.*

Ohne Beweis notieren wir noch:

1. Das Produkt  $G_1 \times G_2$  zweier Lie-Gruppen ist wieder eine Lie-Gruppe.
2. Ist  $N$  ein Lie-Normalteiler einer Lie-Gruppe  $G$ , dann ist die Faktorgruppe  $G/N$  eine Lie-Gruppe.

An dieser Stelle ist es noch interessant zu wissen, dass eine zusammenhängende Lie-Gruppe nur wenig diskrete Normalteiler haben kann:

**Lemma 11** *Für eine zusammenhängende Lie-Gruppe liegt ein diskreter Normalteiler im Zentrum der Gruppe.*

Daher hat zum Beispiel  $SO(3)$  keinen diskreten Normalteiler. Das Lemma ist eine Konsequenz von

**Satz 33** *Es sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe und  $U$  eine offene Umgebung von  $e$ . Dann wird  $G$  von  $U$  erzeugt, d.h. jedes Element  $g \in G$  ist ein Produkt  $g = g_1 g_2 \cdots g_n$  mit  $g_i \in U$ .*

Zum Beweis nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $U = U^{-1}$  an. Dabei ist  $U^{-1}$  die Menge der Inversen Elemente von  $U$ . Hat  $U$  diese Eigenschaft nicht, dann wählen wir  $U \cap U^{-1}$  als neue offene Umgebung. Wir zeigen zuerst, dass die von der offenen Umgebungen  $U$  von  $e$  erzeugte Untergruppe  $H \leq G$  offen ist: Für ein beliebiges  $a \in H$  ist nämlich  $aU = \ell_a U \subset H$  eine offene Umgebung von  $a$ , da die Linkstranslation  $\ell_a$  ein Diffeomorphismus ist. Deshalb ist  $H$  eine offene Menge. Wir bilden nun die *offenen* Restklassen  $H, bH, b'H, \dots$ . Wegen

$$H \cup \left( \bigcup_{b \neq e} bH \right) = G$$

muss  $H$  als Komplement einer offenen Menge auch abgeschlossen sein. Die Untergruppe  $H \subset G$  ist also offen, abgeschlossen und nicht leer und deshalb ist für eine zusammenhängende Gruppe  $H = G$ . Wir haben benutzt, dass ein topologischer Raum genau dann zusammenhängend ist, wenn die einzigen abgeschlossenen offenen Mengen die leere Menge und der Raum selbst sind.

Man kann die Umgebung  $U$  von  $e$  so klein wählen, dass sie in einem Kartengebiet des Atlas von  $G$  liegt. Gewisse Eigenschaften die in  $U$  gelten, gelten dann auch für die ganze Gruppe.

Ist zum Beispiel die Multiplikation in  $U$  kommutativ dann ist die Gruppe Abelsch.

---

?

---

Überlegen Sie sich, warum aus dem Satz das Lemma 11 über diskrete Normalteiler folgt.

---

## 8.2 Die Lie-Gruppen $U(2)$ und $SU(2)$

Wir werden die eingeführten Begriffe an der (speziellen) unitären Gruppe in 2 Dimensionen illustrieren. Diese Lie-Gruppe ist nicht nur für Übungszwecke sehr geeignet. Sie ist die wichtigste Gruppe in der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Die quantenmechanischen Zustände mit festem Drehimpuls bilden eine irreduzible Darstellung der quantenmechanischen Drehgruppe  $SU(2)$ . Die Gruppe ist auch essentiell für ein Verständnis des Spins von Elementarteilchen. Desweiteren tritt sie als Eichgruppe der schwachen Wechselwirkung auf, siehe Abschnitt 18.5

Wir betrachten den 2-dimensionalen komplexen Vektorraum  $\mathbb{C}^2$ . Nach Wahl einer Basis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  ist jeder Vektor  $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$  eindeutig durch ein 2-Tupel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

charakterisiert und jede lineare Abbildung durch eine  $2 \times 2$ -Matrix  $A = (a_{ij})$ . Eine lineare Abbildung wirkt dann auf das zu einem Vektor gehörige 2-Tupel  $\mathbf{x}$  gemäß

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}, \quad \text{mit} \quad (A\mathbf{x})_i = \sum_j a_{ij}x_j.$$

Die unitären Matrizen (wir bezeichnen sie mit  $U$ , um sie von beliebigen Matrizen  $A$  zu unterscheiden) sind dadurch ausgezeichnet, dass sie das hermitesche Skalarprodukt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 = \sum_{i=1}^2 \bar{x}_i y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^2 \quad (8.5)$$

invariant lassen,  $(U\mathbf{x}, U\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Eine Matrix  $U$  ist also genau dann unitär, wenn gilt

$$U^\dagger U = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit haben die beiden Spaltenvektoren von  $U$  die Länge eins und stehen senkrecht aufeinander.



**Die kontinuierliche Gruppe  $U(2)$** 

Die Menge aller unitären  $2 \times 2$ -Matrizen

$$U(2, \mathbb{C}) \equiv U(2) = \{U \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid U^\dagger U = \mathbb{1}\} \quad (8.6)$$

bilden eine Gruppe, die sogenannte *unitäre Gruppe*.

Die Gruppenverknüpfung ist die Matrixmultiplikation oder die Komposition der zu den Matrizen gehörenden linearen Transformationen. Da  $U(2)$  über eine Invarianzeigenschaft definiert wurde, ist das Produkt von zwei unitären Matrizen und das Inverse einer unitären Matrix ebenfalls unitär. Die Einheitsmatrix ist das Einselement der Gruppe.

Da die Spalten orthogonal sind, können wir  $U$  wie folgt parametrisieren,

$$U = \begin{pmatrix} a & \lambda \bar{b} \\ -b & \lambda \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Damit die Spalten die Länge eins haben, muss weiterhin  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  und  $|\lambda| = 1$  gelten. Es folgt insbesondere, dass die Determinante jeder unitären Matrix den Betrag 1 hat,

$$|\det U| = |\lambda| = 1.$$

Damit ist auch  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ , oder  $U^\dagger = U^{-1}$ , und die beiden Zeilen sind ebenfalls zwei orthonormierte Vektoren. Die Anzahl unabhängiger reeller Parameter ist 4. Die Gruppe  $U(2)$  ist eine 4-dimensionale kontinuierliche Gruppe. Es wird sich zeigen, dass  $U(2)$  eine Liesche Gruppe ist.

Die Gruppe  $U(2)$  enthält als wichtigen Normalteiler die *spezielle unitäre Gruppe*  $SU(2)$  der unitären Matrizen mit Determinante 1,

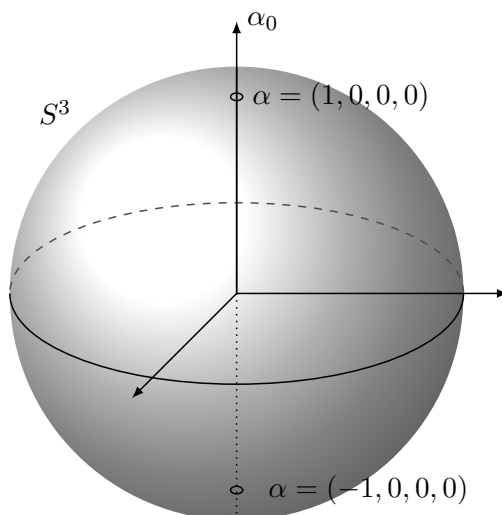
$$SU(2) = \left\{ U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}. \quad (8.7)$$

$SU(2)$  ist abgeschlossen und nach dem Cartan'schen Untergruppensatz damit sogar ein Lie-Normalteiler.  $SU(2)$  ist auch die Kommutator-Untergruppe von  $U(2)$ . Die Zuordnung

$$\left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\Re a, \Im a, \Re b, \Im b) \mid \sum \alpha_i^2 \equiv \alpha^2 = 1 \right\} \mapsto SU(2) \quad (8.8)$$

**Die Gruppe  $SU(2)$  ist eine Sphäre**

Die Gruppenmannigfaltigkeit von  $SU(2)$  ist die 3-dimensionale Sphäre  $S^3$  (siehe Abbildung 8.3 für die analoge Situation in einer Dimension weniger). Es ist eine zusammenhängende  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

Abbildung 8.3: Die Gruppe  $SU(2)$  kann mit  $S^3$  identifiziert werden.

Jede Matrix in  $U(2)$  hat folgende Darstellung:

$$U = e^{i\alpha} \cdot U', \quad U' \in SU(2).$$

Aber  $e^{i\alpha} \cdot U'$  und  $-e^{i\alpha} \cdot U'$  sind dieselben Nebenklassen, da  $-1 \in SU(2)$  ist, und deshalb ist

$$U(2)/SU(2) \cong \{ e^{i\alpha} \mid e^{i\alpha} \sim -e^{i\alpha} \} = U(1)/\mathbb{Z}_2. \quad (8.9)$$

Die Abelsche Gruppe  $U(1)$  tritt auch als Untergruppe von  $SU(2)$  auf. Ihre Elemente sind die diagonalen Matrizen in  $SU(2)$ ,

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} < SU(2).$$

Wir dürfen die beiden Diagonalelemente getrennt betrachten und erhalten die Abelsche Gruppe

$$U(1) = \{ e^{i\alpha} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi \}. \quad (8.10)$$

Sie ist ein Grenzfall der zyklischen Gruppen,  $U(1) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n$ . Nun wollen wir die Frage beantworten, wann zwei Elemente in  $SU(2)$  konjugiert sind. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass jede unitäre Matrix vermittels einer speziell-unitären Matrix diagonalisiert werden kann. Deshalb gibt es ein  $V \in SU(2)$ , für das

$$U = VDV^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

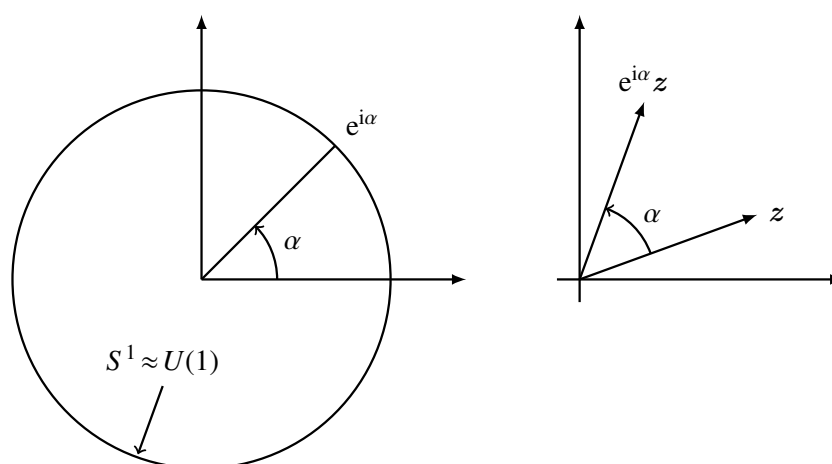


Abbildung 8.4: Die Gruppe  $U(1)$  kann mit  $S^1$  identifiziert werden.

wobei  $\exp(i\lambda)$  und  $\exp(-i\lambda)$  die Eigenwerte von  $U$  sind. Dies bedeutet, dass zwei Elemente in  $SU(2)$  konjugiert zueinander sind wenn sie dieselben Eigenwerte haben. Da es noch eine Konjugation gibt, welche die beiden Eigenwerte vertauscht,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda} \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

kommt es nicht auf die Reihenfolge an, in der wir die Eigenwerte nummerieren. Deshalb gilt der

**Satz 34 (konjugierte  $SU(2)$ -Matrizen)** *Zwei Matrizen  $U$  und  $U'$  in  $SU(2)$  sind genau dann zueinander konjugiert, wenn sie dieselbe Spur haben,  $\text{Sp}(U) = \text{Sp}(U')$ .*

Wir haben gezeigt, dass  $\text{Sp}(U) = \text{Sp}(U')$  die Ähnlichkeit von  $U$  und  $U'$  impliziert. Sind umgekehrt die Spuren verschieden, dann können die beiden Matrizen nicht konjugiert zueinander sein, da  $\text{Sp}(VUV^{-1}) = \text{Sp}U$  ist.

Das Zentrum von  $SU(2)$  enthält alle Matrizen  $\{z\}$ , die mit allen Matrizen in  $SU(2)$  kommutieren. Insbesondere müssen die Zentrumselemente mit den diagonalen Matrizen  $D$  in (8.11) vertauschen. Dies ist nur möglich, wenn sie diagonal sind,  $z = \text{diag}(a, \bar{a})$ . Sie müssen aber auch mit der nicht-diagonalen Matrix in (8.12) vertauschen, was  $a = \bar{a}$  nach sich zieht. Da  $a$  auch noch den Betrag 1 haben muss, folgt schlussendlich der

**Satz 35 (Zentrum)** *Das Zentrum von  $SU(2)$  ist  $Z = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ . Es ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_2$ .*

Es drängt sich hier die Frage nach der Faktorgruppe  $SU(2)/Z$  auf. Wir werden den folgenden Satz beweisen:

**Satz 36** Die Faktorgruppe  $SU(2)/Z$ , wobei  $Z = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$  das Zentrum von  $SU(2)$  ist, ist isomorph zur Gruppe  $SO(3)$  der eigentlichen Drehungen.

Als Nächstes werden wir diesen Isomorphismus explizit konstruieren.

### 8.2.1 Pauli-Matrizen

Um einen direkten Zusammenhang zwischen  $SU(2)$  und  $SO(3)$  herzustellen, ist es nützlich die hermiteschen und spurlosen *Pauli-Matrizen* einzuführen,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8.13)$$

deren Produkte bis auf die Identität wieder eine Pauli-Matrix ist,

$$\sigma_i \sigma_j = \mathbb{1} \delta_{ij} + i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (8.14)$$

Jede hermitesche und spurlose Matrix  $A$  ist eine reelle Linearkombination dieser Matrizen,

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \quad (8.15)$$

und hat die Determinante

$$\det(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{a}^2. \quad (8.16)$$

Für jede unitäre Matrix  $U$  ist wegen  $U^\dagger = U^{-1}$  mit  $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  auch  $U(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})U^{-1}$  hermitesch und spurlos. Also muss es einen (von  $U$  abhängenden) Vektor  $\mathbf{b}$  geben, so dass gilt

$$U(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})U^{-1} = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

wobei  $\mathbf{b}$  linear von  $\mathbf{a}$  abhängt. Nehmen wir die Determinante dieser Gleichung

$$\det(U(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})U^{-1}) = \det(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{a}^2 = \det(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{b}^2,$$

dann folgt:

#### Der Gruppenhomomorphismus $SU(2) \mapsto SO(3)$

Die lineare Abbildung  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$  auf  $\mathbb{R}^3$  ist längenerhaltend und deshalb existiert eine  $U$ -abhängige Drehung  $R$  mit

$$U(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})U^{-1} = (R(U) \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad R^T(U)R(U) = \mathbb{1}_3. \quad (8.17)$$

Weiterhin gilt für beliebige  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (R(U_1 U_2) \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\sigma} &= (U_1 U_2) (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) (U_1 U_2)^{-1} = U_1 (U_2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) U_2^{-1}) U_1^{-1} \\ &= U_1 ((R(U_2) \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\sigma}) U_1^{-1} = (R(U_1) R(U_2) \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (8.18)$$

und deshalb ist die Abbildung  $U \mapsto R(U)$  ein *Gruppenhomomorphismus*  $SU(2) \rightarrow O(3)$ ,

$$R(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad R(U_1 U_2) = R(U_1) R(U_2). \quad (8.19)$$

Wir wollen uns davon überzeugen, dass die  $R(U)$  *eigentliche Drehungen* sind. Wir müssen beweisen, dass Matrizen im Bild des Homomorphismus die Determinante 1 haben. Wegen  $R(\mathbb{1}_2) = \mathbb{1}_3$  ist die dreidimensionale Einheitsmatrix offensichtlich im Bild des Homomorphismus. Diese Matrix hat die Determinante 1. Nun hängt  $R(U)$  aber stetig von den Elementen der zusammenhängenden Lie-Gruppe  $SU(2)$  ab. Deshalb muss für alle Matrizen im Bild des Homomorphismus die Determinante gleich 1 sein, da diese nicht springen kann.

?

Überlegen Sie sich, dass dieser Homomorphismus surjektiv ist.

Es bleibt die Frage nach dem Kern des Homomorphismus oder die Frage nach denjenigen  $SU(2)$ -Matrizen, für die  $U(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})U^{-1} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  für alle  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  gilt. Offensichtlich liegen  $\mathbb{1}$  und  $-\mathbb{1}$  im Kern. Eine Rechnung zeigt, dass dies alle Elemente sind, so dass  $\text{Kern} = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ . Nach dem ersten Isomorphiesatz ist damit

$$SU(2)/\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \cong SO(3). \quad (8.20)$$

Die einfach zusammenhängende quantenmechanische Drehgruppe  $SU(2)$  ist die zweifache universelle Überlagerung der Gruppe der Drehungen im Raum.

Am Ende des Kapitels werden wir Überlagerungen von nicht einfach-zusammenhängenden Lie-Gruppen besprechen.

## 8.3 Matrixgruppen

Eine quadratische Matrix repräsentiert eine lineare Abbildung bezüglich einer Basis in einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{V}$  mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ . Wir wählen eine orthonormierte Basis  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Einem Vektor  $\mathbf{r}$  entspricht dann das Tupel  $\mathbf{x}$  mit Elementen  $x_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{r})$  und einer linearen Abbildung  $A : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$  die Matrix mit Elementen  $a_{ij} = (\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j)$ . Die lineare Abbildung ist dann gegeben durch (siehe auch Abschnitt 5.2)

$$x_i \mapsto x'_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (a_{ij}, x_i \in \mathbb{K})$$

oder in Matrixnotation

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n, \mathbb{K}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n, \quad (8.21)$$

wobei wir dasselbe Symbol für die Matrix wie für die lineare Abbildung benutzen. Stellt man neben der Invertierbarkeit keine Bedingungen an die Matrizen, so erhält man die nicht-kompakte *allgemeinen linearen Gruppe* (general linear group)

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{für } \mathcal{V} = \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \text{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \text{für } \mathcal{V} = \mathbb{C}^n. \quad (8.22)$$

Wir fassen diese Gruppen als Teilmengen von  $\mathbb{R}^{n^2}$  oder  $\mathbb{C}^{n^2}$  auf, indem wir eine Matrix  $A$  als Punkt  $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn})$  im  $\mathbb{R}^{n^2}$  bzw.  $\mathbb{C}^{n^2}$  auffassen. Diese Identifikation macht die Gruppe  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$  zu einem metrischen Raum mit (quadrierten) Abstand

$$d(A, B)^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|^2 = \text{Sp}(A - B)^\dagger (A - B) = \|A - B\|_{\text{Frob}}^2. \quad (8.23)$$

Rechts steht das Quadrat der Frobenius-Norm der Differenzmatrix. Die  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  und  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  bilden offene Untermengen von  $\mathbb{R}^{n^2}$  und  $\mathbb{C}^{n^2}$ . Ihre (reelle) Dimension ist jeweils gleich der Anzahl frei wählbarer Matrixelemente,

$$\dim(\text{GL}(n, \mathbb{R})) = n^2 \quad \text{und} \quad \dim(\text{GL}(n, \mathbb{C})) = 2n^2. \quad (8.24)$$

Matrixgruppen sind nun Lie-Untergruppen von  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ . Es gilt nun der

**Satz 37** *Sei  $G$  eine Untergruppe von  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ . Dann sind die Multiplikation  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(A, B) \rightarrow AB$  und die Inversion  $G \rightarrow G$ ,  $A \rightarrow A^{-1}$  stetige Abbildungen.*

*Beweis:* Die Matrixelemente von  $AB$  sind Polynome der Matrixelemente von  $A$  und  $B$  und somit stetig. Die Matrixelemente von  $A^{-1}$  sind nach der Cramerschen Regel rationale Funktionen in den Matrixelementen von  $A$ . Der Nenner ist das Polynom  $\det A$ , das in  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$  nie verschwindet. Also ist  $A \rightarrow A^{-1}$  ebenfalls stetig.

### 8.3.1 Untergruppen der $\text{GL}(n, \mathbb{K})$

Für jede Untergruppe von  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$  muss stets gelten (vgl. Gruppenaxiome):

- $\det A$  darf nicht Null sein damit  $A^{-1}$  existiert.
- Die  $n$ -dimensionale Einheitsmatrix  $\mathbb{1}_n$  muss in der Untergruppe liegen.

Durch zusätzliche, zum Beispiel mit den Annahmen in Satz 30 auf Seite 112 verträgliche Forderungen an die Matrizen, erhält man weitere Lie-Gruppen als Untergruppen von  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ .

**Spezielle lineare Gruppen** sind durch  $\det A = 1$  charakterisiert,

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\} = \mathrm{Kern}(\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*). \quad (8.25)$$

Die nicht-kompakte Gruppe  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$  ist ein Normalteiler von  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ , da sie gleich dem Kern des Homomorphismus  $A \rightarrow \det A$  von  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$  in die multiplikative Gruppe  $\mathbb{K}^*$  ist. Die Dimensionen der speziellen linearen Gruppen sind

$$\dim(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})) = n^2 - 1 \quad \text{und} \quad \dim(\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})) = 2n^2 - 2. \quad (8.26)$$

Die entsprechenden linearen Transformationen erhalten das Volumen und die Orientierung. Insbesondere spielt die Lie-Gruppe  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  als Überlagerung der Lorentzgruppe eine wichtige Rolle in der relativistischen Quantenmechanik.

**Orthogonale Gruppen** enthalten lineare Transformationen im  $\mathbb{R}^n$ , die das Euklidische Skalarprodukt  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum x_i y_i$  von Vektoren unverändert lassen,

$$(R\mathbf{x}, R\mathbf{y}) = (R^T R\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (8.27)$$

Damit ist

$$\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid R^T R = R R^T = \mathbb{1}_n\}. \quad (8.28)$$

Die Dimensionen der kompakten orthogonalen Gruppen sind

$$\dim(\mathrm{O}(n)) = n(n-1)/2. \quad (8.29)$$

Für  $n = 3$  ist dies die bereits vielfach diskutierte 3-dimensionale Gruppe der eigentlichen und uneigentlichen Drehungen im Raum. Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist  $\pm 1$ . Ebenfalls von Relevanz in der Physik sind die *pseudo-orthogonalen* Gruppen, zum Beispiel die Lorentzgruppe. Der Begriff pseudo-orthogonal ist letztendlich auf nicht positiv definite „Skalarprodukte“ zurückzuführen, wie es z.B. im Minkowski-Raum eingeführt wird, um die Einhaltung der Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie zu gewährleisten.

**Spezielle orthogonale Gruppen** sind Normalteiler der orthogonalen Gruppen,

$$\mathrm{SO}(n) = \{R \in \mathrm{O}(n) \mid \det R = 1\} = \mathrm{Kern}(\det : \mathrm{O}(n) \rightarrow \mathbb{Z}_2). \quad (8.30)$$

Sie haben die gleichen Dimensionen wie die entsprechenden orthogonalen Gruppen und enthalten nur orientierungserhaltende lineare Abbildungen.

**Unitäre Gruppen** verallgemeinern die soeben diskutierte Gruppe  $\mathrm{U}(2)$  auf höhere Dimensionen. Sie lassen das hermitesche Skalarprodukt invariant,

$$\mathrm{U}(n) = \left\{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}_n\right\}. \quad (8.31)$$

Die Dimension dieser kompakten Lie-Gruppe ist

$$\dim(\mathrm{U}(n)) = n^2. \quad (8.32)$$

**Spezielle unitäre Gruppen** sind Normalteiler der unitären Gruppen. Ihre Elemente haben die Determinante 1,

$$\mathrm{SU}(n) = \{U \in \mathrm{U}(n) \mid \det U = 1\} = \mathrm{Kern}(\det : \mathrm{U}(n) \rightarrow \mathrm{U}(1)). \quad (8.33)$$

Die Dimension der Lie-Gruppe ist

$$\dim(\mathrm{SU}(n)) = n^2 - 1. \quad (8.34)$$

Zum Beispiel ist die 8-dimensionale Gruppe  $\mathrm{SU}(3)$  die Symmetriegruppe der Quantenchromodynamik, siehe Abschnitt 18.4. Die 24-dimensionale Gruppe  $\mathrm{SU}(5)$  wurde lange als Kandidat für die Symmetrie einer vereinheitlichten Eichtheorie (GUTs) der Elementarteilchenphysik behandelt.

**Symplektische Gruppen** sind aus der analytischen Mechanik bekannt. Symplektische Matrizen gehören zu linearen Transformationen, welche die schiefsymmetrische Bilinearform  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := (\mathbf{x}, J\mathbf{y})$  mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

invariant lassen,

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{K}) \mid M^T J M = J\}. \quad (8.36)$$

Die Jacobi-Matrix einer kanonischen Transformation ist Element der symplektischen Gruppe  $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ . Man kann beweisen, dass jede reell-symplektische Matrix die Determinante 1 hat<sup>1</sup>. Zum Beispiel besteht  $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$  aus allen reellen  $2 \times 2$ -Matrizen, welche

$$M^T J M = (\det M) J \stackrel{!}{=} J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllen, d.h. aus den Matrizen mit der Determinante 1. Deshalb ist  $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$  isomorph zu  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ .

Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften der Matrixgruppen tabellarisch zusammen:

Gruppe	Cartan	Bedingung	Dimension
$\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})$	$A_n$	$\det A = 1$	$n(n+2)$
$\mathrm{SU}(n+1)$	$A_n$	$U^\dagger U = \mathbb{1}_{n+1}$	$n(n+2)$
$\mathrm{SO}(2n+1)$	$B_n$	$R^T R = \mathbb{1}_{2n+1}$	$n(2n+1)$
$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$	$C_n$	$M^T J_{2n} M = J_{2n}$	$n(2n+1)$
$\mathrm{SO}(2n)$	$D_n$	$R^T R = \mathbb{1}_{2n}$	$n(2n-1)$

<sup>1</sup> $\det M \in \{-1, 1\}$  ist evident. Um  $\det M = -1$  auszuschließen, betrachtet man den Pfaffian von  $M^T J M$ .



In der zweiten Spalte haben wir den Namen der entsprechenden Gruppe nach der Cartanschen Klassifizierung der klassischen einfachen Matrixgruppen angegeben. Diese Bezeichnungen werden auch vom Computerprogramm `LiE` benutzt. Zum Beispiel führen die Befehle

---

**LiE**

`dim(A4)`

`dim(B4)`

`dim(C4)`

`dim(D4)`

---

auf die Dimensionen  $\dim(A_4) = 24$ ,  $\dim(B_4) = 36$ ,  $\dim(C_4) = 36$  und  $\dim(D_4) = 28$ . Wir werden später auf die Cartan-Klassifizierung zurückkommen. Alle Gruppen in der Tabelle mit Dimension  $> 1$  sind nicht-Abelsch. Wir erinnern daran, dass eine einfache Gruppe  $G$  nur die Normalteiler  $\{e\}$  und  $G$  hat. Sie kann nicht das Produkt zweier nichttrivialer Gruppen sein,  $G \neq G_1 \times G_2$ , da sie sonst die beiden Normalteiler  $G_1$  und  $G_2$  hätte. Sie kann auch nicht ein halbeinfaches Produkt zweier nichttrivialer Gruppen sein. Weder die Bewegungsgruppe noch die Poincaré-Gruppe sind einfach und sind deshalb in obiger Liste nicht zu finden.

Es stellt sich die natürliche Frage nach den Faktorgruppen

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}), \quad \mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n) \quad \text{oder} \quad \mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n). \quad (8.37)$$

Die letzte ist einfach zu berechnen,  $\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n) \cong \mathbb{Z}_2$ .

---

?

---

Versuchen Sie, die anderen beiden Faktorgruppen zu bestimmen.

---

## 8.4 Globale Eigenschaften von Lie-Gruppen

Die einfachste Eigenschaft eines topologischen Raumes  $M$  ist die Anzahl seiner Zusammenhangskomponenten. Die Lie-Gruppen  $\mathrm{SO}(n)$ ,  $\mathrm{SU}(n)$  und  $\mathrm{U}(n)$  sind zusammenhängend. Dagegen besteht die orthogonale Gruppe  $\mathrm{O}(n)$  aus zwei Komponenten,

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &= \{R \in \mathrm{O}(n) \mid \det R = 1\} \cup \{R \in \mathrm{O}(n) \mid \det R = -1\} \\ &= \mathrm{SO}(n) \cup \sigma\mathrm{SO}(n), \quad \det \sigma = -1. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Derartige Eigenschaften sind invariant unter stetigen Deformationen des Raumes, die von Homöomorphismen vermittelt werden.

**Definition 33** *Zwei topologische Räume  $M$  und  $N$  heißen homöomorph, wenn ein Homöomorphismus  $\phi : M \rightarrow N$  existiert.*

Anschaulich gehen zwei homöomorphe Räume durch Dehnen, Stauchen, Verbiegen, Verzerren, Verdrillen auseinander hervor. Zerschneiden ist nur erlaubt, wenn man die Teile später genau an der Schnittfläche wieder zusammenfügt.

**Definition 34** Eine Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen  $f, g : M \rightarrow N$  ist eine stetige Abbildung  $M \times [0, 1] \rightarrow N$  mit der Eigenschaft  $H(x, 0) = f(x)$  und  $H(x, 1) = g(x)$ .

### Homotopieklassen

Man sagt dann  $f$  ist homotop zu  $g$  und schreibt  $f \sim g$ . Homotopie ist eine Äquivalenzrelation, die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen *Homotopieklassen*.

Es seien  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow M$  stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen  $M$  und  $N$ . Dann sind die Verknüpfungen  $g \circ f$  und  $f \circ g$  jeweils stetige Abbildungen von  $M$  bzw.  $N$  auf sich selbst. Falls es  $f$  und  $g$  gibt mit  $g \circ f \sim id_M$  und  $f \circ g \sim id_N$ , so nennt man  $M$  und  $N$  *homotopieäquivalent* oder *homotop*. Die Abbildungen  $f$  und  $g$  heißen dann Homotopieäquivalenzen. Homotopieäquivalente Räume teilen die meisten topologischen Eigenschaften.

#### 8.4.1 Homotopiegruppen

Wir führen zuerst die *erste Homotopiegruppe* eines topologischen Raumes  $M$  ein und diskutieren wichtige Eigenschaften dieser Gruppe. Eine Homotopie zwischen zwei Wegen  $w_0$  und  $w_1$  (dies sind stetige Kurven, siehe Unterabschnitt 8.1.2) von  $p$  nach  $q$  ist eine Familie von Wegen, die beide Wege stetig verbindet. Mathematisch formuliert ist dies eine stetige Abbildung  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= w_0(t), & H(t, 1) &= w_1(t), & t &\in [0, 1] \\ H(0, s) &= p, & H(1, s) &= q, & s &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Der erste Parameter entspricht dem ursprünglichen Wegparameter und der zweite beschreibt den Grad der Verformung des Weges  $w_0$  in den Weg  $w_1$ , siehe Abbildung 8.5.

Einen geschlossener Weg von  $p$  nach  $p$  nennt man Schleife mit Basispunkt  $p$ . Zwei *Schleifen* mit Basispunkt  $p$  sind homotop, wenn es eine Homotopie zwischen ihnen gibt. Homotope Schleifen werden als äquivalent betrachtet und die Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen. Man bezeichnet die Menge der Homotopieklassen mit Basispunkt  $p$  mit dem Symbol  $\pi_1(M, p)$ . Ein beliebiges Element einer Homotopieklasse repräsentiert diese. Zwei Schleifen lassen sich zu einer dritten kombinieren, indem man zuerst die eine und danach die andere durchläuft, also das Ende der ersten mit dem Anfang der zweiten verknüpft. Da man aus Homotopien zwischen verschiedenen Repräsentanten auch eine Homotopie zwischen den verknüpften Schleifen konstruieren kann, ist die resultierende Homotopieklasse unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Das *neutrale Element* ist die Klasse der Schleifen, die sich auf den Basispunkt zusammenziehen lassen.

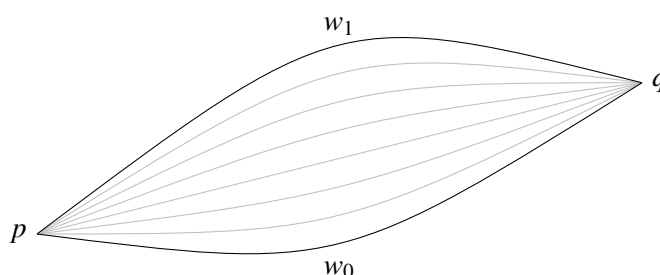


Abbildung 8.5: Der Weg  $w_0$  kann stetig in den Weg  $w_1$  deformiert werden. Sie sind homotop.

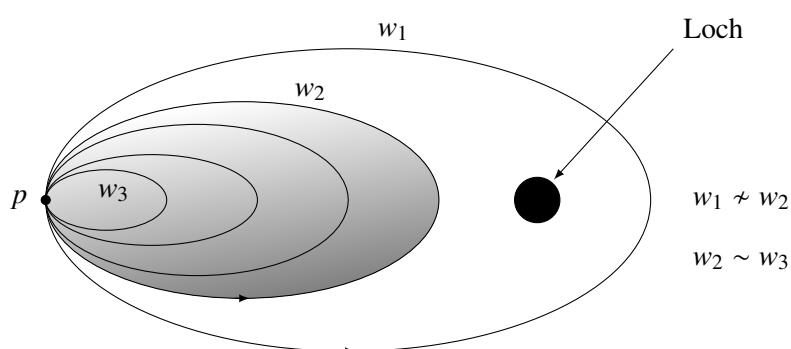


Abbildung 8.6: Die Schleife  $w_1$  kann nicht stetig in die Schleife  $w_2$  deformiert werden. Sie gehören zu verschiedenen Homotopieklassen

Das *inverse Element* zu einer Klasse erhält man, indem man die Schleifen der Klasse rückwärts durchläuft. Beispiele von homotopen und nicht-homotopen Schleifen in der punktierten Ebene sind in Abbildung 8.6 gezeigt.

### Fundamentalgruppe

Mit dieser Verknüpfung wird aus der Menge der Homotopieklassen mit Basispunkt  $p$  eine Gruppe, die sogenannte *Fundamentalgruppe*  $\pi_1(M, p)$ .

Da die Schleifen bei  $p$  beginnen und enden, misst  $\pi_1(M, p)$  nur Eigenschaften der Zusammenhangskomponente, in der  $p$  liegt. Für ein wegzusammenhängendes  $M$  ist die *Wahl des Basispunktes unwesentlich*: wählt man einen anderen Basispunkt  $q$ , so lassen sich Schleifen von  $p$  nach  $q$  verschieben, indem man auf einem fest gewählten Weg von  $q$  nach  $p$  geht, dann die ursprüngliche Schleife durchläuft und dann den fest gewählten Weg zurück nach  $q$  geht. Bei der Verknüpfung von zwei Schleifen in  $q$  heben sich die Zwischenwege genau auf. Die Fundamentalgruppen bzgl.  $p$  und  $q$  sind daher isomorph und man schreibt  $\pi_1(M)$ .

**Definition 35** Ein topologischer Raum  $M$  mit  $\pi_1(M) = 0$  heißt *einfach zusammenhängend*.

Auf einer Sphäre lässt sich jede Schleife auf einen Punkt zusammenziehen. Daher ist die Fundamentalgruppe der Sphäre trivial,  $\pi_1(S^n) = 0$  für  $n > 1$ . Die zweidimensionale Ebene mit einem Loch  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  hat die Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z}$ . Die Homotopieklasse einer Schleife ist dadurch festgelegt, wie oft die Schleife um das Loch herumläuft.

### Fundamentalgruppen von $U(1)$ und $SU(2)$

Die Liegruppe  $SU(2)$  ist einfach zusammenhängend im Gegensatz zu  $U(1)$ . Es gilt  $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ .

Analog zur Fundamentalgruppe definiert man die höheren Homotopiegruppen  $\pi_n(M, p)$  als die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen  $f : (S^n, a) \rightarrow (M, p)$ . Die Äquivalenzklassen werden durch Homotopien definiert, die den Basispunkt festhalten. Äquivalent dazu können wir  $\pi_n(M, p)$  auf der Menge von Abbildungen  $g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (M, p)$  definieren, d.h. derjenigen stetigen Abbildungen vom  $n$ -dimensionalen Einheitswürfel nach  $M$ , die den Rand des Würfels in den Punkt  $p$  abbilden.

Die Menge der Homotopieklassen kann mit einer Gruppenstruktur versehen werden. Die Struktur von  $\pi_n(M, p)$  ähnelt der im Falle  $n = 1$ , also der Fundamentalgruppe. Die Gruppenoperation ist das „Verkleben“ von Abbildungen entlang einer Seite, d.h. wir definieren die Verknüpfung zweier Abbildungen  $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (M, p)$  gemäß

$$(f * g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, \dots, t_{n-1}, 2t_n) & \text{für } t_n \leq 1/2 \\ g(t_1, \dots, t_{n-1}, 2t_n - 1) & \text{für } t_n \geq 1/2. \end{cases} \quad (8.40)$$

Für ein wegzusammenhängendes  $M$  hängt  $\pi_n(M, p)$ , genauso wie  $\pi_1(M, p)$ , nicht vom Punkt  $p$  ab und man schreibt  $\pi_n(M)$ . Sind  $M$  und  $N$  wegzusammenhängend und homöomorph (bzw. diffeomorph), dann gilt  $\pi_n(M) = \pi_n(N)$ .

Es ist im Allgemeinen nicht einfach die Homotopiegruppen  $\pi_n$  zu berechnen. Zum Beispiel sind nicht alle Gruppen  $\pi_n(S^2)$  bekannt. Aber es gilt der (hier unbewiesene)

### Satz 38

$$\pi_n(M \times N) = \pi_n(M) + \pi_n(N), \quad n \geq 1. \quad (8.41)$$

Wir zitieren einige interessante Resultate über die Homotopiegruppen von Lie-Gruppen. Wir betrachten nur zusammenhängende Gruppen,  $\pi_0(G) = 0$ .

**Satz 39 (Weyl)** *Für jede kompakte und halb-einfache Lie-Gruppe ist  $\pi_1(G)$  endlich.*

Zum Beispiel ist

$$\pi_1(SU(n)) = 0 \quad \text{und} \quad \pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2, \quad (8.42)$$

Nicht-einfache Gruppen können allerdings unendliche Fundamentalgruppen haben. Zum Beispiel ist  $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ . Jede Abbildung  $S^2 \rightarrow G$  ist homotop zur konstanten Abbildung, denn

**Satz 40 (Cartan)** Für jede Lie-Gruppe ist  $\pi_2(G) = 0$ .

Für die Existenz der Instantonlösungen der Euklidischen Yang-Mills-Theorien ist die dritte Homotopiegruppe der Eichgruppe relevant. Hier gilt der

**Satz 41 (Bott)** Für jede kompakte und einfache Lie-Gruppe ist  $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$ .

Die vierte Homotopiegruppe von Lie-Gruppen charakterisiert die sogenannte Witten-Anomalie. Für jede kompakte, einfach zusammenhängende und einfache Gruppe ist  $\pi_4(G) = 0$  oder  $\mathbb{Z}_2$ . Eine physikalische Relevanz der höheren Homotopiegruppen ist mir unbekannt.

### 8.4.2 Universelle Überlagerungsgruppen

Die quantenmechanische Drehgruppe  $SU(2)$  ist die universelle Überlagerungsgruppe der klassischen Drehgruppe  $SO(3)$  und die quantenmechanische Lorentzgruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  ist die universelle Überlagerung der klassischen Lorentzgruppe. Um diese Begriffe und Aussagen zu verstehen definieren wir zuerst die Überlagerung eines topologischen Raums.

**Definition 36** Eine Überlagerung eines topologischen Raumes  $M$  ist eine stetige surjektive Abbildung  $\pi : C \rightarrow M$  von einem topologischen Raum  $C$  nach  $M$ , so dass für jedes  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U$  existiert, so dass  $\pi^{-1}(U)$  die Vereinigung von disjunkten offenen Mengen (Blättern) in  $C$  ist. Jedes Blatt wird von  $\pi$  homöomorph auf  $U$  abgebildet.

Die vorliegenden Strukturen werden in Abbildung 8.7 skizziert. Für jedes  $p \in M$  ist die Faser über  $p$  eine diskrete Menge in  $C$ . Für jede zusammenhängende Komponente von  $M$  ist die Kardinalität der Fasern gleich. Hat jede Faser zwei Elemente, dann sprechen wir von der „doppelten Überlagerung“.

Eine Überlagerung  $\pi_0 : C_0 \rightarrow M$  heißt *universell*, wenn  $\pi_1(C_0) = 0$  ist, d.h. wenn  $C_0$  einfach zusammenhängend ist. Die Bezeichnung universell rührt von der Tatsache, dass eine universelle Überlagerung alle zusammenhängenden Überlagerungen von  $M$  überlagert.

#### Eindeutigkeit der universellen Überlagerung

Besitzt  $M$  eine universelle Überlagerung, dann ist diese eindeutig.

Sind nämlich  $\pi_0 : C_0 \rightarrow M$  und  $\pi'_0 : C'_0 \rightarrow M$  zwei universelle Überlagerungen von  $M$ , dann existiert ein *Homöomorphismus*  $f : C_0 \rightarrow C'_0$ , so dass  $\pi'_0 \circ f = \pi_0$  gilt.

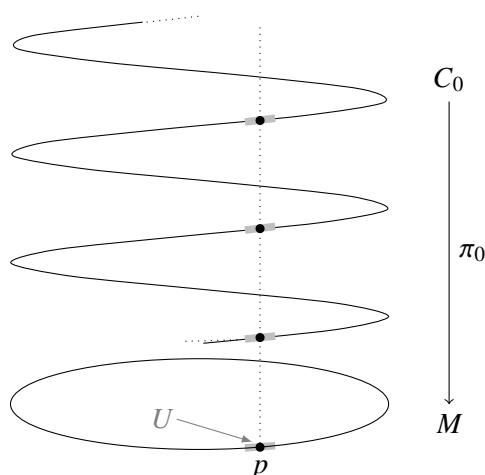


Abbildung 8.7: Die universelle Überlagerung  $\pi_0$  von  $M$  projiziert den einfach zusammenhängenden Raum  $C_0$  auf  $M$ .

### Beispiele von universelle Überlagerungen

Die universelle Überlagerung von  $U(1)$  ist  $\mathbb{R}$  mit  $\pi : \alpha \rightarrow \exp(i\alpha)$ . Die Faser über  $\exp(i\alpha)$  enthält alle Elemente  $\alpha + 2\pi\mathbb{Z}$  die auf  $\exp(i\alpha)$  abgebildet werden. Die einfach zusammenhängende Gruppe  $SU(2)$  ist die doppelte und universelle Überlagerung der Drehgruppe  $SO(3)$ .

Trägt  $M$  zusätzliche Strukturen, dann werden diese in vielen Fällen von der universellen Überlagerung geerbt. So ist die universelle Überlagerung einer Mannigfaltigkeit selbst eine Mannigfaltigkeit oder die universelle Überlagerung einer Lie-Gruppe eine Lie-Gruppe. Im letzten Fall spricht man von der universelle Überlagerungsgruppe. Das wichtige Theorem lautet

**Satz 42** Ist  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe, dann existiert eine bis auf Isomorphismus eindeutige universelle Überlagerungsgruppe  $\tilde{G}$  mit folgenden Eigenschaften,

- $G \cong \tilde{G}/Z$ , wobei  $Z$  eine diskrete Untergruppe des Zentrums von  $\tilde{G}$  ist.
- Ist  $\pi_1(G) = 0$ , dann ist  $G$  isomorph zu  $\tilde{G}$ .

Die Gruppen  $SU(N)$  sind einfach zusammenhängend für  $N = 2, 3, \dots$  und deshalb ihre eigenen Überlagerungsgruppen. Die Überlagerungsgruppen der  $SO(n)$  sind die Spingruppen  $\text{Spin}(n)$ . Wir haben gesehen, dass  $\text{Spin}(3) \cong SU(2)$ .

?

Versuchen Sie zu zeigen, dass  $\text{Spin}(4) \cong SU(2) \times SU(2)$ ,  $\text{Spin}(5) \cong \text{Sp}(2)$ ,  $\text{Spin}(6) \cong SU(4)$ .

Hierin ist  $\mathrm{Sp}(n)$  die kompakte reelle Form von  $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ , definiert als invertierbare quaternionisch-lineare Abbildungen, die das auf dem  $n$ -dimensionalen quaternionischen Vektorraum  $\mathbb{H}$  definierte Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n \quad (8.43)$$

erhalten.

## 8.5 Aufgaben zu Kapitel 8

### Aufgabe 8.1: Die Gruppen $\mathrm{U}(1)$ und $\mathrm{SO}(2)$

Parametrisieren Sie die Lie-Gruppe  $\mathrm{SO}(2)$  der eigentlichen Drehungen im  $\mathbb{R}^2$  und zeigen Sie, dass diese isomorph zu  $\mathrm{U}(1)$  ist.

### Aufgabe 8.2: Dimensionen von Matrixgruppen

Zeigen Sie, dass die Gruppe  $\mathrm{SO}(n)$  die Dimension  $n(n-1)/2$  hat und  $\mathrm{SU}(n)$  die Dimension  $n^2 - 1$ . Für welches  $n$  haben die beiden Gruppen dieselbe Dimension? Erklären Sie dieses Ergebnis (erinnern Sie sich an die Diskussion der quantenmechanischen Drehungen oder des Spins in der nichtrelativistischen Quantenmechanik).

### Aufgabe 8.3: Unitäre Matrizen

Zeigen Sie, dass für zwei beliebige komplexe Zahlen  $\alpha, \beta$  mit  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}$$

in  $\mathrm{SU}(2)$  liegt. Zeigen Sie umgekehrt, dass jedes  $A \in \mathrm{SU}(2)$  diese Form hat und durch die beiden Zahlen eindeutig gegeben ist. Warum beweist dies, dass  $\mathrm{SU}(2)$  eine drei-dimensionale Sphäre in  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$  ist? Die letzte Bemerkung zeigt auch, dass  $\mathrm{SU}(2)$  zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

### Aufgabe 8.4: $\mathrm{U}(n)$ ist nicht gleich $\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1)$

Beweisen Sie den Isomorphismus

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1) / \mathbb{Z}_n.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\varphi(U, e^{i\lambda}) = e^{i\lambda}U$  einen surjektiven Homomorphismus von  $\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1) \rightarrow \mathrm{U}(n)$  definiert und bestimmen Sie dessen Kern.

### Aufgabe 8.5: Die Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

Die Paulimatrizen sind gegeben durch

$$\mathbb{1} \equiv \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das Linearkombination eines Vektors im  $\mathbb{R}^4$  mit den Paulimatrizen sei gegeben durch

$$(x, \sigma) = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

- Man zeige, dass  $x^\mu = \frac{1}{2} \text{tr}[\bar{\sigma}^\mu(x, \sigma)]$  gilt. Hier ist

$$\bar{\sigma}_0 = \sigma_0, \quad \bar{\sigma}_i = -\sigma_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dies bedeutet, dass die Abbildung  $x^\mu \rightarrow (x, \sigma)$  eine bijektive Abbildung vom  $\mathbb{R}^4$  auf den linearen Raum aller 2-dimensionalen hermitescher Matrizen ist.

- Man berechne  $\det(x, \sigma)$ .
- Sei  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  eine 2-dimensionale komplexe Matrix mit Determinante 1. Warum ist die Matrix  $A(x, \sigma)A^\dagger$  wieder eine Linearkombination der Form  $(y, \sigma)$ ?
- Man zeige, dass die Abbildung  $x \rightarrow y$ , definiert durch  $(y, \sigma) = A(x, \sigma)A^\dagger$ , linear ist und somit in der Form  $y^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  geschrieben werden kann. Ist dies eine Lorentz-Transformation?
- Man zeige, dass die nicht-lineare Abbildung  $A \rightarrow \Lambda(A)$ , gegeben durch  $(\Lambda x, \sigma) = A(x, \sigma)A^\dagger$ , ein Gruppenhomomorphismus  $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(1, 3)_+^\uparrow$  ist. Ist diese Abbildung auch ein Isomorphismus?

### Aufgabe 8.6: Zentrum von Matrixgruppen

Was sind die Zentren der Matrixgruppen  $SU(N)$ ,  $O(N)$  und  $SO(N)$ ?

Hinweis: Nach dem Schurschen Lemma (welches wir später beweisen werden) ist ein Element im Zentrum ein Vielfaches der Einsmatrix.

### Aufgabe 8.7: Fundamentalgruppen

Man bestimme die Fundamentalgruppen von

- dem  $N$ -dimensionalen Torus  $T^N$ ,
- dem reellen projektiven Raum  $RP^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ , wobei  $x \sim \lambda x$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- dem komplexen projektiven Raum  $CP^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ , wobei  $x \sim \lambda x$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

### Aufgabe 8.8: Globale Eigenschaften von $SU(2)$ und $SO(3)$

Begründen Sie, warum  $SU(2)$  einfach zusammenhängend ist. Dies bedeutet, dass jede Schleife in



der Gruppe zusammenziehbar ist. Zeigen Sie weiterhin, dass  $SO(3)$  nicht einfach zusammenhängend ist.

### Aufgabe 8.9: Anti-de Sitter Raum

Betrachte  $\mathbb{R}^5$  mit metrischen Tensor

$$(g_{\mu\nu}) = G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente der Anti-de Sitter Gruppe  $SO(3,2)$  sind die linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ , gegeben durch  $\xi' = \Lambda\xi$ , welche die Bilinearform  $\xi^T G \xi$  invariant lassen und  $\det \Lambda = 1$  erfüllen. Die Transformationsmatrizen erfüllen die Relation

$$\Lambda^T G \Lambda = G.$$

- Der Anti-de Sitter Raum mit 'Radius'  $R$  ist definiert durch

$$\text{AdS} = \{\xi \in \mathbb{R}^5 \mid \xi^T G \xi = R^2\}.$$

Visualisieren Sie diesen Raum durch die analoge Betrachtung in  $\mathbb{R}^3$  mit Metrik  $G = \text{diag}(1, 1, -1)$ .

- Die Metrik auf AdS ist die Metrik induziert durch die Einbettung von  $\text{AdS} \subset \mathbb{R}^5$ . Bestimme die Signature der Metrik auf AdS. Es genügt den einfacheren Fall in  $\mathbb{R}^3$  mit metrischen Tensor  $G = \text{diag}(1, 1, -1)$  zu untersuchen.
- $SO(3,2)$  operiert auf AdS über

$$SO(3,2) \times \text{AdS} \rightarrow \text{AdS}, \quad (\Lambda, \xi) \rightarrow \Lambda\xi.$$

Dies ist eine Isometrie auf  $(\mathbb{R}^5, G)$ , und deshalb auf dem AdS-Raum. Zeigen Sie, dass alle Punkte des AdS-Raumes durch Anwendung einer geeigneten  $SO(3,2)$ -„Drehung“ auf den festen Punkt  $(R, 0, 0, 0, 0)$  erreicht werden. Was bedeutet dies für die Wirkung von  $SO(3,2)$  auf dem AdS-Raum?

- Konstruiere die geschlossenen und zeitartigen Geodäten durch  $(R, 0, 0, 0, 0)$  und raumartigen Geodäten durch  $(R, 0, 0, 0, 0)$ .  
Hinweis: hier braucht es keine Rechnung!

### Aufgabe 8.10: Cosets

Welche Mannigfaltigkeiten beschreiben die Cosets

$$SO(n)/SO(n-1) \quad \text{und} \quad SU(n)/SU(n-1)?$$

Hinweis: Betrachte  $SO(n-1)$  als Untergruppe von  $SO(n)$ , zum Beispiel als Stabilisator von  $e_1$ :

$$SO(n-1) = \{R \in SO(n) | R e_1 = e_1\}.$$

Deshalb ist das Coset gerade die Menge  $\{R e_1 | R \in SO(n)\}$ . Eine ähnliche Vorgehensweise führt auch für  $SU(n-1)$  – betrachtet als Untergruppe von  $SU(n)$  – zum Erfolg.

### Aufgabe 8.11: Symplektische Gruppe

Zeigen Sie, dass die nicht-kompakten Liegruppen  $Sp(2, \mathbb{R})$  und  $SL(2, \mathbb{R})$  isomorph sind.

### Aufgabe 8.12: Beziehung zwischen $O(4)$ und $SU(2) \times SU(2)$

Die Menge der Matrizen

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

bilden den linearen Raum  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$  mit Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \text{tr}(x^\dagger y).$$

Die Matrizen mit  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  liegen in  $SU(2)$  und definieren die Einheitskugel in  $\mathbb{R}^4$ .

- Seien  $g_1, g_2$  zwei Matrizen in  $SU(2)$  und  $x$  eine Matrix wie oben. Man zeige, dass die Abbildung  $R(g_1, g_2)$ , definiert durch

$$R(g_1, g_2)x = g_1 x g_2^{-1},$$

linear ist und das Skalarprodukt erhält,

$$\langle R(g_1, g_2)x, R(g_1, g_2)y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Also ist  $R(g_1, g_2)$  eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , die die Länge von Vektoren erhält.

- Man zeige nun, dass diese Abbildung einen Gruppenhomomorphismus  $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$  definiert.
- Ist dieser Homomorphismus treu?

Die Gruppe  $SU(2) \times SU(2)$  hat eine elementare Bedeutung in der Quantenfeldtheorie, z.B. als Symmetriegruppe des Quark-Meson-Modells, welches die Freiheitsgrade der QCD bei niedrigen Energien beschreibt.

## 9 Invariante Integration

*Ich habe bemerkt, dass Personen, in deren Gesichtern ein gewisser Mangel von Symmetrie war, oft die feinsten Köpfe waren.*

GEORG CHRISTOPH LICHTENBERG

Die invariante Integration über Gruppen geht auf eine einflussreiche Arbeit von A. Hurwitz zurück [4]. Darin finden sich bereits explizite Ausdrücke für die Haar-Maße auf unitären und orthogonalen Gruppen. Weitere wichtige Beiträge stammen von I. Schur und H. Weyl [5]. Die Existenz und Eindeutigkeit des Haar-Maßes auf lokal kompakten topologischen Gruppen wurde etwas zur gleichen Zeit von J. von Neumann [6] und A. Haar bewiesen [7].

Zur Einstimmung betrachten wir die Mittelbildung für Funktionen auf einer *endlichen Gruppe*. Sei also  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine komplexwertige Funktion auf einer endlichen Gruppe. Ihr Mittelwert

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \quad (9.1)$$

hat folgende Eigenschaften:

1. linear:  $\mathcal{M}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{M}(f_1) + \beta \mathcal{M}(f_2)$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .
2. positiv: aus  $f \geq 0$  folgt  $\mathcal{M}(f) \geq 0$  und  $= 0$  nur für  $f \equiv 0$ .
3. normiert: ist  $f(g) = 1$  für alle  $g \in G$ , dann ist  $\mathcal{M}(f) = 1$ .
4. links- und rechts-invariant,  $\mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(f \circ \ell_a) = \mathcal{M}(f \circ r_a)$ .

Linearität, Positivität und Normiertheit der Mittelung sind offensichtlich. Die Invarianz bezüglich der zu einem Gruppenelement  $a$  gehörenden Linkstranslation

$$\ell_a : G \mapsto G, \quad \ell_a(g) = ag \quad (9.2)$$

folgt aus der Tatsache, dass für ein festes  $a$  die Menge  $\{ag | g \in G\}$  gleich der Menge  $\{g | g \in G\}$  ist:

$$\mathcal{M}(f \circ \ell_a) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(ag) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) = \mathcal{M}(f).$$

Ähnlich beweist man die Invarianz der Mittelbildung bezüglich Rechtstranslationen  $r_a(g) = ga$ .

Es stellt sich die Frage, ob es auf einer kontinuierlichen Lie-Gruppe auch eine invariante Mittelbildung gibt. Wenn ja, dann würde die Summe (9.1) zu einem Integral über die Gruppe werden.

Für kompakte Gruppen ist die Antwort auf die oben gestellte Frage nach invarianten Maßen positiv:

**Satz 43 (Invariantes Maß)** *Zu jeder kompakten Lie-Gruppe gibt es ein (bis auf eine multiplikative positive Konstante) eindeutiges positives Haar-Integral*

$$\mathcal{M} : C_0(G) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \rightarrow \mathcal{M}(f) = \int_G d\mu(g) f(g), \quad (9.3)$$

welches links- und rechts-invariant ist. Für stetige Funktionen ist das Integral endlich.

Für kompakte Gruppen normiert man das Maß auf Eins,  $\mathcal{M}(1) = 1$ , und spricht dann vom normierten Haar-Maß. Die Normierung legt das Haar-Maß *eindeutig* fest. Die entsprechende Mittelbildung erfüllt dann obige Eigenschaften: Sie ist linear, positiv, normiert, links- und rechts-invariant. Das Maß einer Menge  $O \subset G$  ist gleich dem Maß der verschobenen Mengen  $\ell_a(O)$  und  $r_a(O)$ .

Im Jahre 1933 zeigte ALFRED HAAR, dass es auch für allgemeinere lokalkompakte topologische Gruppen immer ein invariantes Maß gibt. Im Allgemeinen braucht es aber nur noch links- oder rechts-invariant zu sein.

#### Haar'sches Maß auf der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^*$ .

Die Elemente dieser nicht-kompakten Gruppe sind die reellen Zahlen in  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und die Gruppenverknüpfung ist die Multiplikation. Der Mittelwert einer komplexen Funktion ist

$$\mathcal{M}(f) = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{dx}{|x|} f(x). \quad (9.4)$$

Die Mittelung ist linear, positiv aber nicht normiert. Für  $y > 0$  folgt die Linksinvarianz aus

$$\mathcal{M}(f \circ \ell_y) = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{dx}{|x|} f(yx) = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{d(yx)}{y|x|} f(yx) = \int_{\mathbb{R}^*} \frac{dz}{|z|} f(z) = \mathcal{M}(f). \quad (9.5)$$

Die Gruppe ist Abelsch und deshalb folgt aus der Linksinvarianz die Rechtsinvarianz.

In diesem Beispiel handelt es sich um eine nicht-kompakte Gruppe und deshalb ist das invariante Maß nicht normierbar.

---

?

---

Zeigen Sie die Invarianz der Mittelbildung (9.4) auch für negative  $y$ .

---

## 9.1 Invariante Mittelbildung auf U(1) und SU(2)

In diesem Abschnitt konstruieren das Haar-Maß für die kompakten Lie-Gruppen U(1) und SU(2). Für SU(2) werden wir dabei von der geometrischen Interpretation der Translationen auf der Gruppenmannigfaltigkeit  $S^3$  Gebrauch machen. Wir bezeichnen die Gruppenelemente mit  $U$  um anzudeuten, dass es sich in diesem Abschnitt um Elemente von unitären Gruppen handelt.

### 9.1.1 Haar-Maß auf U(1)

Wir parametrisieren die Elemente dieser Abelschen Lie-Gruppe wie früher mit einem Winkel  $\alpha$  in  $U = e^{i\alpha}$ . Eine Funktion  $f : U(1) \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion von  $\alpha$ . Die Mittelbildung ist gegeben durch das folgende Integral über den Parameterraum:

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha f(e^{i\alpha}) . \quad (9.6)$$

Die Invarianz bezüglich Linkstranslationen beweist man wie folgt,

$$\mathcal{M}(f \circ \ell_{e^{i\beta}}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha f(e^{i\beta} e^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha f(e^{i(\beta+\alpha)}) = \mathcal{M}(f) .$$

Die Gruppe ist Abelsch und deshalb ist das Maß auch rechts-invariant.

### 9.1.2 Haar-Maß auf SU(2)

Wie sieht nun das invariante Haar-Maß von SU(2) aus? Dazu machen wir uns die geometrische Bedeutung der Linkstranslation auf der Gruppenmannigfaltigkeit klar. Im Abschnitt (8.2) haben wir gezeigt, dass SU(2) eine Sphäre  $S^3$  ist und die Gruppenelemente wie folgt parametrisiert werden können,

$$\alpha \mapsto U(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_3 + i\alpha_4 \\ -\alpha_3 + i\alpha_4 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in S^3 . \quad (9.7)$$

Die Linkstranslation  $U \rightarrow \ell_{\tilde{U}}(U)$  mit dem Gruppenelement  $\tilde{U} = U(\beta)$  ist dann im Parameter-raum gegeben durch

$$U(\beta)U(\alpha) = U(O(\beta)\alpha) \quad \text{mit} \quad O(\beta)\alpha = \begin{pmatrix} \beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 \\ \beta_2 & \beta_1 & -\beta_4 & \beta_3 \\ \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 & -\beta_2 \\ \beta_4 & -\beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} . \quad (9.8)$$

Wegen  $\beta \in S^3$  ist  $O(\beta)$  eine orthogonale Matrix,  $O^T O = 1$ , wie man durch explizite Rechnung nachprüfen kann. Deshalb ist  $O(\beta)\alpha$  eine Drehung von  $\alpha$ . Nun ist die von  $\mathbb{R}^4$  auf  $S^3$  induzierte Volumenform dreihinvariant und damit invariant unter Linkstranslationen (und Rechtstranslationen). Normieren wir die Volumenform auf 1, dann erhalten wir das eindeutige Haar-Maß auf  $SU(2) \cong S^3$ . Parametrisieren wir die Punkte auf der Einheitssphäre  $S^3$  gemäß

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \psi \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

dann werden die Gruppenelemente wie folgt parametrisiert,

$$U(\vartheta, \psi, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \sin \psi e^{i\varphi} \\ -\sin \vartheta \sin \psi e^{-i\varphi} & \cos \vartheta - i \sin \vartheta \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (9.10)$$

mit folgenden Wertebereichen für die drei Winkel:

$$0 < \vartheta < \pi, \quad 0 < \psi < \pi \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (9.11)$$

Mithilfe des bekannten Volumenelements auf der Einheitssphäre  $S^3$  schließen wir:

In den Winkelkoordinaten  $(\vartheta, \psi, \varphi)$  hat das invariante Volumenelement (Haar-Maß) die Form

$$d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2 \vartheta \cdot \sin \psi \, d\vartheta d\psi d\varphi. \quad (9.12)$$

?

Prüfen Sie nach, dass dieses links- und rechts-invariante Maß auf Eins normiert ist.

### 9.1.3 Reduziertes Haar-Maß auf $SU(2)$

Wir betrachten nun die Mittelbildung für Klassenfunktionen auf der Gruppe. Dies führt direkt auf das reduzierte Haar-Maß. Klassenfunktionen sind spezielle Funktionen, die auf jeder Konjugationsklasse der Gruppe einen konstanten Wert annehmen. Dies bedeutet, dass  $f(VUV^{-1}) = f(U)$  für alle Gruppenelemente  $V$ . Für Matrixgruppen ist zum Beispiel  $\text{Sp}(U)$  eine Klassenfunktion.

Die Spur der  $SU(2)$ -Matrix  $U$  in (9.10) ist  $2 \cos \vartheta$  und ihre Determinante ist 1. Deshalb hat sie die beiden Eigenwerte  $e^{\pm i\vartheta}$  und es gibt ein unitäres  $V$  mit

$$VUV^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix} \equiv D(\vartheta) \quad \vartheta \in (0, \pi).$$

Die Konjugationsklasse ist also allein durch den Winkel  $\vartheta$  charakterisiert und deshalb werden Klassenfunktionen nur von der Koordinate  $\vartheta$  abhängen. Es sind  $2\pi$ -periodische Funktionen von  $\vartheta$  und wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D(\vartheta) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = D(-\vartheta)$$

müssen es gerade Funktionen in  $\vartheta$  sein. Wir folgern, dass für jede Klassenfunktion

$$f(U(\vartheta, \psi, \phi)) = f(\vartheta) = f(-\vartheta) = f(\vartheta + 2\pi).$$

Der Mittelwert einer Klassenfunktion ist demnach

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f) &= \frac{1}{2\pi^2} \int \sin^2 \vartheta \cdot \sin \psi \cdot f(\vartheta) \, d\vartheta d\psi d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\vartheta) \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \int_0^\pi d\mu_{\text{red}}(\vartheta) f(\vartheta). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Bezüglich der Winkelkoordinaten  $(\vartheta, \psi, \varphi)$  ist das reduzierte Haar-Maß von  $SU(2)$

$$d\mu_{\text{red}} = \frac{2}{\pi} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi]. \quad (9.14)$$

## 9.2 Haar-Maß für beliebige Lie-Gruppen

Es sei  $G$  eine  $n$ -dimensionale und nicht notwendigerweise kompakte Lie'sche Gruppe. Wir wählen eine Umgebung  $U$  des neutralen Elements  $e$  und beschreiben die Elemente in  $U$  und das invariante Maß auf  $U$  bezüglich lokaler Koordinaten  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Wir suchen die Dichte  $\rho_\ell$  des linksinvarianten Maßes für diese Koordinaten,  $d\mu_\ell(g) = \rho_\ell(\alpha) d\alpha$ . Wir wählen Koordinaten derart, dass für  $\alpha = 0$  das Gruppenelement das Einselement ist, siehe Abbildung 9.1.

Das beliebige (aber feste) Gruppenelement mit dem translatiert wird habe die Koordinaten  $\beta$ . Die Linkstranslation von  $g(\alpha)$  mit diesem Gruppenelement ergibt  $g(\beta)g(\alpha) = g(\gamma)$  mit  $\gamma = m(\beta, \alpha)$ . Wir fordern

$$\rho_\ell(\alpha) d^n \alpha = \rho_\ell(\gamma) d^n \gamma. \quad (9.15)$$

Wegen  $\gamma = m(\beta, \alpha)$  transformiert das Volumenelement gemäß

$$d\gamma_1 \cdots d\gamma_n = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial m_1(\beta, \alpha)}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial m_1(\beta, \alpha)}{\partial \alpha_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial m_n(\beta, \alpha)}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial m_n(\beta, \alpha)}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}_{\alpha=0} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n = J_\ell(\gamma) d^n \alpha.$$

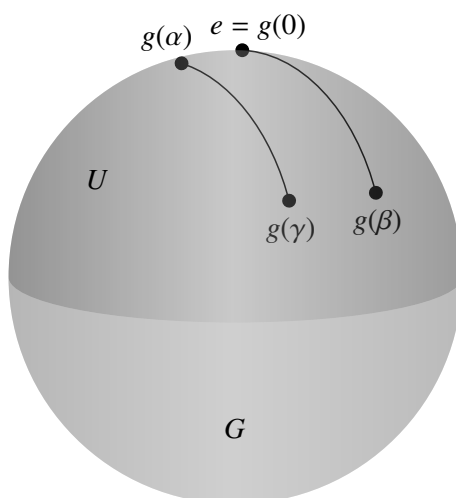


Abbildung 9.1: Die Dichte bei  $e$  wird mithilfe der Linkstranslation nach  $g(\beta)$  transportiert.

Für  $\alpha = 0$  ist  $\beta = \gamma$  und deshalb ist die Determinante der Jacobi-Matrix  $J_\ell$  eine Funktion von  $\gamma$ . Nun ist es naheliegend, wie das gesuchte links-invariante Maß aussieht:

$$d\mu_\ell(\gamma) = \rho_\ell(\gamma) d^n \gamma = \frac{\rho_\ell(0)}{J_\ell(\gamma)} d\gamma_1 \cdots d\gamma_n. \quad (9.16)$$

Für kompakte Gruppen wählt man die Konstante  $\rho_\ell(0)$  so, dass  $d\mu_\ell$  auf Eins normiert ist. Die Invarianz unter Linkstranslationen folgt aus

$$\rho_\ell(\gamma) d^n \gamma = \frac{\rho_\ell(0)}{J_\ell(\gamma)} d^n \gamma = \rho_\ell(0) d^n \alpha. \quad (9.17)$$

Das rechts-invariante Maß gewinnt man analog. Wir fassen zusammen:

Folgende Maße auf  $G$  sind linksinvariant bzw. rechtsinvariant:

$$d\mu_\ell(g) = \frac{\rho_\ell(0)}{J_\ell(\gamma)} d^n \gamma \quad \text{bzw.} \quad d\mu_r(g) = \frac{\rho_r(0)}{J_r(\gamma)} d^n \gamma. \quad (9.18)$$

wobei  $J_\ell$  und  $J_r$  die Jacobi-Determinanten der Links- und Rechtstranslation in lokalen Koordinaten sind.

In Koordinaten hat die Rechtstranslation  $g(\gamma) = g(\alpha)g(\beta)$  mit einem beliebigen aber festen  $g(\beta)$  die Form  $\gamma = \tilde{m}(\beta, \alpha)$ . Genauso wie bei der Linkstranslation geht die Determinante  $J_r$  der Jacobi-Matrix für die Rechtstranslationen an der Stelle  $\alpha = 0$  ein.

### Streckungen und Verschiebungen auf $\mathbb{R}^*$

Diese Untergruppe der konformen Transformationen in  $\mathbb{R}^*$  enthält die Streckungen und Translationen,  $x \rightarrow \alpha_1 x + \alpha_2$ . Es ist eine zusammenhängende 2-dimensionale Lie-Gruppe.



In lokalen Koordinaten haben Links- und Rechtstranslation die Form

$$\begin{aligned} m_1(\beta, \alpha) &= \beta_1 \alpha_1, & m_2(\beta, \alpha) &= \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \implies J_\ell(\beta) = \beta_1^2 \\ \tilde{m}_1(\beta, \alpha) &= \beta_1 \alpha_1, & \tilde{m}_2(\beta, \alpha) &= \beta_2 \alpha_1 + \alpha_2 \implies J_r(\beta) = \beta_1. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Die invarianten Maße sind verschieden und nicht normierbar,

$$d\mu_\ell(\alpha) = \frac{1}{\alpha_1^2} d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \quad \text{und} \quad d\mu_r(\alpha) = \frac{1}{\alpha_1} d\alpha_1 \wedge d\alpha_2, \quad (9.20)$$

und deshalb ist die Gruppe nicht unimodular.

?

Überzeugen Sie sich davon, dass die Gruppe weder Abelsch, noch kompakt noch halbeinfach ist. Zeigen Sie, dass die Verschiebungen einen nicht-triviale Normalteiler der Gruppe definieren.

Wir entnehmen dem Beispiel, dass für nicht-kompakte Gruppen die links- und rechts-invarianten Maße verschieden sein können. Ist die Gruppe  $G$  aber Abelsch oder halb-einfach, dann sind die beiden Maße (evtl. nach eine Reskalierung) identisch,  $d\mu_\ell = d\mu_r$ . Man spricht dann von unimodularen Gruppen. Für nicht-kompakte Gruppen sind die invarianten Maße nicht normierbar, d.h.

$$\int_G d\mu_\ell(g) = \int_G d\mu_r(g) = \infty.$$

### 9.2.1 Invariante 1-Formen und invariante Integration

Zur Einführung betrachten wir nochmals die Gruppe der Streckungen und Translationen in  $\mathbb{R}^*$  von einer etwas anderen Seite. Diese Transformationen können auf  $\mathbb{R}^2$  wie folgt dargestellt werden (vgl. die analoge Konstruktion für die Galilei-Gruppe in Abschnitt 5.4)

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 x + \alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.21)$$

Die Gruppe ist damit eine Untergruppe von  $GL(2, \mathbb{R})$ ,

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}^*, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (9.22)$$

Nun definieren wir die matrixwertigen 1-Formen

$$\omega_\ell(A) = A^{-1} dA \quad \text{und} \quad \omega_r(A) = dA A^{-1}. \quad (9.23)$$

Diese haben ihre Werte in der zugehörigen Lie-Algebra (mehr dazu später). Sie sind offensichtlich links- bzw. rechtsinvariant was bedeutet, dass für jedes konstante  $B \in G$  gilt

$$\omega_\ell(A) = \omega_\ell(BA) \quad \text{und} \quad \omega_r(A) = \omega_r(AB). \quad (9.24)$$

Für die Matrizen in (9.21) findet man die expliziten Ausdrücke

$$\omega_\ell = \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} d\alpha_1 & d\alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_r = \frac{1}{\alpha_1} \begin{pmatrix} d\alpha_1 & \alpha_1 d\alpha_2 - \alpha_2 d\alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

Diese definieren eine linksinvariante bzw. eine rechtsinvariante matrixwertige 2-Form

$$\omega_\ell \wedge \omega_\ell = \frac{d\alpha_1 \wedge d\alpha_2}{\alpha_1^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_r \wedge \omega_r = \frac{d\alpha_1 \wedge d\alpha_2}{\alpha_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.26)$$

Die Koeffizienten der Konstanten Matrix sind links- und rechtsinvariante Volumenformen. Deshalb ist es nicht überraschend, dass es genau die in (9.20) angegebenen invarianten Maße sind.

### 9.3 Haar-Maße für kompakte Matrixgruppen

Es sei  $G$  eine  $n$ -dimensionale kompakte Lie-Gruppe aus Matrizen. Mithilfe der gerade eingeführten links-invarianten und Lie-Algebra-wertigen 1-Form

$$\alpha = g^{-1} dg, \quad dg = \sum \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} d\alpha_i \quad (9.27)$$

kann man leicht links- und rechts-invariante skalare  $m$ -Formen konstruieren,

$$\omega_m = \text{Sp}(\underbrace{\alpha \wedge \alpha \wedge \cdots \wedge \alpha}_{m \text{ mal}}), \quad m = 1, \dots, n. \quad (9.28)$$

Diese sind offensichtlich links-invariant unter  $g \rightarrow ag$ , da schon  $\alpha$  links-invariant ist.

?

Überzeugen Sie sich, dass wegen der Spur die Form auch rechts-invariant ist.

Ist für  $n = \dim(G)$  die Form  $\omega_n$  positiv oder kann durch Multiplikation mit einer Konstanten positiv gewählt werden, dann ist sie proportional zum invarianten Haar-Maß. Auf diese Weise kann man das invariante Haar-Maß explizit und effizient bestimmen.

#### Haar-Maße für kompakte Matrixgruppen

Für eine kompakte Matrixgruppe ist das links- und rechtsinvariante Haar-Maß gegeben durch

$$d\mu(g) \propto \omega_n = \text{Sp}(\alpha \wedge \alpha \wedge \cdots \wedge \alpha), \quad \alpha = g^{-1} dg. \quad (9.29)$$

Im obigen Beispiel der nicht-kompakten Streckungen und Verschiebungen verschwinden die Spuren von  $\omega_\ell \wedge \omega_\ell$  und  $\omega_r \wedge \omega_r$ , so dass wir (nicht unerwartet) keine gleichzeitig links- und rechtsinvariante Volumenform konstruieren können.

### 9.3.1 Haar-Maße für unitäre Gruppen

Die folgenden Ergebnisse gelten für unitären Gruppen und deshalb bezeichnen wir die Gruppenelemente wieder mit  $U$ . Um die Form  $\omega_n$  zu berechnen, diagonalisieren wir das unitäre  $U$ :

$$U = VDV^{-1}, \quad V \text{ unitär.} \quad (9.30)$$

Eine Klassenfunktion hängt nur von der diagonalen Matrix  $D$  ab, deren Matrixelemente die Eigenwerte von  $U$ , also reine Phasen, sind. Wir dürfen sie als Koordinaten auf der Gruppe betrachten. Dann hängen die diagonalisierenden  $V$  von den „restlichen Koordinaten“ ab. Es gilt

$$\alpha = U^{-1}dU = V\beta V^{-1}, \quad \beta = D^{-1}V^{-1}dVD - V^{-1}dV + D^{-1}dD. \quad (9.31)$$

Für jede unitäre Matrix ist die 1-Form  $U^{-1}dU$  eine anti-hermitesche Matrix (d.h. sie ist Liealgebrawertig) wie man schnell beweist:

$$0 = d(U^{-1}U) = dU^{-1}U + U^{-1}dU = (U^{-1}dU)^\dagger + U^{-1}dU.$$

Wir zerlegen nun die matrixwertige Form  $V^{-1}dV$  in ihren diagonalen und nichtdiagonalen Anteil. Der diagonale Anteil vertauscht mit der diagonalen Matrix  $D$  und hebt sich in der letzten Summe in (9.31) weg. Entsprechend finden wir

$$\beta = D^{-1}\gamma D - \gamma + D^{-1}dD, \quad \text{wobei } \gamma = (V^{-1}dV)_\perp \quad (9.32)$$

den nicht-diagonalen Anteil von  $V^{-1}dV$  bezeichnet. Die Spuren in (9.28) sind invariant unter Konjugation mit  $V$  und deshalb ist

$$\omega_n = \text{Sp}(\underbrace{\beta \wedge \cdots \wedge \beta}_{n \text{ mal}}) = \text{Sp}(D^{-1}\gamma D - \gamma + D^{-1}dD)^{\wedge n}. \quad (9.33)$$

Bei der expliziten Berechnung des reduzierten Haar-Maßes ist diese Formel sehr nützlich. Dies wollen wir an Beispielen illustrieren.

#### Invariante Formen und Haar-Maß auf $SU(2)$

Wir hatten bereits in Abschnitt 9.1 das volle und reduzierte Haar-Maß dieser Gruppe berechnet. Wir werden nun sehen, dass der Weg über die invarianten 1-Formen schneller zum selben Ziel führt. Für  $SU(2)$  sind die matrixwertigen 1-Formen  $U^{-1}dU$  antihermitesch und spurlos. Mit  $D = \text{diag}(e^{i\vartheta}, e^{-i\vartheta})$  und  $\gamma = -\gamma^\dagger$  folgt

$$D^{-1}dD = i \begin{pmatrix} d\vartheta & 0 \\ 0 & -d\vartheta \end{pmatrix}, \quad \gamma = (V^{-1}dV)_\perp = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ -\gamma_{12}^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.34)$$

Die Liealgebrawertige 1-Form  $\beta$  in (9.32) hat in der Parametrisierung (9.10) die unabhängigen Komponenten

$$\beta_{11} = \text{id}\vartheta, \quad \beta_{12} = -2i e^{-i\vartheta} \sin \vartheta \gamma_{12}. \quad (9.35)$$

Die Spur der dritten Potenz ist proportional zu einer positiven invarianten Volumenform,

$$\omega_3 = \text{Sp}(\beta \wedge \beta \wedge \beta) = 24i \sin^2 \vartheta \, d\vartheta \, \gamma_{12}^\dagger \gamma_{12}, \quad (9.36)$$

und ist deshalb proportional zum invarianten Haar-Maß. Zum Vergleich mit dem früheren Resultat (9.12) wählen wir ein  $V$  für das  $VDV^{-1}$  die Form (9.10) hat,

$$V = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos \frac{\psi}{2} & i \sin \frac{\psi}{2} \\ i \sin \frac{\psi}{2} & e^{-i\varphi} \cos \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \implies \gamma_{12} = e^{-i\varphi} \left( \frac{i}{2} d\psi - 2 \sin \psi d\varphi \right). \quad (9.37)$$

Damit ist  $\gamma_{12}^\dagger \gamma_{12} = -2i \sin \psi d\psi d\varphi$  und das invariante Maß hat die Form

$$d\mu = \omega_3 = 48 \sin^2 \vartheta \cdot \sin \psi \, d\vartheta d\psi d\varphi. \quad (9.38)$$

Bis auf einen Faktor  $96\pi^2$  stimmt dies mit dem normierten Haar-Maß in (9.12) überein. Das *reduzierte Haar-Maß* kann man nun sofort ablesen: Der Winkel  $\vartheta$  parametrisiert die Konjugationsklasse und die 2-Form  $\gamma_{12}^\dagger \gamma_{12}$  ist unabhängig von  $\vartheta$ . Wir können also über die äquivalente Gruppenelemente integrieren und finden (bis auf einen Faktor) das alte Resultat (9.14).

### Invariante Formen und Haar-Maß auf $U(2)$

Für diese vierdimensionale nicht halbeinfache Gruppe ist die 4-Form  $\beta \wedge \beta \wedge \beta \wedge \beta$  identisch Null und ihre Spur definiert somit keine invariante Volumenform. Mit einer milden Modifikation der obigen Konstruktion werden wir aber trotzdem ein invariantes Haar-Maß aus  $\beta$  gewinnen. Für  $U(2)$  sind die matrixwertigen 1-Formen Matrizen  $U^{-1}dU$  nicht mehr alle spurlos. Wir wählen  $D = \text{diag}(e^{i\vartheta_1}, e^{i\vartheta_2})$  und erhalten

$$D^{-1}dD = \begin{pmatrix} i d\vartheta_1 & 0 \\ 0 & i d\vartheta_2 \end{pmatrix}. \quad (9.39)$$

Die Matrix  $\gamma$  behält die Form in (9.34) bei, so dass  $\beta$  folgende Komponenten hat,

$$\beta_{11} = i d\vartheta_1, \quad \beta_{22} = i d\vartheta_2, \quad \beta_{12} = -2i e^{-i\vartheta_{12}} \sin(\vartheta_{12}) \gamma_{12}, \quad (9.40)$$

wobei wir den halben Differenzwinkel  $\vartheta_{12} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)/2$  einführen. Man findet nun, dass die vierte Potenz von  $\beta$  identisch verschwindet. Stattdessen finden die invarianten Formen

$$\omega_1 = \text{Sp} \beta = i(\vartheta_1 + \vartheta_2) \quad \text{und} \quad \omega_3 = \text{Sp}(\beta \wedge \beta \wedge \beta) = 3i d(\vartheta_1 - \vartheta_2) \beta_{12}^\dagger \beta_{12}, \quad (9.41)$$

mit denen wir eine invariante Volumenform konstruieren können,

$$d\mu = \omega_1 \wedge \omega_3 = 6 d\vartheta_1 d\vartheta_2 \beta_{12}^\dagger \beta_{12} = 24 \sin^2(\vartheta_{12}) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \gamma_{12}^\dagger \gamma_{12}. \quad (9.42)$$

Daraus erhält man unmittelbar das reduzierte Haar-Maß nach Integration über  $\gamma_{12}^\dagger \gamma_{12}$ .

Die Gruppe  $U(2)$  hat das reduzierte normierte Haar-Maß

$$d\mu_{\text{red}} = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} d\vartheta_1 d\vartheta_2, \quad \vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi). \quad (9.43)$$

Abschließend wenden wir uns den unitären Gruppen in höheren Dimensionen zu

### Invariante Formen und Haar-Maß auf $U(n)$ und $SU(n)$

Die Vorgehensweise ist ähnlich wie für die Gruppen  $U(2)$  und  $SU(2)$ . Zuerst parametrisieren wir die Diagonalmatrizen von  $U(n)$  gemäß

$$D = \text{diag} \left( e^{i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_n} \right) \implies D^{-1}dD = i \text{diag}(d\vartheta_1, \dots, d\vartheta_n). \quad (9.44)$$

Die Matrixelemente der nicht-diagonalen anti-hermiteschen Matrix  $\gamma = (V^{-1}dV)_\perp$  erfüllen  $\gamma_{ji} = -\gamma_{ij}^\dagger$  für  $i < j$ . Für die Matrixelemente von  $\beta$  finden wir entsprechend

$$\beta_{ii} = i d\vartheta_i, \quad \beta_{ij} = -2i e^{-i\vartheta_{ij}} \sin \vartheta_{ij} \gamma_{ij}, \quad \vartheta_{ij} = \frac{1}{2}(\vartheta_i - \vartheta_j), \quad i < j. \quad (9.45)$$

Die invariante Volumenform ist ein Polynom der Matrixelemente von  $\beta$ , wobei das Produkt das Wedge-Produkt ist. In jedem Monom darf ein Matrixelement nur einmal als Faktor auftreten, da  $\beta_{ij} \wedge \beta_{ij} = 0$  ist. Für  $U(n)$  ist die invariante Volumenform eine  $n^2$ -Form. Wir können aus den  $n$  Formen  $\{d\vartheta_i\}$  und den  $n^2 - n$  Formen  $\{\beta_{i<j}, \beta_{i<j}^\dagger\}$  bis auf eine Konstante nur eine invariante Volumenform konstruieren und diese ist proportional zum *Haar-Maß*,

$$d\mu \propto \prod_i d\vartheta_i \prod_{i<j} \beta_{ij}^\dagger \beta_{ij} = \prod_i d\vartheta_i \prod_{i<j} \left( 4 \sin^2 \vartheta_{ij} \gamma_{ij}^\dagger \gamma_{ij} \right). \quad (9.46)$$

Die Formen  $\gamma_{ij}$  hängen nicht von den Variablen  $\vartheta_i$  ab. Deshalb gilt

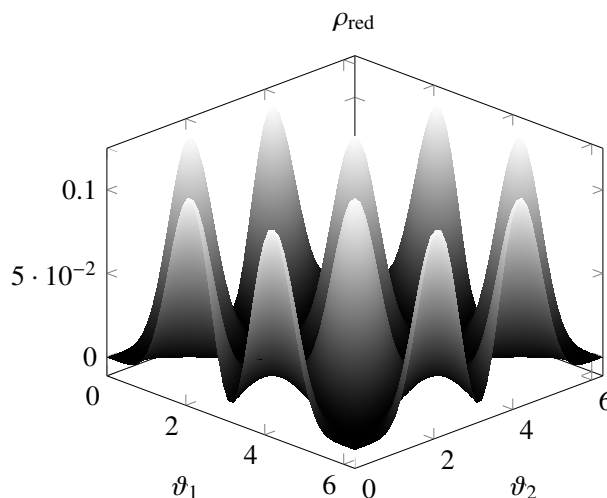
Das reduzierte und auf Eins normierte Haar-Maß auf  $U(n)$  hat die Form

$$d\mu_{\text{red}} = \frac{2^{n(n-2)}}{n! \pi^n} \prod_{i<j} \sin^2 \left( \frac{\vartheta_i - \vartheta_j}{2} \right) d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_n, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]. \quad (9.47)$$

Das entsprechend invariante Maß auf  $SU(n)$  erhält man, indem man  $\vartheta_n$  durch  $-(\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_{n-1})$  ersetzt und das Differential  $d\vartheta_n$  durch den Faktor  $2\pi$ . Derart findet man für  $SU(3)$  das reduzierte und auf Eins normierte Haar-Maß

$$d\mu_{\text{red}} = \frac{8}{3\pi^2} \sin^2 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \sin^2 \frac{2\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \sin^2 \frac{2\vartheta_2 + \vartheta_1}{2} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \quad \text{für } SU(3). \quad (9.48)$$

Die Dichte des Maßes ist in Abbildung 9.2 gezeigt.

Abbildung 9.2: Dichte des reduzierten Haar-Maßes der Gruppe  $SU(3)$ 

Abschließend bemerken wir noch, dass für  $U(n)$  jede Permutation der Winkel  $\vartheta_i$  in

$$D = \text{diag} \left( e^{i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_n} \right)$$

eine zu  $D$  konjugierte Matrix ergibt. Somit ist eine Klassenfunktion  $f(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$  vollständig symmetrisch in ihren Argumenten. Deshalb ist das reduzierte Haar-Maß invariant unter einer Permutation der Winkel. Für  $SU(n)$  gilt diese Aussage entsprechend, wenn man  $\vartheta_n$  durch  $-(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_{n-1})$  ersetzt.

## 9.4 Invariante Integration auf $SU(1,1)$ und $SL(2, \mathbb{R})$

Immer wenn  $\text{Sp}\omega_n$  nicht verschwindet, dann definiert diese  $n$ -Form ein links- und rechtsinvariantes Haar-Maß auf der Gruppe. Dies gilt auch für nicht-kompakte Gruppen. Als Beispiel betrachten wir die halbeinfachen und isomorphen Gruppen  $SU(1,1)$  und  $SL(2, \mathbb{R})$ . Diese haben als Gruppenmannigfaltigkeit den Anti-deSitter Raum  $\text{AdS}_3$ . Für die Elemente in  $SU(1,1)$  wählen wir die Parametrisierung

$$U = \begin{pmatrix} \cosh \rho e^{it} & \sinh \rho e^{-i\phi} \\ \sinh \rho e^{i\phi} & \cosh \rho e^{-it} \end{pmatrix}, \quad (9.49)$$

und finden folgende linksinvariante 1-Form  $\alpha = U^{-1}dU$  auf der Gruppe

$$\begin{aligned} \alpha = & \begin{pmatrix} 0 & e^{-i(t+\phi)} \\ e^{i(t+\phi)} & 0 \end{pmatrix} d\rho + i \cosh \rho \begin{pmatrix} \cosh \rho & \sinh \rho e^{-i(t+\phi)} \\ -\sinh \rho e^{i(t+\phi)} & -\cosh \rho \end{pmatrix} dt \\ & - i \sinh \rho \begin{pmatrix} \sinh \rho & \cosh \rho e^{-i(t+\phi)} \\ -\cosh \rho e^{i(t+\phi)} & -\sinh \rho \end{pmatrix} d\phi. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Deshalb ist die natürliche invariante Metrik

$$ds^2 = -\frac{1}{2} \text{Sp} (U^{-1} dU)^2 = \cosh^2 \rho dt^2 - (d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2). \quad (9.51)$$

Die zur linksinvarianten 1-Form assoziierte links- und rechtsinvariante 3-Form ist

$$\omega_3 = \text{Sp}(\alpha \wedge \alpha \wedge \alpha) = 3 \text{Sp}([\alpha_t, \alpha_\rho] \alpha_\phi) dt \wedge d\rho \wedge d\phi = -12 \cosh \rho \sinh \rho dt \wedge d\rho \wedge d\phi. \quad (9.52)$$

Entweder mithilfe der invarianten Metrik oder der invarianten 3-Form schließen wir:

Das invariante Haar-Maß auf der Gruppe  $SU(1,1)$  mit Parametrisierung (9.49) ist

$$d\mu(U) = C \cosh \rho \sinh \rho dt \wedge d\rho \wedge d\phi, \quad C = \text{konstant.} \quad (9.53)$$

Wählt man für die isomorphe Gruppe  $SL(2, \mathbb{R})$  die Parametrisierung

$$A = \cosh \rho \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} + \sinh \rho \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}, \quad (9.54)$$

dann erhält man für die invariante natürliche Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} (A^{-1} dA)^2 = d\rho^2 - \cosh^2 \rho dt^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2. \quad (9.55)$$

Die invariante 3-Form stimmt mit der 3-Form für  $SU(1,1)$  in (9.52) überein.

## 9.5 Aufgaben zu Kapitel 9

### Aufgabe 9.1: Invariante Integration auf $SU(2)$

Berechnen Sie das Haar'sche Integrationsmaß auf  $SU(2)$  in der Parametrisierung

$$U = \begin{pmatrix} \cos \vartheta e^{i\zeta} & -\sin \vartheta e^{i\eta} \\ \sin \vartheta e^{-i\eta} & \cos \vartheta e^{-i\zeta} \end{pmatrix}.$$

Normiere das Maß, so dass  $\text{Vol}(SU(2)) = 1$ .

### Aufgabe 9.2: Konjugationsklassen von $SU(3)$

Versuchen Sie, die Konjugationsklassen der Liegruppe  $SU(3)$  zu charakterisieren. Hinweis: Betrachten Sie die Eigenwerte der Matrizen.

### Aufgabe 9.3: Reduzierte Haar-Maße für $U(N)$ und $SU(N)$

Das reduzierte Haar-Maß auf  $U(N)$  hat die Form

$$d\mu_{\text{red}}(\vartheta) \propto \prod_{i < j} \sin^2 \left( \frac{\vartheta_i - \vartheta_j}{2} \right) d\vartheta_1 \dots d\vartheta_N.$$

Für das Haar-Maß auf  $SU(N)$  setzt man  $\vartheta_N = -(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_{N-1})$ . Man normiere beide Maße.

#### Aufgabe 9.4: Anti-de Sitter Gruppe und Anti-de Sitter Raum

Betrachten Sie  $\mathbb{R}^5$  mit metrischem Tensor

$$(g_{\mu\nu}) = G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Anti-de Sitter (AdS) Gruppe  $SO(3,2)$  besteht aus den linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ , gegeben durch  $\xi' = \Lambda\xi$ , welche die Metrik invariant lassen,

$$\Lambda^T G \Lambda = G.$$

- Der Anti-de Sitter Raum mit „Radius“  $R$  ist definiert durch

$$\text{AdS} = \{\xi \in \mathbb{R}^5 \mid \xi^T G \xi = R^2\}.$$

Visualisieren Sie den Raum indem Sie die analoge Konstruktion in  $\mathbb{R}^3$  mit Metrik  $G = \text{diag}(1, 1, -1)$  darstellen.

- Die Metrik auf dem AdS ist die Metrik induziert durch die Einbettung  $\text{AdS} \subset \mathbb{R}^5$ . Bestimmen Sie die Signatur der induzierten Metrik. Es genügt, den einfacheren Fall in  $\mathbb{R}^3$  mit  $G = \text{diag}(1, 1, -1)$  zu diskutieren.
- $SO(3,2)$  wirkt auf AdS durch

$$SO(3,2) \times \text{AdS} \rightarrow \text{AdS}, \quad (\Lambda, \xi) \rightarrow \Lambda\xi.$$

Dies ist eine Isometrie auf  $(\mathbb{R}^5, G)$  und damit auf dem AdS. Zeigen Sie, dass alle Punkte auf dem AdS in der Bahn des speziellen Punktes  $(R, 0, 0, 0, 0)$  liegen. Was bedeutet dies für die Wirkung von  $SO(3,2)$  auf dem AdS.

- Finde eine geschlossene und zeitartige Geodäte durch  $(R, 0, 0, 0, 0)$  (ohne Rechnung) und eine raumartige Geodäte durch  $(R, 0, 0, 0, 0)$ .

#### Aufgabe 9.5: Die nicht-kompakte Liegruppe $SU(1,1)$

- Versuchen Sie eine ähnliche Parametrisierung für  $SU(1,1)$  zu finden wie für  $SU(2)$ ,

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix}, \quad \text{mit } |a|^2 - \dots$$



- Benutzen Sie die Parametrisierung

$$a = \cosh(r) e^{i\phi}, \quad b = \sinh(r) e^{i\psi}$$

und extrahieren Sie damit die metrischen Koeffizienten  $g_{ij}$  aus  $ds^2 = \frac{1}{2} \text{Sp}(U^{-1}dUU^{-1}dU)$ .

- Was ist das (invariante) Volumenelement  $d\mu = \sqrt{-g} dr d\phi d\psi$ ?
- Wir schreiben  $U^{-1}dU = A dr + B d\phi + C d\psi$  mit Matrizen  $A, B$ , und  $C$ . Beweise

$$\omega \equiv \frac{1}{3} \text{Sp}(U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU) = \text{Sp}(A[B, C]) dr \wedge d\phi \wedge d\psi$$

und berechnen Sie nun damit die invariante Volumenform  $\omega$ .

- Zeigen Sie, dass die Gruppenmannigfaltigkeit von  $SU(1,1)$  gleich dem  $\text{AdS}_3$ -Raum ist. Dessen Einbettung in  $\mathbb{R}^4$  ist definiert durch

$$\text{AdS}_3 = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = 1\}.$$

- Was lernen Sie daraus über die Fundamentalgruppe von  $SU(1,1)$ ?
- Überzeugen Sie sich davon, dass  $SU(1,1) \cong \text{SL}(2, \mathbb{R})$ .  
Hinweis: Es existiert eine Matrix  $C$ , so dass  $CUC^{-1}$  reell ist für alle  $U \in SU(1,1)$ .

# 10 Darstellungen von Gruppen

*Nowadays, group theoretical methods—especially those involving characters and representations, pervade all branches of quantum mechanics.*

GEORGE MACKEY

Werden die Elemente einer Gruppe und ihre Gruppenoperationen homomorph auf eine konkrete algebraische Struktur abgebildet, dann sprechen wir von einer Realisierung der Gruppe. Erfolgt diese durch lineare Abbildungen auf einem Vektorraum  $\mathcal{V}$ , so nennt man sie *Darstellung* der Gruppe. Man sollte aber zwischen einer Gruppe und ihren Darstellungen unterscheiden. Die Gruppeneigenschaften sind universell und unabhängig von den Darstellungen. Eine Gruppe wird im Allgemeinen viele Darstellungen haben. So lassen sich die Drehungen im Euklidischen Raum  $E_3$  durch 3–dimensionale Matrizen darstellen; diese sind jedoch nicht die Gruppenelemente selbst, sondern nur eine von unendlich vielen Darstellungen.

## 10.1 Darstellungen

In der Physik sind es gerade die Darstellungen von Gruppen, die gebraucht werden. In der klassischen Mechanik zum Beispiel die 3-dimensionale Darstellung der Drehgruppe und in der Quantenmechanik alle Darstellungen der Drehgruppe, Lorentzgruppe oder Kristallgruppen. Einzelne Darstellungen können weitere Eigenschaften (z.B. Unitarität) aufweisen, die nicht allgemein für die Gruppe gelten. Auch können bei einer (nicht-treuen) Darstellung Eigenschaften der Gruppe „verloren gehen“.

Darstellungen sind Realisierungen der Gruppenelemente als invertierbare lineare Abbildungen  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums. Diese Gruppe wird mit  $GL(\mathcal{V})$  bezeichnet. Nach Wahl einer Basis im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathcal{V}$  kann  $GL(\mathcal{V})$  mit der allgemeinen linearen Gruppe  $GL(n, \mathbb{K})$  der invertierbaren Matrizen identifiziert werden.

**Definition 37 (Darstellung)** *Eine Darstellung  $D$  einer Gruppe  $G$  auf einem linearen Raum  $\mathcal{V}$  ist ein Gruppenhomomorphismus*

$$D : G \mapsto GL(\mathcal{V}), \quad g \mapsto D(g).$$

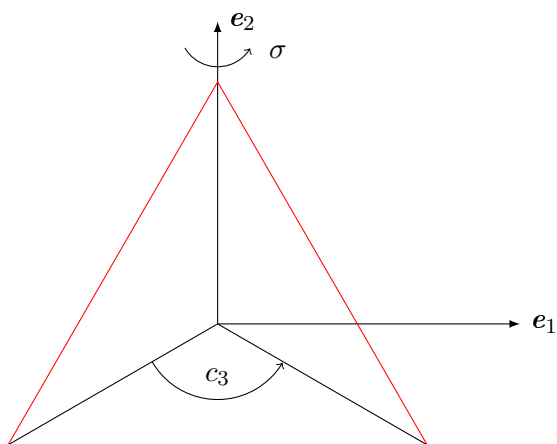
Eine Darstellung respektiert die Gruppenstruktur,

$$D(g_1g_2) = D(g_1)D(g_2), \quad D(e) = \mathbb{1} \implies D(g^{-1}) = D^{-1}(g).$$

$\mathcal{V}$  heißt Trägerraum der Darstellung und  $\dim \mathcal{V}$  *Dimension der Darstellung*. Eine Darstellung ist eine spezielle Links-Gruppenwirkung mit einem linearen Raum als Wirkungsmenge. Entsprechend nennt man eine injektive Darstellung auch *treu*. Eine treue Darstellung ist ein Gruppensomorphismus  $D : G \rightarrow \text{Bild}(D) \leq \text{GL}(\mathcal{V})$  und  $\text{Kern}(D) = e \in G$ . Nach Wahl einer Basis in  $\mathcal{V}$  werden die  $D(g)$  zu Matrizen.

Es gibt immer die *triviale Darstellung*, die alle Gruppenelemente auf die Eins-Matrix abbildet. Dabei geht jegliche Information über die Gruppe verloren. Der andere Extremfall sind die *treuen Darstellungen* bei denen  $\sigma$  alle Eigenschaften der Gruppe erhalten werden.

**Darstellungen von  $\mathcal{D}_3$ :** Die Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$  wurde schon früher als Decktransformationen des gleichseitigen Dreiecks, also durch lineare Abbildungen auf  $\mathbb{R}^2$  eingeführt. Tatsächlich haben wir also eine zweidimensionale Darstellung  $D_2$  der Gruppe betrachtet. Die Gruppe  $\mathcal{D}_3$  wird durch die



Drehung  $c_3$  um  $2\pi/3$  und die Spiegelung  $\sigma$  an einer Symmetrieachse erzeugt. Diese sind in der nebenstehenden Abbildung 10.1 gezeigt. Es genügt, die Darstellungsmatrizen  $D_2(g)$  für erzeugende Elemente anzugeben. Wir wählen eine kartesische Basis  $e_1, e_2$  in  $\mathbb{R}^2$  und setzen

$$e_i \mapsto D_2(g) e_i = \sum_j e_j D_{ji}(g).$$

Die Spalten der Matrix  $(D_{ji})$  sind die Bilder der Basisvektoren. Das Element  $c_3$  beschreibt eine Drehung um  $\varphi_3 \equiv 2\pi/3$ , und wird durch

$$D_2(c_3) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

Abbildung 10.1: Die Symmetrieoperationen des gleichseitigen Dreiecks

dargestellt. Das Element  $\sigma$  ist die Spiegelung an der zu  $e_1$  Senkrechten durch den Schwerpunkt und wird durch die Matrix

$$D_2(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

dargestellt. Diese definierende Darstellung  $D_2$  ist treu. Der Index 2 bezeichnet die Dimension der Darstellung. Des Weiteren gibt es auch noch die *Einsdarstellung*  $D_1^1$ , für die

$$D_1^1(c_3) = D_1^1(\sigma) = 1 \implies D \equiv 1 \quad (10.3)$$

ist, und die ebenfalls eindimensionale *alternierende Darstellung*  $D_1^2 = \det D_2(g)$  mit

$$D_1^2(c_3) = 1 \quad \text{und} \quad D_1^2(\sigma) = -1. \quad (10.4)$$

Die alternierende Darstellung ordnet Drehungen die 1 und Spiegelungen die  $-1$  zu.

Allgemein gilt: Für jede Darstellung  $g \mapsto D(g)$  ist auch  $g \mapsto \det D(g)$  eine (ein-dimensionale) Darstellung:

$$\det D(g_1 g_2) = \det D(g_1) D(g_2) = \det D(g_1) \det D(g_2).$$

## 10.2 Reguläre Darstellung

Die reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe enthält alle Darstellungen der Gruppe. Deshalb ist ihr Verständnis auch so wichtig für die Darstellungstheorie. Man konstruiert die  $n$ -dimensionale reguläre Darstellung  $g \mapsto \mathcal{R}(g)$  einer Gruppe  $G$  der Ordnung  $n$  wie folgt: Die Spalten der Gruppentafel werden derart umgeordnet, dass das Einselement  $e$  nur noch auf der Diagonalen auftritt:

$G$	$e$	$g_2^{-1}$	$g_3^{-1}$	$\dots$	$g_n^{-1}$
$e$	$e$	$g_2^{-1}$	$g_3^{-1}$	$\dots$	$g_n^{-1}$
$g_2$	$g_2$	$e$	$g_2 \circ g_3^{-1}$	$\dots$	$g_2 \circ g_n^{-1}$
$g_3$	$g_3$	$g_3 \circ g_2^{-1}$	$e$	$\dots$	$g_3 \circ g_n^{-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$g_n$	$g_n$	$g_n \circ g_2^{-1}$	$g_n \circ g_3^{-1}$	$\dots$	$e$

Nun wird dem Element  $g_i$  diejenige  $n \times n$ -Matrix  $\mathcal{R}(g_i)$  zugeordnet die man erhält, wenn man in der obigen Gruppentafel überall  $g_i$  durch 1 ersetzt und die anderen Elemente durch 0. Insbesondere ist  $\mathcal{R}(e) = \mathbb{1}_n$ .

### Reguläre Darstellung von $\mathcal{D}_3$

Die (umgeordnete) Gruppentafel der auf Seite 15 eingeführten Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$  hat folgende

Form:

$\mathcal{D}_3$	$e$	$c_3^2$	$c_3$	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(3)}$
$e$	$e$	$c_3^2$	$c_3$	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(3)}$
$c_3$	$c_3$	$e$	$c_3^2$	$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(2)}$
$c_3^2$	$c_3^2$	$c_3$	$e$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(1)}$
$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(2)}$	$e$	$c_3$	$c_3^2$
$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(3)}$	$c_3^2$	$e$	$c_3$
$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(1)}$	$c_3$	$c_3^2$	$e$

Entsprechend werden die Drehung  $c_3$  und Spiegelung  $\sigma_v^{(1)}$  wie folgt dargestellt:

$$\mathcal{R}(c_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}(\sigma_v^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man prüft leicht nach, dass diese Matrizen in der Tat die Gruppe  $\mathcal{D}_3$  darstellen,

$$\mathcal{R}^3(c_3) = \mathcal{R}^2(\sigma_v^{(1)}) = \mathbb{1}_6 \quad \text{und} \quad \mathcal{R}(\sigma_v^{(1)})\mathcal{R}(c_3)\mathcal{R}(\sigma_v^{(1)})\mathcal{R}(c_3) = \mathbb{1}_6.$$

Nach diesem Beispiel wenden wir uns wieder der allgemeinen Situation zu. Da verschiedene Spalten der Gruppentafel verschiedene Permutationen der Gruppenelemente enthalten ist die reguläre Darstellung treu. Jede Spalte enthält genau eine 1 und sonst lauter Nullen und hat damit die Norm 1. In verschiedenen Spalten steht die 1 an anderen Stellen und die Spaltenvektoren sind senkrecht zueinander. Dies bedeutet, dass die Darstellungsmatrizen  $\mathcal{R}(g)$  orthogonale Matrizen sind für alle  $g \in G$ :

Die reguläre Darstellung  $g \rightarrow \mathcal{R}(g)$  ist eine orthogonale treue Darstellung der Gruppe  $G$ .

Um die Darstellungseigenschaft zu beweisen notieren wir, dass  $R_{kj}(g_i) = 1$  genau dann, wenn  $g_k \circ g_j^{-1} = g_i$  ist oder wenn  $g_k = g_i \circ g_j$  gilt. Wir folgern

$$g_i \circ g_j = \sum_{p=1}^n \mathcal{R}_{pj}(g_i)g_p, \quad (10.5)$$

und mit der *Assoziativität* der Gruppenverknüpfung folgt

$$\begin{aligned}
 g_i \circ (g_j \circ g_k) &= g_i \circ \sum_p \mathcal{R}_{pk}(g_j)g_p = \sum_p \mathcal{R}_{pk}(g_j)g_i \circ g_p = \sum_{pq} \mathcal{R}_{pk}(g_j)\mathcal{R}_{qp}(g_i)g_q \\
 &= (g_i \circ g_j) \circ g_k = \sum_q \mathcal{R}_{qk}(g_i \circ g_j)g_q \implies \mathcal{R}(g_i)\mathcal{R}(g_j) = \mathcal{R}(g_i \circ g_j). \quad (10.6)
 \end{aligned}$$

Deshalb ist die Abbildung  $g \mapsto \mathcal{R}(g)$  eine treue Darstellung der Gruppe  $G$  in die Gruppe  $SO(|G|, \mathbb{Z}_2)$ .

Wir könnten zum Beispiel zur Beschreibung der Decktransformationen des Dreiecks eine gedrehte Basis  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  benutzen, siehe Abbildung 10.2. Die Basen  $\{\mathbf{e}_i\}$  und  $\{\mathbf{f}_i\}$  sind durch eine invertierbare lineare Transformation verbunden

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_j S^j_i,$$

wobei die Summenkonvention gelten soll. Es folgt, dass die Koordinaten für  $\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i = y^i \mathbf{f}_i$  folgendermaßen zusammenhängen:

$$y^i = S^i_j x^j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y} = S\mathbf{x}.$$

In der Basis  $\mathbf{e}_i$  werde dem Gruppenelement  $g$  die Matrix  $D(g)$  zugeordnet,

$$\mathbf{x} \mapsto D(g)\mathbf{x}.$$

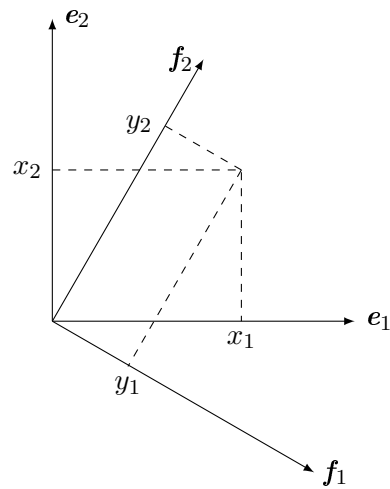


Abbildung 10.2: Zwei kartesische Basen

Dann gilt

$$\mathbf{y} = S\mathbf{x} \mapsto SD(g)\mathbf{x} = SD(g)S^{-1}\mathbf{y} \equiv \tilde{D}(g)\mathbf{y}.$$

Wie erwartet, gehen die Darstellungsmatrizen  $\tilde{D}(g)$  durch eine Konjugation aus den  $D(g)$  hervor,

$$\tilde{D}(g) = SD(g)S^{-1}. \quad (10.7)$$

**kürzen!!!** Diese Konjugation definiert eine Äquivalenzrelation, wie wir früher besprochen haben. Die Gruppeneigenschaften dieser beiden *äquivalenten Darstellungen* sind natürlich gleich

$$\tilde{D}(g_1)\tilde{D}(g_2) = SD(g_1)D(g_2)S^{-1} = SD(g_1g_2)S^{-1} = \tilde{D}(g_1g_2).$$

Äquivalente Darstellungen sind wirklich dieselben Darstellungen und sollten identifiziert werden. Ist umgekehrt eine Darstellung gegeben, dann können wir immer unendlich viele äquivalente Darstellungen der Gestalt  $SD(g)S^{-1}$  angeben. Bei der Klassifizierung von Darstellungen kann es sich also nur um die Klassifizierung von inäquivalenten Darstellungen handeln, also Darstellungen die nicht über eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervorgehen.

**Natürliche dreidimensionale Darstellung von  $\mathcal{D}_3$ :** Wir geben jetzt noch eine weitere Darstellung der Symmetriegruppe  $\mathcal{D}_3$  des gleichseitigen Dreiecks an.  $\mathcal{D}_3$  ist bekanntlich isomorph zur Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_3$ , die nun auf eine kartesische Basis von  $\mathbb{R}^3$  wirke. Unter  $c_3$  werde  $e_1$  in  $e_2$ ,  $e_2$  in  $e_3$  und  $e_3$  in  $e_1$  abgebildet. Dies ist eine Drehung um die Achse  $e_1 + e_2 + e_3$  mit Winkel  $2\pi/3$ . Diese lineare Abbildung ist links in Abbildung 10.3 gezeigt.  $D_3(\sigma)$  vertausche dagegen  $e_2$  und  $e_3$  und ist damit eine Spiegelung an der grau schattierten Ebene in Abbildung 10.3, aufgespannt durch  $e_1$  und  $e_2 + e_3$ . Man erhält

$$D_3(c_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_3(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

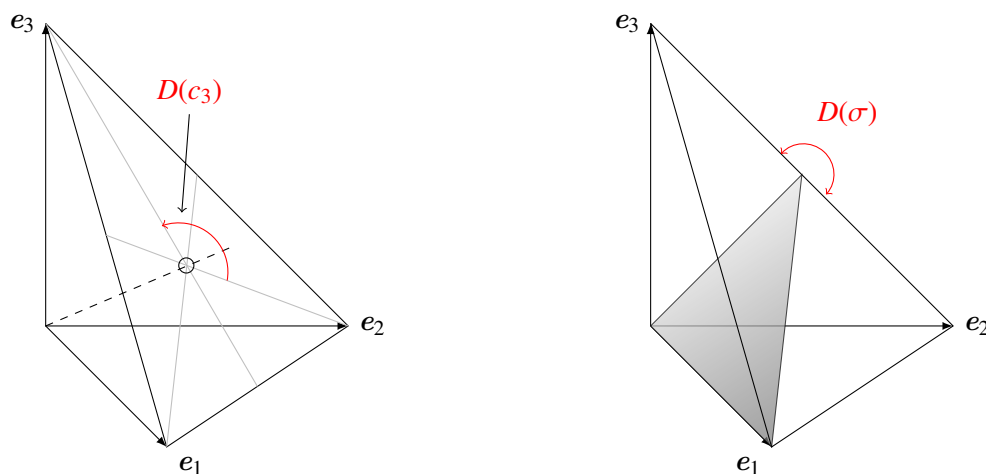


Abbildung 10.3: Zur dreidimensionalen Darstellung der Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$

Die restlichen Darstellungsmatrizen können aus der Multiplikationstabelle, die wegen der Darstellungseigenschaft dieselbe wie diejenige der  $\{g\}$  ist, abgelesen werden. Alle Matrizen  $D_3(g)$  sind orthogonal und unimodular.

Die Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$  hat folgende Darstellungen:

- die eindimensionale Einsdarstellung  $D_1^1$ ,
- die eindimensionale alternierende Darstellung  $D_1^2$ ,
- die zweidimensionale Darstellung  $D_2$ ,
- die dreidimensionale natürliche Darstellung  $D_3$ .

## 10.3 Reduzible Darstellungen

Anhand der dreidimensionalen Darstellung von  $D_3$  wollen wir uns dem Begriff einer reduzierten Darstellung nähern. Unter der Drehung  $D_3(c_3)$  und der Spiegelung  $D_3(\sigma)$  und damit unter allen  $D_3(g)$  ist der von  $\mathbf{f}_1 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{3}$  aufgespannte eindimensionale Unterraum invariant. Wir ergänzen  $\mathbf{f}_1$  folgendermaßen zu einer orthonormierten Basis

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3). \quad (10.9)$$

Die Transformation auf die neue Basis  $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j(S^{-1})^j_i$  geschieht mit der orthogonalen Matrix

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S^T = S^{-1}. \quad (10.10)$$

Bezüglich der neuen Basis haben die Darstellungsmatrizen  $\tilde{D} = SDS^{-1}$  die Form

$$\tilde{D}_3(c_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{D}_3(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.11)$$

**Definition 38 (irreduzible Darstellungen)** *Eine Darstellung heißt irreduzibel, falls  $\mathcal{V}$  keinen echten Teilraum hat, der unter allen  $D(g)$  invariant ist.*

Die Darstellung  $D_2$  ist offensichtlich irreduzibel. Dagegen zerfällt der Trägeraum der dreidimensionalen Darstellung  $D_3$  in zwei orthogonale Teilräume der Dimensionen 1 und 2,  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ . Jeder der beiden Unterräume wird von allen linearen Abbildungen in sich abgebildet,  $D_3 : \mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Auf  $\mathcal{V}_1$  ist  $D_3$  gleich  $D_1^1$  und auf  $\mathcal{V}_2$  gleich  $D_2$ . Man schreibt

$$D_3 = D_1^1 \oplus D_2, \quad \dim D_3 = \dim D_1^1 + \dim D_2. \quad (10.12)$$

**Ausreduktion von Darstellungen:** Nun wollen wir auf Darstellungen  $D(g) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  von beliebigen Gruppen verallgemeinern. Ist eine Darstellung nicht irreduzibel, dann heißt sie *reduzibel*. Eine reduzible Darstellung hat einen echten invarianten Teilraum in  $\mathcal{V}$ . Sei nun  $\mathcal{V}_1$  ein  $m$ -dimensionaler echter invarianter Teilraum von  $\mathcal{V}$ , d.h. jedes  $D(g)$  bildet einen Vektor in  $\mathcal{V}_1$  wieder auf einen Vektor in  $\mathcal{V}_1$  ab.



Wird die Basis so gewählt, dass die ersten  $m$  Vektoren  $\mathcal{V}_1$  aufspannen, so haben die Darstellungsmatrizen der reduzierten Darstellung die Gestalt

$$g \mapsto D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & H(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}, \quad (10.13)$$

wobei  $D_1$  eine  $m$ -dimensionale und  $D_2$  eine  $(n - m)$ -dimensionale Matrix ist.

Ist speziell  $H(g) = 0$  für alle Gruppenelemente, dann zerfällt die Darstellung  $D$  in zwei Darstellungen  $D_1$  und  $D_2$  und

$$g \mapsto \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt  $D = D_1 \oplus D_2$ . Dieses Verfahren lässt sich möglicherweise fortsetzen, so dass die darstellenden Matrizen in einem geeigneten Koordinatensystem weiter zerfallen:

$$g \mapsto D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2(g) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_m(g) \end{pmatrix}. \quad (10.14)$$

Die Zerlegung bricht ab, wenn in keinem der invarianten Teilräume  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$  ein echter invarianter Teilraum existiert.

**Definition 39 (vollreduzible Darstellung)** Eine Darstellung, die irreduzibel ist oder in lauter irreduzible Darstellungen zerfällt, heißt vollreduzibel.

Es gibt Gruppen mit nicht-vollreduziblen Darstellungen für die  $H(g)$  nicht verschwindet. Die obigen Darstellungen der Diedergruppe sind aber alle orthogonal und damit unitär  $D^\dagger(g) = D^{-1}(g)$ , und für derartige Darstellungen haben wir den folgenden

**Satz 44** Jede unitäre Darstellung ist vollreduzibel.

*Beweis:* Ist  $D$  irreduzibel, so ist nichts zu beweisen. Sei also  $\mathcal{V}_1$  ein echter invarianter Teilraum von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W} = \mathcal{V}_1^\perp$  das unitär-orthogonale Komplement von  $\mathcal{V}_1$ ,

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{V} \mid (w, \mathcal{V}_1) = 0\}.$$

$\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{W}$  spannen  $\mathcal{V}$  auf. Jeder Vektor von  $v \in \mathcal{V}$  lässt sich auf eindeutige Weise durch einen Vektor aus  $v_1 \in \mathcal{V}_1$  und einen Vektor aus  $w \in \mathcal{W}$  zusammensetzen,  $v = v_1 + w$ . Nun ist wegen der Unitarität von  $D(g)$

$$(D(g)w, v_1) = (w, D^\dagger(g)v_1) = (w, D(g^{-1})v_1) = 0$$

für alle  $g \in G$ , da  $D(g^{-1})v_1$  nach Voraussetzung in  $\mathcal{V}_1$  liegt. Damit liegt mit  $w$  auch  $D(g)w$  im Unterraum  $\mathcal{W}$ . Deshalb ist das orthogonale Komplement jedes invarianten Unterraums ebenfalls invariant. Diese Verfahren kann nun fortgesetzt werden, falls ein echter invarianter Teilraum von  $\mathcal{W}$  existiert. Schließlich erhält man eine Zerfällung der Darstellung in lauter irreduzible Bestandteile.

## 10.4 Darstellungen von Gruppen mit Mittelwertbildung

In vielen Anwendungen der Gruppentheorie hat man es mit Gruppen zu tun, die eine Mittelwertbildung besitzen. Dann ist folgende Beobachtung für die Darstellungstheorie relevant:

Die Mittelwertbildung definiert ein *invariantes Skalarprodukt* für Funktionen auf der Gruppe,

$$(f_1, f_2) = \mathcal{M}(\bar{f}_1 \cdot f_2), \quad f_1, f_2 : G \mapsto \mathbb{C}. \quad (10.15)$$

?

Überzeugen Sie sich davon, dass  $(f_1, f_2)$  die Eigenschaften eines Skalarprodukts hat.

Es ist invariant bezüglich der Links- und der Rechtstranslation. Nun gilt der nützliche

**Satz 45** *Jede Darstellung einer Gruppe mit Mittelwertbildung auf einem Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  ist zu einer unitären Darstellung äquivalent. In anderen Worten: Wir können in  $\mathcal{V}$  immer eine Basis finden, bezüglich der die Matrizen  $D(g)$  unitär sind.*

*Beweis:* Die dem Beweis zugrunde liegende Idee der Summe über die Gruppenelemente geht auf HURWITZ zurück. Wir bilden folgende quadratische Form auf  $\mathcal{V}$ :

$$h(x) = \mathcal{M}\left\{ \underbrace{(D(g)x, D(g)x)}_{\geq 0} \right\} = (x, \mathcal{M}\{D^\dagger(g)D(g)\}x) = (x, Qx), \quad x \in \mathcal{V}.$$

Als Summe von positiven und hermiteschen Formen ist die Form  $Q$  positiv und hermitesch,

$$h(x \neq 0) > 0 \quad \text{und} \quad Q = Q^\dagger,$$

und aufgrund der Translationsinvarianz der Mittelbildung invariant.

### 10.4.1 Komplex-konjugierte, reelle und pseudo-reelle Darstellungen

Ist  $g \rightarrow D(g)$  eine beliebige Darstellung einer Gruppe auf einem komplexen Vektorraum, dann erhält man durch komplexe Konjugation der Matrizen

$$g \mapsto D^*(g) \quad (10.16)$$

wieder eine Darstellung der Gruppe. Es ist die komplex konjugierte Darstellung. Der Beweis ist einfach:

$$D^*(e) = \mathbb{1}^* = \mathbb{1}, \quad D^*(g_1 g_2) = (D(g_1) D(g_2))^* = D^*(g_1) D^*(g_2). \quad (10.17)$$

---

?

---

Warum definieren  $g \mapsto D^\dagger(g)$  und  $g \mapsto D^{-1}(g)$  keine Darstellungen?

---

**Definition 40** *Ist eine Darstellung äquivalent zu einer Darstellung mit reellen Matrizen, dann heißt sie reell. Sind die Darstellungen  $D$  und  $D^*$  äquivalent, dann heißt  $D$  pseudo-reell.*

Offensichtlich ist jede reelle Darstellung auch pseudo-reell. Für eine pseudo-reelle Darstellung existiert eine Matrix  $S$  mit

$$D^*(g) = S D(g) S^{-1}, \quad \text{für alle } g \in G. \quad (10.18)$$

Man kann beweisen, dass für eine unitäre Darstellung die Matrix  $S$  symmetrisch, oder antisymmetrisch gewählt werden kann. Diese Aussage ist Inhalt von Aufgabe 10.1.

#### SU(2) ist pseudoreell

Eine beliebige Matrix in SU(2) hat die Form (8.7) und deshalb die Eigenschaft

$$\sigma_2 U \sigma_2 = U^*, \quad (10.19)$$

was bedeutet, dass die Gruppe pseudo-reell ist. Die unitäre Matrix  $S = \sigma_2$  ist antisymmetrisch. Man kann zeigen, dass die Darstellung nur pseudo-reell und nicht reell ist.

## 10.5 Tensorprodukt von Darstellungen

Es seien nun  $D$  und  $\tilde{D}$  zwei Darstellungen der Dimensionen  $n$  und  $\tilde{n}$ . Wir wählen Basisvektoren in den Darstellungsräumen und identifizieren Vektoren mit Tupeln. Diese transformieren wie folgt,

$$\mathbf{x} \mapsto D(g)\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} \mapsto \tilde{D}(g)\mathbf{y}. \quad (10.20)$$

Wir bilden den zweistufigen Tensor  $t = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  mit Komponenten  $t_{ip} = x_i y_p$ . Dieser transformiert gemäß

$$t = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \mapsto [D(g)\mathbf{x}] \otimes [\tilde{D}(g)\mathbf{y}] \equiv (D \otimes \tilde{D})(g) (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (D \otimes \tilde{D})(g) t.$$

Für die Komponenten des Tensors  $t$  bedeutet dies

$$t_{ip} = x_i y_p \mapsto \sum_{j=1}^n \sum_{q=1}^{\tilde{n}} \left( D(g)_{ij} \tilde{D}(g)_{pq} \right) x_j y_q = \sum_{j,q} D(g)_{ij} \tilde{D}(g)_{pq} t_{jq}. \quad (10.21)$$

Dies ist eine lineare Transformation der  $n \cdot \tilde{n}$  Komponenten  $t_{ip}$ . Die Tensoren bilden den  $n \cdot \tilde{n}$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathcal{V} \otimes \tilde{\mathcal{V}}$  und die Matrizen  $D(g)_{ij} \tilde{D}(g)_{pq}$  sind die Komponenten der Tensor Darstellung

$$D \otimes \tilde{D} : \mathcal{V} \otimes \tilde{\mathcal{V}} \mapsto \mathcal{V} \otimes \tilde{\mathcal{V}}. \quad (10.22)$$

---

?

---

Überzeugen Sie sich davon, dass das Tensorprodukt  $D \otimes \tilde{D}$  zweier Darstellungen  $D$  und  $\tilde{D}$  ebenfalls eine Darstellung der Gruppe ist.

---

In Rechnungen kann es nützlich sein, eine Konvention für die Durchnummerierung der Komponenten von  $t$  zu treffen. Wegen

$$\begin{pmatrix} x'_1 \mathbf{y}' \\ x'_2 \mathbf{y}' \\ \vdots \\ x'_n \mathbf{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} \tilde{D} & D_{12} \tilde{D} & \dots & D_{1n} \tilde{D} \\ D_{21} \tilde{D} & D_{22} \tilde{D} & \dots & D_{2n} \tilde{D} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{n1} \tilde{D} & D_{n2} \tilde{D} & \dots & D_{nn} \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \mathbf{y} \\ x_2 \mathbf{y} \\ \vdots \\ x_n \mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (10.23)$$

gehen die Darstellungsmatrizen  $D(g) \otimes \tilde{D}(g)$  auf einfache Weise aus denen der Darstellungen  $D$  und  $\tilde{D}$  hervor: Man multipliziert jedes Matrixelement von  $D(g)$  mit der Matrix  $\tilde{D}(g)$ .

## 10.6 Aufgaben zu Kapitel 10

### Aufgabe 10.1: Komplex konjugierte Darstellung

Sei  $g \mapsto D(g)$  eine Darstellung einer Gruppe.

- Zeigen Sie, dass  $g \mapsto D^*(g)$  ebenfalls eine Darstellung ist. Warum sind  $g \mapsto D^\dagger(g)$  und  $g \mapsto D^{-1}(g)$  keine Darstellungen?
- Sei nun  $g \mapsto D(g)$  eine irreduzible Darstellung, die zu ihrer komplex konjugierten Darstellung äquivalent ist, d.h. es existiert  $S$ , so dass  $D^*(g) = SD(g)S^{-1}$ . Man zeige, dass  $SS^* = \lambda \mathbb{1}$ .
- Außerdem zeige man, dass wenn  $D$  zusätzlich unitär ist,  $S$  entweder symmetrisch oder asymmetrisch ist und  $SS^\dagger = \lambda' \mathbb{1}$  gilt.

### Aufgabe 10.2: Die Lie-Gruppe $SU(2)$ ist pseudo-reell

Zeigen Sie, dass  $\sigma_2 U \sigma_2 = U^*$  für jede  $SU(2)$ -Matrix  $U$  gilt. Es folgt, dass jede irreduzible Darstellung zu ihrer komplex konjugierten Darstellung konjugiert ist. Eine Gruppe mit dieser Eigenschaft

nennt man pseudo-reell.

### Aufgabe 10.3: Die Summe von Darstellungen

Es seien  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$  zwei Vektorräume und  $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$  ihr kartesisches Produkt bestehend aus den Paaren  $(v_1, v_2)$  mit  $v_i \in \mathcal{V}_i$ . Skalare Multiplikation und Addition sind in  $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$  wie folgt definiert:

$$\lambda(v_1, v_2) := (\lambda v_1, \lambda v_2), \quad (v_1, v_2) + (v'_1, v'_2) := (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2).$$

- Seien nun  $\mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_2$  mit Skalarprodukten versehen. Beweisen Sie nun, dass

$$\langle (v_1, v_2), (v'_1, v'_2) \rangle := \langle v_1, v'_1 \rangle_{\mathcal{V}_1} + \langle v_2, v'_2 \rangle_{\mathcal{V}_2}$$

ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$  ist. Der Vektorraum  $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$  versehen mit diesem Skalarprodukt ist die direkte Summe und wird mit  $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$  bezeichnet.

- Zeigen Sie, dass  $\{e_m\} \cup \{f_n\}$  eine orthonormale Basis von  $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$  definiert, wenn  $\{e_m\}$  und  $\{f_n\}$  orthonormale Basen in  $\mathcal{V}_1$  and  $\mathcal{V}_2$  sind. Was folgt daraus für die Dimension von  $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ ?
- Seien  $D_1$  and  $D_2$  zwei Darstellungen der Gruppe  $G$  auf Vektorräumen  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$ . Zeigen Sie, dass dann

$$g \rightarrow D_1(g) \oplus D_2(g), \quad \text{wobei} \quad (D_1(g) \oplus D_2(g))(v_1, v_2) = (D_1(g)v_1, D_2(g)v_2)$$

eine Darstellung der direkten Summe  $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$  ist.

### Aufgabe 10.4: Ein nützliches Theorem

Eine Darstellung heißt *treu*, wenn der Homomorphismus  $D : G \mapsto GL(\mathcal{V})$  injektiv ist und deshalb verschiedene Gruppenelemente auf verschiedenen Matrizen abgebildet werden. Beweisen Sie das folgende Theorem:

1. Hat die Gruppe  $G$  eine nicht-triviale invariante Untergruppe  $H$ , dann ist eine Darstellung der Faktorgruppe  $G/H$  auch eine Darstellung von  $G$ . Diese ist aber nicht treu.
2. Umkehrung: ist  $D$  eine nicht-treue Darstellung von  $G$ , dann hat  $G$  mindestens eine invariante Untergruppe, so dass  $D$  eine treue Darstellung der entsprechenden Faktorgruppe ist.

### Aufgabe 10.5: Rotationen von Wellenfunktionen

Wir betrachten die Wellenfunktion eines Teilchens  $\psi(\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^3)$  im Ortsraum. Unter Drehungen transformiert die Wellenfunktion gemäß

$$(U(R)\psi)(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}).$$

Beweisen Sie, dass  $R \rightarrow U(R)$  eine unitäre Darstellung der Gruppe  $SO(3)$  auf dem Hilbertraum  $L_2(\mathbb{R}^3)$  ist. Da der Radius  $r = |\mathbf{x}|$  bei Drehungen nicht ändern können wir  $r = 1$  setzen und  $U(R)$

als Transformation auf  $L_2(S^2)$  auffassen. Welche Unterräume tragen wohl die eindimensionale bzw. dreidimensionale irreduzible Darstellung?

**Aufgabe 10.6: Tensorprodukt 1**

Seien  $R_1, R_2$  orthogonale Matrizen. Man zeige, dass ihr Tensorprodukt  $R_1 \otimes R_2$  ebenfalls eine orthogonale Matrix ist.

**Aufgabe 10.7: Tensorprodukt 2**

Seien  $A, B$  quadratische Matrizen. Es ist zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A \otimes B) &= \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B), \\ \det(A \otimes B) &= (\det A)^m(\det B)^n,\end{aligned}$$

wobei  $n$  ( $m$ ) die Anzahl an Zeilen/Spalten der Matrix  $A$  ( $B$ ) sei.

# 11 Charaktere und Lemma von Schur

*Lemmas do the work in mathematics: Theorems, like management, just take the credit.*

PAUL TAYLOR

Die Darstellungstheorie von Lie'schen Gruppen kann entweder mithilfe der invarianten Integration auf der Gruppe oder mithilfe der Differenziation beim Einselement – diese führt auf die zur Liegruppe gehörende Liealgebra – entwickelt werden. In diesem Kapitel folgen wir dem ersten Zugang, für den in wesentlichen Zügen H. Weyl verantwortlich ist. Dabei spielen die Charakteren der irreduziblen Darstellungen eine zentrale Rolle. Dies sind spezielle Klassenfunktionen. Es wird sich zeigen, dass die Charakteren aller irreduziblen Darstellungen eine Basis auf dem linearen Raum der Klassenfunktionen definieren. Deshalb betrachten wir in diesem Kapitel Klassenfunktionen und erinnern an deren Definition:

**Definition 41 (Klassenfunktion)**  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Klassenfunktion* der Gruppe, falls  $f(g) = f(aga^{-1})$  für alle  $a \in G$ .

Das bedeutet, dass eine Klassenfunktion auf jeder Konjugationsklasse konstant ist.

## 11.1 Charakter einer Darstellung

Die explizite Ausreduktion einer gegebenen reduziblen Darstellung zu finden ist oft schwierig. Wir werden in diesem Kapitel zeigen, dass eine Darstellung allein durch die Spuren ihrer Darstellungsmatrizen  $D(g)$  charakterisiert wird. Deshalb kommt es in der Theorie der Darstellungen nur auf diese Spuren an und es genügt, eine Tabelle der Spuren für alle irreduziblen Darstellungen aufzustellen. Da diese die Darstellung charakterisieren, heißen sie Charakter der Darstellung:

**Definition 42 (Charakter)** Der Charakter einer Darstellung  $g \rightarrow D(g)$  ist die Klassenfunktion

$$\chi_D(g) = \text{Sp } D(g). \quad (11.1)$$

Jede Darstellung hat also ihren eigenen Charakter  $\chi_D$  und dieser ist eine Klassenfunktion:

$$\chi_D(aga^{-1}) = \text{Sp } D(aga^{-1}) = \text{Sp } D(a)D(g)D^{-1}(a) = \text{Sp } D(g) = \chi_D(g). \quad (11.2)$$

Wir machten dabei von  $\text{Sp}AB = \text{Sp}BA$  Gebrauch. Die Nützlichkeit der Charakteren beruht auch auf folgendem Satz.

**Satz 46** *Charakteren haben folgende Eigenschaften:*

1. Äquivalente Darstellungen haben denselben Charakter.
2. Die Dimension der Darstellung  $D$  ist  $\chi_D(e)$ .
3. Es gilt  $\chi_D(g^{-1}) = \chi_D^*(g)$ .
4. Für  $D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_r$  ist  $\chi_D = \chi_{D_1} + \dots + \chi_{D_r}$ .

Die erste Eigenschaft ist äquivalent zur bekannten Tatsache, dass sich die Spur bei einer Ähnlichkeitstransformation nicht ändert. Die zweite folgt aus  $\text{Sp}D(e) = \text{Sp}\mathbb{1} = \dim \mathcal{V}$  und die dritte aus der Unitarität der Darstellungen einer Gruppe mit Mittelbildung:

$$\chi_D(g^{-1}) = \text{Sp} D(g^{-1}) = \text{Sp} D^{-1}(g) = \text{Sp} D^\dagger(g) = \chi_D^*(g).$$

Somit sind für Gruppen, in denen jedes Element zu seinem Inversen ähnlich ist, die Charakteren reell. Die letzte Eigenschaft im Satz ist in einer Basis, in der die  $D(g)$  blockdiagonal sind, evident

$$SD(g)S^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2(g) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_r(g) \end{pmatrix}.$$

Ähnlich wie der Charakter einer direkten Summe von Darstellungen die Summe der Charakteren ist, ist der Charakter des Tensorprodukts von Darstellungen das Produkt deren Charakteren. Dies folgt unmittelbar aus der expliziten Form (10.23) von  $D \otimes \tilde{D}$ , für die gilt

$$\chi_{D \otimes \tilde{D}} = \text{Sp}(D \otimes \tilde{D}) = \sum_i D_{ii} \text{Sp} \tilde{D} = \text{Sp} D \text{Sp} \tilde{D} = \chi_D \cdot \chi_{\tilde{D}}. \quad (11.3)$$

Da Charaktere nicht von der Wahl der Basis abhängen, folgt der

**Satz 47 (Charakter des Tensorprodukts)** *Der Charakter des Tensorproduktes zweier Darstellungen ist gleich dem Produkt der Charaktere der beiden Darstellungen.*

**Beispiel: Charaktertabelle von  $\mathcal{D}_3$ :** Wir üben dies am Beispiel des Tensorproduktes der Darstellung  $D_2$  der Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$  mit sich selbst. Die Darstellungsmatrizen für die erzeugenden Elemente  $c_3$  und  $\sigma$  sind in (10.1) und (10.2) gegeben. Die Tensorprodukt Darstellung der erzeugenden Elemente ist

$$(D_2 \otimes D_2)(c_3) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 D_2(c_3) & -\sin \varphi_3 D_2(c_3) \\ \sin \varphi_3 D_2(c_3) & \cos \varphi_3 D_2(c_3) \end{pmatrix}, \quad (D_2 \otimes D_2)(\sigma) = \begin{pmatrix} -D_2(\sigma) & 0 \\ 0 & D_2(\sigma) \end{pmatrix}.$$



Wir sehen, dass in der Tat

$$\begin{aligned}\chi_{D_2 \otimes D_2}(c_3) &= 4 \cos^2 \varphi_3 = 1 = \chi_{D_2}(c_3)\chi_{D_2}(c_3) \\ \chi_{D_2 \otimes D_2}(\sigma) &= 0 = \chi_{D_2}(\sigma)\chi_{D_2}(\sigma)\end{aligned}$$

gelten. Wir finden deshalb folgende in Tabelle 11.1 gelisteten Charakteren. Es genügt, deren Werte auf den drei Konjugationsklassen von  $\mathcal{D}_3$  zu notieren.

$\mathcal{D}_3$	$\chi_{D_1^1}$	$\chi_{D_1^2}$	$\chi_{D_2}$	$\chi_{D_3}$	$\chi_{D_2 \otimes D_2}$
$K_e$	1	1	2	3	4
$K_{c_3}$	1	1	-1	0	1
$K_\sigma$	1	-1	0	1	0

Tabelle 11.1: Die Werte von 5 Charakteren auf den 3 Konjugationsklassen von  $\mathcal{D}_3$ .

Da, wie wir früher sahen, die dreidimensionale Darstellung  $D_3$  in  $D_2 \oplus D_1^1$  zerfällt, ist auch  $\chi_{D_3} = \chi_{D_2} + \chi_{D_1^1}$ . Wäre nun  $D_2 \otimes D_2$  reduzibel, dann müsste es eine Summe der niedrigdimensionalen Darstellungen  $D_1^1, D_1^2$  und  $D_2$  sein. Die Summe der Dimensionen der dabei auftretenden Darstellungen in der Zerlegung von  $D_2 \otimes D_2$  muss gleich 4 sein. Aus der Charaktertabelle sehen wir, dass nur

$$D_2 \otimes D_2 = D_2 \oplus D_1^1 \oplus D_1^2 \quad (11.4)$$

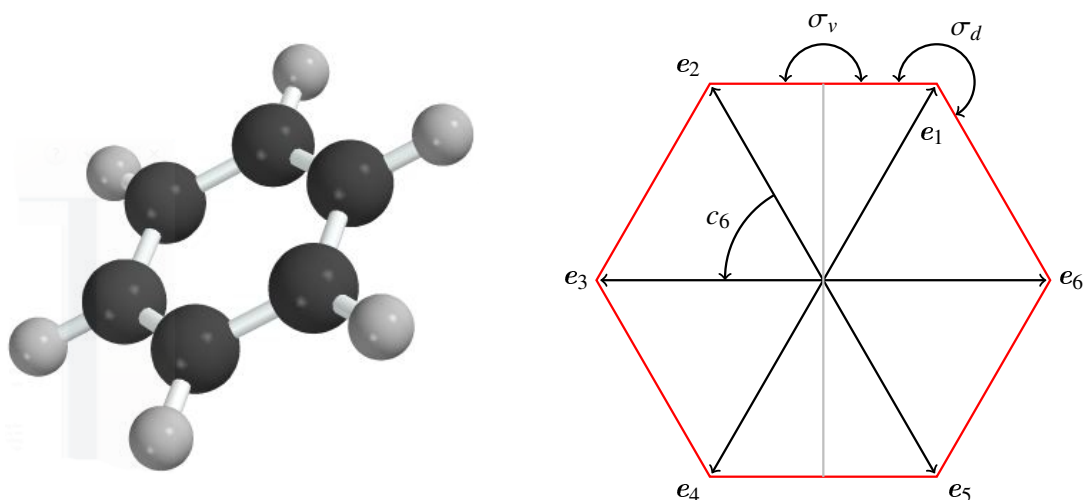
in Frage kommt. Dies ist auch die richtige Antwort. Um dies einzusehen, müssen wir noch etwas mehr über den Zusammenhang zwischen Charakteren und Darstellungen wissen.

## 11.2 Das Lemma von Schur

Zur Vorbereitung des Schur'schen Lemma betrachten wir die Decktransformationen des in Abbildung 11.1 gezeigten Benzolrings  $C_6H_6$ . Die Ecken des ebenfalls skizzierten gleichseitigen 6-Ecks repräsentieren die C-H des Benzolrings. Offenbar sind dessen Decktransformationen Elemente der Diedergruppe  $\mathcal{D}_6$  mit 12 Elementen. Die Drehung  $c_6$  um  $\pi/3$  erzeugt die zyklische Untergruppe  $\mathcal{C}_6$  der Ordnung 6. Zusammen mit der Spiegelung  $\sigma_d$  (siehe Abbildung) erzeugt sie die nicht-Abelsche Diedergruppe mit 6 Konjugationsklassen. Eine möglich Präsentation ist

$$\mathcal{D}_6 = \{c_6, \sigma_d \mid c_6^6 = \sigma_d^2 = \sigma_d c_6 \sigma_d c_6 = e\} . \quad (11.5)$$

Die Energie des Benzolrings kann nach HÜCKEL durch die Summe von identischen Wechselwir-

Abbildung 11.1: Benzolring und Erzeugende der Diedergruppe  $D_6$ .

kungen zwischen benachbarten C-H modelliert werden und hat die Form

$$H = -\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.6)$$

---

?

---

Überzeugen Sie sich davon, dass bis auf ein Vielfaches der Identität,  $H$  proportional zur diskretisierten zweiten Ableitung auf dem Kreisring ist.

---

Offensichtlich vertauscht  $H$  mit allen Decktransformationen des 6-Ecks. Um eine 6-dimensionale Darstellung zu konstruieren, belegen wir die Eckpunkte  $1, \dots, 6$  mit Vektoren  $e_1, \dots, e_6$ . Dann dreht  $D(c_6)$  den Vektor  $e_i$  in den Vektor  $e_{i+1}$  (wobei  $e_7 \equiv e_1$  ist) und die Spiegelung  $D(\sigma_d)$  vertauscht die Vektoren  $e_2$  und  $e_6$  bzw.  $e_3$  und  $e_5$  und lässt die Vektoren  $e_1$  und  $e_4$  unverändert.

Also ist

$$D(c_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_6(\sigma_d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.7)$$

Die Spur jeder Permutationsmatrix ist gleich der Anzahl *Fixelemente* der Transformation.

### Ausreduktion der 6-dimensionalen Darstellung von $D_6$

Der eindimensionale Unterraum  $\mathcal{V}_1$  aufgespannt durch

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{k=1}^6 \underbrace{\cos(2\pi k)}_{=1} \mathbf{e}_k$$

ist invariant unter allen Drehungen und Spiegelungen. Auf  $\mathcal{V}_1$  ist  $D$  die triviale Einsdarstellung  $D_1^1$ . Der dazu senkrechte Vektor

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{k=1}^6 \cos(\pi k) \mathbf{e}_k$$

geht unter der Drehung  $c_6$  über in

$$\mathbf{f}_2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{k=1}^6 \cos(\pi k) \mathbf{e}_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{k=1}^6 \cos(\pi k - \pi) \mathbf{e}_k = -\mathbf{f}_2,$$

und unter der Spiegelung  $\sigma_d$  in  $\mathbf{f}_2$ . Deshalb spannt  $\mathbf{f}_2$  einen weiteren invarianten eindimensionalen Teilraum  $\mathcal{V}_2$  auf, welcher eine Darstellung trägt, die  $c_6$  in  $-1$  und  $\sigma_d$  in  $1$  abbildet.

Seien nun

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^6 \cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) \mathbf{e}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^6 \sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right) \mathbf{e}_k$$

zwei weitere orthonormierte Basisvektoren. Dann gilt

$$\begin{aligned} c_6 : \mathbf{f}_3 &\mapsto \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \mathbf{f}_3 + \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \mathbf{f}_4, & \mathbf{f}_4 &\mapsto -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \mathbf{f}_3 + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \mathbf{f}_4 \\ \sigma_d : \mathbf{f}_3 &\mapsto \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \mathbf{f}_3 - \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \mathbf{f}_4, & \mathbf{f}_4 &\mapsto -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \mathbf{f}_3 - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \mathbf{f}_4. \end{aligned}$$

Also spannen  $\mathbf{f}_3$  und  $\mathbf{f}_4$  einen zweidimensionalen invarianten Unterraum  $\mathcal{V}_3$  auf, der die Darstellung

$$D_2^1(c_6) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2^1(\sigma_d) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ -\sin 2\pi/3 & -\cos 2\pi/3 \end{pmatrix}$$

trägt. Diese ist äquivalent zur Darstellung die man erhält, wenn man die Elemente von  $\mathcal{D}_6$  als Decktransformationen eines gleichseitigen ebenen Sechsecks interpretiert.

Schlussendlich ergänzen wir die vier Vektoren  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_4$  durch die zwei orthonormierten Vektoren

$$\mathbf{f}_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^6 \cos\left(\frac{1}{3}k\pi\right) \mathbf{e}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_6 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^6 \sin\left(\frac{1}{3}k\pi\right) \mathbf{e}_k.$$

Diese spannen einen weiteren 2-dimensionalen invarianten Unterraum  $\mathcal{V}_4$  auf:

$$\begin{aligned} c_6 : \mathbf{f}_5 &\mapsto \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \mathbf{f}_5 + \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \mathbf{f}_6, & \mathbf{f}_6 &\mapsto -\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \mathbf{f}_5 + \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \mathbf{f}_6 \\ \sigma_d : \mathbf{f}_5 &\mapsto -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \mathbf{f}_5 + \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \mathbf{f}_6, & \mathbf{f}_6 &\mapsto \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \mathbf{f}_5 + \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \mathbf{f}_6. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Der Unterraum  $\mathcal{V}_4$  trägt die Darstellung

$$D_2^2(c_6) = \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2^2(\sigma_d) = \begin{pmatrix} -\cos \pi/3 & \sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix}. \quad (11.9)$$

Die beiden 2-dimensionalen Darstellungen sind *inäquivalent*, da sie unterschiedliche Charaktere haben,

$$\chi_{D_2^1}(c_3) = 2 \cos 2\pi/3 = -1 \quad \text{und} \quad \chi_{D_2^2}(c_3) = 2 \cos \pi/3 = 1.$$

Die Ausreduktion der 6-dimensionalen Darstellung  $D$  der Gruppe  $\mathcal{D}_6$  ergibt

$$D = D_1^1 \oplus D_1^2 \oplus D_2^1 \oplus D_2^2. \quad (11.10)$$

In der angepassten Orthonormalbasis  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_6\}$  ist der Hamilton-Operator  $H$  in (11.6) diagonal,

$$H = \epsilon \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.11)$$

Der Eigenvektor mit minimaler Energie ist die symmetrische Kombination  $f_1 \propto \sum e_k$ . Bezüglich der angepassten Basis ist der mit allen Darstellungsmatrizen vertauschende Hamilton-Operator  $H$  automatisch diagonal. Dies ist kein Zufall und folgt aus dem für die Anwendung der Darstellungstheorie wichtigen

**Lemma 12 (von Schur)** *Es seien  $D_1, D_2$  zwei irreduzible Darstellungen einer Gruppe  $G$  in Vektorräumen  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$  der Dimensionen  $n_1$  und  $n_2$ . Es sei weiterhin*

$$H : \mathcal{V}_1 \mapsto \mathcal{V}_2$$

eine lineare Abbildung, so dass gilt

$$HD_1(g) = D_2(g)H, \quad \forall g \in G.$$

Dann ist entweder:

1.  $H = 0$  oder (im ausschließenden Sinn)
2.  $n_1 = n_2$ ,  $H$  ist nicht singulär und es gilt  $D_2(g) = HD_1(g)H^{-1}$  für alle  $g \in G$ .

In der letzten Alternative sind die Darstellungen  $D_1$  und  $D_2$  zueinander äquivalent und  $H$  ist die vermittelnde Koordinatentransformation. Die Situation im Lemma ist in Abbildung 11.2 skizziert.

*Beweis:* Es sei  $H(\mathcal{V}_1) \subseteq \mathcal{V}_2$  das Bild von  $\mathcal{V}_1$  unter  $H$ . Nach Voraussetzung gilt:

$$D_2H(\mathcal{V}_1) = HD_1(\mathcal{V}_1) \subseteq H(\mathcal{V}_1).$$

Also ist  $H(\mathcal{V}_1) \subset \mathcal{V}_2$  ein invarianter Teilraum unter  $D_2$ . Nach Voraussetzung ist  $D_2$  irreduzibel und es existieren nur die beiden Alternativen

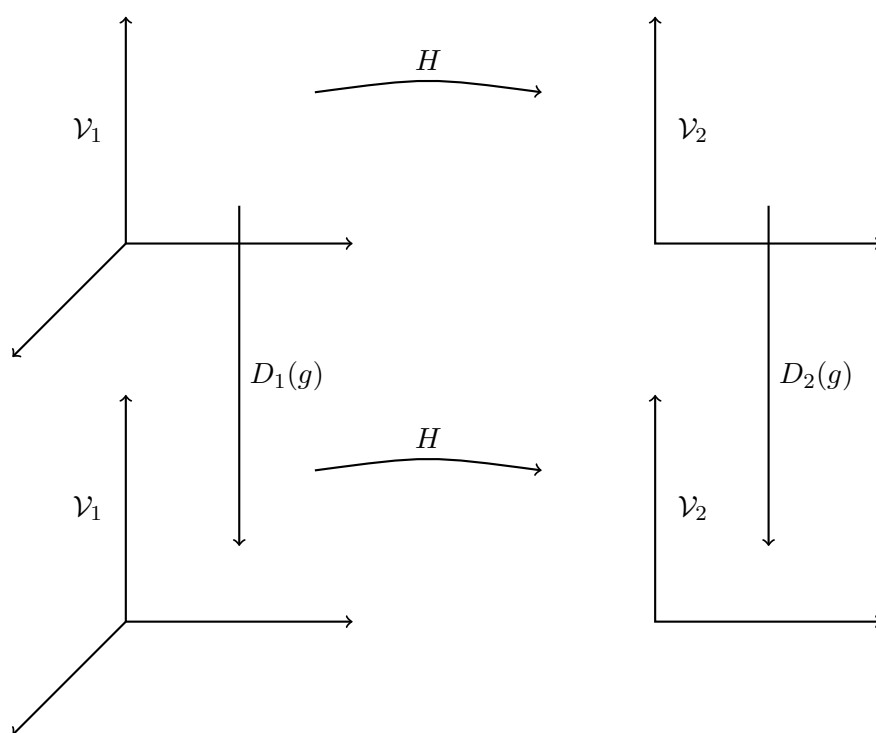
1. Es ist  $H(\mathcal{V}_1) = 0$ . Dies führt zur ersten Behauptung des Lemmas.
2. Es ist  $H(\mathcal{V}_1) = \mathcal{V}_2$ . Dann ist  $H$  surjektiv. Wir führen den Kern der Abbildung  $H$  ein. Nach Voraussetzung gilt

$$HD_1(\text{Kern}(H)) = D_2H(\text{Kern}(H)) = \emptyset,$$

was bedeutet, dass der Kern von  $H$  ein invarianter Teilraum der irreduziblen Darstellung  $D_1$  ist. Entweder ist  $\text{Kern}(H) = \mathcal{V}_1$  oder  $\text{Kern}(H) = 0$ . Den ersten Fall haben wir schon abgehandelt und es verbleibt  $\text{Kern}(H) = 0$ . In diesem Fall ist  $H$  eine bijektive lineare Abbildung. Damit gilt wegen der Voraussetzung des Lemmas:

$$HD_1(g)H^{-1} = D_2(g), \quad \forall g \in G.$$

Man beachte, dass das Schur'sche Lemma für reelle und für komplexe Darstellungsräume gilt.

Abbildung 11.2:  $HD_1(g)$  und  $D_2(g)H$  sollen dieselbe Abbildung sein.

### 11.2.1 Systeme mit invariantem Hamilton-Operator

Wir werden nun zwei für die Physik wichtige Schlussfolgerungen aus dem Lemma von Schur ziehen.

**Korollar 1** *Es sei  $D$  eine irreduzible Darstellung auf einem Vektorraum  $\mathcal{V}$ . Der lineare Operator  $H$  vertausche mit allen darstellenden Matrizen:  $HD(g) = D(g)H$ ,  $\forall g \in G$ . Dann ist  $H$  ein Vielfaches der Identität.*

*Beweis:* Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $H$  (eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von  $H$ ). Mit  $H$  vertauscht auch  $H - \lambda\mathbb{1}$  mit den  $D(g)$ . Da  $\det(H - \lambda\mathbb{1}) = 0$  ist, kommt nur die 1. Alternative im Schur'schen Lemma in Betracht: Also ist  $H - \lambda\mathbb{1} = 0$  und damit  $H = \lambda\mathbb{1}$ .

**Lemma 13** *Jede irreduzible Darstellung einer Abel'schen Gruppe ist eindimensional.*

Sei  $\tilde{D} = D(\tilde{g})$  wieder eine beliebige, aber feste Matrix der Darstellung  $D$ . Für eine Abel'sche Gruppe gilt aber  $D(g)\tilde{D} = \tilde{D}D(g)$  für alle  $g \in G$ , so dass nach dem Korollar  $\tilde{D} = \lambda\mathbb{1}$  ist. Somit sind alle darstellenden Matrizen diagonal und nur eindimensionale Darstellungen können irreduzibel sein.

**Korollar 2** Eine Darstellung  $D$  auf  $\mathcal{V}$  zerfällt in lauter irreduzible, paarweise inäquivalente Darstellungen,

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_r.$$

Die lineare Abbildung  $H : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  vertausche mit allen  $D(g)$ :

$$[H, D(g)] = 0, \quad \forall g \in G. \quad (11.12)$$

Dann sind die zu den irreduziblen Darstellungen gehörenden invarianten Teilräume Eigenräume von  $H$ .

*Beweis* für  $r = 2$  des Korollars: in einer angepassten Basis sind die  $D(g)$  blockdiagonal,

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}.$$

In Anlehnung dazu schreiben wir  $H$  ebenfalls in Blockmatrix-Form

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & Q_1 \\ Q_2 & H_2 \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{pmatrix} D_1 H_1 & D_1 Q_1 \\ D_2 Q_2 & D_2 H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 D_1 & Q_1 D_2 \\ Q_2 D_1 & H_2 D_2 \end{pmatrix},$$

also insbesondere

$$[D_1(g), H_1] = 0 \quad \text{und} \quad [D_2(g), H_2] = 0.$$

Nach dem vorherigen Korollar müssen damit  $H_1$  und  $H_2$  auf den Darstellungsräumen  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$  der irreduziblen Darstellungen  $D_1$  und  $D_2$  proportional zur Identität sein:

$$H_n = \lambda_n \mathbb{1} \quad \text{auf} \quad \mathcal{V}_n, \quad n = 1, 2.$$

Andererseits gilt

$$D_1(g)Q_1 = Q_1 D_2(g) \quad \text{und} \quad D_2(g)Q_2 = Q_2 D_1(g), \quad \forall g \in G.$$

Da die beiden Darstellungen inäquivalent sein sollen, kann nur die 1. Alternative des Schur'schen Lemmas eintreten. Somit folgt  $Q_1 = Q_2 = 0$  und die beiden Darstellungsräume  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$  sind Eigenräume von  $H$  mit Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

### 11.3 Orthogonalitätsrelationen

Es seien  $D_1$  und  $D_2$  irreduzible Darstellungen der Dimensionen  $n_1$  und  $n_2$  und  $U$  eine lineare Abbildung  $\mathcal{V}_1 \mapsto \mathcal{V}_2$ . Wir betrachten nun folgende Matrix,

$$H = \mathcal{M}(D_2(g)UD_1^{-1}(g)) : \mathcal{V}_1 \mapsto \mathcal{V}_2. \quad (11.13)$$

Unter der Mittelbildung von Matrizen ist das Mitteln der einzelnen Matrixelemente gemeint. Weiter seien

$$\tilde{D}_1 = D_1(\tilde{g}) \quad \text{und} \quad \tilde{D}_2 = D_2(\tilde{g}),$$

für ein festgehaltenes Gruppenelement  $\tilde{g}$ . Wegen der Invarianz des Mittelwertes folgt:

$$\begin{aligned} H\tilde{D}_1 &= \mathcal{M}(D_2(g)UD_1^{-1}(g)\tilde{D}_1) = \tilde{D}_2\mathcal{M}(\tilde{D}_2^{-1}D_2(g)UD_1^{-1}(g)\tilde{D}_1) \\ &= \tilde{D}_2\mathcal{M}(D_2(\tilde{g}^{-1}g)UD_1^{-1}(\tilde{g}^{-1}g)) = \tilde{D}_2\mathcal{M}(D_2(g)UD_1^{-1}(g)). \end{aligned}$$

Also haben wir

$$HD_1(\tilde{g}) = D_2(\tilde{g})H, \quad \forall \tilde{g} \in G.$$

Dies gilt für alle Elemente  $\tilde{g}$ , so dass wir das Lemma von Schur anwenden dürfen:

1. *Alternative:*  $D_1$  und  $D_2$  sind nicht äquivalent.

In diesem Fall ist  $H = 0$  und somit

$$D_1, D_2 \text{ inäquivalent} \implies \mathcal{M}(D_2(g)UD_1^{-1}(g)) = 0.$$

Dies sind  $n_1 \cdot n_2$  Beziehungen. Wählen wir nun für  $U$  speziell diejenige Rechtecksmatrix, die nur an der Stelle  $(p, q)$  eine 1 enthält und sonst nur Nullen, dann folgt

**Lemma 14** *Sind  $D_1$  und  $D_2$  inäquivalente und irreduzible Darstellungen, dann gilt*

$$\mathcal{M}(D_2(g)_{ip}D_1(g^{-1})_{qj}) = 0. \quad (11.14)$$

Jetzt wählen wir noch  $p = i$  und  $q = j$  und summieren über  $i$  und  $j$ . Dann ergibt sich mit  $\text{Sp}D_1^{-1} = \chi_{D_1}^*$

$$\mathcal{M}(\chi_{D_1}^* \chi_{D_2}) = (\chi_{D_1}, \chi_{D_2}) = 0. \quad (11.15)$$

Ist  $D_1, \dots, D_r$  eine Liste aller möglichen irreduziblen Darstellungen und  $\chi_n \equiv \chi_{D_n}$  deren Charakteren, dann folgt:

**Satz 48** *Die Charakteren  $\chi_m$  und  $\chi_n$  von zwei inäquivalenten irreduziblen Darstellungen  $D_m$  und  $D_n$  einer Gruppe mit Mittelbildung sind unitär orthogonal bezüglich der Mittelbildung, d.h.  $(\chi_m, \chi_n) = 0$ .*



2. *Alternative:* Die beiden  $n$ -dimensionalen Darstellungen  $D_1$  und  $D_2$  sind äquivalent.

Nach Wahl eines angepassten Koordinatensystems ist  $D_1 = D_2 = D$ . Somit ist  $D(\tilde{g})H = HD(\tilde{g})$  für alle  $\tilde{g} \in G$  und nach obigem Korollar ist  $H = \lambda \mathbb{1}$ . Die Konstante  $\lambda$  folgt aus

$$\text{Sp}H = \lambda \dim(D) = \text{Sp}\mathcal{M}(DUD^{-1}) = \mathcal{M}(\text{Sp}(DUD^{-1})) = \text{Sp}U,$$

wobei wir von  $\mathcal{M}(1) = 1$  Gebrauch machten. Somit gilt

$$H \equiv \mathcal{M}(DUD^{-1}) = \frac{\text{Sp}U}{\dim D} \mathbb{1}. \quad (11.16)$$

Die Elemente der quadratische Matrix  $U$  sollen nun alle verschwinden, bis auf  $U_{jp} = 1$ . Für dieses Matrix ist  $\text{Sp}U = \delta_{jp}$  und wir folgern:

Der Mittelwert des Produkts der Funktionen  $g \rightarrow D_{ij}(g)$  und  $g \rightarrow D_{pq}^{-1}(g)$  auf der Gruppe ist

$$\mathcal{M}(D_{ij}D_{pq}^{-1}) = \frac{1}{\dim D} \delta_{jp} \delta_{iq}. \quad (11.17)$$

Setzen wir noch  $i = j$ ,  $p = q$  und summieren über  $i$  und  $p$ , dann führt dies zum

**Satz 49** *Der Charakter jeder irreduziblen Darstellung einer Gruppe mit invarianter Mittelbildung hat die Norm 1 bezüglich Mittelbildung,  $\mathcal{M}(\chi_D^* \chi_D) = 1$ .*

Deshalb sind die Charaktere der irreduziblen Darstellungen orthonormierte Elemente im linearen Raum der komplexwertigen Klassenfunktionen mit Skalarprodukt

$$(\chi_m, \chi_n) = \delta_{mn}. \quad (11.18)$$

### 11.3.1 Ausreduktion einer beliebigen Darstellung

Eine beliebige Darstellung einer Gruppe mit Mittelbildung kann als Summe von irreduziblen Darstellungen geschrieben werden,

$$D = \bigoplus_{n=1}^r c_n D_n, \quad \text{mit} \quad \chi_D(g) = c_1 \chi_1(g) + \cdots + c_r \chi_r(g). \quad (11.19)$$

Äquivalente Darstellungen werden dabei identifiziert und  $2D_2$  bedeutet zum Beispiel, dass die irreduzible Darstellung  $D_2$  in der Zerlegung von  $D$  zweimal vorkommt. Nehmen wir das Skalarprodukt der letzten Summe mit dem Charakter  $\chi_n$  einer irreduziblen Darstellung, dann folgt mithilfe der Orthonormalitätsrelationen (11.18) die wichtige

**Satz 50 (Ausreduktionsformel)** Die irreduziblen Darstellung  $D_n$  tritt in einer beliebigen Darstellung  $D$  genau  $c_n = (\chi_n, \chi_D)$ -mal auf.

Nun können wir folgende interessante Schlussfolgerung ziehen:

**Satz 51** Zwei beliebige Darstellungen einer Gruppe mit Mittelbildung sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselben Charaktere haben.

Sind zwei Darstellungen äquivalent, dann haben sie offensichtlich denselben Charakter. Die Umkehrung ist etwas schwieriger zu beweisen. Dazu brauchen wir das

**Lemma 15** Aus den Spuren aller Matrizen einer Darstellung lassen sich die charakteristischen Polynome dieser Matrizen berechnen.

*Beweis:* Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  die Eigenwerte von  $D = D(g)$ . Jeder Eigenwert sei so oft aufgeführt, wie seine algebraische Vielfachheit beträgt. Das charakteristische Polynom von  $D$  lautet

$$\det(\lambda \mathbb{1} - D) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_d) = \lambda^d - s_1 \lambda^{d-1} + \cdots + (-1)^d s_d, \quad (11.20)$$

wobei die Koeffizienten die *elementar-symmetrischen Polynome* der Eigenwerte sind:

$$s_1 = \sum \lambda_j, \quad s_2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j, \quad s_3 = \sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \dots, \quad s_d = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_d. \quad (11.21)$$

Andererseits sind mit  $D$  auch  $D^2 = D(g^2), \dots, D^d = D(g^d)$  darstellende Matrizen. Deren Spuren sind durch folgende *Potenzsummen* gegeben:

$$\sigma_p = \text{Sp } D^p = \sum_i \lambda_i^p. \quad (11.22)$$

Mit Hilfe der Newton'schen Formeln kann man zeigen, dass jedes elementar-symmetrische Polynom eindeutig als Polynom von Potenzsummen dargestellt werden kann. Zum Beispiel gelten

$$s_1 = \sigma_1, \quad s_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2, \quad s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3, \dots$$

Wir folgern: Haben zwei Darstellungen  $D_1$  und  $D_2$  denselben Charakter, d.h. dieselben  $\sigma_p$ , dann haben die darstellenden Matrizen  $D_1(g)$  und  $D_2(g)$  identische charakteristische Polynome für alle  $g \in G$  und sind deshalb ähnlich. Somit sind  $D_1$  und  $D_2$  äquivalente Darstellungen.

## 11.4 Alle Darstellungen einer endlichen Gruppe

Wir wollen zuerst bestimmen, wie viele inäquivalente irreduzible Darstellungen eine endliche Gruppe hat. Da die Charakteren auf Konjugationsklassen konstant sind, kann es höchstens so viele unabhängige Charakteren geben wie die Gruppe Klassen hat. Wir werden sehen, dass die Anzahl der inäquivalenten irreduziblen Charakteren genau mit der Anzahl Konjugationsklassen übereinstimmt.

Wie findet man nun *alle* irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe? Wir erinnern daran, dass die Darstellungsmatrizen  $\mathcal{R}(g)$  der auf Seite 152 eingeführten regulären Darstellung für  $g \neq e$  auf der Diagonalen nur Nullen haben. Deshalb gilt für den Charakter der regulären Darstellung

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \text{Sp}\mathcal{R}(g) = \begin{cases} |G| & \text{falls } g = e \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.23)$$

Sei nun  $\chi_n$  der Charakter der *beliebigen* irreduziblen Darstellung. Wegen (11.23) ergibt die Ausreduktionsformel für die Vielfachheit  $c_n$ , mit der  $D_n$  in der regulären Darstellung  $\mathcal{R}$  auftritt,

$$c_n = (\chi_n, \chi_{\text{reg}}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_n^*(g) \cdot \chi_{\text{reg}}(g) = \frac{1}{|G|} \chi_n^*(e) \cdot \chi_{\text{reg}}(e).$$

Mit  $\chi_n(e) = \dim(D_n)$  und  $\chi_{\text{reg}}(e) = |G|$  ergibt sich der

**Satz 52 (Burnside)** *Jede irreduzible Darstellung  $D_n$  kommt in der  $|G|$ -dimensionalen regulären Darstellung  $\mathcal{R}$  genau  $\dim(D_n)$  mal vor:*

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{n=1}^r \dim(D_n) D_n, \quad \text{so dass} \quad |G| = \sum_{n=1}^r (\dim D_n)^2. \quad (11.24)$$

Diese bedeutet insbesondere, dass *jede* irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe in der regulären Darstellung enthalten ist. Jede eindimensionale irreduzible Darstellung tritt dabei einmal auf, jede zweidimensionale irreduzible Darstellung zweimal usw.

### Die irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{D}_6$

Für  $\mathcal{D}_6$  lautet die Beziehung (11.24) wie folgt:

$$|\mathcal{D}_6| = 12 = \sum_{n=1}^r (\dim D_n)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + \sum_{n=4}^r (\dim D_n)^2 = 6 + \sum_{n=4}^r (\dim D_n)^2,$$

wobei wir benutzen, dass  $\mathcal{D}_6$  mindestens zwei eindimensionale und eine zweidimensionale irreduzible Darstellung besitzt. Somit kann  $\mathcal{D}_6$  neben diesen bekannten Darstellungen nur 6

eindimensionale oder eine zweidimensionale und 2 eindimensionale irreduzible Darstellungen haben. Wir werden bald zeigen, dass Letzteres der Fall ist.

### 11.4.1 Die Charakterenmatrix

Wir betrachten eine endliche Gruppe mit  $|G|$  Elementen und  $k$  Konjugationsklassen  $K_1, K_2, \dots, K_k$ . Als Klassenfunktion ist ein Charakter eine Funktion auf den Konjugationsklassen. Die Werte der Charakteren irreduzibler Darstellungen auf den Konjugationsklassen sind die Einträge der *Charakterentabelle*:

Klasse	$K_1$	$K_2$	$\dots$	$\dots$	$K_k$
$\chi_1$	1	1	$\dots$	$\dots$	1
$\chi_2$	$\chi_2(K_1)$	$\chi_2(K_2)$	$\dots$	$\dots$	$\chi_2(K_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
$\chi_r$	$\chi_r(K_1)$	$\chi_r(K_2)$	$\dots$	$\dots$	$\chi_r(K_k)$

Aus der Charakterentabelle konstruiert man die sogenannte *Charakterenmatrix*:

Klasse	$K_1$	$K_2$	$\dots$	$\dots$	$K_k$
$\chi_1$	$h_1 \cdot 1$	$h_2 \cdot 1$	$\dots$	$\dots$	$h_k \cdot 1$
$\chi_2$	$h_1 \cdot \chi_2(K_1)$	$h_2 \cdot \chi_2(K_2)$	$\dots$	$\dots$	$h_k \cdot \chi_2(K_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
$\chi_r$	$h_1 \cdot \chi_r(K_1)$	$h_2 \cdot \chi_r(K_2)$	$\dots$	$\dots$	$h_k \cdot \chi_r(K_k)$

Die auftretenden positiven Faktoren

$$h_i = \left( \frac{|K_i|}{|G|} \right)^{1/2} \tag{11.25}$$

enthalten die Anzahl Elemente  $|K_i|$  der Konjugationsklasse  $K_i$  und wurden so gewählt, dass die *Zeilen der Charakterenmatrix* unitär-orthogonal zueinander sind:

$$\sum_{i=1}^k h_i^2 \chi_m^*(K_i) \cdot \chi_n(K_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k |K_i| \chi_m^*(K_i) \cdot \chi_n(K_i) = (\chi_m, \chi_n) = \delta_{mn}.$$

Daraus folgt, dass die Anzahl Zeilen kleiner gleich der Anzahl Komponenten der Vektoren sein muss, oder dass die Anzahl der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen  $r$  kleiner gleich der Anzahl der Äquivalenzklassen  $k$  sein muss.

Um einzusehen, dass  $r = k$  ist, multiplizieren wir (11.18) mit  $\chi_m(\tilde{g})$  und summieren über  $m$ . Für eine endliche Gruppe ist der Mittelwert das arithmetische Mittel, so dass

$$\chi_n(\tilde{g}) = \sum_m \chi_m(\tilde{g})(\chi_m, \chi_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g,m} \chi_m(\tilde{g}) \chi_m^*(g) \chi_n(g). \tag{11.26}$$

Die Charakteren sind Klassenfunktionen und die Summe über die Gruppenelemente wird zu einer Summe über die Konjugationsklassen  $K_j$  der Gruppe. Mit  $\tilde{g} \in K_i$  folgt dann

$$\sum_{K_j} \left( \frac{1}{|G|} \sum_m |K_j| \chi_m(K_i) \chi_m^*(K_j) \right) \chi_n(K_j) = \chi_n(K_i). \quad (11.27)$$

Daraus folgt unmittelbar die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_{m=1}^r h_i \chi_m(K_i) h_j \chi_m^*(K_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (11.28)$$

und wir folgern:

Die Spalten der Charakterenmatrix sind orthogonal zueinander und deshalb ist die Charakterenmatrix unitär und quadratisch.

Daraus können wir eine Aussage über die Anzahl irreduzibler Darstellungen treffen:

**Satz 53** *Es gibt genau so viele irreduzible Darstellungen einer endlichen Gruppe, wie es Konjugationsklassen gibt. Jede Klassenfunktion ist eine Linearkombination der orthonormierten Charaktere.*

#### Irreduzible Darstellungen von $S_4$ (Tetraedergruppe)

Die Gruppe  $S_4$  hat  $P(4) = 5$  Konjugationsklassen und damit 5 irreduzible Darstellungen. Wegen

$$\sum_{n=1}^5 (\dim D_n)^2 = 24$$

gibt es neben der trivialen und alternierenden Darstellung noch eine zweidimensionale und zwei dreidimensionale irreduzible Darstellungen:  $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$ .

Die Gruppe  $D_6$  der Ordnung 12 hat 6 Konjugationsklassen. Deshalb hat sie vier eindimensionale und zwei zweidimensionale irreduzible Darstellungen.

## 11.5 Irreduzible Darstellungen der symmetrischen Gruppen $S_n$

Wir betrachten zuerst ein Beispiel. Es sei  $e_1, e_2, \dots, e_n$  eine Basis eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums. Eine Permutation  $\pi \in S_n$  wirkt auf einen Vektor

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \quad (11.29)$$

auf natürliche Weise,

$$L(\pi)\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_{\pi(1)} + \cdots + \alpha_2 \mathbf{e}_{\pi(n)}, \quad (11.30)$$

so dass zum Beispiel für  $n = 4$

$$(1, 2)(3, 4) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1, 4, 3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.31)$$

Die Spuren dieser Matrizen sind gleich der bei der Permutation festgehaltenen Elemente, also gleich der Anzahl  $\nu_1$  der Zyklen mit Länge 1 in der Zyklenzerlegung der Permutation,  $\chi_L(\pi) = \nu_1$ . Bezeichnet  $|K_\nu|$  die Anzahl Elemente in der Konjugationsklasse zum Zyklus  $\nu$ , dann erhalten wir die quadrierte Norm

$$(\chi_L, \chi_L) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\nu} |K_\nu| \nu_1^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\nu} P(n, \nu) \nu_1^2 = 2, \quad (11.32)$$

worin die Anzahl Permutationen vom Typus  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  schon in (4.13) angegeben wurde. Damit ist obige Darstellung nicht reduzibel. Sie enthält zwei irreduzible Darstellungen. Der eindimensionale Unterraum, aufgespannt von der Summe aller Basisvektoren

$$\mathcal{W} = \text{Span}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_n), \quad (11.33)$$

ist offensichtlich invariant unter allen Permutation und trägt die triviale Darstellung. Das Komplement

$$\mathcal{W}^\perp = \{\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0\} \quad (11.34)$$

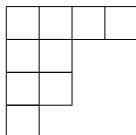
trägt dann eine  $n - 1$ -dimensionale irreduzible Darstellung.  $S_n$  hat also neben der trivialen und alternierenden Darstellung immer mindestens eine irreduzible Darstellung der Dimension  $n - 1$ .

### 11.5.1 Young-Diagramme und Young-Tableaux

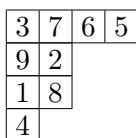
Allgemein entspricht jeder irreduziblen Darstellung von  $S_n$  ein Young-Diagramm. Wir wollen hier skizzieren wie das funktioniert. Dazu definieren wir eine Zerlegung von  $n$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \cdots + \nu_n \\ \lambda_2 &= \nu_2 + \nu_3 + \cdots + \nu_n \\ \lambda_3 &= \nu_3 + \cdots + \nu_n \\ &\vdots = \vdots \\ \lambda_n &= \nu_n. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Gemäß (4.8) summieren die  $\lambda_i$  zu  $n$ , so dass  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  eine Partition von  $n$  ist. Zu jeder der  $P(n)$  Partitionen von  $n$  assoziieren wir ein *Young-Diagramm*  $T_\lambda$ . Zum Beispiel hat die Partition  $\lambda = [4, 2, 2, 1]$  von 9 das folgende Diagramm  $T_\lambda$ :



Jedes Diagramm ist durch  $n$  Zellen bestimmt, die von oben nach unten und linksbündig so angeordnet sind, dass deren Anzahl in jeder neuen Zeile nicht zunimmt. Ein *Young-Tableau*  $T$  von der Form  $\lambda$  ist ein Young-Diagramm, dessen  $n$  Boxen mit einer den Zahlen  $1, 2, \dots, n$ , zunächst willkürlich, gefüllt sind. Zum Beispiel



Die symmetrische Gruppe  $S_n$  wirkt auf die Menge der Tableaus der Form  $\lambda$ . Diese Wirkung wird benutzt um den Zeilen und Spalten eines Young-Tableau Operatoren zuzuordnen. Zuerst wird der  $i$ 'ten Zeile derjenige Operator  $S_i$  zugeordnet, der die Summe der Permutation der Zellenindizes enthält. Danach werden die Zeilenoperatoren multipliziert und das Produkt  $S = S_1 S_1 \dots$  heißt Symmetrisierer. Man beachte, dass die  $S_i$  zu verschiedenen Zeilen kommutieren, da sie auf verschiedene Mengen wirken. Ganz analog wird der  $k$ 'ten Spalte ein Operator  $A_k$  zugeordnet, der die gewichtete Summe der Permutationen der Spaltenindizes enthält. Gerade Permutationen werden mit 1 und ungerade mit  $-1$  gewichtet. Das Produkt der Spaltenoperatoren  $A = A_1 A_2 \dots$  heißt Antisymmetrisierer. Schlussendlich konstruiert man den Young-Symmetrisierer

$$Y = AS. \tag{11.36}$$

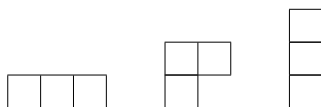
Die Behauptung ist, dass für jedes Tableau dieser Operator  $Y$  auf eine irreduzible Darstellung von  $S_n$  projiziert. Er erfüllt

$$Y \cdot Y = kY, \tag{11.37}$$

mit einer von Null verschiedenen Konstante  $k$ . Die normierten Operatoren  $Y/k$  definieren dann normierte Projektoren.

### 11.5.2 Irreduzible Darstellungen von $S_3$

Wir betrachten die Gruppe  $S_3$  der Ordnung 6. Es existieren nur die drei Young-Diagramme



Für das linke Diagramm gibt es 6 verschiedene Young Tableaus:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Der Symmetrisierer ist die Summer über alle Permutationen und der Antisymmetrisierer ist die Identität. Entsprechend ist der Young-Symmetrisierer

$$Y = \mathbb{1} + (12) + (13) + (23) + (123) + (132). \tag{11.38}$$

Der Young-Symmetrisierer muss nun auf alle Vektoren, die man durch das Lesen der Tableaus erhält, angewandt werden. Zum Beispiel ist  $(123)|xyz\rangle = |zxy\rangle$ , weil die Permutation (123) den erste Eintrag an die Stelle des zweiten Eintrags permutiert, den zweite Eintrag an die Stelle des dritten Eintrags und den dritte Eintrag an die Stelle des ersten Eintrags. Also

$$\begin{aligned} Y|123\rangle &= |123\rangle + |213\rangle + |321\rangle + |132\rangle + |312\rangle + |231\rangle \equiv |\alpha\rangle \\ Y|213\rangle &= |213\rangle + |123\rangle + |231\rangle + |312\rangle + |132\rangle + |321\rangle \equiv |\alpha\rangle \\ Y|321\rangle &= |321\rangle + |312\rangle + |123\rangle + |231\rangle + |132\rangle + |213\rangle \equiv |\alpha\rangle, \end{aligned}$$

und analog für die restlichen drei Vektoren. Da der Vektor  $|\alpha\rangle$  durch beliebige Permutationen auf sich abgebildet wird, trägt der von ihm aufgespannte eindimensionale Teilraum die triviale Darstellung. Für eine beliebige Permutation  $\pi$  gilt für den normierten Vektor  $|\alpha'\rangle = |\alpha\rangle/\sqrt{6}$

$$\langle\alpha'|D(\pi)|\alpha'\rangle = 1. \tag{11.39}$$

Nun betrachten wir das Diagramm rechts. Es gibt wieder sechs verschiedene Young Tableaus:

$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

Der Symmetrisierer ist die Identität und der Antisymmetrisierer ist die gewichtete Summe der Permutationen, gewichtet mit dem Signum der Permutation, also

$$Y = \mathbb{1} - (12) - (13) - (23) + (123) + (132).$$

Für alle Tableaus liefert der Young-Symmetrisierer bis auf ein Vorzeichen denselben Bildvektor, zum Beispiel ++++++

$$Y|123\rangle = |123\rangle - |213\rangle - |321\rangle - |132\rangle + |231\rangle + |312\rangle \equiv +|\beta\rangle \tag{11.40}$$

$$Y|213\rangle = |213\rangle - |123\rangle - |231\rangle - |312\rangle + |321\rangle + |132\rangle \equiv -|\beta\rangle \tag{11.41}$$

$$Y|321\rangle = |321\rangle - |312\rangle - |123\rangle - |231\rangle + |132\rangle + |213\rangle \equiv -|\beta\rangle, \tag{11.42}$$

und analog für die restlichen drei Vektoren. Man erhält also einen von  $|\beta\rangle$  aufgespannten eindimensionalen invarianten Teilraum. Dieser trägt die alternierende Darstellung der Permutationsgruppe: gerade Permutation werden zu einer Multiplikation mit 1 und ungerade Permutationen zu einer Multiplikation mit  $-1$ .

$$\langle\beta'|D(\pi)|\beta'\rangle = \text{sign}(\pi), \quad |\beta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|\beta\rangle. \tag{11.43}$$

Zum Schluss betrachten wir das mittlere Young-Diagramm. Wieder gibt es sechs Young Tableaus



$$\begin{array}{cccccc}
T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \\
\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}
\end{array}$$

Zu den 6 Tableaus gehören nun im Allgemeinen verschiedene Symmetrisierer, Antisymmetrisierer und Young-Symmetrisierer. Den Young-Tableaus werden folgende  $Y_i = Y(T_i)$  zugeordnet (wir benutzen zum Beispiel  $(13)(12) = (123)$ ):

$$\begin{aligned}
Y_1 &= SA = (\mathbb{1} + (12))(\mathbb{1} - (13)) = \mathbb{1} + (12) - (13) - (132) \\
Y_2 &= AS = (\mathbb{1} - (12))(\mathbb{1} + (13)) = \mathbb{1} + (13) - (12) - (132) \\
Y_3 &= AS = (\mathbb{1} - (23))(\mathbb{1} + (12)) = \mathbb{1} + (12) - (23) - (132) \\
Y_4 &= AS = (\mathbb{1} - (12))(\mathbb{1} + (23)) = \mathbb{1} + (23) - (12) - (123) \\
Y_5 &= AS = (\mathbb{1} - (13))(\mathbb{1} + (23)) = \mathbb{1} + (23) - (13) - (132) \\
Y_6 &= AS = (\mathbb{1} - (23))(\mathbb{1} + (13)) = \mathbb{1} + (13) - (23) - (123)
\end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
Y_1|123\rangle &= |123\rangle + |213\rangle - |321\rangle - |312\rangle \equiv |\gamma\rangle \\
Y_1|132\rangle &= |132\rangle + |231\rangle - |312\rangle - |321\rangle \equiv |\delta\rangle \\
Y_1|213\rangle &= |213\rangle + |123\rangle - |231\rangle - |132\rangle = |\gamma\rangle - |\delta\rangle \\
Y_1|231\rangle &= |231\rangle + |132\rangle - |213\rangle - |123\rangle = |\delta\rangle - |\gamma\rangle \\
Y_1|321\rangle &= |321\rangle + |312\rangle - |123\rangle - |213\rangle = -|\gamma\rangle \\
Y_1|312\rangle &= |312\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |231\rangle = -|\delta\rangle
\end{aligned}$$

so dass  $|\gamma\rangle$  und  $|\delta\rangle$  einen invarianten Teilraum aufspannen. Es ist

$$\begin{aligned}
(12)|\gamma\rangle &= |213\rangle + |123\rangle - |231\rangle - |132\rangle = |\gamma\rangle - |\delta\rangle \\
(12)|\delta\rangle &= |312\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |231\rangle = -|\delta\rangle \\
(123)|\gamma\rangle &= |312\rangle + |321\rangle - |132\rangle - |231\rangle = -|\delta\rangle \\
(123)|\delta\rangle &= |213\rangle + |123\rangle - |231\rangle - |132\rangle = |\gamma\rangle - |\delta\rangle
\end{aligned}$$

Verschiedene Tableau können gleiche Operatoren definieren. Die Zuordnung wird eindeutig, wenn wir die *Standard-Tableau* einführen. Ein Standard-Tableau ist eine Young-Tableau, bei dem die Nummerierung der Zellen derart durchgeführt wird, dass in jeder Spalte von oben nach unten und in jeder Zeile von links nach rechts die Zahlen zunehmen. Zum Beispiel sind

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}. \quad (11.44)$$

alle Standard-Tableau zum Young-Diagramm  $[3, 1]$ . Jeder Partition  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  von  $n$  können wir nun einen Vektorraum  $\mathbb{F}^{d_\lambda}$  der Dimension  $d_\lambda$  zuordnen mit den Standard-Tableau als Basis.

Deren Anzahl ist durch die Hakenlängen gegeben. Ein Haken mit Ecke  $(i, j)$  hat ein Bein nach rechts und ein Bein nach unten. Im gezeigten Diagramm

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & e & r & r \\ \hline & u & & \\ \hline & u & & \\ \hline \end{array} \tag{11.45}$$

hat die Ecke  $e$  ein Bein nach rechts, dessen Zellen mit  $r$  markiert sind und ein Bein nach unten, dessen Zellen mit  $u$  markiert sind. Die Hakenlänge ist dann gleich der Anzahl Zellen in beiden Beinen plus 1. Im Beispiel ist  $h_{12} = 2 + 2 + 1 = 5$ . Allgemeiner ist

$$h_{ij}^\lambda = \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1, \tag{11.46}$$

wobei  $\lambda'_j$  die Länge von Spalte  $j$  ist. Im folgenden Young-Diagramm sind die Hakenlängen eingetragen

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 1 & \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline \end{array} . \tag{11.47}$$

**Satz 54 (Frame-Robinson-Thrall Formel (Haken-Formel))** *Es sei  $\lambda$  eine Partition von  $n$ . Dann ist die Anzahl der möglichen Standard-Young-Tableaus gleich*

$$d^\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}^\lambda}. \tag{11.48}$$

*Dies ist dann auch die Dimension der irreduziblen Darstellung zur Partition  $\lambda$  von  $n$ .*

Die Darstellung zur Partition  $\lambda = [4, 3, 2]$  mit Young-Diagramm entsprechend

$$d^\lambda = \frac{9!}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 84.$$

### 11.5.3 Irreduzible Darstellungen von $S_4$

Die Gruppe hat  $P(4) = 5$  Konjugationsklassen und die Young-Diagramme der irreduziblen Darstellungen (inklusive Hakenlängen) sind

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} .$$

Die Dimensionen dieser Darstellungen berechnet man mit (11.48):

$$\frac{4!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1, \quad \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3, \quad \frac{4!}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 2, \quad \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3, \quad \frac{4!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1. \tag{11.49}$$

Um Rechenfehler zu vermeiden prüfen wir das Theorem von Burnside,

$$1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 = 24 = 4! = |S_4|. \quad (11.50)$$

Zu jeder Partition  $\lambda$  existiert die *konjugierte Partition*  $\lambda'$ , die zu dem an der Diagonalen gespielten Young-Diagramm gehört. Die Länge der  $i$ 'ten Zeile von  $T_\lambda$  ist gleich der Länge der  $i$ 'ten Spalte von  $T_{\lambda'}$ . Die Diagramme (inklusive Hakenlängen) der zueinander konjugierten Partitionen  $\lambda = [3, 2, 1, 1]$  und  $\lambda' = [4, 2, 1]$  von  $n = 7$  sind hier gezeigt:

6	3	1		6	4	2	1
4	1			3	1		
2				1			
1							

Die Young-Diagramme von konjugierten Partitionen haben identische Hakenlängen  $h_{ij}$ . Diese werden mit ihren Zellen an der Diagonalen gespiegelt. In der Tat folgt aus (11.46), dass

$$h_{ij}^{\lambda'} = h_{ji}^{\lambda}. \quad (11.51)$$

Daraus folgt unmittelbar, dass die Dimensionen der Darstellungen zu  $\lambda$  und  $\lambda'$  gleich sind,

$$d^{\lambda} = d^{\lambda'}. \quad (11.52)$$

Dies erklärt, dass die Dimensionen vieler Darstellungen zweimal auftreten, siehe (11.49).

## 11.6 Irreduzible Darstellungen von Liegruppen

Nach den Darstellungen von endlichen Gruppen betrachten wir nun Darstellungen von kontinuierlichen Gruppen mit Mittelbildung. Im Mittelpunkt stehen dabei die Charakteren und deren Vollständigkeit im Raum der Klassenfunktionen. Letztere Eigenschaft ist Inhalt des wichtigen Satzes von Peter und Weyl. Mehr noch, die Charakteren bilden ein vollständiges Orthonormalsystem im Raum der quadratintegriblen Klassenfunktionen. Wir beginnen mit der einfachsten kompakten Liegruppe, nämlich der Abelschen Gruppe  $U(1)$ .

## 11.7 Charaktere von $U(1)$ und Satz von Peter und Weyl

Für die Abelsche Gruppe  $U(1)$  bildet jedes Element eine Konjugationsklasse und deshalb sind alle Funktionen auch Klassenfunktionen. Alle irreduziblen Darstellungen sind eindimensional und in einer adaptierten Basis unitär. Also hat jede irreduzible Darstellung die Form

$$D(e^{i\vartheta}) = e^{ih(\vartheta)} \quad \text{und} \quad e^{ih(\vartheta+2\pi)} = e^{ih(\vartheta)}, \quad h(\vartheta) \in \mathfrak{R}. \quad (11.53)$$

Die Darstellungseigenschaft impliziert

$$e^{ih(\vartheta_1+\vartheta_2)} = e^{ih(\vartheta_1)+ih(\vartheta_2)}.$$

Also ist  $h(\vartheta)$  eine lineare Funktion mit  $h(\vartheta+2\pi) = h(\vartheta) + 2\pi n$  und die irreduziblen Darstellungen haben die Form

$$D_n : e^{i\vartheta} \mapsto D_n(e^{i\vartheta}) = e^{in\vartheta}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (11.54)$$

Damit sind die Charaktere der unendlich vielen irreduziblen Darstellungen

$$\chi_n(\vartheta) = \text{Sp } D_n(e^{i\vartheta}) = e^{in\vartheta}. \quad (11.55)$$

Diese sind in der Tat unitär-orthogonal bezüglich der Mittelbildung,

$$(\chi_m, \chi_n) = \mathcal{M}(\chi_m^* \chi_n) = \frac{1}{2\pi} \int d\vartheta e^{-im\vartheta} e^{in\vartheta} = \delta_{mn}, \quad (11.56)$$

wie es von der allgemeinen Theorie gefordert wird. Jede Klassenfunktion  $f(\vartheta)$ , d.h.  $2\pi$ -periodische Funktion, kann nach der Theorie der Fourierreihen nach den Exponentialfunktionen (11.55) entwickelt werden. Also haben wir genau dieselbe Situation wie für endliche Gruppen:

Jede Klassenfunktion  $f(\vartheta)$  ist eine Linearkombination der unitär-orthogonalen Charaktere,

$$f(\vartheta) = \sum_n c_n \chi_n(\vartheta), \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int e^{-in\vartheta} f(\vartheta) = (\chi_n, f). \quad (11.57)$$

Die Theorie der Fourier-Reihen ist also ein Spezialfall der Theorie der Charaktere. Die Vollständigkeit der Charakteren für endliche Gruppen und die Gruppe U(1) gilt ganz allgemein für kontinuierliche Gruppen mit Mittelbildung. Es gilt nämlich der folgende Satz:

**Satz 55 (Satz von Peter und Weyl)** *Zu jeder kontinuierlichen Gruppe  $G$  mit Mittelbildung existieren unendlich viele Charaktere, welche ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem von Klassenfunktionen auf  $G$  bilden.*

## 11.8 Alle irreduzible Darstellungen von SU(2)

Im Gegensatz zur U(1) werden die nicht-trivialen irreduziblen Darstellungen der nicht-Abelschen SU(2) nicht mehr eindimensional sein. Aber es gibt natürlich immer die triviale Darstellung  $U \rightarrow 1$ . Der Charakter dieser eindimensionalen Darstellung  $D_1$  und der zweidimensionalen definierenden Darstellung  $D_2$  in (9.10) sind

$$\chi_1(U) = 1 \quad \text{und} \quad \chi_2(U) = 2 \cos \vartheta = e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}.$$

Mit Hilfe der Integrale

$$\int d\mu_{\text{red}} \cos^2 \vartheta = \frac{1}{4}, \quad \int d\mu_{\text{red}} \cos \vartheta = 0, \quad d\mu_{\text{red}} = \frac{2}{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta,$$

findet man für die mit dem reduzierten Haarmaß (9.14) berechneten Skalarprodukte

$$(\chi_1, \chi_1) = (\chi_2, \chi_2) = 1 \quad \text{und} \quad (\chi_1, \chi_2) = 0,$$

wie es nach der allgemeinen Theorie sein muss.

---

?

---

Überlegen Sie sich, dass allgemeiner gilt

$$\int d\mu_{\text{red}}(\vartheta) \cos^{2p} \vartheta = \frac{1}{4^p} \frac{(2p)!}{p!(p+1)!}. \quad (11.58)$$

Wir werden später sehen, dass dies die einzigen ein- und zweidimensionalen Darstellungen der Gruppe SU(2) sind.

### 11.8.1 Die dreidimensionale Darstellung SO(3)

Um die nächste irreduzible Darstellung zu gewinnen, betrachten wir die 4-dimensionale Darstellung

$$D = D_2 \otimes D_2 \quad \text{mit} \quad \chi_D(\vartheta) = \chi_2(\vartheta) \cdot \chi_2(\vartheta) = 4 \cos^2 \vartheta. \quad (11.59)$$

Offensichtlich ist

$$(\chi_1, \chi_D) = 1 \quad \text{und} \quad (\chi_2, \chi_D) = 0,$$

so dass  $D$  die Einsdarstellung genau einmal enthält. Also muss gelten

$$D_2 \otimes D_2 = D_1 \oplus D_3, \quad \chi_3(\vartheta) = \chi_{D_3} = e^{2i\vartheta} + 1 + e^{-2i\vartheta}. \quad (11.60)$$

Wegen  $(\chi_3, \chi_3) = 1$  ist  $D_3$  eine irreduzible Darstellung der Dimension  $\chi_3(e) = 3$ .

Um einzusehen, dass es sich dabei um die Gruppe SO(3) der Drehungen im dreidimensionalen Euklid'sche Raum handelt, schauen wir uns die Tensorarstellung  $D_2 \otimes D_2$  näher an. Unter  $D_2$  gehen  $x \in \mathbb{C}^2$  und  $y \in \mathbb{C}^2$  in  $Ux$  und  $Uy$  über, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ -a\bar{b} & a\bar{a} & -b\bar{b} & b\bar{a} \\ -\bar{b}a & -\bar{b}b & \bar{a}a & \bar{a}b \\ \bar{b}^2 & -\bar{b}\bar{a} & -\bar{a}\bar{b} & \bar{a}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}. \quad (11.61)$$

Benutzt man anstelle von  $x_i y_j$  die anti-symmetrische Kombination bzw. die symmetrischen Kombinationen

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad \text{und} \quad (Y_{11}, Y_{10}, Y_{1-1}) = (x_1 y_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 y_2 + x_2 y_1), x_2 y_2),$$

dann findet man für diese das folgende Transformationsverhalten

$$\begin{pmatrix} Y_{00} \\ Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ 0 & -\sqrt{2}a\bar{b} & a\bar{a} - b\bar{b} & \sqrt{2}b\bar{a} \\ 0 & \bar{b}^2 & -\sqrt{2}\bar{a}\bar{b} & \bar{a}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{00} \\ Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix}. \quad (11.62)$$

Der eindimensionale invariante Unterraum wird also von der antisymmetrischen Kombination  $Y_{00}$  aufgespannt und der dreidimensionale von den symmetrischen Kombinationen  $Y_{1m}$ . Setzen wir schlussendlich noch

$$(X_1, X_2, X_3) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{11} - Y_{1-1}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(Y_{11} + Y_{1-1}), Y_{10} \right), \quad (11.63)$$

dann sieht die dreidimensionale Darstellung folgendermaßen aus

$$\mathbf{X} \mapsto (\mathbf{e}, \mathbf{X})\mathbf{e} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{X} \sin 2\vartheta - \mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{X}) \cos 2\vartheta = R(2\vartheta, \mathbf{e})\mathbf{X}, \quad (11.64)$$

wobei  $\vartheta$  der Winkel in der Parametrisierung (9.10) und

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \sin \psi \cos(\pi + \varphi) \\ \sin \psi \sin(\pi + \varphi) \\ \cos \psi \end{pmatrix} \quad (11.65)$$

ein Einheitsvektor ist. Dies ist gerade eine Drehung von  $\mathbf{X}$  um die Achse  $\mathbf{e}$  mit Winkel  $2\vartheta$ . Die Matrixelemente von  $R$  sind reell und deshalb kann  $R$  als Transformation auf  $\mathbb{R}^3$  angesehen werden. Damit ist  $g \rightarrow R(U) \in SO(3)$  eine irreduzible Darstellung von  $SU(2)$  durch 3-dimensionale Drehungen im  $\mathbb{R}^3$ . Wegen  $R(U) = R(-U)$  ist  $R$  nicht treu.

### 11.8.2 Höherdimensionale Darstellungen

Ganz ähnlich kann man nun die Tensorprodukt-Darstellung  $D = D_3 \otimes D_2$  mit Charakter

$$\chi_D = \chi_3 \cdot \chi_2 = e^{3i\vartheta} + 2e^{i\vartheta} + 2e^{-i\vartheta} + e^{-3i\vartheta} = \chi_2 + \chi_4$$

ausreduzieren. Offensichtlich enthält  $D$  die Darstellung  $D_2$  genau einmal. Wegen  $(\chi_4, \chi_4) = 1$  zerfällt  $D_3 \otimes D_2$  in die irreduzible Darstellung  $D_2$  und eine 4-dimensionale irreduzible Darstellung  $D_4$ .

Ähnlich gewinnt man  $D_n$  mit  $n = 5, 6, \dots$  und findet folgende Formel für deren Charaktere:

$$\chi_n \equiv \chi_{D_n} = \sum_{k=1-n, 3-n, \dots}^{n-1} e^{ik\vartheta} = \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (11.66)$$

Wegen  $\chi_n(e) = n$  hat die Darstellung  $D_n$  die Dimension  $\dim D_n = n$ .

Die Charakteren bilden ein orthonormiertes System von Klassenfunktionen,

$$(\chi_m, \chi_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin m\vartheta \sin n\vartheta \, d\vartheta = \delta_{mn},$$

und gehören somit zu irreduziblen und inäquivalenten Darstellungen der quantenmechanischen Drehgruppe SU(2). Es stellt sich nun die Frage, welche der Darstellungen  $D_n$  treu sind.

?

Überzeugen Sie sich davon, dass von allen  $n$ -dimensionalen unitären Matrizen nur  $\mathbb{1}_n$  die Spur  $n$  hat.

Eine Darstellung ist bekanntlich dann treu, wenn ihr Kern nur das Einselement enthält. Für SU(2) bedeutet dies

$$\chi_n(U) = \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} = n, \quad \text{mit } \vartheta \in [0, \pi]. \quad (11.67)$$

Für  $\vartheta \rightarrow 0$  strebt der Charakter  $\chi_n(\vartheta)$  gegen  $n$  (man benutze die Regel von l'Hospital), so dass erwartungsgemäß  $D_n(\mathbb{1}_2) = \mathbb{1}_n$  ist. Für ungerade  $n$  strebt der Charakter auch für  $\vartheta \rightarrow \pi$  gegen  $n$ . Für diesen Wert von  $\vartheta$  ist  $U$  in (9.10) aber  $-\mathbb{1}_2$ , so dass

$$D_n(\mathbb{1}_2) = D_n(-\mathbb{1}_2) = \mathbb{1}_n \quad \text{für ungerade } n. \quad (11.68)$$

Die irreduziblen Darstellungen mit ungeradem  $n$  sind also nicht treu, wogegen diejenigen mit geradem  $n$  treu sind.

Gemäß dem Satz von PETER und WEYL kann jede Klassenfunktion  $f(\vartheta)$  von SU(2) als Linearkombination der Charaktere der irreduziblen Darstellungen geschrieben werden,

$$f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}$$

$$c_n = \int d\mu_{\text{red}}(\vartheta) \chi_n(\vartheta) f(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \int \sin \vartheta \sin n\vartheta f(\vartheta) d\vartheta. \quad (11.69)$$

Das die Charaktere  $\chi_n$  ein vollständiges Funktionensystem auf

$$L_2([0, \pi], d\mu_{\text{red}}(\vartheta))$$

bilden, kann auch anderweitig eingesehen werden. Dies zeigt a posteriori, dass wir *alle* irreduziblen Darstellungen von SU(2) konstruiert haben.

Man kann zeigen (siehe Übungen), dass für  $n \geq m$  folgende Ausreduktionsformel gilt:

$$D_n \otimes D_m = D_{n+m-1} \oplus D_{n+m-3} \oplus D_{n+m-5} \oplus \cdots \oplus D_{n-m+1}. \quad (11.70)$$

In der Quantenmechanik schreibt man für die Darstellungen und Charakteren von SU(2) oft  $D_j$  und  $\chi_j$ , wobei  $j$  die Drehimpuls-Quantenzahl ist. Die Dimension der Darstellung  $D_n$  ist dann  $n = 2j + 1$ . Die Drehimpuls-Quantenzahl  $j$  nimmt die halbganzen Werte  $0, 1/2, 1, \dots$  an. Damit lautet die Ausreduktionsformel (11.70) wie folgt:

$$D_j \otimes D_{j'} = D_{j+j'} \oplus D_{j+j'-1} \oplus D_{j+j'-2} \oplus \cdots \oplus D_{|j-j'|}. \quad (11.71)$$

Im Programm LiE wird eine irreduzible Darstellung durch den Vektor  $\mathbf{v}$  mit dem höchsten Gewicht charakterisiert (mehr dazu später). Die Dimension der Darstellung wird dann durch  $\text{dim}(\mathbf{v})$  abgefragt. Die Ausreduktion zweier irreduzibler Darstellungen mit Gewichtsvektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  erfährt man mit dem Aufruf `tensor(v, w)`.

### LiE

```
setdefault A1
dim([1]) -> 2
dim([2]) -> 3
dim([3]) -> 4
tensor([1],[1]) -> 1X[0] +1X[2]
p_tensor(3,[1]) -> 2X[1] +1X[3]
```

Die zweitletzte Zeile ist gleichbedeutend mit  $D_2 \otimes D_2 = D_1 \oplus D_3$  und die letzte mit  $D_2 \otimes D_2 \otimes D_2 = 2D_2 + D_4$ .

## 11.9 Darstellungen von SU(3)

Eine unitäre Matrix kann diagonalisiert werden und hat unimodulare Zahlen als Eigenwerte. Für die Matrizen aus SU(n) muss deren Produkt gleich Eins sein. Deshalb ist jede SU(3)-Matrix ähnlich zu einer diagonalen Matrix

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\vartheta_1+\vartheta_2)} \end{pmatrix} \quad (11.72)$$

mit reellen Winkeln  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$ . Diese drei-dimensionale definierende Darstellung wird mit 3 bezeichnet. Ihr Charakter ist

$$\chi_3(\vartheta_1, \vartheta_2) = e^{i\vartheta_1} + e^{i\vartheta_2} + e^{-i(\vartheta_1+\vartheta_2)}. \quad (11.73)$$



Die definierende Darstellung ist irreduzibel, da

$$\chi_3^* \chi_3 = 3 + 2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + 2 \cos(2\vartheta_1 + \vartheta_2) + 2 \cos(2\vartheta_2 + \vartheta_1) \quad (11.74)$$

zu Eins integriert,

$$(\chi_3, \chi_3) = \int d\mu_{\text{red}}(\vartheta_1, \vartheta_2) |\chi_3(\vartheta_1, \vartheta_2)|^2 = 1. \quad (11.75)$$

Das hier auftretende reduzierte Haar-Maß von SU(3) hatten wir in (9.48) bestimmt.

Die komplex konjugierte Darstellung  $U \mapsto U^*$  – sie wird mit  $\bar{3}$  bezeichnet – ist nicht äquivalent zur Darstellung  $3$ , da  $\chi_{\bar{3}} = \chi_3^* \neq \chi_3$  ist. Sie ist wegen  $|\chi_{\bar{3}}|^2 = |\chi_3|^2$  ebenfalls irreduzibel. Was ergibt nun die Ausreduktion der 9-dimensionalen Tensorprodukt-Darstellung  $3 \times \bar{3}$  mit Charakter  $\chi_{3 \otimes \bar{3}} = \chi_3 \chi_3^*$ ? Sie enthält wegen

$$(\chi_{3 \otimes \bar{3}}, \chi_1) = \int d\mu_{\text{red}} |\chi_3|^2 = 1 \quad (11.76)$$

die triviale Darstellung einmal. Setzen wir  $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ , dann ist die achtdimensionale Darstellung irreduzibel, da  $\chi_8 = \chi_{3 \otimes \bar{3}} - \chi_1$  die Norm 1 hat

$$(\chi_8, \chi_8) = (\chi_3^2, \chi_3^2) - 2(\chi_3, \chi_3) + (\chi_1, \chi_1) = 1. \quad (11.77)$$

?

Warum gilt die letzte Aussage? Versuchen Sie die Skalarprodukte in (11.77) zu berechnen.

Die Skalarprodukte  $(\chi_3^n, \chi_3^m)$  können mithilfe einer erzeugenden Funktion berechnet werden:

$$\int d\mu_{\text{red}} e^{u\chi_3 + v\chi_3^*} = \sum_{m,n=0}^{\infty} (\chi_3^n, \chi_3^m) \frac{u^m v^n}{m! n!} \quad (11.78)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{2}{(p+q+1)! (p+q+2)! q!} \binom{3(p+q+1)}{p} (uv)^p (u^3 + v^3)^q \\ &= 1 + uv + \frac{u^3 + v^3}{6} + \frac{u^2 v^2}{2} + \frac{11u^3 v^3}{72} + \frac{91u^4 v^4}{2880} + \frac{uv(u^3 + v^3)}{8} + \dots \end{aligned} \quad (11.79)$$

Den Beweis findet man in S. Uhlmann, R. Meinel und A. Wipf, Journal of Physics **A40** (2007) 4367. Insbesondere folgt durch Vergleich der Koeffizienten von  $u^2 v^2$  das fehlende erste Integral auf der rechten Seite von (11.77):

$$(\chi_3^2, \chi_3^2) = 2. \quad (11.80)$$

Das Tensorprodukt

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \quad (11.81)$$

führt somit auf eine achtdimensionale irreduzible Darstellung. Es ist die adjungierte Darstellung 8.

Wir betrachten noch das Tensorprodukt  $3 \otimes 3$  mit dem Charakter  $\chi_3^2$ . Vergleichen wir die Koeffizienten von  $u^3$  in (11.78) und (11.79), dann finden wir

$$(\chi_{\bar{3}}, \chi_{3 \otimes 3}) = \int d\mu_{\text{red}} \chi_3^3 = 1, \quad (11.82)$$

was bedeutet, dass die irreduzible Darstellung  $\bar{3}$  einmal in  $3 \otimes 3$  enthalten ist. Deshalb gilt

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \implies \chi_6 = \chi_3^2 - \chi_3^*, \quad (11.83)$$

mit einer 6-dimensionalen (wegen  $(\chi_6, \chi_6) = 1$  irreduziblen) Darstellung. Im nächsten Schritt folgt

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (3 \otimes 3) \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3) = (6 \otimes 3) \oplus 8 \oplus 1. \quad (11.84)$$

Jetzt fehlt nach  $6 \otimes 3$  mit dem Charakter

$$\chi_{6 \otimes 3} = \chi_6 \chi_3 = \chi_3^3 - \chi_3^* \chi_3. \quad (11.85)$$

Ohne expliziten Beweis notieren wir, dass diese Darstellung in zwei irreduzible Darstellungen zerfällt,  $6 \otimes 3 = 10 \oplus 8$ , so dass

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \quad (11.86)$$

Die Resultate (11.81) und (11.86) sind relevant für das Quarkmodell der Teilchenphysik. Quarks transformieren nach der Darstellung 3 der Farbgruppe, sie treten in drei Farben auf. Koppelt man ein Quark und ein Antiquark, dann können diese einen Singlettzustand – dies sind die farblosen Mesonen – bilden. Aus drei Quarks kann man ebenfalls farblose Singletts konstruieren, zum Beispiel ein Proton oder ein Neutron, oder allgemeiner die Baryonen. Mithilfe des Programms LiE:

### LiE

```

1 setdefault A2
2 dim([0,0]) -> 1
3 dim([1,0]) -> 3
4 dim([0,1]) -> 3
5 dim([2,0]) -> 6
6 dim([0,2]) -> 6
7 dim([1,1]) -> 8
8 dim([3,0]) -> 10
9 tensor([1,0],[0,1]) -> 1X[0,0] +1X[1,1]
10 p_tensor(3,[1,0]) -> 1X[0,0] +2X[1,1] +1X[3,0]
```

Der Aufruf in Zeile 9 führt auf das Resultat (11.81) und derjenige in Zeile 10 auf (11.86).

## 11.10 Anhang A: Charaktertafeln der Punktgruppen

Die Anzahl Elemente und Konjugationsklassen der eigentlichen und uneigentlichen Punktgruppen wurden bereits auf den Seiten 83 und 88 notiert. Wir erinnern hier an die Symmetrieoperationen bzw. Symmetrie-Elemente der Punktgruppen:

**Identität**  $E$

**Drehung**  $c_n$  um  $n$ -zählige Drehachsen

- $c_n^m$ : Drehung um  $2\pi m/n$
- höchstzählige Drehachse wird in  $z$ -Richtung gelegt
- $c'_n, c''_n$ : Drehachsen nicht in  $z$ -Richtung

**Spiegelung**  $\sigma$  an einer Spiegelebene

- $\sigma_v$ : Spiegelebene enthält höchstzählige Achse
- $\sigma_h$ : Spiegelebene senkrecht zur höchstzähligen Achse
- $\sigma_d$ : Spiegelebenen halbieren Winkel zwischen zwei Drehachsen  $c'_2$

**Inversion**  $i$

- Punktspiegelung am Inversionszentrum

**Drehspiegelung**  $s_n$  an einer Drehspiegelachse

- $s_n$  Drehung um  $2\pi/n$  und anschließende Spiegelung an der Ebene senkrecht zur Drehachse
- $s_1 = \sigma_h, s_2 = i$ .

**Charaktere von  $\mathcal{C}_n$ :** Erzeugendes Element dieser Abel'schen Gruppe der Ordnung  $n$  ist  $c_n$ . Sie hat  $n$  Konjugationsklassen und ebenso viele irreduzible Darstellungen. Mit  $\omega_n = e^{2\pi i/n}$  hat die Charaktertafel von  $\mathcal{C}_n$  folgende Form:

$\mathcal{C}_n$	$e$	$c_n$	$c_n^2$	$c_n^3$	...	$c_n^{n-1}$
$D_1^0$	1	1	1	1	...	1
$D_1^1$	1	$\omega_n$	$\omega_n^2$	$\omega_n^3$	...	$\omega_n^{n-1}$
$D_1^2$	1	$\omega_n^2$	$\omega_n^4$	$\omega_n^6$	...	$\omega_n^{2n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
$D_1^{n-1}$	1	$\omega_n^{n-1}$	$\omega_n^{2n-2}$	$\omega_n^{3n-3}$	...	$\omega_n^{(n-1)(n-1)}$

**Charaktere von  $C_{nh}$ :** Diese Abel'schen Gruppen sind für gerade  $n$  isomorph zu  $C_n \times \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$  und für ungerade  $n$  zu  $C_n \times \{\mathbb{1}, \sigma_h\}$ . Sie haben die erzeugenden Elemente  $c_n$  und  $-\mathbb{1}$  beziehungsweise  $c_n$  und  $\sigma_h$ . Die Ordnung ist  $2n$ , was gleich die Anzahl Konjugationsklassen und irreduzibler Darstellungen ist. Ist  $n$  gerade, so hat  $C_{nh}$  ein Inversionszentrum und für ungerades  $n$  ist die Gruppe isomorph zur Gruppe  $S_n$ . Für ungerade  $n$  haben die Charaktertafeln die Gestalt, **korrigieren, da Doppelbezeichnung; nur für ungerade  $n$  gegeben, gerade  $n$ ?**

$C_{nh}$	$e$	$c_n$	$c_n^2$	$\dots$	$\sigma_h$	$\sigma_h c_n$	$\sigma_h c_n^2$	$\dots$
$D_1^0$	1	1	1	$\dots$	1	1	1	$\dots$
$D_1^1$	1	$\omega_n$	$\omega_n^2$	$\dots$	1	$\omega_n$	$\omega_n^2$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$D_1^{n-1}$	1	$\omega_n^{n-1}$	$\omega_n^{2n-2}$	$\dots$	1	$\omega_n^{n-1}$	$\omega_n^{2n-2}$	$\dots$
$D_1^0$	1	1	1	$\dots$	-1	-1	-1	$\dots$
$D_1^1$	1	$\omega_n$	$\omega_n^2$	$\dots$	-1	$-\omega_n$	$-\omega_n^2$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$
$D_1^{n-1}$	1	$\omega_n^{n-1}$	$\omega_n^{2n-2}$	$\dots$	-1	$-\omega_n^{n-1}$	$-\omega_n^{2n-2}$	$\dots$

**Charaktere von  $C_{nv} \cong D_n$ :** Die nicht-Abelsche Punktgruppe  $C_{nv}$  ist isomorph zu  $C_n \times \{\mathbb{1}, \sigma_v\}$  und hat die erzeugenden Elemente  $c_n$  und  $\sigma_v$ . Die Ordnung ist  $2n$  und die Anzahl Konjugationsklassen ist  $\frac{n}{2} + 3$  für gerade  $n$  und  $\frac{n+3}{2}$  für ungerade  $n$ . Ist  $n$  gerade, so hat  $C_{nv}$  ein Inversionszentrum. Zum Beispiel ist

$D_6$	$e$	$2c_6$	$2c_3$	$c_2$	$3c'_2$	$3c''_2$
$D_1^1$	1	1	1	1	1	1
$D_1^2$	1	1	1	1	-1	-1
$D_1^3$	1	-1	1	-1	1	-1
$D_1^4$	1	-1	1	-1	-1	1
$D_2^1$	2	1	-1	-2	0	0
$D_2^2$	2	-1	-1	2	0	0

**Charaktere von  $\mathcal{T}$ :** Die Gruppe hat 12 Elemente und 4 Klassen. Entsprechend gibt es drei eindimensionale Darstellungen und eine dreidimensionale irreduzible Darstellung

$\mathcal{T}$	$e$	$4c_3$	$4c_3^2$	$3c_2'$
$D_1^1$	1	1	1	1
$D_1^2$	1	$\omega_3$	$\omega_3^2$	1
$D_1^3$	1	$\omega_3^2$	$\omega_3$	1
$D_3$	3	0	0	-1

**Charaktere von  $\mathcal{O}$ :** Die Gruppe hat 24 Elemente und 5 Klassen. Entsprechend gibt es zwei eindimensionale, eine zweidimensionale und zwei dreidimensionale irreduzible Darstellungen

$\mathcal{O}$	$e$	$6c_4$	$3c_2$	$8c_3$	$6c_2'$
$D_1^1$	1	1	1	1	1
$D_1^2$	1	-1	1	1	-1
$D_2$	2	0	2	-1	0
$D_3^1$	3	1	-1	0	-1
$D_3^2$	3	-1	-1	0	1

**Charaktere von  $\mathcal{Y}$ :** Die Gruppe hat 60 Elemente und 5 Klassen. Es gibt eine eindimensionale, zwei dreidimensionale, eine vierdimensionale und eine fünf-dimensionale Darstellung.

$\mathcal{Y}$	$e$	$12c_5$	$12c_5^2$	$20c_3$	$15c_2$
$D_1^1$	1	1	1	1	1
$D_3^1$	3	$-2 \cos 4\pi/5$	$2 \cos 2\pi/5$	0	-1
$D_3^2$	3	$-2 \cos 2\pi/5$	$2 \cos 4\pi/5$	0	-1
$D_4$	4	-1	-1	1	0
$D_5$	5	0	0	-1	1

Für die entsprechenden Tafeln der restlichen Punktgruppen verweise ich auf die Literatur, z.B. das Buch von WAGNER [21]

## 11.11 Aufgaben zu Kapitel 11

### Aufgabe 11.1: Die Spur ist invariant bei zyklischer Vertauschung

Zeigen Sie, dass die Spur eines Produktes von  $n$ -dimensionalen Matrizen  $A_1, \dots, A_k$  sich bei zyklischer Vertauschung der Matrizen nicht ändert, zum Beispiel

$$\operatorname{Sp}(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k) = \operatorname{Sp}(A_k A_1 A_2 \cdots A_{k-1}).$$

Was bedeutet dies für die Spur des Produkts von zwei oder drei Matrizen? Was folgt für die Spur der zur Matrix  $A$  konjugierten Matrix  $U^{-1}AU$ ?

### Aufgabe 11.2: Kommutierende Matrizen

Zeigen Sie, dass zwei Matrizen genau dann simultan diagonalisiert werden können, wenn sie vertauschen.

Hinweis: Zwei Matrizen sind simultan diagonalisierbar wenn sie mithilfe einer Konjugation mit derselben Matrix diagonalisiert werden können. Dass simultan diagonalisierbar die Vertauschbarkeit impliziert ist einfach zu zeigen. Um die Umkehrung zu beweisen, bringen Sie eine der Matrizen mit einer Konjugation in Diagonalform

### Aufgabe 11.3: Konjugationsklassen der kubischen Gruppe

Zeigen Sie, dass die kubische Gruppe folgende fünf Konjugationsklassen enthält:

1. die triviale Klasse mit dem Einselement  $e$ ,
2. die Klasse  $\mathcal{C}_2$  mit den  $\pi$ -Drehungen um die Achsen, die gegenüberliegende Oberflächen verbinden,
3. die Klasse  $\mathcal{C}_3$  mit den  $2\pi/3$ -Drehungen um die Raumdiagonalen im Kubus,
4. die Klasse  $\mathcal{C}'_2$  mit den  $\pi$ -Drehungen um die Achsen, die gegenüberliegende Seiten verbinden,
5. die Klasse  $\mathcal{C}_4$  der  $\pm\pi/2$ -Drehungen um Achsen, die gegenüberliegende Seiten verbinden.

Damit hat die Gruppe fünf irreduzible Darstellungen. Was sind deren Dimensionen?

### Aufgabe 11.4: Reguläre Darstellungen von $S_3$

Diese Gruppe hat bekanntlich 6 Elemente und ist isomorph zu  $\mathcal{D}_3$ .

- Bestimmen Sie die reguläre Darstellung  $\mathcal{R}$  von  $S_3$ , also die 6-dimensionalen Matrizen zu den 6 Gruppenelementen.
- Zeigen Sie, dass die reguläre Darstellung die drei irreduziblen Darstellungen mit den erwarteten Multiplizitäten enthält.

### Aufgabe 11.5: Irreduzible Darstellungen der Dodekaeder-Gruppe

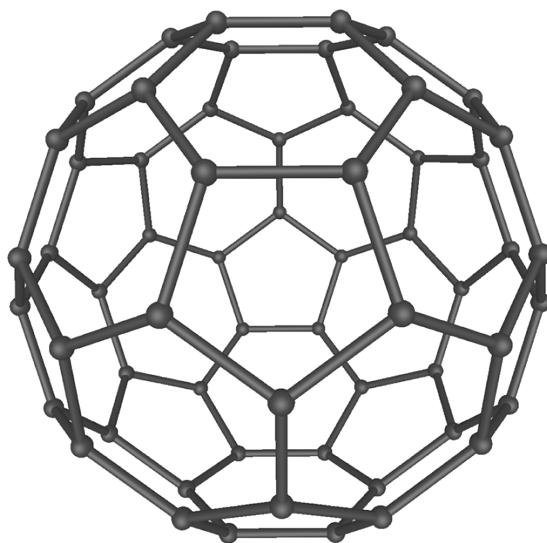
Die eigentlichen Decktransformationen des Dodekaeders (keine Spiegelungen!) bilden eine der Platon'schen Gruppen. Sie hat 60 Elemente und 5 Konjugationsklassen. Die Gruppe hat eine eindimensionale, keine zwei-dimensionale und *zwei* drei-dimensionale irreduzible Darstellungen (zwei dieser Darstellungen werden Sie kennen). Was sind die Dimensionen der noch fehlenden

irreduziblen Darstellungen?

### Aufgabe 11.6: Buckyball

Das Fulleren  $C_{60}$  (oft buckyball genannt), sowie manche Quasikristalle, besitzen die Ikosaedergruppe als Symmetriegruppe,  $\mathcal{Y}_h$ . Man bestimme die Charakterentafel und überzeuge sich davon, dass die Formel aus dem Satz von Burnside zutrifft.

Der buckyball wurde zuerst 1985 an der Rice University hergestellt, Harold Kroto, Robert Curl und Richard Smalley wurden dafür 1996 mit dem Nobelpreis in Chemie ausgezeichnet.



Buckyball (entnommen aus Wikipedia).

### Aufgabe 11.7: Irreduzible Darstellungen der $SU(2)$

- In der Vorlesung wurde

$$\int d\mu_{\text{red}}(\vartheta)(\cos \vartheta)^{2p} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\vartheta (\sin \vartheta)^2 (\cos \vartheta)^{2p} = \frac{1}{4^p} \frac{(2p)!}{p!(p+1)!}$$

zur Berechnung der Skalarprodukte von  $SU(2)$ -Charakteren benutzt. Man beweise diese Integrationsformel.

- Man überzeuge sich davon, dass von allen  $N$ -dimensionalen unitären Matrizen nur  $\mathbb{1}_N$  die Spur  $N$  hat.

### Aufgabe 11.8: Tensorprodukt von $SU(2)$ -Darstellungen

Es seien  $D_n$  with  $n = 1, 2, 3, \dots$  die irreduziblen Darstellungen von  $SU(2)$  der Dimension  $n$ . Es sein nun  $m \leq n$ . Beweisen Sie die Ausreduktionsformel

$$D_m \otimes D_n = D_{m+n-1} \oplus D_{m+n-3} \oplus \cdots \oplus D_{m-n+1}.$$

Hinweis: betrachten Sie die Charakteren  $\chi_n$  der  $D_n$  und erinnern sich daran, was die Ausreduktion des Tensorprodukts für die die Charakteren bedeutet. Dabei mag es hilfreich sein, sich an

$$\chi_p(\theta) = e^{i(p-1)\theta} + e^{i(p-3)\theta} + e^{i(p-5)\theta} + \dots + e^{i(1-p)\theta}$$

zu erinnern.

### Aufgabe 11.9: Irreduzible Darstellungen von $G \times G$

Mit den Ergebnissen aus der Vorlesung kann man relativ leicht alle irreduziblen Darstellungen von  $SO(4)$  aus denen von  $SU(2)$  konstruieren. Tatsächlich hat man dann auch alle irreduziblen Darstellungen der Lorentzgruppe  $SO(1,3)$  konstruiert. Hier betrachten wir die Situation für eine allgemeine Liegruppe mit invarianter Integration.

- Seien  $D_1$  und  $D_2$  zwei irreduzible Darstellungen von  $G$ . Zeigen Sie, dass  $D(g_1, g_2) = D_1(g_1) \otimes D_2(g_2)$  eine irreduzible Darstellung von  $G \times G$  ist.
- Was sind die irreduziblen Darstellungen von  $SU(2) \times SU(2)$ ?
- Was sind die irreduziblen Darstellungen von  $SU(2) \times SU(2) / \mathbb{Z}_2$ ?  
Hinweis: Zwei Paare in  $SU(2) \times SU(2)$ , welche identifiziert werden, müssen in dasselbe  $D(g_1, g_2)$  abgebildet werden.



## 12 Theorie der Lie-Algebren

*Im Laufe der Zeit wird es immer klarer, dass die Regeln, die die Mathematiker interessant finden, dieselben sind, die die Natur gewählt hat.*

P.A.M. DIRAC

Dieses Kapitel führt in die Theorie der weit verbreiteten Lie-Algebren ein. Ein bekanntes Beispiel einer Lie-Algebra ist der Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit dem Vektorprodukt als Multiplikation. Das Produkt ist bilinear und antisymmetrisch,

$$\mathbf{a} \wedge (\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) = \beta \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \gamma \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (\beta, \gamma \in \mathbb{R}) \quad (12.1)$$

und erfüllt die Jacobi-Identität

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a} + (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = 0. \quad (12.2)$$

Lie-Algebren sind bereits in der klassischen Mechanik anzutreffen: die Poisson-Klammer in der Hamilton'schen Mechanik versieht den linearen Raum der  $C^\infty$ -Funktionen  $\Gamma \mapsto \mathbb{R}$  auf einem Phasenraum  $\Gamma$  mit der Struktur einer Lie-Algebra (sogar einer Poisson-Algebra). Für  $C^\infty$ -Funktionen  $f, g$  und  $h$  gelten

$$\begin{aligned} \text{Bilinearität:} \quad & \{f, \beta g + \gamma h\} = \beta \{f, g\} + \gamma \{f, h\} \\ \text{Antisymmetrie:} \quad & \{f, g\} = -\{g, f\} \\ \text{Jacobi-Identität:} \quad & 0 = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Lie-Algebren treten in der Physik meistens als infinitesimale Symmetrieoperationen auf. Ein bekanntes Beispiel sind die infinitesimalen Drehungen im Raum, also die Komponenten des Drehimpulses. In der klassischen Mechanik bilden diese eine Lie-Algebra bezüglich der Poisson-Klammer und in der Quantenmechanik bezüglich des Kommutators von Operatoren,

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k. \quad (12.4)$$

Bekanntlich ist die Darstellungstheorie der Drehimpulsoperatoren von großer Bedeutung für die Klassifikation von Zuständen und die *Auswahlregeln* in Atom- und Molekülphysik. Allgemeiner können mit Hilfe der Theorie von Lie-Algebren und deren Darstellungen strukturelle Einsichten in eine physikalischen Theorie gewonnen werden ohne die zugrunde liegende (oft auch komplexe) Dynamik zu verstehen oder zu lösen.

## 12.1 Lie-Algebren

Die Eigenschaften einer Lie-Algebra sind diejenigen des Vektorprodukts auf  $\mathbb{R}^3$  nachempfunden. Allgemein wird eine Lie-Algebra wie folgt definiert:

**Definition 43 (Lie-Algebra)** Eine Lie-Algebra ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathfrak{g}$ , versehen mit einer bilinearen Abbildung (Lie-Klammer, Lie-Produkt)

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g} \quad (12.5)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- sie ist antisymmetrisch:  $[X, Y] = -[Y, X]$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{g}$
- sie erfüllt die Jacobi-Identität:  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$  für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

Führen wir eine Basis  $X_1, \dots, X_n$  im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathfrak{g}$  ein, dann ist der Kommutator zweier Basiselemente eine Linearkombination der Basiselemente,

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k. \quad (12.6)$$

Die  $n^3$  reellen Entwicklungskoeffizienten  $f_{ij}^k$  heißen *Strukturkonstanten* der Lie-Algebra.

Der *Rang* einer Lie-Algebra ist gleich der maximalen Anzahl kommutierender Basiselemente. Wenn das Lie-Produkt für jedes Paar von Elementen  $X, Y$  einer Lie-Algebra verschwindet, dann heißt diese *Abel'sch*. Alle Strukturkonstanten einer Abel'schen Lie-Algebra verschwinden und ihr Rang ist  $\dim(\mathfrak{g})$ , also maximal.

### Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$

Diese Algebra enthält alle  $n \times n$ -Matrizen mit Elementen in  $\mathbb{K}$  und ist versehen mit dem Lie-Produkt

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (12.7)$$

Es ist eine Lie-Algebra, da die Jacobi-Identität automatisch erfüllt ist

$$\begin{aligned} &XYZ - XZY - YZX + ZYX \\ &+ ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \\ &+ YZX - YXZ - ZXY + XZY = 0. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Aus den Eigenschaften des Lie-Produkts kann man entsprechende Eigenschaften der Strukturkonstanten ablesen. So folgt aus der Antisymmetrie des Produkts die Antisymmetrie der Struk-

turkonstanten in den unteren Indizes,

$$f_{ij}^k = -f_{ji}^k, \quad i, j, k = 1, \dots, \dim(\mathfrak{g}). \quad (12.9)$$

Aus der Jacobi-Identität für die Basiselemente erhält man

$$[X_i, [X_j, X_k]] + \text{zykl.} = 0 \implies f_{ip}^q f_{jk}^p + f_{jp}^q f_{ki}^p + f_{kp}^q f_{ij}^p = 0. \quad (12.10)$$

Die Strukturkonstanten legen die Lie-Produkte der Basiselemente fest. Wegen der Bilinearität des Produkts sind dann die Lie-Produkte für alle Paare von Elementen in  $\mathfrak{g}$  bestimmt. Zu jedem Satz von  $n^3$  Konstanten  $f_{ij}^k$ , die die Forderungen (12.9) und (12.10) erfüllen, gehört eine Lie-Algebra mit genau diesen Konstanten als Strukturkonstanten.

## 12.2 Lie-Unteralgebren

Viele Lie-Algebren sind Lie-Unteralgebren von bekannten Lie-Algebren. Eine Lie-Unteralgebra einer Lie-Algebra ist wie folgt definiert:

**Definition 44 (Lie-Unteralgebra)** Eine Lie-Unteralgebra einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist ein linearer Teilraum  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ , der abgeschlossen unter der Lie-Klammer ist. Das heißt für alle  $X, Y \in \mathfrak{h}$  gilt  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ .

Eine Lie-Unteralgebra ist selbst eine Lie-Algebra da  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$  gilt und die Jacobi-Identität von  $\mathfrak{g}$  geerbt wird. Es existieren immer die trivialen Lie-Unteralgebren  $\mathfrak{h} = \emptyset$  und  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ . Ist  $\mathfrak{h}$  keine dieser beiden trivialen Lie-Unteralgebren, so heißt sie eigentliche bzw. echte Lie-Unteralgebra.

Sind  $\mathfrak{h}_i$  zwei Lie-Unteralgebren, dann ist auch die Menge

$$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] = \text{span}\{[H_1, H_2] \mid H_i \in \mathfrak{h}_i\} \quad (12.11)$$

eine Lie-Unteralgebra, wobei  $\text{span}\{M\}$  die lineare Hülle von  $M \subseteq \mathfrak{g}$  ist. Insbesondere nennt man

$$\mathfrak{g}' \equiv [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g} \quad (12.12)$$

die von  $\mathfrak{g}$  abgeleitete Lie-Algebra. Für eine Abel'sche Lie-Algebra ist  $\mathfrak{g}' = \emptyset$ .

### Die von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ abgeleitete Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$

Mit  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  bezeichnet man die Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  der Matrizen mit Spur 0. Für zwei beliebige Matrizen  $X, Y$  ist  $\text{Sp}[X, Y] = 0$ , und es gilt

$$\mathfrak{gl}'(n, \mathbb{K}) = [\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})] = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}).$$

### 12.2.1 Invariante Lie-Unteralgebren (Ideale)

Es gibt eine für die Klassifikation von Lie-Algebren wichtige Unterklasse von Lie-Unteralgebren die unter der Wirkung von  $\mathfrak{g}$  invariant sind. Diese invarianten Lie-Unteralgebren, auch Ideale genannt, entsprechen in gewissen Sinne den Normalteilern von Lie-Gruppen:

**Definition 45 (Ideal)** Eine Lie-Unteralgebra  $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{g}$  heißt invariante Lie-Unteralgebra (Ideal) von  $\mathfrak{g}$ , wenn

$$[\mathcal{I}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{I}. \quad (12.13)$$

So ist die abgeleitete Lie-Algebra  $\mathfrak{g}'$  einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  wegen  $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}'$  immer ein Ideal in  $\mathfrak{g}$ . Speziell ist  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  ein Ideal in der Lie-Algebra  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ .

Aus zwei Idealen  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  kann man auf verschiedene Arten weitere Ideale gewinnen (siehe Aufgabe 12.5):

Der Durchschnitt zweier Ideale  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ , ihre Summe  $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \{X_1 + X_2 \mid X_i \in \mathcal{I}_i\}$  und ihr Produkt  $[\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2] = \text{span}\{[X_1, X_2] \mid X_i \in \mathcal{I}_i\}$  sind ebenfalls Ideale in  $\mathfrak{g}$ .

---

?

---

Beweisen Sie diese Eigenschaften. Bei der Letzten werden Sie die Jacobi-Identität benötigen.

---

### 12.2.2 Einfache und Halbeinfache Lie-Algebren

Analog zur Klassifizierung von Gruppen mit Hilfe ihrer Normalteiler kann man auch zwei Arten von Lie-Algebren unterscheiden:

**Definition 46 (Einfache Lie-Algebren)** Eine Lie-Algebra heißt einfach, wenn sie nicht-Abel'sch ist und kein (nicht-triviales) Ideal hat. Sie heißt halbeinfach, wenn  $\{0\}$  ihr einziges Abel'sches Ideal ist.

Eine halbeinfache Lie-Algebra kann also nur nicht-Abel'sche Ideale besitzen. Jede einfache Lie-Algebra ist auch halb-einfach und jede Abel'sche Lie-Algebra ist weder einfach noch halb-einfach.

Ähnlich wie für eine Gruppe mit Normalteilern kann man für eine Lie-Algebra mit Idealen für jedes Ideal  $\mathcal{I}$  in  $\mathfrak{g}$  den *Quotientenraum*  $\mathfrak{g}/\mathcal{I}$  definieren. Seine Elemente sind die Äquivalenzklassen zur Relation

$$X \sim Y \iff X - Y \in \mathcal{I} \subset \mathfrak{g}. \quad (12.14)$$

Ein Repräsentant  $X$  definiert die Klasse  $X + \mathcal{I}$ . Die Klassen definieren einen linearen Raum mit der Klasse  $\mathcal{I}$  als Nullvektor. Der Kommutator ist unabhängig vom Repräsentanten, da  $\mathcal{I}$  ein Ideal ist,

$$X' - X \in \mathcal{I} \implies [X' - X, Y] \in \mathcal{I} \sim 0.$$

**Lemma 16** Für jedes Ideal  $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{g}$  definiert der Quotientenraum  $\mathfrak{g}/\mathcal{I}$  eine Lie-Algebra.

### 12.2.3 Zentrum, Zentralisatoren und Normalisatoren

Das *Zentrum*  $\mathfrak{z}$  von  $\mathfrak{g}$  enthält diejenigen Elemente, die mit *allen* Elementen der Lie-Algebra vertauschen,

$$\mathfrak{z} := \{Z \in \mathfrak{g} \mid [Z, \mathfrak{g}] = 0\}. \quad (12.15)$$

Offenbar ist für eine Abel'sche Lie-Algebra  $\mathfrak{z} = \mathfrak{g}$ .

---

?

---

Überzeugen Sie sich davon, dass das Zentrum  $\mathfrak{z}$  ein Ideal von  $\mathfrak{g}$  ist.

---

Schlussendlich betrachten wir zwei weitere Klassen von Unteralgebren.

- Der *Zentralisator einer Teilmenge*  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$  enthält alle Elemente in  $\mathfrak{g}$ , deren Lie-Produkt mit allen Elementen aus  $\mathfrak{m}$  verschwindet,

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{m}] = 0\}. \quad (12.16)$$

Diese Menge bildet einen linearen Raum und mit der Jacobi-Identität beweist man, dass sie bezüglich dem Lie-Produkt abgeschlossen ist. Somit ist  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$  eine Lie-Unteralgebra. Insbesondere ist der Zentralisator der ganzen Lie-Algebra gleich dem Zentrum der Lie-Algebra,  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}$ .

- Der *Normalisator einer Lie-Unteralgebra*  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  ist definiert durch

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}. \quad (12.17)$$

Er ist ein linearer Teilraum und für zwei Vektoren  $X_1, X_2 \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  ist wegen

$$[[X_1, X_2], \mathfrak{h}] = [X_1, [X_2, \mathfrak{h}]] - [X_2, [X_1, \mathfrak{h}]] \subseteq \mathfrak{h}$$

auch deren Lie-Produkt im Normalisator.  $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$  ist die größte Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ , die die Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  als Ideal enthält. Ist  $\mathfrak{h}$  ein Ideal, dann ist sein Normalisator gleich  $\mathfrak{g}$ .

## 12.3 Homomorphismen und Adjungierte Darstellung

Die gerade eingeführten Lie-Unteralgebren einer Lie-Algebra stehen in enger Verbindung zu Homomorphismen der Lie-Algebra.

**Definition 47** *Ein Homomorphismus  $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  von Lie-Algebren ist eine strukturerhaltende lineare Abbildung, d.h. es gilt*

$$\phi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\phi(X) + \beta\phi(Y) \quad \text{und} \quad [\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y]). \quad (12.18)$$

*Links steht das Lie-Produkt in  $\mathfrak{g}_2$  und rechts dasjenige in  $\mathfrak{g}_1$ .*

Die Zusammensetzung zweier Lie-Algebra-Homomorphismen ist wieder ein Lie-Algebra Homomorphismus. Es gilt das einfach zu beweisende

**Lemma 17** *Es sei  $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  ein Lie-Algebra-Homomorphismus. Dann ist der Kern von  $\phi$  eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}_1$  und das Bild von  $\phi$  eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}_2$ .*

Der Kern einer linearen Abbildung ist ein linearer Unterraum von  $\mathfrak{g}_1$ . Er bildet auch eine Unteralgebra, da wegen der Homomorphiseigenschaft mit  $X, Y$  auch  $[X, Y]$  im Kern von  $\phi$  liegt.

---

?

---

Überzeugen Sie sich davon, dass auch das Bild von  $\phi$  eine Lie-Unteralgebra in  $\mathfrak{g}_2$  ist.

Bekanntlich definiert der Kern jedes Lie-Gruppen-Homomorphismus einen Normalteiler. Ähnliches gilt auch für den Kern eines Lie-Algebra-Homomorphismus:

**Lemma 18** *Der Kern jedes Lie-Algebra-Homomorphismus  $\phi$  ist ein Ideal von  $\mathfrak{g}_1$*

Die Aussage folgt unmittelbar aus

$$\phi([\text{Kern}(\phi), \mathfrak{g}_1]) = [\phi(\text{Kern}(\phi)), \phi(\mathfrak{g}_1)] = 0 \implies [\text{Kern}(\phi), \mathfrak{g}_1] \subset \text{Kern}(\phi). \quad (12.19)$$

Es sei nun  $\mathcal{V}$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und  $L(\mathcal{V})$  die Menge der linearen Abbildungen  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ . Diese Menge definiert eine Lie-Algebra mit dem Kommutator zweier linearer Abbildungen als Lie-Produkt. Eine Lie-Algebra-Darstellung auf einem Vektorraum  $\mathcal{V}$  ist wie folgt definiert:

**Definition 48 (Darstellung einer Lie-Algebra)** *Eine Darstellung einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist ein Lie-Algebra-Homomorphismus*

$$\phi : \mathfrak{g} \mapsto L(\mathcal{V}), \quad X \mapsto \phi(X).$$

Eine Darstellung ist somit ein spezieller Lie-Algebra-Homomorphismus.

### 12.3.1 Adjungierte Darstellung

Eine immer vorhandene Darstellung ist die *adjungierte Darstellung*. Sie ordnet einem Element in  $\mathfrak{g}$  eine lineare Abbildung  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  zu:

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \mapsto L(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto \text{ad}_X, \quad \text{ad}_X Y = [X, Y]. \quad (12.20)$$

Mit der Jacobi-Identität zeigt man  $[\text{ad}_X, \text{ad}_Y](Z) = \text{ad}_{[X, Y]}(Z)$ , so dass gilt:

Die Abbildung  $X \rightarrow \text{ad}_X$  ist ein Lie-Algebra Homomorphismus  $\mathfrak{g} \rightarrow L(\mathfrak{g})$ .

#### Adjungierte Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$

Diese Lie-Algebra ist der lineare Raum der zweidimensionalen anti-hermiteschen spurlosen Matrizen. Als Basis wählen wir

$$\tau_1 = \frac{i}{2}\sigma_1, \quad \tau_2 = \frac{i}{2}\sigma_2, \quad \tau_3 = \frac{i}{2}\sigma_3. \quad (12.21)$$

Aufgrund der Relationen  $[\tau_i, \tau_j] = -\epsilon_{ijk}\tau_k$  sind die den Basisvektoren  $\tau_i$  zugeordneten Matrizen

$$\text{ad}_{\tau_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_{\tau_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_{\tau_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.22)$$

Sie haben dieselben Vertauschungsrelationen wie die Basisvektoren,  $[\text{ad}_{\tau_i}, \text{ad}_{\tau_j}] = -\epsilon_{ijk}\text{ad}_{\tau_k}$ .

Der Kern der adjungierten Darstellung einer Lie-Algebra ist gleich dem Zentrum der Lie-Algebra,

$$\text{Kern}(\text{ad}) = \{Z \in \mathfrak{g} \mid [Z, \mathfrak{g}] = 0\} = \mathfrak{z}. \quad (12.23)$$

Daraus folgt dann sofort die wichtige Eigenschaft

**Lemma 19** *Das Bild  $\text{ad}(\mathfrak{g})$  ist isomorph zu  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ . Für  $\mathfrak{z} = 0$  ist  $\text{ad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$ .*

## 12.4 Invariante Killing-Form

In diesem Abschnitt führen wir die bilineare und ad-invariante Killing-Form ein. Für halbeinfache Lie-Algebren ist sie nicht entartet. Die Killing-Form wird mithilfe der adjungierten Darstellung definiert.

**Definition 49 (Killing-Form)** Die Killing-Form einer Lie-Algebra ist gegeben durch

$$K(X, Y) = \text{Sp}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) . \quad (12.24)$$

**Lemma 20** Die Killing-Form ist symmetrisch,  $K(X, Y) = K(Y, X)$ , bilinear und ad-invariant,

$$K(\text{ad}_Z X, Y) + K(X, \text{ad}_Z Y) = 0 . \quad (12.25)$$

Beweis: Die erste Eigenschaft folgt aus der Invarianz der Spur unter zyklischer Vertauschung der Argumente und die zweite aus der Linearität von  $X \rightarrow \text{ad}_X$ . Die ad-Invarianz beweist man wie folgt:

$$\begin{aligned} K(\text{ad}_Z X, Y) &= K([Z, X], Y) = \text{Sp}(\text{ad}_{[Z, X]} \text{ad}_Y) = \text{Sp}([\text{ad}_Z, \text{ad}_X] \text{ad}_Y) \\ &= \text{Sp}(\text{ad}_X [\text{ad}_Y, \text{ad}_Z]) = \text{Sp}(\text{ad}_X \text{ad}_{[Y, Z]}) = -K(X, \text{ad}_Z Y) . \end{aligned} \quad (12.26)$$

**Lemma 21** Eine wichtige Folgerung aus der Invarianz (12.25) ist, dass das orthogonale Komplement eines Ideals  $\mathcal{I} \subset \mathfrak{g}$ , gegeben durch  $\mathcal{I}^\perp = \{Y \in \mathfrak{g} \mid K(Y, \mathcal{I}) = 0\}$ , ebenfalls ein Ideal in  $\mathfrak{g}$  ist.

Beweis: Es sei  $X \in \mathfrak{g}$  beliebig und  $Y \in \mathcal{I}^\perp$ . Wir wollen beweisen, dass dann  $[X, Y]$  in  $\mathcal{I}^\perp$  ist. Tatsächlich gilt

$$K([X, Y], \mathcal{I}) = K(\text{ad}_X Y, \mathcal{I}) = -K(Y, \text{ad}_X \mathcal{I}) = 0 , \quad (12.27)$$

weil  $\text{ad}_X \mathcal{I} = [X, \mathcal{I}] \subseteq \mathcal{I}$  ist. Damit ist mit  $\mathcal{I}$  auch  $\mathcal{I}^\perp$  Ideal. Insbesondere ist  $\mathfrak{g}^\perp \subset \mathfrak{g}$  ein Ideal.

**Lemma 22** Ist  $\mathcal{I}$  ein Ideal in  $\mathfrak{g}$  und sind  $X, Y \in \mathcal{I}$ , dann ist

$$K_{\mathfrak{g}}(X, Y) = K_{\mathcal{I}}(X, Y), \quad X, Y \in \mathcal{I}, \quad (12.28)$$

wobei  $K_{\mathfrak{g}}$  und  $K_{\mathcal{I}}$  die Killing-Formen der Lie-Algebren  $\mathfrak{g}$  und  $\mathcal{I} \subset \mathfrak{g}$  sind.

Beweis: Wir wählen eine angepasste Basis, beginnend mit den Elementen von  $\mathcal{I}$  und ergänzt zu einer Basis von  $\mathfrak{g}$ . Für  $X, Y \in \mathcal{I}$  hat die lineare Abbildung  $\text{ad}_X \text{ad}_Y$  die Blockform

$$\text{ad}_X \text{ad}_Y = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad X, Y \in \mathcal{I},$$



und deshalb ist  $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{I}}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y)$ .

Nun wollen wir die Frage beantworten, für welche  $\mathfrak{g}$  die Killing-Form ausgeartet ist. Bekanntlich besitzt eine nicht-halbeinfache Lie-Algebra ein Abel'sches Ideal  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{g}$ . Für jedes  $X \in \mathfrak{g}$  ist  $\mathrm{ad}_X(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ , so dass für jedes  $A \in \mathcal{A}$  gilt  $\mathrm{ad}_A \mathrm{ad}_X(\mathcal{A}) = 0$ . Weiterhin gilt natürlich  $\mathrm{ad}_A \mathrm{ad}_X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{A}$ . In einer angepassten Basis, beginnend mit den Elementen von  $\mathcal{A}$  ergänzt zu einer Basis von  $\mathfrak{g}$  ist  $\mathrm{ad}_A \mathrm{ad}_X$  eine obere Dreiecksmatrix,

$$\mathrm{ad}_A \mathrm{ad}_X = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathcal{A}, X \in \mathfrak{g}.$$

Wir folgern  $K(A, \mathfrak{g}) = 0$  wenn  $\mathfrak{g}$  ein nicht-triviales Abel'sches Ideal besitzt. Somit ist die Killing-Form einer nicht halbeinfachen Lie-Algebra ausgeartet.

### Lie-Algebra der Streckungen und Translationen in $\mathbb{R}^*$ in Abschnitt 9.2

Als Basis dieser nicht-kompakten zwei-dimensionalen Lie-Algebra wählen wir

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{ad}_{\tau_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{\tau_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Killing-Form ist ausgeartet, da wegen

$$K(\tau_1, \tau_1) = 1, \quad K(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad K(\tau_2, \tau_2) = 0$$

für alle  $X$  in der Lie-Algebra  $K(X, \tau_2)$  verschwindet.

Umgekehrt, sei nun  $\mathfrak{g}$  halbeinfach. Wir möchten beweisen, dass dann die Killing-Form nicht ausgeartet ist. Dazu betrachten wir das Ideal  $\mathfrak{g}^\perp \subseteq \mathfrak{g}$ . Wegen (12.28) gilt dann für beliebige  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}^\perp$

$$K_{\mathfrak{g}^\perp}(X, [Y, Z]) = K_{\mathfrak{g}}(X, [Y, Z]) = 0, \quad (12.29)$$

da  $[Y, Z]$  in  $\mathfrak{g}^\perp$  liegt. Nach einem Kriterium von Cartan ist damit  $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^\perp} \subset L(\mathfrak{g})$  auflösbar. Der Kern der Abbildung  $\mathfrak{g}^\perp \rightarrow \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^\perp}$  ist gleich dem Zentrum von  $\mathfrak{g}^\perp$ , und deshalb ist mit  $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^\perp}$  auch das Ideal  $\mathfrak{g}^\perp$  auflösbar. Eine halbeinfache Lie-Algebra hat aber keine nicht-trivialen auflösbaren Ideale. Also muss für jede halbeinfache Lie-Algebra  $\mathfrak{g}^\perp = \{0\}$  sein. Dies beweist die Äquivalenz von 1. und 2. in folgendem

**Satz 56** *Es sei  $\mathfrak{g}$  eine endlich-dimensionale Lie-Algebra. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

1.  $\mathfrak{g}$  ist halbeinfach,
2. Die Killing-Form von  $\mathfrak{g}$  ist nicht entartet,
3.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$  mit einfachen Idealen  $\mathfrak{g}_k$ . Diese Zerlegung ist eindeutig und die einzigen Ideale von  $\mathfrak{g}$  sind direkte Summen von  $\mathfrak{g}_k$ .

Um die dritte Aussage zu beweisen betrachtet man ein Ideal  $\mathcal{I} \subset \mathfrak{g}$  mit der kleinsten positiven Dimension. Ist  $\mathcal{I} = \mathfrak{g}$  dann ist  $\mathfrak{g}$  einfach und es gibt nichts zu beweisen. Andernfalls bemerkt man, dass die Einschränkung der Killing-Form auf das Ideal  $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^\perp$  verschwindet, so dass  $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^\perp$  auflösbar ist. Für ein halbeinfaches  $\mathfrak{g}$  muss dann  $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}^\perp = \{0\}$  sein. Da  $\dim \mathcal{I} + \dim \mathcal{I}^\perp = \dim \mathfrak{g}$  ist, folgt nun  $\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^\perp = \mathfrak{g}$ . Induktiv beweist man nun die dritte Aussage im Satz.

### 12.4.1 Matricelemente der Killing-Form

Die Killing-Form  $K$  auf einer Basis von  $\mathfrak{g}$  definiert die metrischen Koeffizienten  $g_{ij} = -K(X_i, X_j)$ . Wegen

$$\operatorname{ad}_{X_j} X_p = f_{jp}^q X_q \quad \text{und} \quad \operatorname{ad}_{X_i} \operatorname{ad}_{X_j} X_p = f_{iq}^r f_{jp}^q X_r$$

entspricht der linearen Abbildung  $\operatorname{ad}_{X_i} \operatorname{ad}_{X_j}$  die Matrix  $\sum_q f_{iq}^r f_{jp}^q$ , so dass

$$g_{ij} = -\operatorname{Sp}(\operatorname{ad}_{X_i} \operatorname{ad}_{X_j}) = -\sum_{p,q} f_{iq}^p f_{jp}^q. \quad (12.30)$$

Wir können die Matrix  $(g_{ij})$  benutzen um Indizes zu senken. Die Strukturkonstanten mit unteren Indizes

$$f_{ijk} \equiv f_{ij}^p g_{pk} \quad (12.31)$$

sind vollständig antisymmetrisch in  $i, j$  und  $k$ . Beim Beweis benutzt man in

$$K([X_i, X_j], X_k) = f_{ij}^p K(X_p, X_k) = -f_{ijk}$$

die Invarianz der Killing-Form sowie  $\operatorname{ad}_X Y = -\operatorname{ad}_Y X$  und erhält

$$K(\operatorname{ad}_X Y, Z) = K(\operatorname{ad}_Y Z, X) = K(\operatorname{ad}_Z X, Y).$$

Somit definiert die Killing-Form für halbeinfache Lie-Algebren ein invariantes inneres Produkt.

#### Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

Diese Lie-Algebra enthält die zweidimensionalen reellen und spurlosen Matrizen. Eine Basis ist

$$X_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad X_2 = \frac{1}{2i}\sigma_2, \quad X_3 = \frac{1}{2}\sigma_3. \quad (12.32)$$

Die Kommutatoren  $\text{ad}_{X_i} X_j = [X_i, X_j]$  der Basiselemente sind

$$\text{ad}_{X_1} X_2 = X_3, \quad \text{ad}_{X_3} X_1 = -X_2, \quad \text{ad}_{X_2} X_3 = X_1.$$

Den Basiselementen werden folgende Matrizen zugeordnet,

$$\text{ad}_{X_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_{X_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_{X_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die indefinite Metrik  $(g_{ij}) = \text{diag}(-2, 2, -2)$  ist nicht entartet und damit ist  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  einfach.

Wir werden später zeigen, dass die Killing-Form einer zu einer halbeinfachen *kompakten* Lie-Gruppe gehörenden Lie-Algebra negativ definit ist. Dann ist  $(g_{ij})$  eine positiv definite und ad-invariante Metrik.

Lie-Algebren mit negativ definiter Killing-Form nennt man deshalb kompakte Lie-Algebren.

Heisenberg-Algebra, auflösbare Ideale und halbeinfache Lie-Algebren, siehe Folien

## 12.5 Aufgaben zu Kapitel 12

### Aufgabe 12.1: Formel von Baker, Campbell und Hausdorff

Nehmen Sie an, zwei Matrizen (Operatoren)  $A, B$  erfüllen die Relation

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann folgende Identität gilt:

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right).$$

Hinweis: Vielleicht finden Sie eine Differentialgleichung für  $D(t) = e^{tA} e^{tB} e^{-t(A+B)}$ .

### Aufgabe 12.2: Endliche und infinitesimale Drehungen

Hermiteische Operatoren  $J_x, J_y$  und  $J_z$ , welche die Vertauschungsregeln  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$  erfüllen, heissen Drehimpuls-Operatoren (wir setzen hier  $\hbar = 1$ ). Die entsprechenden unitären Operatoren

$$R(\phi) = e^{i\phi \cdot \mathbf{J}}, \quad \phi \in \mathbb{R}^3,$$

beschreiben Drehungen mit dem Winkel  $\phi = |\phi|$  um die Achse  $\hat{\phi}$ .

- In der Vorlesung wurden die Matrizen  $R$  für Drehungen um die Achsen  $e_x, e_y$  und  $e_z$  eingeführt. Für  $\phi = \phi e_x$  gilt zum Beispiel  $\phi \cdot \mathbf{J} = \phi J_x$ . Finden Sie die Matrizen  $J_x, J_y$  and  $J_z$  (zum Beispiel, mit Ableitung nach  $\phi$ ). Prüfen Sie die Identität  $\mathbf{J}^2 = j(j+1)$ .
- Die Drehimpulsoperatoren für einen Spinor  $u \in \mathbb{C}^2$  sind die Pauli-Matrizen

$$J_i^{(1/2)} = \frac{1}{2} \sigma_i .so$$

Die entsprechenden endlichen Drehungen werden mit  $R^{(1/2)}(\phi)$  bezeichnet. Zeigen Sie, dass  $(\mathbf{J}^{(1/2)})^2 = j(j+1)$  mit  $j = 1/2$  gilt. Finden Sie die explizite Form der Drehmatrizen für Drehungen um die Koordinatenachsen.

### Aufgabe 12.3: Beispiele von Lie-Algebren

Wir betrachten hier Substrukturen von  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$

- Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  der spurlosen Matrizen ein Ideal in  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  bilden.
- Zeigen Sie, dass die komplexen Matrizen mit  $M^T = -M$  oder mit  $M^\dagger = -M$  jeweils eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  bilden.

### Aufgabe 12.4: Nochmals $\mathfrak{u}(2)$ und $\mathfrak{su}(2)$

Bestimmen Sie das Zentrum der Lie-Algebra  $\mathfrak{u}(2)$  und das Bild von  $\mathfrak{u}(2)$  unter der adjungierten Darstellung. Prüfen Sie nach, dass die Lie-Algebren  $\mathfrak{u}(2)/\mathfrak{z}$  und  $\text{ad}(\mathfrak{u}(2))$  isomorph sind.

### Aufgabe 12.5: Ideale

Es seien  $\mathcal{I}_1$  and  $\mathcal{I}_2$  zwei Ideale (invariante Lie-Unteralgebren) in  $\mathfrak{g}$ . Zeigen Sie, dass die Schnittmenge  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ , ihre Summe  $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$  und ihr Produkt  $[\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2]$  ebenfalls Ideale sind.

Beweisen Sie, dass das Zentrum von  $\mathfrak{g}$  auch in Ideal in  $\mathfrak{g}$  ist.

Hinweis: Summe und Produkt von zwei Lie-Unteralgebren wurden auf Seite 200 eingeführt.

### Aufgabe 12.6: Normale Unteralegebren

Sei  $\mathcal{G}$  eine Lie-Algebra und  $\mathcal{A}$  eine Lie-Unteralgebra von  $\mathcal{G}$ . Die Kommutante (der Zentralisator) von  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{G}$  ist definiert durch

$$N_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{G} : [x, a] \in \mathcal{A} \text{ für alle } a \in \mathcal{A}\}.$$

- Zeigen Sie, dass  $N_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$  eine Lie-Unteralgebra von  $\mathcal{G}$  ist, die  $\mathcal{A}$  enthält.
- Sei  $\mathcal{G} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  und sei  $\mathcal{A}$  die Lie-Unteralgebra aller Diagonalmatrizen in  $\mathcal{G}$ . Bestimme die Kommutante  $N_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$  von  $\mathcal{A}$ .

## 13 Lie-Algebren von Lie-Gruppen

*Ich kann es nun einmal nicht lassen, in diesem Drama von Mathematik und Physik – die sich im Dunkeln befruchten, aber von Angesicht zu Angesicht so gern einander verkennen und verleugnen – die Rolle des (wie ich genügsam erfuhr, oft unerwünschten) Boten zu spielen.*

HERMANN WEYL

Nach einem Satz des russischen Mathematikers Ado ist jede endlich-dimensionale komplexe Lie-Algebra isomorph zu einer Unter algebra der Lie-Algebra  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  der komplexen  $n \times n$  Matrizen für genügend großes  $n$ . Das heißt, man kann jede endlich-dimensionale komplexe Lie-Algebra als eine Lie-Algebra von Matrizen darstellen. Wir dürfen und werden deshalb in diesem Kapitel annehmen, die Gruppenelemente seien Matrizen. Am Ende des Kapitel kommen wir auf den allgemeineren Fall zurück.

### 13.1 Infinitesimale Erzeugende einer Lie-Gruppe

Wir betrachten eine  $n$ -dimensionale Matrix-Lie-Gruppe, d.h. eine Lie-Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{K})$ , und identifizieren den Tangentialraum am Einselement  $e$  als Lie-Algebra der Gruppe. Es seien

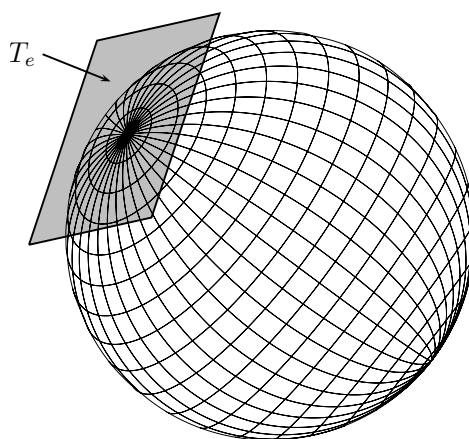


Abbildung 13.1: Tangentialraum an der Identität

also  $U$  eine Koordinatenumgebung von  $e$  und  $x = (x_1, \dots, x_n)$  lokale Koordinaten einer Karte

von  $U$ . Das Einselement sei durch eine Koordinatenwahl mit

$$g(x = 0) = e \quad (13.1)$$

ausgezeichnet. Man kann nun im Koordinatenraum um  $x = 0$  entwickeln, also eine Taylor-Reihe für Gruppenelemente in einer Umgebung des Einselements ansetzen,

$$g(x) = g(0) + \sum_i x_i \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=0} + O(x^2), \quad g(0) = e. \quad (13.2)$$

Die ersten Ableitungen beschreiben die Struktur der Gruppe nahe der Eins. Man definiert mit ihrer Hilfe eine Basis von *Generatoren* oder *infinitesimalen Erzeugenden* der Lie-Gruppe,

$$X_i \equiv \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=0} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.3)$$

Zum Beispiel ist  $X_1$  tangential zur Koordinatenkurve  $g(x_1, 0, \dots, 0)$  durch  $e$ . Ist nun  $x(t)$  eine beliebige differenzierbare Kurve mit  $x(0) = 0$ , dann beschreibt  $g(x(t)) \equiv g(t)$  eine Kurve auf der Gruppe mit  $g(0) = e$  und

$$X = \frac{dg(t)}{dt} \Big|_0 = \sum_i \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=0} \dot{x}_i(0) = \sum_i X_i \dot{x}_i(0) \quad (13.4)$$

ist eine Linearkombination der  $X_i$ . Damit ist jede reelle Linearkombination der Erzeugenden  $\{X_i\}$  tangential zu einer Kurve durch  $e$  und damit ebenfalls infinitesimale Erzeugende. Ist  $g(t)$  eine derartige Kurve mit Tangentialvektor  $X$ , dann gilt wegen  $g(t)g^{-1}(t) = e$

$$0 = \frac{d}{dt} (g(t)g^{-1}(t)) \Big|_0 = X + \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \Big|_0 \implies \frac{dg^{-1}(t)}{dt} \Big|_0 = -X. \quad (13.5)$$

Die Kurven  $t \mapsto g(t)$  und  $t \mapsto g^{-1}(t)$  haben deshalb umgekehrte Tangentialvektoren bei  $e$ .

Sei nun  $g(t)$  eine Kurve, die nicht durch das neutrale Element gehe. Dann kann man stattdessen die Kurve  $\tilde{g}(s) = g^{-1}(t)g(t+s)$  betrachten, die für  $s = 0$  durch  $e$  geht. Deren Ableitung nach  $s$  an der Stelle  $s = 0$  liegt im Tangentialraum  $T_e(G)$  und wir folgern:

Für jede (differenzierbare) Kurve  $g(t)$  in der Gruppe  $G$  liegt

$$X = g^{-1}(t) \frac{dg(t)}{dt} \quad (13.6)$$

im Tangentialraum  $T_e(G)$  am Einselement.

### 13.1.1 Die Erzeugenden bilden eine Lie-Algebra

Wir zeigen nun, dass die infinitesimalen Erzeugenden eine Lie-Algebra bilden. Dazu betrachten wir zwei Kurven  $g(t)$  und  $\tilde{g}(t)$ , die für  $t = 0$  durch die Einheit gehen und dort die Tangentialvektoren  $X$  und  $Y$  besitzen. Dann ist auch  $g(\alpha t)\tilde{g}(\beta t)$  eine derartige Kurve für beliebige reelle

Konstanten  $\alpha, \beta$ . Diese Kurve hat den Tangentialvektor

$$\frac{d}{dt}(g(\alpha t)\tilde{g}(\beta t))\Big|_{t=0} = \alpha X + \beta Y. \quad (13.7)$$

Dies bedeutet, dass die infinitesimalen Erzeugenden einen *linearen Raum* bilden – den Tangentialraum an der Gruppeneins  $T_e(G)$ . Die Anzahl unabhängiger Generatoren ist gleich der Zahl der unabhängigen reellen Parameter der Lie-Gruppe, also gleich ihrer Dimension. Für Matrix-Lie-Gruppen sind die infinitesimalen Erzeugenden ebenfalls Matrizen.

### Infinitesimale Erzeugende von Drehungen im Raum

Die eigentlichen Drehungen um die Achsen definiert durch die Basisvektoren sind

$$\begin{aligned} R(\mathbf{e}_1, \varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ R(\mathbf{e}_2, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ R(\mathbf{e}_3, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Für  $\varphi = 0$  gehen diese Kurven alle durch die Einheitsmatrix. Deshalb sind

$$\Omega_i = \frac{d}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} R(\mathbf{e}_i, \varphi) \quad (13.9)$$

drei infinitesimale Erzeugende von  $SO(3)$ . Man findet die schiefssymmetrischen Matrizen

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.10)$$

Man prüft leicht nach, dass diese die Basis einer Liealgebra bilden. Es ist die Liealgebra  $\mathfrak{so}(3)$  der Liegruppe  $SO(3)$ , bestehend aus allen schiefssymmetrischen reellen  $3 \times 3$  Matrizen.

Wegen der Identität

$$\frac{d}{dt}(gg(t)g^{-1})\Big|_{t=0} = gXg^{-1} \quad (g \in G \text{ beliebig, aber fest}) \quad (13.11)$$

liegen für jedes  $g$  neben  $X$  auch  $gXg^{-1}$  im Tangentialraum  $T_e(G)$ . Damit liegt für jeden Tangentialvektor  $Y$  die Kurve  $g(t)Yg^{-1}(t)$  im *linearen Tangentialraum*. Wegen der Linearität liegt dann auch

$$\frac{d}{dt}(g(t)Yg^{-1}(t)) \Big|_{t=0} = XY - YX \equiv [X, Y], \quad X = \frac{d}{dt}g(t) \Big|_0, \quad (13.12)$$

in  $T_e(G)$ . Hier haben wir die letzte Beziehung für die Ableitung von  $g^{-1}(t)$  in (13.5) benutzt. Damit wäre bewiesen, dass für zwei infinitesimale Erzeugende  $X, Y$  auch deren Kommutator  $[X, Y]$  eine infinitesimale Erzeugende ist. Das Lie-Produkt von  $X$  und  $Y$  ist gleich dem Kommutator der beiden Matrizen. Der Kommutator ist bilinear, antisymmetrisch und erfüllt bekanntermaßen (siehe (12.8)) die *Jacobi-Identität*

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0. \quad (13.13)$$

Damit definiert die Menge der infinitesimalen Erzeugenden  $T_e(G)$  einer linearen Lie-Gruppe  $G$  eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Diese Aussage gilt auch für allgemeinere Lie-Gruppen, deren Elemente keine Matrizen mehr sind. Die entsprechenden Argumente setzen aber Kenntnisse über die Eigenschaften von (linksinvarianten) Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten voraus, die ich hier nicht voraussetzen möchte. Mehr dazu finden Sie aber im Anhang zu diesem Kapitel.

## 13.2 Adjungierte Darstellung der Gruppe und Zentrum

Wir werden nun die Abbildung in (13.11), die jedem Gruppenelement  $g$  eine lineare Abbildung auf  $\mathfrak{g}$  zuordnet, etwas näher untersuchen. Sie wird im Folgenden eine wichtige Rolle spielen.

### Adjungierte Darstellung einer Lie-Gruppe

Die lineare Abbildung

$$\text{Ad} : G \mapsto L(\mathfrak{g}) \quad \text{mit} \quad \text{Ad}(g)X = gXg^{-1} \quad (13.14)$$

definiert die adjungierte Darstellung von  $G$  auf dem Tangentialraum  $T_e(G) \equiv \mathfrak{g}$ .

?

Man unterscheide zwischen der adjungierten Wirkung  $\text{Ad}_g$  auf der Wirkungsmenge  $G$ , der adjungierten Darstellung einer Lie-Algebra auf  $\mathfrak{g}$  (siehe (12.20)) und der soeben eingeführten adjungierten Darstellung der Gruppe auf  $\mathfrak{g}$ . Dass die Darstellungen  $\text{Ad}$  und  $\text{ad}$  denselben Namen tragen ist natürlich keine Zufall (siehe weiter unten).

Die Darstellungseigenschaften von  $\text{Ad}$  folgen aus  $\text{Ad}(e) = \mathbb{1}$  und aus

$$\text{Ad}(g\tilde{g})X = g\tilde{g}X\tilde{g}^{-1}g^{-1} = g(\text{Ad}(\tilde{g})X)g^{-1} = \text{Ad}(g)\text{Ad}(\tilde{g})X. \quad (13.15)$$



Die *adjungierte Darstellung* existiert für jede Lie-Gruppe. Ihre Dimension ist gleich der Dimension von  $\mathfrak{g}$ .

Im Allgemeinen ist der Homomorphismus  $\text{Ad} : G \rightarrow L(\mathfrak{g})$  nicht treu. Er ist nur dann treu, wenn  $\text{Kern}(\text{Ad}) = \{e\}$  ist oder wenn es kein Gruppenelement  $g \neq e$  gibt, mit

$$\text{Ad}(g)X \equiv gXg^{-1} = X \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{g}. \tag{13.16}$$

Wir erinnern daran, dass das *Zentrum*  $\mathcal{Z}$  einer Gruppe diejenigen Elemente enthält, die mit allen anderen Elementen kommutieren,

$$\mathcal{Z} = \{z \mid zg = gz \quad \text{für alle } g \in G\}. \tag{13.17}$$

Offenbar ist dann  $zg(t)z^{-1} = g(t)$  für jede Kurve in  $G$ . Die Ableitung nach dem Kurvenparameter an der Stelle  $t = 0$  führt dann auf

$$zXz^{-1} = X. \tag{13.18}$$

Tatsächlich sind die Elemente in  $\mathcal{Z}$  die einzigen Elemente mit dieser Eigenschaft. Deshalb ist  $\text{Ad}(g) = \mathbb{1}$  genau dann, wenn  $g$  im Zentrum der Gruppe liegt.

$$\text{Kern}(\text{Ad}) = \mathcal{Z} \quad \text{bzw.} \quad \text{Ad}(g_1) = \text{Ad}(g_2) \iff g_2 = g_1z, \quad z \in \mathcal{Z}. \tag{13.19}$$

**Kern der adjungierten Abbildung**

Der Kern von  $\text{Ad}$  ist gleich dem Zentrum der Gruppe,  $\text{Kern}(\text{Ad}) = \mathcal{Z} \subseteq G$ . Entsprechend ist nach dem Isomorphiesatz  $\text{Ad}(G) = G/\mathcal{Z}$ .

Das Zentrum von  $\text{SU}(2)$  besteht aus  $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$  und deshalb bildet die drei-dimensionale adjungierte Darstellung die beiden Elemente  $\pm U$  in dieselbe Drehung ab.

?

Überlegen Sie sich, dass  $\text{Ad}(\text{SU}(2)) = \text{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 = \text{SO}(3)$  ist.

### 13.3 Darstellungen von $G$ induzieren Darstellungen von $\mathfrak{g}$

Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass jede  $n$ -dimensionale Darstellung  $D$  einer Lie-Gruppe  $G$  eine  $n$ -dimensionale Darstellung  $D_*$  ihrer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  induziert. Dazu betrachten wir wieder eine Kurve  $g(t)$  in der Gruppe mit  $g(0) = e$  und Tangentialvektor  $\dot{g}(0) \equiv X \in T_e(G)$ . Weiterhin sei  $D : G \rightarrow \text{GL}(\mathcal{V})$  eine Darstellung der Gruppe. Die Bildkurve  $D(g(t))$  geht dann wegen der Darstellungseigenschaft für  $t = 0$  durch die Einsabbildung. Der Vektor tangential zur Bildkurve

bei  $t = 0$  ist dann definitionsgemäß das Bild von  $X$  unter der induzierten Darstellung  $D_*$  der Liealgebra,

$$D_* : X \mapsto D_*(X) = \frac{d}{dt} D(g(t)) \Big|_{t=0}. \quad (13.20)$$

Aus der Darstellungseigenschaft von  $D : G \rightarrow \text{GL}(\mathcal{V})$  folgt nun, dass  $D_*$  eine Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra ist. Die Linearität ist mit (13.7) leicht zu beweisen:

$$\begin{aligned} D_*(\alpha X + \beta Y) &= \frac{d}{dt} D(g(\alpha t) \tilde{g}(\beta t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} D(g(\alpha t)) \Big|_{t=0} D(e) + D(e) \frac{d}{dt} D(\tilde{g}(\beta t)) \Big|_{t=0} \\ &= \alpha D_*(X) + \beta D_*(Y). \end{aligned} \quad (13.21)$$

Um zu beweisen, dass  $D_*$  eine Darstellung der Liealgebra ist, bemerken wir zuerst, dass

$$\begin{aligned} D_*(gYg^{-1}) &= \frac{d}{dt} D(g\tilde{g}(t)g^{-1}) \Big|_{t=0} \\ &= D(g) \frac{d}{dt} D(\tilde{g}(t)) \Big|_{t=0} D(g^{-1}) = D(g) D_*(Y) D^{-1}(g). \end{aligned} \quad (13.22)$$

Nun sei  $g$  von einem Parameter  $t$  abhängig mit  $g(0) = e$  und Tangentialvektor  $\dot{g}(0) = X$ . Nun leiten wir die linke und rechte Seite von (13.22) nach  $t$  an der Stelle  $t = 0$  ab. Wegen der Linearität von  $D_*$  können wir beim Differenzieren der linken Seite die Ableitung an  $D_*$  vorbeiziehen und erhalten den Ausdruck  $D_*([X, Y])$ . Die Ableitung der rechten Seite ergibt dagegen den Kommutator von  $D_*(X)$  und  $D_*(Y)$ . Damit haben wir bewiesen, dass  $D_*$  ein Lie-Algebra Homomorphismus ist:

$$D_*([X, Y]) = [D_*(X), D_*(Y)]. \quad (13.23)$$

Wir fassen die gefundenen wichtigen Resultate zusammen:

#### Induzierte Darstellung

Ist  $D : G \mapsto \text{GL}(\mathcal{V})$  eine Darstellung einer Liegruppe  $G$ , dann ist  $D_* : \mathfrak{g} \mapsto L(\mathcal{V})$  in (13.20) eine Darstellung ihrer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ :

$$D_* \text{ ist linear,} \quad D_*([X, Y]) = [D_*(X), D_*(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (13.24)$$

Die Darstellungseigenschaft der Gruppe bedingt also die Darstellungseigenschaft ihrer Lie-Algebra. Als Zwischenresultat haben wir in (13.22) eine nützliche Beziehung abgeleitet, die wir an dieser Stelle nochmals festhalten wollen:

$$D_*(gXg^{-1}) = D(g) D_*(X) D^{-1}(g). \quad (13.25)$$

Es sei nun  $\{X_i\}$  eine Basis von  $\mathfrak{g}$  mit Strukturkonstanten  $f_{ij}^k$ . Dann definieren die Bildvektoren  $D_*(X_i)$  offensichtlich eine Basis der Lie-Algebra  $D_*(\mathfrak{g})$  mit denselben Strukturkonstanten,

$$[D_*(X_i), D_*(X_j)] = D_*([X_i, X_j]) = D_*(f_{ij}^k X_k) = f_{ij}^k D_*(X_k). \quad (13.26)$$

Jede irreduzible Darstellung von  $G$  induziert damit eine irreduzible Darstellung ihrer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . In der Physik konstruiert man oft Darstellungen einer Gruppe, indem man die Darstellungen ihrer Lie-Algebra studiert. Dieser Weg wird gerne in der Quantenmechanik und Teilchenphysik besprochen

### Die Lie-Algebra von $SU(2)$

Es sei  $U(t)$  eine Kurve in der unitären Gruppe  $U(2)$  mit  $U(0) = \mathbb{1}$ . Leiten wir die definierende Bedingung  $U(t)U^\dagger(t) = \mathbb{1}_2$  nach  $t$  an der Stelle  $t = 0$  ab, dann führt dies auf folgende Forderung an die infinitesimalen Erzeugenden (Generatoren)  $X = \dot{U}(0)$ :

$$\dot{U}(0)U^\dagger(0) + U(0)\dot{U}^\dagger(0) = X + X^\dagger = 0.$$

Deshalb sind die Erzeugenden der unitären Gruppe  $U(2)$  zwei-dimensionale antihermitesche Matrizen. Liegt die Kurve in der Untergruppe  $SU(2)$  von  $U(2)$  dann gilt zusätzlich  $\det U(t) = 1$ . Es ergibt sich mit Hilfe der Formel

$$\frac{d}{dt} \log \det U = \text{Sp} \left( U^{-1} \dot{U} \right) \quad (13.27)$$

die Zusatzbedingung  $\text{Sp} X = 0$ . Bezeichnen wir die Lie-Algebra von  $SU(2)$ , bestehend aus den infinitesimalen Erzeugenden mit  $\mathfrak{su}(2)$ , dann gilt

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid X = -X^\dagger, \text{Sp} X = 0\}. \quad (13.28)$$

Man sieht hier explizit, dass  $\mathfrak{su}(2)$  ein 3-dimensionaler linearer Raum ist und der Kommutator zweier Elemente  $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$  wieder in  $\mathfrak{su}(2)$  ist:

$$[X, Y]^\dagger = -[X, Y] \quad \text{und} \quad \text{Sp}[X, Y] = 0.$$

Die Elemente von  $\mathfrak{su}(2)$  sind anti-hermitesche und spurlose Matrizen und sind deshalb Linearkombinationen der drei Pauli-Matrizen mit imaginären Koeffizienten,

$$\mathfrak{su}(2) = \{X = i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}. \quad (13.29)$$

Aus den Kommutationsregeln für die Pauli-Matrizen sieht man leicht, dass  $\mathfrak{su}(2)$  den Rang Eins hat. Die Lie-Algebra hat nur die trivialen Ideale  $\emptyset$  und  $\mathfrak{su}(2)$  und ist deshalb einfach.

Die 3-dimensionale adjungierte Darstellung von  $SU(2)$  wirkt auf dem linearen Raum der spurlosen anti-hermiteschen Matrizen. Gemäß (8.17) ist sie gleich der Drehgruppe im Euklid'schen Raum  $E_3$ ,

$$U(\mathbf{a}, \boldsymbol{\sigma})U^{-1} = (R(u) \mathbf{a}, \boldsymbol{\sigma}).$$

Weitere Darstellungen werden wir später kennenlernen.

Allgemein können die Darstellungen kompakter Gruppen immer unitär gewählt werden, siehe

Satz 45 auf Seite 158. Die Generatoren  $D_*(X)$  in einer Darstellung sind dann anti-hermitesche Matrizen. Auf dem Vektorraum  $\mathfrak{g}$  kann ein Skalarprodukt definiert werden:

$$(X, Y) = \operatorname{Sp} \left( D_*^\dagger(X) D_*(Y) \right) = -\operatorname{Sp} (D_*(X) D_*(Y)) \geq 0. \quad (13.30)$$

Mithilfe von (13.25) beweist man leicht die Ad-Invarianz dieses Skalarprodukt,

$$(\operatorname{Ad}(g)X, \operatorname{Ad}(g)Y) = (X, Y). \quad (13.31)$$

Speziell sind die  $\operatorname{ad}_X$  *schiefssymmetrisch* und man erhält die schon früher eingeführte Killingform,

$$(X, Y) = -\operatorname{Sp} (\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y) = -K(X, Y). \quad (13.32)$$

Wegen (13.31) ist die Darstellung  $\operatorname{Ad}(G)$  dann äquivalent zu einer orthogonalen Darstellung von  $G$ .

Allgemeiner sind für jede kompakte halb-einfache Gruppe die Skalarprodukte  $(X, Y)$  in (13.30) proportional zur Killing-Form. Also gilt der

**Satz 57** *Für kompakte  $L(G)$  ist  $K(X, X) \leq 0$  und  $K(X, X) = 0$  nur für  $X \in \mathfrak{z}$ . Verschwindet das Zentrum, dann ist die Killing-Form negativ definit.*

## 13.4 Lie-Algebren der klassischen Matrix-Lie-Gruppen

Die Lie-Algebra von  $\operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Ist  $g(t)$  eine Kurve in  $\operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$  mit  $g(0) = \mathbb{1}$ , dann ist der zugehörige Tangentialvektor bei Eins,

$$X = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad (13.33)$$

eine beliebige komplexe  $n \times n$  Matrix. Deshalb hat die Lie-Algebra

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \{X = \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C})\} \quad (13.34)$$

die reelle Dimension  $2n^2$ . Das Lie-Produkt für zwei Matrizen ist gleich dem Kommutator. Analog findet man für die Lie-Algebra der allgemeinen linearen Gruppe mit *reellen* Koeffizienten

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \{X = \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})\}. \quad (13.35)$$

Sie hat die reelle Dimension  $n^2$  und ist eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ .

Matrix-Lie-Gruppen sind abgeschlossene Untergruppen von  $\operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$ . Deshalb ist eine Lie-Algebra einer Matrix-Lie-Gruppe eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  für ein  $n$ . Zur Charakterisierung dieser Lie-Algebren betrachtet man Kurven in den abgeschlossenen Untergruppen, die für  $t = 0$  durch die Gruppen-Eins gehen.

### Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$

Wir betrachten nun eine Kurve  $A(t)$  in der speziellen lineare Gruppe  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ . Die Bedingung  $\det A(t) = 1$  impliziert wegen (13.27) für die infinitesimale Erzeugende  $X = \dot{A}(0)$  die Bedingung  $\mathrm{Sp}X = 0$ . Deshalb enthält die Lie-Algebra die spurlosen Matrizen,

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \mid \mathrm{Sp}X = 0\} . \quad (13.36)$$

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist die (reelle) Dimension dieser Lie-Algebra gleich  $n^2 - 1$ .

### Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n)$

Jetzt betrachten wir eine differenzierbare Kurve in der Gruppe  $\mathrm{O}(n)$ . Diese wird wegen  $R(0) = \mathbb{1}$  aus Stetigkeitsgründen für alle  $t$  in der Zusammenhangskomponente  $\mathrm{SO}(n) < \mathrm{O}(n)$  liegen. Eine Erzeugende  $X = \dot{R}(0)$  erfüllt die Bedingungen

$$0 = \frac{d}{dt} (R^T(t)R(t)) \Big|_{t=0} = X^T + X ,$$

und die Lie-Algebra von  $\mathrm{SO}(n)$  ist gleich der Menge der antisymmetrischen reellen Matrizen,

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid X = -X^T\} . \quad (13.37)$$

Die Dimension der Lie-Algebra ist gleich die Anzahl von linear unabhängigen schief-symmetrischen Matrizen  $n(n-1)/2$ .

### Die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(n)$

Aus der Forderung  $U^\dagger U = \mathbb{1}$  folgt für die infinitesimalen Erzeugenden die Bedingung  $X^\dagger + X = 0$  und deshalb ist die Lie-Algebra der unitären Gruppe  $\mathrm{U}(n)$  gleich

$$\mathfrak{u}(n) = \left\{ X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid X = -X^\dagger \right\} . \quad (13.38)$$

Ihre Dimension ist gleich der Anzahl  $n^2$  linear unabhängiger antihermitescher Matrizen.

### Die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(n)$

Diese enthält alle Erzeugenden von  $\mathrm{U}(n)$  mit verschwindender Spur,

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{Sp}X = 0\} . \quad (13.39)$$

Ihre Dimension ist  $n^2 - 1$ . Den Spezialfall  $n = 2$  haben wir im letzten Abschnitt behandelt.

### Die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{K})$

Leiten wir die definierende Bedingung  $M(t)^T J M(t) = J$  nach  $t$  ab, dann ergibt sich folgende Menge von infinitesimalen Erzeugenden,

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{K}) = \{X \in \text{Mat}(2n, \mathbb{K}) \mid X^T J + JX = 0\}. \quad (13.40)$$

Damit haben wir die Lie-Algebren der klassischen Lie-Gruppen charakterisiert. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Gruppe	Lie-Algebra	Erzeugende	Dimension
$\text{GL}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$	$X$ complex	$2n^2$
$\text{GL}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$	$X$ reell	$n^2$
$\text{SL}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	$\text{Sp}X = 0$	$2n^2 - 2$
$\text{SL}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$	$X$ reell, $\text{Sp}X = 0$	$n^2 - 1$
$\text{U}(n)$	$\mathfrak{u}(n)$	$X + X^\dagger = 0$	$n^2$
$\text{SU}(n)$	$\mathfrak{su}(n)$	$X + X^\dagger = 0, \text{Sp}X = 0$	$n^2 - 1$
$\text{O}(n), \text{SO}(n)$	$\mathfrak{so}(n)$	$X$ reell, $X + X^T = 0$	$n(n-1)/2$
$\text{Sp}(2n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$	$JX + X^T J = 0$	$2n(2n+1)$
$\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$	$X$ reell, $JX + X^T J = 0$	$n(2n+1)$

## 13.5 Die Exponentialabbildung

Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe ist der Tangentialraum am Einselement. Die infinitesimalen Erzeugenden gewinnt man durch Ableiten von Kurven, die durch die Gruppeneins gehen. Den umgekehrten Weg von der Lie-Algebra zur Lie-Gruppe geht über die Exponentialabbildung. Diese kann für beliebige Lie-Gruppen definiert werden. Hier diskutieren wir die Exponentialabbildung für Matrix-Lie-Gruppen.

Es sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale reelle oder komplexe Matrix. Wir definieren das Exponential  $\exp(X)$  dieser Matrix über die Reihenentwicklung

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}. \quad (13.41)$$

Diese Definition ist sinnvoll wegen

**Lemma 23** *Für jede Matrix  $X \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$  konvergiert die Reihe (13.41) absolut und ist eine stetige Funktion von  $X$ .*

Wir bezeichnen die Vektoren in  $\mathbb{K}^n$  mit  $\varphi$ . Eine mögliche Norm für Matrizen ist

$$\|X\| = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|X\varphi\|}{\|\varphi\|}. \quad (13.42)$$

Für jede Matrix ist diese Norm endlich und es gelten die Ungleichungen

$$\|XY\| \leq \|X\| \|Y\| \quad \text{und} \quad \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Iterieren wir die erste Ungleichung dann erhalten wir  $\|X^n\| \leq \|X\|^n$ , so dass

$$\sum_n \frac{1}{n!} \|X^n\| \leq \sum_n \frac{1}{n!} \|X\|^n = e^{\|X\|} < \infty. \quad (13.43)$$

Dies bedeutet, dass die Reihe (13.41) eine Cauchy-Reihe ist und deshalb absolut konvergiert. Die Matrix-Exponentialfunktion hat folgende einfach zu beweisende Eigenschaften:

**Lemma 24** *Es seien  $X, Y \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ . Dann gelten:*

1. Ist  $[X, Y] = 0$  dann gilt  $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$ .
2. Das Element  $e^X$  ist invertierbar und hat als Inverses  $e^{-X}$ .
3. Für ein invertierbares  $g$  gilt  $e^{gXg^{-1}} = g e^X g^{-1}$ .
4. Es gilt die Ungleichung  $\|e^X\| \leq e^{\|X\|}$ .
5.  $g(t) = e^{tX}$  ist eine glatte Kurve in  $GL(n, \mathbb{K})$  und  $\frac{d}{dt} g(t) = X e^{tX}$ .

Von der ersten Eigenschaft überzeugt man sich durch Multiplikation der Potenzreihen. Aus ihr folgt sofort die zweite Eigenschaft, wenn man  $Y = -X$  setzt. Die dritte Eigenschaft folgt aus  $gX^n g^{-1} = (gXg^{-1})^n$  und die vierte Eigenschaft ist im Wesentlichen die Ungleichung (13.43). Die letzte Eigenschaft folgt aus der termweisen Differentiation der Potenzreihe für  $\exp(tX)$ .

Ist  $X$  eine diagonalisierbare Matrix, dann existiert eine invertierbare Matrix  $g$ , so dass

$$X = gDg^{-1}, \quad \text{mit} \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (13.44)$$

Mit der dritten Eigenschaft im Lemma erhält man nun

$$e^X = g e^D g^{-1}, \quad e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}). \quad (13.45)$$

Für reelle  $X$  können  $g$  und  $D$  beide komplex sein, aber  $\exp(X)$  muss dann wieder reell sein.

Für jedes Element  $X \in \mathfrak{g}$  definiert die Kurve  $t \mapsto \exp(tX)$  eine einparametrische Untergruppen von  $G$ . Diese sind wie folgt definiert:

**Definition 50** *Eine Funktion  $A : \mathbb{R} \rightarrow G$  heißt einparametrische Untergruppe von  $G$ , falls*

1.  $A$  stetig ist,
2.  $A(0) = \mathbb{1}$ ,
3.  $A(t+s) = A(t)A(s) = A(s)A(t)$  für alle  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Aus den beiden letzten Eigenschaften folgt dann  $A^{-1}(t) = A(-t)$ . Es gilt nun das

**Lemma 25** *Ist  $A(t)$  eine einparametrische Untergruppe von  $G$ , dann existiert eine eindeutige infinitesimale Erzeugende  $X$  mit  $A(t) = \exp(tX)$ .*

*Beweis:* Eine einparametrische Untergruppe erfüllt die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{d}{ds}A(s+t)|_{s=0} = \frac{d}{ds}A(s)|_{s=0}A(t) = XA(t) \quad \text{mit} \quad X = \frac{d}{ds}A(s)|_{s=0} \quad (13.46)$$

mit Anfangsbedingung  $A(0) = \mathbb{1}$ . Die eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems ist  $A(t) = \exp(tX)$ .

**Lemma 26** *Ist  $g = \exp(X)$ , dann gilt*

$$D(g) = D(e^X) = e^{D_*(X)} \quad (13.47)$$

*Beweis:* Der einfache Beweis ähnelt dem vorherigen. Wir setzen  $g = \exp(X)$  und betrachten die einparametrischen Untergruppen  $g(t) = \exp(tX)$  und  $D(t) = D(g(t))$ . Dann folgt

$$\frac{d}{dt}D(t) = \frac{d}{ds}D(s)|_{s=0}D(t) = D_*(X)D(t), \quad D(0) = \mathbb{1}. \quad (13.48)$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist  $D(t) = \exp(tD_*(X))$ . Setzen wir hier  $t = 1$ , so ergibt sich die Aussage des Lemmas.

### Exponentialabbildung für $SU(2)$

Die Elemente der Lie-Algebra von  $SU(2)$  sind Linearkombinationen der drei Pauli-Matrizen mit imaginären Koeffizienten,  $X = i\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ . Mit  $(\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma})^2 = v^2\mathbb{1}$ , wobei  $v$  den Betrag von  $\mathbf{v}$  bezeichnet, folgt

$$\exp(X) = \exp(i\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}) = \cos v \sigma_0 + i \sin v \hat{\mathbf{v}}\boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v}. \quad (13.49)$$

Setzen wir in dieser Formel

$$\cos v + i\hat{v}_3 \sin v = a \quad \text{und} \quad (i\hat{v}_1 - \hat{v}_2) \sin v = b, \quad (13.50)$$

dann ist  $\exp(X)$  genau die  $SU(2)$ -Matrix in (8.7). Die Normierungsbedingung  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  ist für die Parametrisierung (13.50) automatisch erfüllt. Wir folgern, dass jede  $SU(2)$ -Matrix als Exponent einer anti-hermiteschen und spurlosen Matrix geschrieben werden kann,

$$U \in SU(2) \iff X \in \mathfrak{su}(2). \quad (13.51)$$



Somit haben wir für die quantenmechanische Drehgruppe  $SU(2)$  den einfacher Zusammenhang zwischen Lie-Gruppe und Lie-Algebra mit einer expliziten Rechnung nachgewiesen.

Die einparametrische Untergruppe zu  $X$  ist

$$\exp(tX) = \cos(tv) \sigma_0 + i \sin(tv) \hat{v} \boldsymbol{\sigma}. \quad (13.52)$$

und, wie erwartet, gilt

$$\frac{d}{dt} \exp(tX) \Big|_{t=0} = iv \hat{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} = i \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} = X. \quad (13.53)$$

## 13.6 Lorentz-Gruppe und Lorentz-Algebra

Die Lorentztransformationen wurden in Abschnitt 5.5 ausführlich diskutiert. Nach Wahl von kartesischen Koordinaten werden sie durch 4-dimensionale reelle Matrizen parametrisiert, welche die Bedingung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad \text{oder} \quad \Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (13.54)$$

erfüllen. Hierin bezeichnet  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  die Minkowski-Metrik. Die Lie-Algebra der Lorentzgruppe ist im Wesentlichen identisch zur Liealgebra  $\mathfrak{so}(4)$  der eigentlichen orthogonalen Gruppe  $SO(4)$ . Die Lorentzalgebra spielt in der relativistischen Physik eine herausgehobene Rolle und wird deshalb hier etwas genauer untersucht.

Ähnlich wie bei Raumdrehungen betrachtet man eine Kurve  $\Lambda(s)$  mit  $\Lambda(0) = \mathbb{1}_4$  in der Zusammenhangskomponente  $L_+^\uparrow$  und definiert die *infinitesimale Erzeugende*

$$\lambda = \frac{d}{ds} \Lambda(s) \Big|_{s=0} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^\alpha_\beta = \frac{d}{ds} \Lambda^\alpha_\beta \Big|_{s=0}. \quad (13.55)$$

Leiten wir (13.54) an der Stelle  $s = 0$  ab, dann finden wir folgende lineare Bedingung für eine infinitesimale Erzeugende:

$$\lambda^T \eta + \eta \lambda = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\nu} + \eta_{\mu\beta} \lambda^\beta_\nu \equiv \lambda_{\nu\mu} + \lambda_{\mu\nu} = 0. \quad (13.56)$$

Die Erzeugenden bilden die Lorentz-Algebra  $\mathfrak{so}(1, 3)$ . Gemäß (13.56) kann die  $\mathfrak{so}(1, 3)$  (nach herunterziehen eines Indizes) mit den antisymmetrischen reellen  $4 \times 4$ -Matrizen identifiziert werden. Sie bilden einen 6-dimensionalen Vektorraum, dessen Elemente wir wie folgt parametrisieren:

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) = (\lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ -\alpha_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\alpha_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.57)$$

Für  $\alpha = 0$  beschreibt die 1-parametrische Untergruppe

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{e}) = e^{\lambda(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{\theta}}, \quad \text{mit } \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = 1,$$

Drehungen im Raum um die feste Achse  $\boldsymbol{e}$  mit dem Winkel  $\theta$ . Sie enthalten also weder eine Längenkontraktion noch eine Zeitdilatation und bestehen deshalb aus den Matrizen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad R \in \text{SO}(3). \quad (13.58)$$

Diese  $\text{SO}(3)$ -Untergruppe der Lorentzgruppe wurde bereits in Abschnitt 5.2 sehr ausführlich untersucht.

Wir konzentrieren uns deshalb auf den anderen Grenzfall mit  $\boldsymbol{\theta} = 0$ . Dann beschreibt für jeden festen Einheitsvektor  $\boldsymbol{e}$  die 1-parametrische Untergruppe

$$\Lambda(\alpha \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\theta}) = e^{\lambda(\boldsymbol{e}, 0)\alpha} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) \cdot \boldsymbol{e}^T \\ -\sinh(\alpha) \boldsymbol{e} & \mathbb{1}_3 + (\cosh(\alpha) - 1) \boldsymbol{e} \boldsymbol{e}^T \end{pmatrix} \quad (13.59)$$

Lorentzboosts in Richtung von  $\boldsymbol{e}$ .

---

?

---

Versuchen Sie die letzte Aussage zu beweisen. Benutzen Sie dabei die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und setzen Sie  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \boldsymbol{e}$ .

---

Wie man leicht sieht (man transformiere z.B. in das Ruhesystem des Teilchens) hängen  $\alpha$  und  $\boldsymbol{e}$  mit der Relativgeschwindigkeit  $\boldsymbol{v}$  der beiden Inertialsysteme wie folgt zusammen:

$$\cosh(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh(\alpha) \cdot \boldsymbol{e} = -\gamma \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}, \quad \beta = |\boldsymbol{\beta}|. \quad (13.60)$$

Bewegt sich zum Beispiel das Inertialsystem  $I$  relativ zum Inertialsystem  $I'$  mit der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{v} = v \boldsymbol{e}_1$ , dann lautet die Lorentz-Transformation

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13.61)$$

und die Koordinaten transformieren gemäß

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 + \beta x^1) & , & & x'^2 &= x^2 \\ x'^1 &= \gamma(\beta x^0 + x^1) & , & & x'^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (13.62)$$

Ruht ein Teilchen im Ursprung des Inertialsystems  $I$ , dann bewegt es sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in 1-Richtung relativ zum Inertialsystem  $I'$ .

Die Erzeugenden der Lorentzgruppe bilden eine Lie-Algebra, die sogenannte *Lorentz-Algebra*. Wir beginnen mit dem *Kommutator* von zwei beliebigen Erzeugenden, die gemäß (13.57) parametrisiert seien:

$$[\lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}), \lambda(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\theta}')] = \lambda(\boldsymbol{\alpha}' \wedge \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}'). \quad (13.63)$$

Als Basis der Lorentzalgebra wählen wir vorerst die Matrizen  $\Lambda_i$  und  $\Omega_i$  in der Entwicklung

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^3 x_i \Lambda_i + \sum_{i=1}^3 \theta_i \Omega_i. \quad (13.64)$$

Der Vergleich mit (13.57) führt auf folgende explizite Form der infinitesimalen Lorentzboosts

$$\Lambda_1 = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.65)$$

und infinitesimalen Drehungen im Raum,

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.66)$$

Setzen wir die Entwicklung (13.64) in die allgemeine Kommutationsregel (13.63) ein, dann gewinnen wir die Kommutatoren der Basiselemente:

### Lorentzalgebra

Die infinitesimalen Boosts und Raumdrehungen in (13.65) und (13.66) haben folgende Kommutatoren

$$[\Lambda_i, \Lambda_j] = -\epsilon_{ijk} \Omega_k, \quad [\Omega_i, \Omega_j] = \epsilon_{ijk} \Omega_k, \quad [\Lambda_i, \Omega_j] = \epsilon_{ijk} \Lambda_k. \quad (13.67)$$

Im Gegensatz zur Drehgruppe ist die Lorentzgruppe eine nicht-kompakte Liesche Gruppe vom Rang 2. Zwei linear unabhängige Erzeugende aus  $\mathfrak{so}(1,3)$ , zum Beispiel  $\Lambda_3$  und  $\Omega_3$ , können simultan diagonalisiert werden.

### 13.6.1 Eine alternative Basis von Generatoren

Die obige Basis  $\{\Lambda_i, \Omega_i\}$  der Lorentzalgebra betont die wichtige Rolle von Rotationen und Lorentzboosts. Für die folgende, eher strukturelle Untersuchung der Algebra führen wir jetzt eine alternative und passendere Basis ein, und bezeichnen die 6 Basiselemente mit  $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ . Hier sind  $\mu$  und  $\nu$  nicht etwa Indexe der Matrix  $M$ , sondern jedes  $M_{\mu\nu}$  ist eine 4–dimensionale Matrix. Ein beliebiges Element der Lorentzalgebra ist dann eine Linearkombination dieser Matrizen,

$$\lambda = (\omega, M) \equiv \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad M_{\mu\nu} = ((M_{\mu\nu})^\rho_\sigma). \quad (13.68)$$

Beachte, dass in dieser Linearkombination jedes Basiselement wegen  $M_{\nu\mu} = -M_{\mu\nu}$  zweimal auftritt. Die reellen Entwicklungskoeffizienten erfüllen  $\omega^{\nu\mu} = -\omega^{\mu\nu}$ . Die Bedingung (13.56) lautet dann

$$(M_{\mu\nu})_{\rho\sigma} = -(M_{\mu\nu})_{\sigma\rho}. \quad (13.69)$$

Sie bedeutet, dass jede der Matrizen  $M_{\mu\nu}$  nach herunterziehen der Indexe antisymmetrisch ist. Wir wählen folgende antisymmetrische Matrizen

$$(M_{\mu\nu})_{\rho\sigma} = -i(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}). \quad (13.70)$$

Der Faktor  $i$  wurde eingeführt, damit die  $M_{\mu\nu}$  hermitesche Matrizen sind. Zum Beispiel sind

$$M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.71)$$

zwei Erzeugende mit kovarianten (unteren) Indizes. Diese Erzeugenden erfüllen die einfachen Kommutationsregeln<sup>1</sup>

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}). \quad (13.72)$$

---

?

---

Beweisen Sie diese Kommutationsregeln für die Erzeugenden (13.70).

---

Diese sind äquivalent zu den Kommutationsregeln (13.67) und verallgemeinern die gekannten Kommutationsregeln für die Komponenten des Drehimpulses. In der neuen Basis sind die Erzeugenden der Drehgruppe die Linearkombinationen  $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$ . In der Tat, aus (13.72) gewinnt man folgende Kommutationsregeln für diese Generatoren,

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k. \quad (13.73)$$

<sup>1</sup>Man beachte, dass beim Matrixprodukt ein kovarianter mit einem kontravarianten Index (oder umgekehrt) verjüngt werden, also zum Beispiel  $(M_{01})^\rho_\sigma(M_{12})^\sigma_{\rho'}$ .

Die verbleibenden Generatoren  $M_{0i}$  erzeugen Lorentzboosts. Eine allgemeine Lorentztransformation in  $L_+^\uparrow$  hat also die Form

$$(\Lambda, 0) = e^{\frac{i}{2}(\omega, M)} = \mathbb{1} + \frac{i}{2}(\omega, M) + O(\omega^2). \quad (13.74)$$

## 13.7 Die Poincare-Liealgebra

Nach den Lorentztransformationen wenden wir uns nun den allgemeineren Poincaré Transformationen zu. Diese wurden bereits in Abschnitt 5.5 diskutiert. Insbesondere bezeichnen wir eine Poincare Transformation wie in (5.47) mit  $(a, \Lambda)$ . Die normale Untergruppe der *Translationen* wird von den Impulsen erzeugt, und deshalb hat jede Translation die Darstellung

$$(\mathbb{1}, a) = e^{i a^\mu P_\mu} \equiv e^{i a P} = \mathbb{1} + i a P + O(a^2). \quad (13.75)$$

Zwei Translationen vertauschen, so dass ihre Erzeugenden kommutieren,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3. \quad (13.76)$$

Die nicht-trivialen Kommutationsregeln zwischen infinitesimalen Lorentz-Transformationen und Translationen folgen aus

$$(\Lambda, 0)(\mathbb{1}, a)(\Lambda, 0)^{-1} = (\mathbb{1}, \Lambda a) \quad \text{bzw.} \quad e^{\frac{i}{2}(\omega, M)} e^{i a P} e^{-\frac{i}{2}(\omega, M)} = e^{i(\Lambda a)P}. \quad (13.77)$$

Hier setzen wir im letzten Exponenten  $\Lambda = \mathbb{1} + \frac{i}{2}(\omega, M) + \dots$  und vergleichen Terme linear in  $\omega$  und  $a$ . Dies führt auf die Kommutationsregeln

$$[\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, a^\alpha P_\alpha] = \omega^{\mu\nu} (M_{\mu\nu} a, P). \quad (13.78)$$

Weil dies für beliebige Koeffizienten  $\omega^{\mu\nu}$  und  $a^\alpha$  gilt folgern wir

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = (M_{\mu\nu})_\rho^\sigma P_\sigma = i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu). \quad (13.79)$$

Zusammengefasst gewinnen wir alle Vertauschungsregeln der Poincaré-Algebra:

### Poincaré-Algebra

Die Erzeugenden der Poincare-Gruppe  $\{P_\mu, M_{\mu\nu}\}$  erfüllen die Kommutationregeln

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma}), \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu), \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (13.80)$$

Jede relativistisch kovariante Feldtheorie hat diese Lie-Algebra als Symmetriealgebra.

## 13.8 Allgemeinere Lie-Gruppen

Für allgemeine Lie-Gruppen kann man analoge Resultate beweisen wie für Matrix-Gruppen. Die explizite Exponentialfunktion wird dann durch die Exponentialabbildung auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ersetzt. Die in Definition 50 auf Seite 219 eingeführten einparametrischen Untergruppen existieren auch für allgemeine Lie-Gruppen. Die Beweise der folgenden Resultate setzen gewisse Kenntnisse der Differentialgeometrie voraus und sollen hier nicht gegeben werden.

Wir beginnen mit dem wichtigen Resultat über die Existenz einer Lie-Gruppe zu einer gegebenen Lie-Algebra. Es sei wie früher  $L(\mathfrak{g})$  die zu einer Lie-Algebra gehörende lineare Gruppe. Es gilt der

**Satz 58** *Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache Lie-Algebra mit  $\mathfrak{z} = 0$ . Dann ist  $\mathfrak{g}$  die Algebra einer Lie-Gruppe, nämlich von  $L(\mathfrak{g})$ .*

Eine etwas kompliziertere Erweiterung des Satzes gilt auch für Lie-Algebren mit nicht-trivialen Zentren. Früher hatten wir die adjungierte Darstellung der Gruppe auf der Lie-Algebra kennengelernt

$$\text{Ad} : G \mapsto \text{GL}(n, \mathbb{R}), \quad g \mapsto gXg^{-1}. \quad (13.81)$$

Ohne Beweis zitieren wir den

**Satz 59** *Es sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Dann ist*

$$\text{Ad}(G) = L(\mathfrak{g}) \subset \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad L(\mathfrak{g}) \cong G/\mathcal{Z}. \quad (13.82)$$

Inbesondere ist  $G/\mathcal{Z}$  eine Lie-Gruppe und alleine durch die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  bestimmt.

Es sei  $H \subset G$  eine Lie-Untergruppe und  $H \mapsto G$  die injektive Inklusion. Diese definiert eine induzierte Abbildung ihrer Lie-Algebren  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{g}$ . Man betrachtet den Tangentialraum  $T_e H$  als linearen Unterraum von  $T_e G$ . Da  $H$  eine Lie-Gruppe ist, ist  $T_e H$  invariant unter der Lie-Klammer. Es gilt also der

**Satz 60** *Die Lie-Algebra  $\mathfrak{h}$  einer Lie-Untergruppe  $H < G$  ist eine Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ .*

Ist  $n(t)$  eine Kurve in einem Normalteiler  $N < G$  mit  $\dot{n}(0) = Z \in \mathfrak{n}$ . Dann ist auch  $gn(t)g^{-1}$  eine derartige Kurve und deshalb  $gZg^{-1} \in \mathfrak{n}$  für jedes  $g \in G$ . Ersetzt man in diesem Resultat  $g$  durch  $g(s)$  und betrachtet die infinitesimale Form für kleine  $s$ , dann folgt  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$ . Während eine Lie-Untergruppe auf eine allgemeine Lie-Unteralgebra führt, führt ein Lie-Normalteiler auf ein Ideal. Der folgende Satz stellt den Zusammenhang in umgekehrter Richtung her.

**Satz 61**  *$G$  sei eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ .  $N < G$  sei eine zusammenhängende Lie-Untergruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ . Ist  $\mathfrak{n}$  ein Ideal in  $\mathfrak{g}$ , dann ist  $N$  Normalteiler in  $G$ .*

## 13.9 Anhang A: Linksinvariante Vektorfelder

Behandelt man allgemeine Lie-Gruppen, dann braucht man Begriffe aus der Differentialgeometrie wie Vektorfelder, Tangentialräume, Pull-backs oder linksinvariante Formen und Vektorfelder. Einige Größen sind in diesem Anhang zusammengestellt.

### 13.9.1 Vektoren

Es sei  $\mathbf{X} = (X^1, \dots, X^n)$  ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$  und  $f$  eine differenzierbare Abbildung in der Umgebung eines Punktes  $x_0$ . Dann ist die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung von  $\mathbf{X}$  gegeben durch

$$D_{\mathbf{X}}f = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \Big|_{x_0} X^\mu \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Die Richtungsableitung ist  $\mathbb{R}$ -linear und erfüllt die *Produktregel*

$$D_{\mathbf{X}}(f \cdot g) = D_{\mathbf{X}}(f) \cdot g + f \cdot D_{\mathbf{X}}(g). \quad (\text{A.2})$$

Ist umgekehrt  $D_{\mathbf{X}} = D_{\mathbf{X}'}$ , dann folgt  $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ . Zum Beweis wende man die Ableitungen auf die Koordinatenfunktionen  $x^\mu$  an. Es gilt das

**Lemma 27** *Zu jedem die Produktregel erfüllenden  $\mathbb{R}$ -linearen Operator  $D$  existiert ein Vektor  $\mathbf{X}$  in  $x_0$  mit  $D = D_{\mathbf{X}}$ .*

Für die in einer Umgebung von  $x_0$  konstante Funktion  $F = 1$  impliziert die Produktregel

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1) \implies D(1) = 0.$$

Wegen der  $\mathbb{R}$ -Linearität verschwindet  $D$  für alle konstanten Funktionen. Sei nun  $f$  eine  $C^\infty$ -Funktion in einer Umgebung von  $x_0$ . Mit der Wahl  $x_0 = 0$  gilt

$$f(x) = f(0) + \sum_{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \Big|_0 x^\mu + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(x) x^\mu x^\nu \quad \text{mit} \quad g_{\mu\nu} \in C^\infty,$$

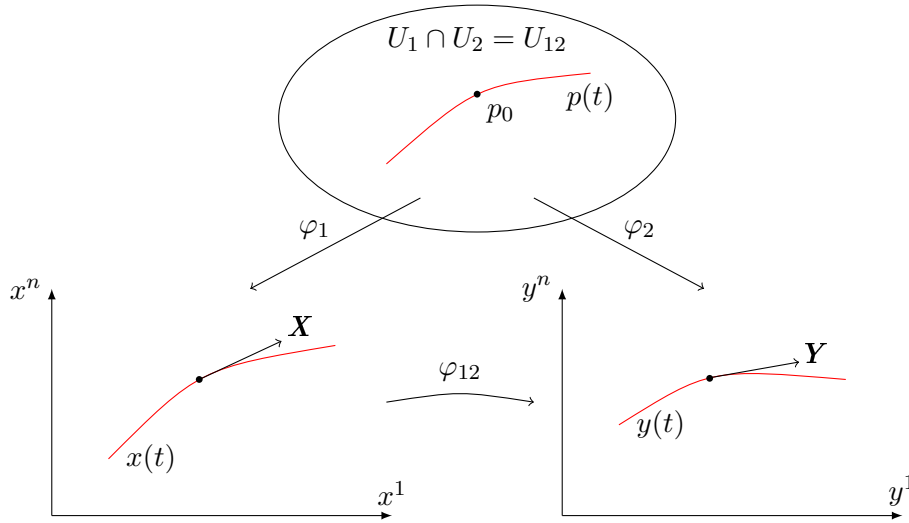
und wegen der Linearität und Produktregel

$$(Df)(0) = \sum_{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \Big|_0 D(x^\mu).$$

Die Wahl  $\mathbf{X}^\mu = D(x^\mu)$  führt auf den gesuchten Vektor  $\mathbf{X}$  in  $x_0$ , für den  $D_{\mathbf{X}}f = Df$  ist.

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir Kurven auf einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit  $M$ . Es sei  $U$  eine Koordinatenumgebung von  $p_0$  mit Karte  $\varphi(U)$ . Dann hat eine differenzierbare Kurve  $p(t) \in U$ , die für  $t_0$  durch  $p_0$  geht, die Koordinatendarstellung

$$x(t) = \varphi(p(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad x(t_0) = \varphi(p_0) = x_0, \quad t' < t < t''. \quad (\text{A.3})$$



Die Koordinatenfunktionen  $x^\mu(t)$  sind differenzierbare Funktionen des Kurvenparameters  $t$ . Es ist  $\dot{x}(t_0) = X$  der Tangentialvektor der Kurve  $x(t)$  im Punkte  $x_0$ . Umgekehrt gibt es zu jedem  $X$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^n$  durch  $x_0$  mit dem Tangentialvektor  $X$ . Man spricht von einem durch die Kurve  $x(t)$  beziehungsweise  $p(t)$  dargestellten Vektor. Es sei  $\bar{f}$  eine differenzierbare Funktion in  $U$  und  $f = \bar{f} \circ \varphi^{-1}$  dieselbe Funktion ausgedrückt in lokalen Koordinaten. Dann ist

$$\bar{f}(p(t)) = f(x(t)) \implies \frac{d}{dt} \bar{f}(p(t)) \Big|_{t_0} = \frac{d}{dt} f(x(t)) \Big|_{t_0} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \Big|_{x_0} X^\mu,$$

beziehungsweise

$$\frac{d}{dt} \bar{f}(p(t)) \Big|_{t_0} = (D_{\bar{X}} f)(x_0). \tag{A.4}$$

Die linke Seite ist unabhängig von den gewählten Koordinaten und führt auf die Definition

$$D_{\bar{X}} \bar{f} \equiv D_X f. \tag{A.5}$$

Die Ableitung der Kurve hängt nur vom Tangentialvektor ab. Sie ist kartenumabhängig. Ist  $x \rightarrow y = \varphi_{12}(x)$  die Koordinatentransformation von  $\varphi_1(U_{12})$  nach  $\varphi_2(U_{12})$ , dann gilt folgende Beziehung zwischen den Vektorkomponenten in den entsprechenden Karten,

$$y(t) = \varphi_{12}(x(t)) \implies Y^\mu = \frac{\partial \varphi_{12}^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu. \tag{A.6}$$

Für jeden Tangentialvektor  $\bar{X}$  in  $p$  ist  $D_{\bar{X}} \bar{f} \in \mathbb{R}$  definiert, wenn  $\bar{f}$  eine in einer Koordinatenumgebung von  $p$  differenzierbare Funktion ist. Die Ableitung ist  $\mathbb{R}$ -linear bezüglich  $f$  und erfüllt die Produktregel. Zwei Funktionen, die in einer beliebig kleinen Umgebung von  $p \in U$  übereinstimmen haben dieselbe Ableitung. Dies führt auf den Begriff der *Funktionenkeime*. Zwei Funktionen  $\bar{f}$  und  $\bar{g}$  haben denselben Keim, wenn sie in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $p$  übereinstimmen. Die Menge aller Vektoren  $\bar{X}$  im Punkte  $p$  bezeichnet man mit  $T_p(M)$ . Es ist der *Tangentialraum* am Punkt  $p$ .



### 13.9.2 Tangentialabbildung

Es seien nun  $M$  und  $M'$  zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $F : M \rightarrow M'$  differenzierbar mit  $F(p) = p'$ . Ist  $p(t)$  eine Kurve durch  $p$ , dann beschreibt  $F(p(t))$  eine Kurve durch  $p'$  und der Zusammenhang der Vektorkomponenten  $X^\mu$  und  $X'^\mu$  ist wie bei einem Koordinatenwechsel. Die entsprechende Abbildung der Tangentialvektoren in  $p$  auf die Tangentialvektoren in  $p'$  bezeichnen wir mit  $E_*$ . Dies ist eine lineare Abbildung von  $T_p(M)$  in  $T_{p'}(M')$ . Nun wollen wir die Beziehung zwischen den Ableitungen in  $M$  und  $M'$  herstellen. Dazu führen wir den sogenannten *Pullback* von Funktionen auf  $M'$  ein:

**Definition 51** *Es sein  $F : M \rightarrow M'$  und  $f' : M' \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist der Pullback  $f = F^*(f')$  von  $f'$  folgendermaßen definiert:  $f(p) = f'(F(p))$ .*

Man kann nicht-injektive Funktionen eben nur „zurücknehmen“ und nicht umgekehrt. Der Pullback  $F^*$  ist  $\mathbb{R}$ -linear. Nun gilt das

**Lemma 28** *Die Ableitung von  $F^*(f')$  in Richtung  $X$  ist gleich der Ableitung von  $f'$  in Richtung  $E_*X$ , d.h.  $D_X(F^*(f')) = D_{E_*X}f'$ .*

hier fehlt noch etwas

## 13.10 Aufgaben zu Kapitel 13

### Aufgabe 13.1: Infinitesimale Lorentztransformationen

Die zu den Lorentztransformationen gehörenden 6 Noetherströme sind

$$M^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} (x^\mu T^{\rho\nu} - x^\nu T^{\rho\mu})$$

und führen auf 6 Noether-Ladungen  $J_{\mu\nu} = \int d\mathbf{x} M_{0\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$ . Zeigen Sie, dass für ein reelles Skalarfeld

1. Die 3 Ladungen  $J_{ij}$  im Hamiltonschen Formalismus folgende Form haben

$$J_{ij} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \pi(\mathbf{x}) (x_i \partial_j - x_j \partial_i) \phi(\mathbf{x}).$$

2. Bestimmen Sie die Operatoren  $L_{ij}$  auf der rechten Seite von

$$\{J_{ij}, \phi(\mathbf{x})\} = L_{ij} \phi(\mathbf{x}).$$

3. Berechnen Sie die Poissonklammern der  $J_{ij}$ .

# 14 Wurzelsysteme von einfachen Lie-Algebren

*Beweisen muss ich diesen Käse sonst ist die Arbeit unseriös.*

FRIEDRICH WILLE

In diesem Kapitel werden wir Quantisierungsbedingungen für die Wurzeln von einfachen Lie-Algebren ableiten und deren Lösungen vorstellen und diskutieren. Dies führt auf die vollständige Klassifikation aller endlich-dimensionalen einfachen Lie-Algebren – die sogenannte *Cartan-Klassifikation*. Über den komplexen Zahlen gibt es 4 unendliche Serien (die klassischen Lie-Algebren) und 5 exzeptionelle Lie-Algebren und über den reellen Zahlen 12 unendliche Serien und 23 exzeptionelle Lie-Algebren. Da jede halbeinfache Lie-Algebra die direkte Summe von einfachen Idealen ist, genügt es im Folgenden *einfache Lie-Algebren* zu betrachten.

## 14.1 Wurzeln einer einfachen Lie-Algebra

Wir verallgemeinern die von der Quantenmechanik bekannte Methode der Auf- und Absteigeoperatoren für  $SU(2)$  auf beliebige einfache Lie-Algebren. Wir wählen nun eine bezüglich der Killing-Form orthogonale Basis, so dass die ersten  $r = \text{Rang}(\mathfrak{g})$  Basisvektoren  $H_1, \dots, H_r$  in der adjungierten Darstellung miteinander kommutieren,

$$[\text{ad}_{H_i}, \text{ad}_{H_j}] = 0. \quad (14.1)$$

Die von den  $H_i$  aufgespannte maximale Abelsche Unter algebra  $\mathfrak{h}$  nennt man eine *Cartan-Unter algebra*. Wegen (14.1) sind die Abbildungen  $\text{ad}_{H_i}$  gleichzeitig diagonalisierbar. Im Allgemeinen können die bezüglich der Killing-Form schiefsymmetrischen Abbildungen  $\text{ad}_{H_i}$  nur im Komplexen diagonalisiert werden. Deshalb führen wir die komplexifizierte Lie-Algebra  $\mathfrak{g}_c$  von  $\mathfrak{g}$  ein. Die Killing-Form kann zu einer bilinearen Form auf  $\mathfrak{g}_c$  erweitert werden. Ist die Lie-Algebra einfach, so kann man in der komplexifizierten Lie-Algebra die Elemente der Cartan-Unter algebra orthonormal wählen,

$$K(H_i, H_j) = \text{Sp}(\text{ad}_{H_i} \text{ad}_{H_j}) = -\delta_{ij}. \quad (14.2)$$

Wir diagonalisieren nun die kommutierenden  $\text{ad}_{H_i}$  in  $\mathfrak{g}_c$ :

$$\text{ad}_{H_i}(E_\alpha) = [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (14.3)$$

Der Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}^r$  heißt *Wurzelvektor* von  $\mathfrak{g}$  und  $E_\alpha$  ist der zu  $\alpha$  gehörige Stufenoperator.

Die Menge der Wurzeln bezeichnen wir mit  $\Phi$ . Ihre Anzahl ist  $|\Phi| = \dim(\mathfrak{g}) - \text{Rang}(\mathfrak{g})$ .

Im Folgenden bezeichne  $(X, Y) = -K(X, Y)$  bis auf das Vorzeichen die Killing-Form. Für kompakte Lie-Algebren definiert die Klammer ein Skalarprodukt. Zwei Stufenoperatoren  $E_\alpha, E_\beta$  stehen für  $\alpha + \beta \neq 0$  bezüglich der Killing-Form senkrecht aufeinander. Dies folgt aus der Invarianz der Killing-Form,

$$0 = (\text{ad}_{H_i} E_\alpha, E_\beta) + (E_\alpha, \text{ad}_{H_i} E_\beta) = (\alpha_i + \beta_i) (E_\alpha, E_\beta) \stackrel{\alpha \neq -\beta}{\implies} (E_\alpha, E_\beta) = 0. \quad (14.4)$$

Genauso beweist man, dass die Elemente der Cartan-Unteralgebra senkrecht zu den Stufenoperatoren sind,

$$0 = (\text{ad}_{H_j} H_i, E_\alpha) + (H_i, \text{ad}_{H_j} E_\alpha) = \alpha_j (H_i, E_\alpha) \implies (H_i, E_\alpha) = 0. \quad (14.5)$$

Mit  $\alpha$  muss auch  $-\alpha$  eine Wurzel sein. Wäre dem nicht so, dann stünde  $E_\alpha$  senkrecht auf  $\mathfrak{g}$ , was für eine einfache Lie-Algebra nicht möglich ist.

Wegen der Jacobi-Identität gilt

$$[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = -[E_\beta, [H_i, E_\alpha]] - [E_\alpha, [E_\beta, H_i]] = (\alpha_i + \beta_i)[E_\alpha, E_\beta],$$

was wiederum bedeutet, dass mit  $\alpha, \beta$  auch  $\alpha + \beta$  eine Wurzel ist, falls  $E_{\alpha+\beta} \propto [E_\alpha, E_\beta]$  nicht verschwindet. Schlußendlich kommutiert  $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$  mit allen  $H_i$  und muss deshalb in  $\mathfrak{h}$  liegen,  $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \beta_j H_j$ . Die linke Seite in

$$(H_i, [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = \beta_j (H_i, H_j) = \beta_i$$

kann wegen der Invarianz von  $(X, Y) = -K(X, Y)$  wie folgt geschrieben werden,

$$([H_i, E_\alpha], E_{-\alpha}) = \alpha_i (E_\alpha, E_{-\alpha}).$$

Normieren wir die Stufenoperatoren gemäß  $(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$  dann folgt  $\beta_i = \alpha_i$ .

### Lie-Produkte und Normierungen der Elemente der Cartan-Weyl-Basis

Die Kommutationsregeln für die Elemente  $\{H_i, E_\alpha\}$  der *Cartan-Weyl-Basis* lauten:

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad [E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} \alpha_i H_i & \text{falls } \beta = -\alpha \\ N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (14.6)$$

Dabei sind die Elemente  $H_i, E_\alpha$  wie folgt normiert:

$$(H_i, H_j) = \delta_{ij}, \quad (H_i, E_\alpha) = 0, \quad (E_\alpha, E_\beta) = \delta_{\alpha+\beta, 0}. \quad (14.7)$$

## 14.2 Quantisierung der Wurzeln

Wir definieren die Skalarprodukte  $\alpha \cdot \beta = \alpha_i \beta_i$  und  $\alpha \cdot H = \alpha_i H_i$ , wobei über  $i$  summiert wird. Im Folgenden ist es vorteilhaft eine andere Basis der Cartan-Unteralgebra zu wählen:

$$H_\alpha = \frac{2}{\alpha^2} \alpha \cdot H. \quad (14.8)$$

Gleichzeitig skalieren die Stufenoperatoren gemäß

$$E_\alpha \mapsto \sqrt{\frac{\alpha^2}{2}} E_\alpha. \quad (14.9)$$

Aus der zweiten Gleichung in (14.6) folgen die Kommutationsregeln der  $H_\alpha$  mit den Stufenoperatoren,

$$[H_\alpha, E_\beta] = \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} E_\beta \stackrel{\beta=\alpha}{\implies} [H_\alpha, E_{\pm\alpha}] = \pm 2E_{\pm\alpha}, \quad (14.10)$$

während die dritte Gleichung in (14.6) für  $\beta = -\alpha$  folgende Form annimmt,

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha. \quad (14.11)$$

Für jede Wurzel  $\alpha$  erzeugen damit die drei Elemente

$$\{J_+, J_-, J_3\} \propto \left\{ E_\alpha, E_{-\alpha}, \frac{H_\alpha}{2} \right\}$$

eine  $\mathfrak{su}(2)$  Lie-Unteralgebra mit den wohl-bekanntenen Kommutationsregeln des Drehimpulses,

$$[J_+, J_-] = 2J_3, \quad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm. \quad (14.12)$$

Die adjungierte Abbildung dieser  $\mathfrak{su}(2)$  auf dem Vektorraum  $\mathfrak{g}$  ist im Allgemeinen reduzibel. Aus der Quantenmechanik wissen wir, dass  $J_3$  nur halbganze Eigenwerte hat. Damit haben die  $H_\alpha$  nur ganzzahlige Eigenwerte.

Die Wurzeln einer Lie-Algebra erfüllen die Quantisierungsregeln

$$n_{\alpha\beta} \equiv \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \Phi. \quad (14.13)$$

Die Kommutationsrelation von  $H_\alpha$  und  $E_{\pm\alpha}$  in (14.10) bedeutet dann, dass die Stufenoperatoren  $E_\alpha$  bzw.  $E_{-\alpha}$  die Eigenwerte von  $H_\alpha$  um 2 erhöhen bzw. um 2 erniedrigen.

Es sei  $\beta = \eta\alpha$  parallel zur Wurzel  $\alpha$  mit Streckungsfaktor  $\eta \neq 0$ . Dann würde gelten

$$n_{\alpha\beta} = 2\eta \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad n_{\beta\alpha} = \frac{2}{\eta} \in \mathbb{Z}$$

woraus folgt, dass  $|\eta|$  nur die Werte  $1/2, 1$  und  $2$  annehmen kann.

**Definition 52** Eine Wurzel  $\alpha$  heißt unteilbar, wenn  $\alpha/2$  keine Wurzel ist. Ein System von Wurzeln heißt reduziert, wenn es keine teilbare Wurzeln besitzt.

Im Folgenden wird angenommen, dass die betrachteten Wurzelsysteme reduziert sind. Dann ist nur die Wurzel  $-\alpha$  parallel zu  $\alpha$ .

Die in (14.13) definierten ganzen Zahlen  $n_{\alpha\beta}$  und  $n_{\beta\alpha}$  haben das gleiche Vorzeichen oder verschwinden beide. Sie können aber nicht beliebig groß werden. Um dies einzusehen, führen wir den Winkel  $\theta$  zwischen zwei Wurzeln ein,

$$\cos \theta = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|}. \quad (14.14)$$

Wegen der Schwartz-Ungleichung gilt

$$0 \leq n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} = 4 \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} \leq 4. \quad (14.15)$$

was die erlaubten Werte von  $\cos \theta$  enorm einschränkt,

$$n_{\alpha\beta} \cdot n_{\beta\alpha} = 4 \cos^2 \theta \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \quad (14.16)$$

Ist  $\alpha \cdot \beta \neq 0$  dann gilt für das Verhältnis der ganzen Zahlen  $n_{\alpha\beta}$  und  $n_{\beta\alpha}$

$$\frac{n_{\alpha\beta}}{n_{\beta\alpha}} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}. \quad (14.17)$$

Das Produkt der ganzen Zahlen in (14.16) ist nur für  $\theta \in \{0, \pi\}$  gleich 4. Also nur wenn  $\beta$  und  $\alpha$  linear abhängig sind, was in einer reduzierten Wurzelsystem  $\beta = \pm\alpha$  bedeutet. Sind  $\alpha$  und  $\beta$  linear unabhängig, dann kommt der Wert 4 in (14.16) nicht vor.

Für jede erlaubte Wahl von  $n_{\alpha\beta}$  und  $n_{\beta\alpha}$  tritt neben dem Winkel  $\theta$  auch immer der Winkel  $\pi - \theta$  auf, wie man mithilfe einer Weyl-Reflektion an der Ebene senkrecht zu  $\alpha$  einsieht (diese Reflektionen werden im nächsten Abschnitt eingeführt). Es genügt deshalb, Winkel in  $\theta \in [0, \pi/2]$  zu betrachten. Die vier Einstellmöglichkeiten von zwei Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  sind (bis auf Austausch) in der Tabelle 14.1 zusammengefasst. Sie sind auch noch graphisch in Abbildung 14.1 gezeigt.

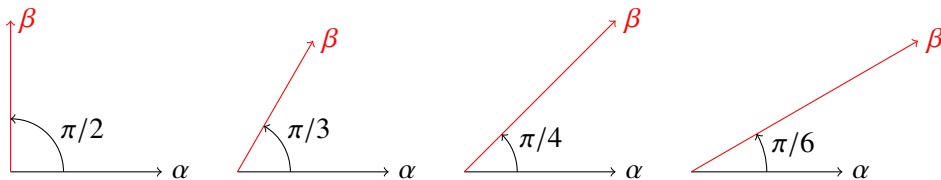


Abbildung 14.1: Mögliche Winkel und relative Längen von zwei Wurzeln.

$(n_{\alpha\beta}, n_{\beta\alpha})$	$\cos^2 \theta$	$\theta$	$\cos \theta$	Längenverhältnis
$(0, 0)$	0	$\pi/2 = 90^\circ$	0	beliebig
$\pm(1, 1)$	1/4	$\pi/3 = 60^\circ$	1/2	$\alpha^2 = \beta^2$
$\pm(2, 1)$	1/2	$\pi/4 = 45^\circ$	$1/\sqrt{2}$	$2\alpha^2 = \beta^2$
$\pm(3, 1)$	3/4	$\pi/6 = 30^\circ$	$\sqrt{3}/2$	$3\alpha^2 = \beta^2$

Tabelle 14.1: Die möglichen Werte des Winkels zwischen zwei Wurzeln und deren relative Länge.

### 14.2.1 Weyl-Reflektionen

Die *Weyl-Reflektionen* sind Automorphismen der Menge  $\Phi$  der Wurzeln von  $\mathfrak{g}$ . Ihre Existenz beruht auf der Wirkung der  $\mathfrak{su}(2)$ -Unteralgebren  $(E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha)$  der komplexifizierten Lie-Algebra. Es sei  $E_\beta$  ein Eigenvektor von  $H_\alpha$  in der adjungierten Darstellung, siehe (14.10). Der Stufenoperator  $E_{-\alpha}$  erniedrigt diesen Eigenwert um 2,

$$[H_\alpha, [E_{-\alpha}, E_\beta]] = \left( \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} - 2 \right) [E_{-\alpha}, E_\beta] \quad (14.18)$$

und es muss im  $\mathfrak{su}(2)$  Multiplett neben  $E_\beta$  einen weiteren Eigenvektor mit einer zu  $E_\beta$  entgegengesetzten „magnetischen Quantenzahl“ geben,

$$\frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} - 2m = -\frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}. \quad (14.19)$$

Den zugehörigen Eigenvektor erhält man durch  $m$ -maliges Anwenden von  $\text{ad}_{E_{-\alpha}}$  auf  $E_\beta$ . Deshalb ist mit  $\beta$  auch

$$\beta - m\alpha = \beta - \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \alpha \quad (14.20)$$

eine Wurzel von  $\mathfrak{g}$ . Wir haben hier  $m$  aus (14.19) entnommen. Die Abbildung

$$\beta \mapsto \sigma_\alpha(\beta) \equiv \beta - \frac{2\beta \cdot \alpha}{\alpha^2} \alpha. \quad (14.21)$$

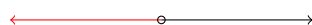
ist eine Reflektion an der Ebene senkrecht zur Wurzel  $\alpha$ . Nur wenn  $\alpha$  und  $\beta$  senkrecht zueinander stehen, liegt der gespiegelte Vektor auf dem ursprünglichen Vektor.

Damit haben wir bewiesen, dass die Menge der Wurzelvektoren bei einer Spiegelung an der Ebene senkrecht zu einer beliebigen Wurzel in sich übergeht: Für jedes Paar von Wurzeln  $\alpha, \beta$  ist

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \alpha \quad (14.22)$$

wieder eine Wurzel. Jede dieser Spiegelungen permutiert die Wurzeln in  $\Phi$ . Man nennt sie *Weyl-Reflektionen*. Sie erzeugen die endliche Weyl-Gruppe  $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ , die neben den Spiegelungen auch die von den Spiegelungen erzeugten Drehungen enthält.

Wir fassen zusammen:

Abbildung 14.2: Wurzelsystem von  $A_1$ 

Ein (reduziertes) Wurzelsystem ist eine endliche Menge von Vektoren im reellen Euklid'schen Vektorraum  $\mathcal{V}$  mit

1.  $\Phi$  spannt  $\mathcal{V}$  auf,
2. ist  $\alpha \in \Phi$  dann sind die einzigen Vielfachen von  $\alpha$  in  $\Phi$  die Vektoren  $\pm\alpha$ ,
3. ist  $\alpha \in \Phi$  dann ist  $\sigma_\alpha \Phi = \Phi$ .

?

Überlegen Sie sich, dass eine Weyl-Transformation der Stufenoperatoren wie folgt implementiert wird:

$$E_\beta \mapsto E_{\sigma_\alpha(\beta)} = \tilde{\sigma}_\alpha E_\beta \tilde{\sigma}_\alpha^{-1} \quad \text{mit} \quad \tilde{\sigma}_\alpha = e^{-i\pi(E_\alpha + E_{-\alpha})/2}. \quad (14.23)$$

siehe [Volesung spezial98.pdf](#) Bei der Klassifikation unterscheidet man zwischen reduziblen und irreduziblen Systemen:

**Definition 53 (Reduzible und irreduzible Wurzelsysteme)** *Ein Wurzelsystem  $\Phi$  heißt reduzibel, wenn es die disjunkte Vereinigung von zwei Wurzelsystemen ist,  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , und jedes Element von  $\Phi_1$  auf jedem Element von  $\Phi_2$  senkrecht steht. Es heißt irreduzibel, wenn es keine derartig Zerlegung gibt.*

Eine halbeinfache Lie-Algebra ist genau dann einfach, wenn ihr zugehöriges Wurzelsystem  $\Phi$  irreduzibel ist. Bei der Klassifikation von Wurzelsystemen kann man sich deshalb auf irreduzible Systeme beschränken – reduzible Systeme sind auf einfache Weise aus irreduziblen Wurzelsystemen zusammengesetzt.

## 14.3 Wurzelsysteme von Lie-Algebren mit Rang 1 und 2

**Wurzelsystem für Rang 1:** Da die Wurzeln im  $\mathbb{R}$  liegen, gibt es, weil mit  $\alpha$  auch  $-\alpha$  eine Wurzel ist, nur ein Wurzelsystem: Es ist das Wurzelsystem der  $1 + 2 = 3$ -dimensionalen Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(2)$ . Die Weyl-Gruppe  $\mathbb{Z}_2$  besteht aus der Identität und der Reflexion  $\alpha \rightarrow -\alpha$ .

**Wurzelsysteme für Rang 2:** Die Wurzeln liegen in  $\mathbb{R}^2$  und es gibt mindestens zwei Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$ . Mit jeder Wurzel  $\alpha$  ist bekanntlich auch  $-\alpha$  eine Wurzel, so dass es dann mindestens vier Wurzeln geben muss.

- Wir beginnen mit dem Fall  $\theta = \pi/2$  der Möglichkeiten in der Tabelle 14.1. Dann stehen  $\alpha$  und  $\beta$  senkrecht aufeinander. Die Weylreflektionen erzeugen keine neuen Wurzeln mehr und wir erhalten das reduzible Wurzelsystem in Abb. 14.3. Die beiden Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$

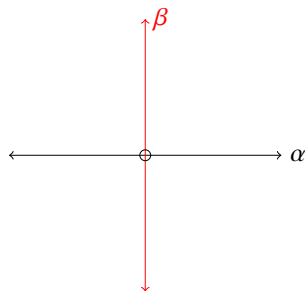


Abbildung 14.3: Wurzelsystem von  $A_1 \oplus A_1$

brauchen nicht dieselbe Länge haben. Wegen

$$[H_\alpha, E_\beta] = [H_\beta, E_\alpha] = 0 \tag{14.24}$$

erzeugen die beiden Mengen

$$\{H_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha}\} \quad \text{und} \quad \{H_\beta, E_\beta, E_{-\beta}\} \tag{14.25}$$

zwei dreidimensionale Unteralgebren, die miteinander vertauschen,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ . Die Weyl-Gruppe  $\mathcal{W} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  wirkt reduzibel auf  $\mathbb{R}^2$ .

- Nun betrachten wir den Fall  $\theta = 60^\circ$  in Abbildung 14.4. Beginnen wir mit  $\alpha$  und  $\beta$ , zwei

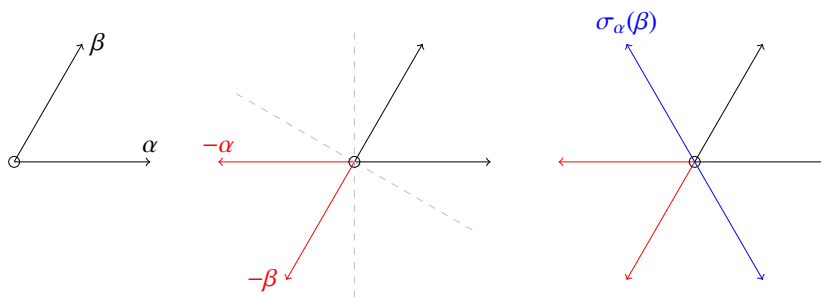


Abbildung 14.4: Wurzelsystem von  $A_2$

Vektoren derselben Länge und einem Zwischenwinkel von  $60^\circ$ . Dann sind auch  $-\alpha$  und  $-\beta$  Wurzeln. Die möglichen Weylreflektionen erzeugen dann zwei weitere Wurzelvektoren. Das gleichseitige 6-Eck, das von den resultierenden Vektoren aufgespannt wird, ist abgeschlossen unter allen Weyl-Reflektionen. Es definiert eine  $2 + 6 = 8$ -dimensionale Lie-Algebra. Es ist die Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(3)$ .



Ihre *Weyl-Gruppe* wird von den Reflektionen an den Ebenen senkrecht zu den Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$  erzeugt. Sie enthält neben der Einheit die Spiegelungen an den drei Ebenen senkrecht zu *allen Wurzeln* und die Drehungen um  $2\pi/3$  und  $4\pi/3$ . Sie ist isomorph zu der Diedergruppe  $\mathcal{D}_3$  oder zur Permutationsgruppe  $S_3 \cong \mathcal{D}_3$  und sie wirkt transitiv auf  $\Phi$ . Dies bedeutet, dass das Orbit jeder Wurzel gleich  $\Phi$  ist.

3. Als Nächstes betrachten wir den Fall  $\theta = 45^\circ$  in Abbildung 14.5. Beginnen wir mit  $\alpha$

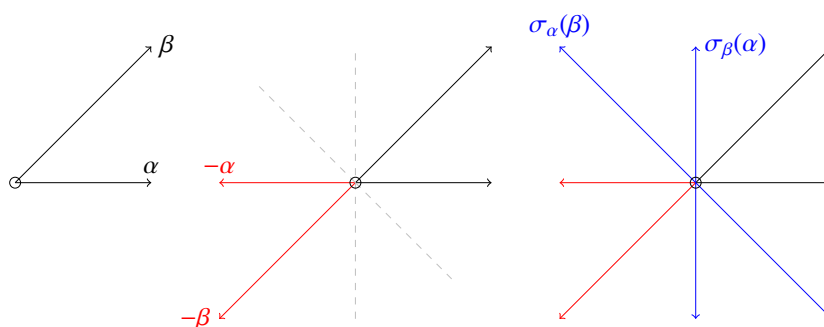


Abbildung 14.5: Wurzelsystem von  $B_2$

und  $\beta$ , zwei Vektoren mit  $\beta^2 = 2\alpha^2$  und einem Zwischenwinkel von  $45^\circ$ . Wir zählen die Vektoren  $-\alpha$  und  $-\beta$  und die mithilfe der Weyl-Reflektionen gewonnenen Wurzelvektoren hinzu. Das resultierende System bestehend aus 8 Vektoren ist abgeschlossen unter allen Reflektionen und definiert die  $2 + 8 = 10$ -dimensionale  $\mathfrak{so}(5)$  Lie-Algebra.

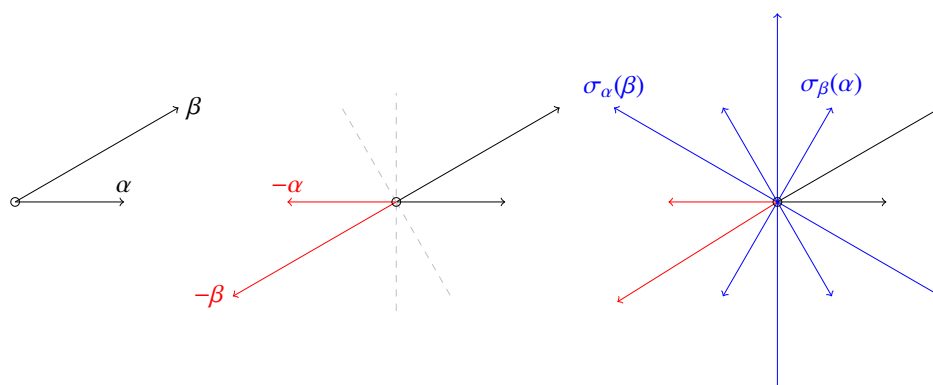
Die *Weyl-Gruppe* enthält neben der Einheit die Reflektionen an den vier Ebenen senkrecht zu den Wurzeln und die Drehungen um  $\pi/2$ ,  $\pi$  und  $3\pi/2$  und ist isomorph zu der Diedergruppe  $\mathcal{D}_4$ . Sie wirkt transitiv auf der Menge der kurzen Wurzeln bzw. auf der Menge der langen Wurzeln.

4. Schlussendlich untersuchen wir den Fall  $\theta = 30^\circ$  in der Tabelle 14.1 und beginnen mit Vektoren  $\alpha$  und  $\beta$  mit einem Zwischenwinkel von  $30^\circ$  und  $\beta^2 = 3\alpha^2$ . Dieses unter Weyl-Reflektionen abgeschlossene Wurzelsystem definiert eine  $2 + 12 = 14$ -dimensionale Lie-Algebra. Es ist die exzeptionelle Lie-Algebra  $G_2$ .

?

Überzeugen Sie sich davon, dass die *Weyl-Gruppe* von  $G_2$  isomorph zur Diedergruppe  $\mathcal{D}_6$  ist und dass sie transitiv wirkt auf der Menge der kurzen Wurzeln bzw. auf der Menge der langen Wurzeln.

Damit haben wir alle einfachen (und reduzierten) Lie-Algebren vom Rang 2 konstruiert.

Abbildung 14.6: Wurzelsystem von  $G_2$ 

Es existieren drei einfache Lie-Algebren vom Rang 2. Dies sind die Lie-Algebren  $\mathfrak{su}(3)$ ,  $\mathfrak{so}(5)$  und  $\mathfrak{g}_2$  der Dimensionen 8, 10 und 14.

In der Cartan-Klassifikation heißen diese Lie-Algebren  $A_2$ ,  $B_2$  und  $G_2$ . Die Anzahl Elemente ihrer Weyl-Gruppen erhält man in LiE mit dem Befehl `W_order`:

**LiE**

```
W_order(A1) -> 2   W_order(A2) -> 6
W_order(B2) -> 8   W_order(G2) -> 12
```

Die Weyl-Gruppe ist eine endliche Untergruppe der orthogonalen Gruppe  $O(r)$  und erhält deshalb die Länge von Wurzeln und die Winkel zwischen Wurzeln. Sind zwei Wurzeln verschieden lang, dann können sie nicht im selben Orbit der Weyl-Gruppe liegen. In LiE erfährt man die Bahn einer Wurzel  $\alpha$  unter der Gruppenwirkung mit dem Befehl `W_rt_orbit(alpha, g)`. Für die Lie-Algebra  $B_2$  existieren lange Wurzeln und kurze Wurzeln und das Verhältnis ihrer Längenquadrate ist 2. Es existieren zwei Orbits:

**LiE**

```
norm[1,0],B2) -> 4   /* [1,0] ist die lange einfache Wurzel
norm[0,1],B2) -> 2   /* [0,1] ist die kurze einfache Wurzel
W_rt_orbit([1,0],B2) -> [[ 1, 2]
                        , [ 1, 0]
                        , [-1, 0]
                        , [-1, -2]]
W_rt_orbit([0,1],B2) -> [[ 1, 1]
                        , [ 0, 1]
                        , [ 0, -1]
```

$$, [-1, -1]]$$

Das Orbit der einfachen Wurzel  $[1, 0]$  enthält so viele Wurzeln wie dasjenige der einfachen Wurzel  $[0, 1]$ .

### 14.3.1 Explizite Basis für die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(3)$

Wir konstruieren und analysieren die Elemente der 8-dimensionalen Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(3)$  bestehend aus allen anti-hermiteschen spurlosen Matrizen. In der Physik-Literatur werden aber hermitesche Matrizen bevorzugt, da dies Kandidaten für Observablen sind. Wir multiplizieren die Generatoren also mit  $i$  und wählen als Basis die hermiteschen Matrizen

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & X_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & X_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 X_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & X_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & X_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 X_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & X_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{14.26}$$

Die Matrizen sind orthogonal bezüglich des von der Spur definierten Skalarprodukts,

$$(X_i, X_j) = \text{Sp} X_i X_j = 2\delta_{ij}. \tag{14.27}$$

?

Überzeugen Sie sich davon, dass  $\text{Sp}(X_i X_j) = c K(X_i, X_j)$  gilt. Welchen Wert hat die Konstante  $c$ ?

Die nicht-verschwindenden Strukturkonstanten  $f_{ij}^k$  mit  $i < j < k$  lauten

$ijk$	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f_{ij}^k$	2	1	-1	1	1	1	-1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

Die  $f_{ij}^k$  sind vollständig antisymmetrisch in den drei Indizes und diese Eigenschaft legt die verbleibenden Strukturkonstanten fest.

Als Cartan-Unteralgebra wählen wir den linearen Span der Diagonalmatrizen  $H_1 = X_3$  und  $H_2 = X_8$ . Man findet folgende drei Stufenoperatoren und Wurzeln:

$$\begin{aligned} E_{\alpha_{(1)}} &= \frac{1}{2}(X_1 + iX_2) : & \alpha_{(1)} &= (2, 0) \\ E_{\alpha_{(2)}} &= \frac{1}{2}(X_6 + iX_7) : & \alpha_{(2)} &= (-1, \sqrt{3}) \\ E_{\alpha_{(3)}} &= \frac{1}{2}(X_4 + iX_5) : & \alpha_{(3)} &= (1, \sqrt{3}). \end{aligned} \quad (14.28)$$

Die 6 Wurzelvektoren haben alle die Länge 2 und definieren eine gleichseitiges Sechseck wie in der Abbildung 14.7 dargestellt. Ebenfalls gezeigt sind die Spiegelungsebenen und eine Weyl-Reflektion. Ausgeschrieben haben die Erzeugenden die Form

$$\begin{aligned} E_{\alpha_{(1)}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_{\alpha_{(1)}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{\alpha_{(2)}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_{\alpha_{(2)}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ E_{\alpha_{(3)}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_{\alpha_{(3)}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 14.4 Eigenschaften von Wurzelsystemen

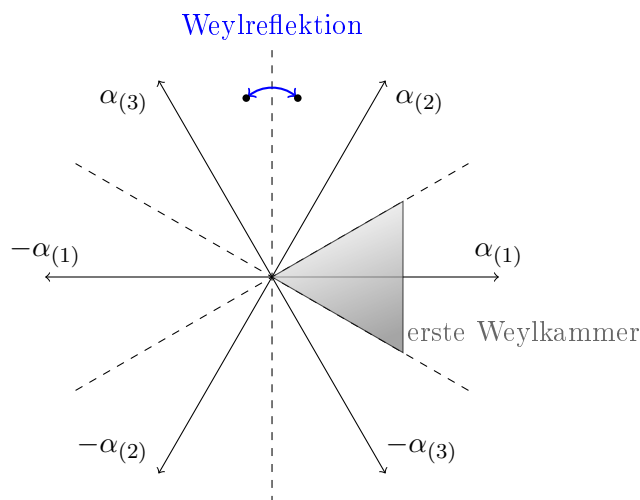
Im Allgemeinen ist die Anzahl Wurzeln größer als der Rang der Gruppe, so dass diese linear abhängig sind. Deshalb ist es sinnvoll eine Basis von Wurzeln zu wählen

$$\Delta = \{\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(r)}\}, \quad (14.29)$$

so dass jede Wurzel eine Linearkombination dieser Basiselemente ist. Eine besonders geeignete Basis liefern die *einfachen Wurzeln*:

**Satz 62 (Einfache Wurzeln)** *Man kann eine Basis von sogenannten einfachen Wurzeln wählen, so dass für jede Wurzel  $\alpha$  gilt:*

$$\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_{(i)}, \quad (14.30)$$

Abbildung 14.7: Die Wurzeln und erste Weylkammer von  $SU(3)$ .

wobei die Entwicklungskoeffizienten  $n_i$  ganzzahlig sind und alle das gleiche Vorzeichen haben ( $n_i = 0$  ist erlaubt).

Den Beweis führen wir in mehreren Schritten. Zuerst führen wir eine lexigraphische Ordnung der Wurzeln ein: Wir nennen eine Wurzel  $\alpha \in \mathbb{R}^r$  *positiv*, wenn das erste nicht-verschwindende Element von  $\alpha$  positiv ist. Sie heißt *negativ*, wenn  $-\alpha$  positiv ist. Zum Beispiel sind die Wurzeln  $\alpha_{(1)}$  und  $\alpha_{(3)}$  in (14.28) positiv, während  $\alpha_{(2)}$  negativ ist.

Die Menge der positiven Wurzeln wird mit  $\Phi^+$  bezeichnet und die Menge der negativen Wurzeln entsprechend mit  $\Phi^-$ . Jede Wurzel ist entweder positiv oder negativ, so dass  $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$  ist. Die Wurzeln treten immer in Paaren  $\{\alpha, -\alpha\}$  mit einer positiven und einer negativen Wurzel auf. Es folgt, dass  $\Phi^+$  und  $\Phi^-$  gleich viele Wurzeln enthalten. Wir sagen  $\alpha$  ist größer als  $\beta$  wenn  $\alpha - \beta$  positiv ist. Die Definition der positiven Wurzeln hängt von der Wahl der Cartan-Unteralgebra und deren Basiselementen ab. Aber viele der folgenden Eigenschaften sind unabhängig von dieser Wahl.

**Definition 54 (Einfache Wurzeln)** Eine Wurzel  $\alpha$  heißt *einfach*, wenn sie positiv ist und nicht als Summe von positiven Wurzeln geschrieben werden kann. Die Menge der einfachen Wurzeln bezeichnet man mit  $\Delta$ .

Aus dieser Definition folgt nun sofort das

**Lemma 29** Jede positive Wurzel ist die Summe von einfachen Wurzeln,  $\alpha = \sum n_i \alpha_{(i)}$  mit  $n_i \geq 0$ .

*Beweis:* Ist  $\alpha \in \Phi^+$  einfach, dann gibt es nichts zu zeigen. Wenn nicht, dann ist  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  die Summe von positiven Wurzeln mit  $\alpha_1, \alpha_2 < \alpha$ . Ist  $\alpha_1$  oder  $\alpha_2$  nicht einfach, dann kann es als Summe von kleineren positiven Wurzeln geschrieben werden. Dieser iterative Prozess endet mit einfachen Wurzeln. Als höchste Wurzel bezeichnet man diejenige Wurzel, für welche die Summe der Koeffizienten  $n_i$  in der Entwicklung nach einfachen Wurzeln  $\alpha = \sum_i n_i \alpha_{(i)}$  – man nennt diese Summe die Höhe der Wurzel – maximal ist. Ist die Wurzel  $\alpha$  negativ, dann ist  $-\alpha$  positiv und deshalb die Summe von einfachen Wurzeln. Es folgt, dass jede negative Wurzel die Entwicklung  $\alpha = \sum n_i \alpha_{(i)}$  mit  $n_i \leq 0$  hat. Damit wäre die Aussage (14.30) für alle Wurzeln bewiesen.

Die Anzahl positiver Wurzel erhält man in LiE mit dem Befehl `n_pos_roots`. Die positiven Wurzeln sind die Zeilen der Matrix `pos_roots`, wobei die oberen  $r$  Zeilen die einfachen Wurzeln enthalten und die letzte Zeile die höchste Wurzel  $\alpha \in \Phi^+$  enthält.

### LiE

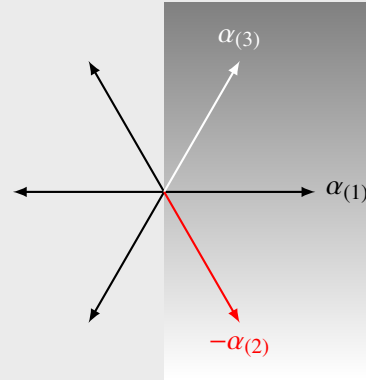
```
n_pos_roots(A2) -> 3
pos_roots(A2) -> [[1,0]
                 , [0,1]]
                 , [1,1]]
high_root(A2) -> [1,1]
n_pos_roots(G2) -> 6
high_root(G2) -> [3,2]
```

**Lemma 30** Sind  $\alpha$  und  $\beta$  verschiedene einfache Wurzeln, dann sind weder  $\alpha - \beta$  noch  $\beta - \alpha$  Wurzeln. Daraus folgt für zwei einfache Wurzeln  $[E_\alpha, E_{-\beta}] = [E_\beta, E_{-\alpha}] = 0$ .

*Beweis:* Da Wurzeln in Paaren kommen wäre mit  $\alpha - \beta$  auch  $\beta - \alpha$  eine Wurzel (und umgekehrt) und eine der beiden wäre positiv. Es sei nun  $\alpha - \beta$  die positive Wurzel (falls sie negativ ist vertausche man  $\alpha$  und  $\beta$ ). Dann wäre  $\alpha$  die Summe der beiden positiven Wurzeln  $\beta$  und  $\alpha - \beta$ . Dies widerspricht aber der Annahme, dass  $\alpha$  einfach sei.

### Einfache Wurzeln von $\mathfrak{su}(3)$

Die drei Wurzeln im schattierten Gebiet der nebenstehenden Abbildung sind positiv, die anderen drei Wurzeln negativ. Als Summe der positiven Wurzeln  $-\alpha_{(2)}$  und  $\alpha_{(3)}$  ist die positive Wurzel  $\alpha_{(1)}$  nicht einfach. Deshalb sind  $-\alpha_{(2)}$  und  $\alpha_{(3)}$  die einfachen Wurzeln. Ihr Skalarprodukt ist  $-2$ , also wie erwartet negativ. Die vier schwarz eingezeichneten Wurzeln sind nicht einfach.



**Lemma 31** Sind  $\alpha$  und  $\beta$  verschiedene einfache Wurzeln, dann ist

$$\alpha \cdot \beta \leq 0. \tag{14.31}$$

*Beweis:* Da  $\alpha, \beta$  einfache Wurzeln sind, ist  $[E_{-\alpha}, E_\beta] = 0$  was bedeutet, dass der Stufenoperator  $E_\beta$  Eigenvektor von  $\text{ad}_{H_\alpha}$  mit *minimaler* magnetischen Quantenzahl im  $\text{su}(2)$ -Multipllett der  $p$ -Vektoren

$$E_\beta, \text{ad}_{E_\alpha}(E_\beta), \dots, \text{ad}_{E_\alpha}^{p-1}(E_\beta), \text{ mit } \text{ad}_{E_\alpha}^p(E_\beta) = 0 \tag{14.32}$$

ist. Aus der Darstellungstheorie für  $\text{su}(2)$  wissen wir, dass die minimale magnetische Quantenzahl  $2\alpha \cdot \beta / \alpha^2$  nicht positiv sein kann und dies beweist das Lemma.

**Lemma 32** Die einfachen Wurzeln sind linear unabhängig.

*Beweis:* Wären Sie linear abhängig, dann wäre eine Linearkombination der einfachen Wurzeln Null,

$$\sum_i c_i \alpha_{(i)} = 0. \tag{14.33}$$

Wir zerlegen die Summe in zwei Anteile,

$$P = \sum_{i, c_i > 0} c_i \alpha_{(i)} \quad \text{und} \quad N = \sum_{j, c_j < 0} c_j \alpha_{(j)}, \tag{14.34}$$

so dass nach Voraussetzung  $P + N = 0$  ist. Aus  $P = -N$  folgt

$$P^2 = N^2 = -N \cdot P = - \sum_{i, c_i > 0} \sum_{j, c_j < 0} c_i c_j \alpha_{(i)} \cdot \alpha_{(j)}.$$

Die beiden Quadrate auf der linken Seite sind nicht-negativ während der Ausdruck auf der rechten Seite nicht-positiv ist, da für einfache Wurzeln  $\alpha_{(i)} \cdot \alpha_{(j)} \leq 0$  ist. Deshalb sind  $P$  und  $N$  gleich dem Nullvektor, im Widerspruch zur Annahme.

**Lemma 33** *Die einfachen Wurzeln bilden eine Basis in  $\mathbb{R}^r$ , wobei  $r$  der Rang der Lie-Algebra ist.*

Wir nehmen an, die einfachen Wurzeln bilden keine Basis. Dann gäbe es einen Vektor  $\gamma \in \mathbb{R}^r$  (nicht notwendigerweise ein Wurzelvektor), der senkrecht zu allen einfachen Wurzeln ist. Da jede Wurzel eine Linearkombination der einfachen Wurzeln ist, steht  $\gamma$  dann auch senkrecht auf allen Wurzeln. Wir betrachten das Element  $h_* = \gamma_i H_i$  in der Cartan-Unteralgebra. Es gilt  $[h_*, E_\alpha] = (\gamma \cdot \alpha) E_\alpha = 0$ . Da die komplexifizierte Lie-Algebra durch die  $H_i$  und  $E_\alpha$  aufgespannt wird ist der lineare Span von  $h_*$  ein nicht-triviales Ideal in  $\mathfrak{g}$  was für eine einfache Lie-Algebra nicht möglich ist.

**Lemma 34** *Es sei  $\Phi$  ein irreduzibles Wurzelsystem (siehe Definition 53 auf Seite 235). Dann wirkt die Weyl-Gruppe  $\mathcal{W}$  irreduzibel in  $\mathbb{R}^r$  und der  $\mathcal{W}$ -Orbit jeder Wurzel spannt  $\mathbb{R}^r$  auf.*

*Beweis:* Anderenfalls gäbe es einen echten invarianten Teilraum  $E \subset \mathbb{R}^r$  unter der Wirkung von  $\mathcal{W}$ . Dann wäre auch sein orthogonales Komplement  $E^\perp$  ein echter invarianter Teilraum, siehe den Beweis von Satz 44 auf Seite 157. Nun wählen wir ein  $\alpha \notin E$  und wirken mit der Weyl-Reflektion  $\sigma_\alpha$  auf ein  $v \in E$ . Der Bildvektor  $\sigma_\alpha(v)$  liegt dann auch in  $E$ , genauso wie der Differenzvektor  $v - \sigma_\alpha(v)$ . Es sei nun  $v$  nicht senkrecht zu  $\alpha$ . Dann ist der Differenzvektor ungleich Null und parallel zu  $\alpha$ . Dies widerspricht unserer Annahme  $\alpha \notin E$ . Also müssen im Fall  $\alpha \notin E$  alle Vektoren in  $E$  senkrecht auf  $\alpha$  stehen. Dies bedeutet, dass jede Wurzel entweder in  $E$  oder in  $E^\perp$  sein muss. Dann zerfällt das Wurzelsystem in zwei orthogonale Teilsysteme. Für ein irreduzibles Wurzelsystem ist dies aber nicht möglich und wir folgern  $E^\perp = \emptyset$ . Dies beweist die erste Aussage im Lemma. Da der lineare Span des  $\mathcal{W}$ -Orbits einer Wurzel einen nicht-trivialen invarianten Teilraum in  $\mathbb{R}^r$  definiert, folgt die zweite Aussage aus der ersten.

**Lemma 35** *Es sei  $\Phi$  ein irreduzibles Wurzelsystem. Dann gibt es maximal zwei verschiedene Wurzellängen und  $\mathcal{W}$  wirkt transitiv auf den langen Wurzeln bzw. auf den kurzen Wurzeln.*

*Beweis:* Seien  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige Wurzeln. Im Weyl-Orbit von  $\alpha$  gibt es eine Wurzel  $\alpha'$  die nicht senkrecht auf  $\beta$  steht, da der lineare Span des Orbits gleich  $\mathbb{R}^r$  ist. Alle Wurzeln im Orbit haben dieselbe Länge wie  $\alpha$ . Deshalb ist das Verhältnis der quadrierten Längen von  $\alpha$  und  $\beta$  gleich demjenigen von  $\alpha'$  und  $\beta$ , also gleich 3, 2, 1, 1/2 oder 1/3. Gäbe es nun drei Wurzelvektoren mit verschiedenen Längen dann würden neben den Verhältnissen 1/2 und 1/3 auch das Verhältnis 2/3 auftreten, was bekanntlich nicht erlaubt ist. Es seien nun  $\alpha$  und  $\beta$  zwei beliebige Wurzeln mit gleicher Länge. Wir dürfen zusätzlich  $(\alpha, \beta) > 0$  voraussetzen, da  $\alpha$  und  $-\alpha$  im selben Weyl-Orbit liegen. Dann gilt  $n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha} = 1$ , siehe Tabelle 14.1, so dass

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha\beta}\alpha = \beta - \alpha \quad \text{und} \quad (\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha)(\beta) = (\sigma_\alpha\sigma_\beta)(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha.$$

Dies ist genau die Aussage, dass die beiden Wurzeln im gleichen Weyl-Orbit liegen.



**Lemma 36** *Es sei  $\alpha$  eine einfache Wurzel und  $\beta$  eine positive Wurzel ungleich  $\pm\alpha$ . Dann ist  $\sigma_\alpha(\beta)$  ebenfalls positiv.*

*Beweis:*  $\alpha$  ist eine der einfachen Wurzeln, sagen wir  $\alpha_{(1)}$ , und  $\beta = \sum n_i \alpha_{(i)}$  mit  $n_i \geq 0$ . Nun ist

$$\sigma_{\alpha_{(1)}}(\beta) = \sum n_i \alpha_{(i)} - \left( \sum_{i=1}^r 2n_i \frac{(\alpha_{(1)}, \alpha_{(i)})}{\alpha_{(1)}^2} \right) \alpha_{(1)}$$

Wegen  $\beta \neq \alpha$  ist mindestens ein  $n_i > 0$  für  $i > 1$ . Da nach Satz 62 alle Entwicklungskoeffizienten bei der Entwicklung einer Wurzel nach einfachen Wurzeln dasselbe Vorzeichen haben, muss  $\sigma_{\alpha_{(1)}}(\beta)$  in  $\Phi^+$  liegen. **Siehe Folien.**

## 14.5 Cartan-Matrix und Dynkin-Diagramme

Aus einem Satz einfacher Wurzeln kann man mit Weyl-Reflexionen alle Wurzeln rekonstruieren. Die ganze Information über die Lie-Algebra ist deshalb in den normierten Skalarprodukten der einfachen Wurzeln codiert. Diese bilden die ganzzahligen Matrixelemente der *Cartan-Matrix*  $K$ :

$$K_{ij} = \frac{2\alpha_{(i)} \cdot \alpha_{(j)}}{\alpha_{(j)}^2}, \quad K \in \text{GL}(r, \mathbb{Z}). \quad (14.35)$$

Da die  $\alpha_{(i)}$  linear unabhängig sind ist  $K$  regulär. Die Diagonalelemente sind alle 2 und enthalten überflüssige Information. Die Nebendiagonalelemente sind negativ oder Null. Haben alle einfachen Wurzeln gleiche Länge, dann ist  $K$  symmetrisch und man spricht von *simply laced groups*.

?

Was sind die möglichen Cartan-Matrizen für Lie-Algebren mit dem Rang 2.

Berücksichtigen wir die Einschränkungen in der Tabelle 14.1 auf Seite 234 an die Skalarprodukte der Wurzeln, dann bleiben nur

$$\text{su}(3): K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{so}(5): K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{g}_2: K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \dots \quad (14.36)$$

Die Cartan-Matrix erhält man in LiE mithilfe des Befehls **Cartan**:

**LiE**

```
Cartan(G2) -> [[2, -1]
                , [-3, 2]]
```

Mit wachsendem Rang wird es vorteilhafter, die in  $K$  enthaltene Information in einem *Dynkin-Diagramm* wie folgt zu codieren:

1. Zu jeder einfachen Wurzeln  $\alpha$  assoziiert man einen Vertex  $V_\alpha$ .
2. Zwei Vertices  $V_\alpha$  und  $V_\beta$  werden mit  $n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} \in \{0, 1, 2, 3\}$  Linien verbunden.
3. Werden zwei Vertices mit mehr als einer Linie verbunden, dann ist  $|\alpha| \neq |\beta|$ . Dann zeichnet man einen Pfeil von  $V_\alpha$  zu  $V_\beta$ , wenn  $|\alpha| > |\beta|$ , und umgekehrt. Alternativ kennzeichnet man die Vertices zu den kurzen Wurzeln mit einem vollen Kreis und diejenigen zu den langen Wurzeln mit einem offenen Kreis.

Die Analysis aller möglichen Fälle führte auf die Cartan'sche Klassifizierung der einfachen komplexen Lie-Algebren. Es gibt vier unendliche Familien von Lie-Algebren und fünf exzeptionelle Lie-Algebren. Traditionell bezeichnet man sie mit

$$A_r, B_r, C_r, D_r, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. \quad (14.37)$$

Der Index bezeichnet den Rang der Algebra. Der Beweis macht davon Gebrauch, dass die Cartan-Matrix positiv definit ist, dass maximal ein nicht-Diagonalelement verschieden von 0 und  $-1$  ist und dass das Diagramm keine Schleifen enthält.

Die vier Familien sind die komplexifizierten Lie-Algebren der klassischen Gruppen,

$$A_r = \mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}), \quad B_r = \mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C}), \quad C_r = \mathfrak{sp}(2r, \mathbb{C}), \quad D_r = \mathfrak{so}(2r, \mathbb{C}), \quad (14.38)$$

oder mit ihren eindeutigen kompakten Formen

$$A_r = \mathfrak{su}(r+1), \quad B_r = \mathfrak{so}(2r+1), \quad C_r = \mathfrak{usp}(2r), \quad D_r = \mathfrak{so}(2r). \quad (14.39)$$

Die exzeptionellen Lie-Algebren  $E_6, E_7, E_8, F_4$  und  $G_2$  haben die Dimensionen 78, 133, 248, 52 und 14. Es sind die Lie-Algebren der exzeptionellen Lie-Gruppen.

$$A_r \quad \circ \cdots \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \quad r \geq 1$$

$$B_r \quad \circ \cdots \circ - \circ - \circ - \circ = \bullet \quad r \geq 2$$

$$C_r \quad \bullet \cdots \bullet - \bullet - \bullet - \bullet = \circ \quad r \geq 3$$

$$D_r \quad \circ \cdots \circ - \circ - \circ - \circ \begin{array}{l} \diagup \circ \\ \diagdown \circ \end{array} \quad r \geq 4$$

$$G_2 \quad \circ = \bullet$$

$$F_4 \quad \circ - \circ = \bullet - \bullet$$

$$E_6 \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array}$$

$$E_7 \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array}$$

$$E_8 \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array}$$

## 14.6 Anhang: Explizite irreduzible Wurzelsysteme

Es sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine kartesische Basis im  $\mathbb{R}^n$ . Im Folgenden steht  $\pm e_i \pm e_j$  für die 4 Vektoren  $e_i + e_j$ ,  $e_i - e_j$ ,  $-e_i + e_j$  und  $-e_i - e_j$ .

**Wurzelsystem von  $A_r$ :** Es sei  $E$  die Hyperebene in  $\mathbb{R}^{r+1}$  orthogonal zum Vektor  $e_1 + e_2 + \dots + e_{r+1}$ . Dann enthält das Wurzelsystem die  $r^2 + 2r$  Wurzeln

$$\Phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}. \quad (14.40)$$

Als einfache Wurzeln wählt man die Vektoren

$$\Delta = \{\alpha_{(i)} = e_i - e_{i+1} \mid i = 1, \dots, r\}. \quad (14.41)$$

Sie haben alle die gleiche quadrierte Länge 2, so dass der Winkel zwischen zwei beliebigen einfachen Wurzeln gleich  $120^\circ$  oder  $90^\circ$  sein muss. Insbesondere gilt

$$(\alpha_{(i)}, \alpha_{(i+1)}) = -1, \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \quad (14.42)$$

und dies bedeutet, dass die Nebendiagonalelemente der Cartan-Matrix  $K$  gleich  $-1$  sind. Weiterhin ist  $\det(K) = r+1$ . Die höchste Wurzel ist  $e_1 - e_r$ .

Die Weyl-Gruppe ist die symmetrische Gruppe  $S_{r+1}$  und enthält die Permutationen der Vektoren  $\{e_1, \dots, e_{r+1}\}$ . Zum Beispiel ist die Weyl-Gruppe von  $A_2$  gleich  $S_3 \cong \mathcal{D}_3$ .

**Wurzelsystem von  $B_r$ :** Hier ist  $E = \mathbb{R}^r$  und das Wurzelsystem enthält  $2r^2$  Wurzeln,

$$\Phi = \{\pm e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j | i \neq j\}. \quad (14.43)$$

Als einfache Wurzeln wählt man

$$\Delta = \{\alpha_{(i)} = e_i - e_{i+1} | i = 1, \dots, r-1\} \cup \{\alpha_{(r)} = e_r\}. \quad (14.44)$$

Die höchste Wurzel ist  $e_1 + e_2$  und die Weyl-Gruppe ist die Gruppe der Permutationen und Vorzeichenwechsel der Menge  $\{e_1, \dots, e_r\}$  und enthält deshalb  $2^r r! = (2r)!!$  Elemente.

**Wurzelsystem von  $C_r$ :** Wieder ist  $E = \mathbb{R}^r$ . Das Wurzelsystem ist dual zum Wurzelsystem von  $B_r$ :

$$\Phi = \{\pm 2e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j | i \neq j\}. \quad (14.45)$$

Als einfache Wurzeln wählt man die Vektoren

$$\Delta = \{\alpha_{(i)} = e_i - e_{i+1} | i = 1, \dots, r-1\} \cup \{\alpha_{(r)} = 2e_r\}. \quad (14.46)$$

Die höchste Wurzel ist  $2e_1$  und die Weylgruppe ist identisch zu derjenigen von  $B_r$ .

**Wurzelsystem von  $D_r$ :** Auch hier ist  $E = \mathbb{R}^r$  und die  $2r(r-1)$  Wurzeln sind

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j | i \neq j\}. \quad (14.47)$$

Als einfache Wurzeln wählt man

$$\Delta = \{\alpha_{(i)} = e_i - e_{i+1} | i = 1, \dots, r-1\} \cup \{\alpha_{(r)} = e_{r-1} + e_r\}. \quad (14.48)$$

Die höchste Wurzel ist  $e_1 + e_2$  und die Weylgruppe ist die Gruppe der Permutationen von  $\{e_1, \dots, e_r\}$  sowie die geraden Vorzeichenwechsel dieser Basisvektoren und enthält  $(2r)!!/2$  Elemente.

**Wurzelsystem von  $G_2$ :** Hier ist  $E$  die Ebene senkrecht zu  $e_1 + e_2 + e_3$  und

$$\Phi = \{e_i - e_j | i \neq j\} \cup \{\pm(2e_i - e_j - e_k) | i \neq j \neq k\}. \quad (14.49)$$

Als 2 einfache Wurzeln wählt man

$$\Delta = \{e_1 - e_2, -2e_1 + e_2 + e_3\}. \quad (14.50)$$

Die höchste Wurzel ist  $2e_3 - e_2 - e_1$  und die Weylgruppe ist die Gruppe der Permutationen von  $\{e_1, e_2, e_3\}$  sowie die geraden Vorzeichenwechsel dieser Basisvektoren und enthält 12 Elemente. Sie ist isomorph zur Diedergruppen  $D_6$ .

**Wurzelsystem von  $F_4$ :** Es ist  $E = \mathbb{R}^4$  und

$$\Phi = \{\pm e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j | i \neq j\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\}. \quad (14.51)$$

Als 4 einfache Wurzeln wählt man

$$\Delta = \left\{ e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3, \frac{1}{2}(e_4 - e_1 - e_2 - e_3) \right\}. \quad (14.52)$$

Die höchste Wurzel ist  $e_1 + e_4$  und die Weylgruppe hat 1152 Elemente.

**Wurzelsystem von  $E_8$ :** Es ist  $E = \mathbb{R}^8$  und

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j | i \neq j\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_i (-1)^{m(i)} e_i \mid \sum_i m(i) \text{ gerade} \right\}. \quad (14.53)$$

Als die 8 einfachen Wurzeln wählt man

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{2}(e_1 + e_8 - \sum_{i=2}^7 (-1)^{m(i)} e_i) \right\} \cup \{e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \dots, e_7 - e_6\}. \quad (14.54)$$

Die höchste Wurzel ist  $e_7 + e_8$  und die Weylgruppe hat 696 729 600 Elemente.

**Wurzelsystem von  $E_7$ :** Das Wurzelsystem ist die Schnittmenge des Wurzelsystems von  $E_8$  mit dem Vektorraum orthogonal zu  $e_7 + e_8$ . Höchste Wurzel ist  $e_8 - e_7$  und die Weylgruppe hat 2 903 040 Elemente.

**Wurzelsystem von  $E_6$ :** Das Wurzelsystem ist die Schnittmenge des Wurzelsystems von  $E_8$  mit dem Vektorraum orthogonal zu  $e_6 + e_8$  und  $e_7 + e_8$ . Höchste Wurzel ist  $\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 - e_8)$  und die Weylgruppe hat 51 840 Elemente.

## 14.7 Aufgaben zu Kapitel 14

### Aufgabe 14.1: Beispiel für Wurzeln

Betrachten Sie die Generatoren

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Finden Sie eine Linearkombination  $E = c_1 X_1 + c_2 X_2$ , so dass  $[H, E] = \alpha E$ . Wie lautet die entsprechende Wurzel.
2. Zeigen Sie, dass  $[H, E^\dagger] = -\alpha E^\dagger$ .
3. Wie lautet die vollständige Liste von Wurzeln?

### Aufgabe 14.2: Casimir Operatoren

Operatoren, die mit allen Elementen einer Lie-Algebra vertauschen, nennt man Casimir-Operatoren. Ganz allgemein gibt es  $r = \text{Rang}(\mathfrak{g})$  unabhängiger Casimir-Operatoren. Explizite Ausdrücke sind im allgemeinen schwierig zu beschaffen, jedoch gibt es immer einen „einfachen“ quadratischen Casimir-Operator

$$C_2 = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} X_i^2$$

wobei die  $X_i$  orthonormal bzgl. der Killingform sind.

1. Zeigen Sie, dass  $[X_i, C_2] = 0$  gilt.
2. Wie lautet  $C_2$  für  $SU(2)$  und  $SU(3)$ .
3. Welchen Zahlenwert nimmt  $C_2$  für  $\mathfrak{su}(3)$  in den früher behandelten Darstellungen 3 und 8 an?

Zur Information: Casimir-Operatoren sind Monome der Elemente der Lie-Algebra. Man spricht von einem Casimir-Operator der Ordnung  $p$ , wenn er ein Monom der Ordnung  $p$  ist. Für die

einfachen Lie-Algebren sind die Ordnungen:

<b>Algebra</b>	<b>Ordnung</b>
$A_\ell$	$2, 3, \dots, \ell$
$B_\ell$	$2, 4, \dots, 2\ell$
$C_\ell$	$2, 4, \dots, 2\ell$
$D_\ell$	$2, 4, \dots, 2\ell - 2; \ell$
$G_2$	$2, 6$
$F_4$	$2, 6, 8, 12$
$E_6$	$2, 5, 6, 8, 9, 12$
$E_7$	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$
$E_8$	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$

(14.55)

## 15 Darstellungen von Lie-Algebren

*Es ist unmöglich, die Schönheiten der Naturgesetze angemessen zu vermitteln, wenn jemand die Mathematik nicht versteht. Ich bedaure das, aber es ist wohl so.*

RICHARD FEYNMAN

Wir haben im Kapitel 13 gesehen, dass die Darstellungen einer Lie-Gruppe  $G$  in enger Beziehung zu den Darstellungen seiner Lie-Algebra stehen. Insbesondere induziert jede Darstellung  $D$  von  $G$  eine Darstellung  $D_*$  von  $\mathfrak{g}$ . In diesem Kapitel bestimmen wir die möglichen Darstellungen von Lie-Algebren. Dabei gebrauchen wir die (als bekannt vorausgesetzten) Resultate für die irreduziblen Darstellungen der quantenmechanischen Drehgruppe  $SU(2)$ , die durch den Spin charakterisiert werden. Insbesondere machen wir uns die Struktur der zu jeder Wurzel gehörenden  $SU(2)$ -Unter-Lie-Algebra  $(H_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha})$  zunutze.

**Satz 63 (Weyl)** *Jede endlich-dimensionale Darstellung einer halb-einfachen Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist vollständig reduzibel.*

Für diesen Satz gibt es zwei bekannte Beweise. Einer verwendet rein algebraische Methoden, basierend auf einem Lemma von Whitehead. Ein anderer Beweis (nach Weyl) benutzt „transzendente“ Methoden – er ist als unitärer Trick bekannt. Er macht davon Gebrauch, dass die Darstellungen einer Lie-Algebra auch Darstellungen der zur Lie-Algebra gehörenden universellen Überlagerung ist, und dass alle Darstellungen einer kompakten Lie-Gruppe vollständig reduzibel sind, vgl. Abschnitt 10.3.

### Dreidimensionale Darstellung von $\mathfrak{su}(2)$

Wir interpretieren den Winkel  $\vartheta$  in (9.10) als Kurvenparameter. Man beachte, dass  $U(\vartheta = 0) = \mathbb{1}$  ist, so dass die Ableitung an der Stelle  $\vartheta = 0$  ein Element der Lie-Algebra ist:

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{d\vartheta} U|_{\vartheta=0} = \begin{pmatrix} i \cos \psi & \sin \psi e^{i\varphi} \\ -\sin \psi e^{-i\varphi} & -i \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \cos \psi \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \sin \psi \cos \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \cos \psi \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15.1)$$



Für die dreidimensionale Darstellung in (11.62) findet man dann

$$D_*(X) = \sqrt{2} \cos \psi \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \sin \psi \cos \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cos \psi \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad (15.2)$$

Nach dem Basiswechsel von (11.63) zu (11.64) gewinnt man die äquivalente reelle Darstellung

$$D_*(X) = \cos \psi \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \sin \psi \cos \varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cos \psi \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15.3)$$

Die infinitesimalen Erzeugenden der Darstellung (11.64) sind also, wie erwartet, die reellen antisymmetrischen  $3 \times 3$  Matrizen der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(3)$ . Insbesondere sind die drei antisymmetrischen Matrizen in (15.3) die Bilder der antihermiteschen Basiselemente in (15.1).

?

Zeigen Sie, dass die Matrizen in (15.3) (15.1) identische Kommutationsrelationen erfüllen.

## 15.1 Gewichte einer Darstellung

Alle irreduziblen Darstellungen  $\vartheta_j$  von  $SU(2)$  gewinnt man, wenn man die fundamentale Darstellung  $\vartheta_{1/2}$  genügend oft mit sich selbst tensoriert. Die Dimension der Darstellung  $\vartheta_j$  ist  $2j + 1$  und  $\vartheta_1$  ist die drei-dimensionale adjungierte Darstellung. Diese ist enthalten im Tensorprodukt

$$\vartheta_{\frac{1}{2}} \times \vartheta_{\frac{1}{2}} = \vartheta_1 + \vartheta_0. \quad (15.4)$$

In der Quantenmechanik werden die irreduziblen Darstellungen von  $SU(2)$  mithilfe der Aufsteige- und Absteigeoperatoren

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) \quad \text{und} \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2),$$

in der komplexifizierten Lie-Algebra erzeugt. Diese erfüllen

$$[\sigma_3, \sigma_{\pm}] = \pm 2\sigma_{\pm}. \quad (15.5)$$

Die entsprechende Konstruktion verallgemeinern wir nun auf kompakte einfache Lie-Algebren. Wir betrachten also eine einfache Lie-Algebra mit Cartan-Weyl-Basis  $\{H_i, E_{\alpha}, E_{-\alpha}\}$  (siehe (14.6 auf Seite 231) und eine Darstellung  $D_*$  der Lie-Algebra. Wegen der Darstellungseigenschaft

vertauschen die linearen Abbildungen  $D_*(H_i)$  miteinander und können gleichzeitig diagonalisiert werden,

$$D_*(H_i)|\boldsymbol{\mu}\rangle = \mu_i|\boldsymbol{\mu}\rangle. \quad (15.6)$$

Der  $r$ -dimensionale Vektor  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_r)$  heißt Gewichtsvektor. Die Gewichtsvektoren der adjungierten Darstellung sind gerade die Wurzeln der Lie-Algebra. Wir können nun ähnlich vorgehen wie bei der Behandlung der Wurzeln. Wegen der Darstellungseigenschaft bilden die Darstellungsmatrizen

$$D_*(H_\alpha), D_*(E_\alpha), D_*(E_{-\alpha}) \quad (15.7)$$

eine  $\mathfrak{su}(2)$ -Unteralgebra von  $L(\mathcal{V})$ . Wie in (14.8) schießen wir, dass für alle Wurzeln  $\alpha$  die Eigenwerte in

$$D_*(H_\alpha)|\boldsymbol{\mu}\rangle = \frac{2(\boldsymbol{\mu}, \alpha)}{\alpha^2}|\boldsymbol{\mu}\rangle, \quad (15.8)$$

ganze Zahlen sein müssen,

$$\frac{2(\alpha, \boldsymbol{\mu})}{\alpha^2} \in \mathbb{Z} \quad \text{für alle } \alpha \in \Phi. \quad (15.9)$$

Jeder Vektor, der diese Bedingung erfüllt ist ein Gewichtsvektor, kurz auch Gewicht genannt. Dies ist die einzige Bedingung, die ein Gewicht erfüllen muss. Man beachte, dass  $2\alpha \cdot \boldsymbol{\mu}/\boldsymbol{\mu}^2$  keine ganze Zahl zu sein braucht, im Gegensatz zu  $2\alpha \cdot \boldsymbol{\mu}/\alpha^2$ . Die Quantisierungsbedingung (15.9) definiert das *Gewichtsgitter* von  $\mathfrak{g}$ . Jede Wurzel ist also ein Gewicht aber nicht jedes Gewicht ist eine Wurzel. Die gemeinsamen Eigenvektoren  $|\boldsymbol{\mu}\rangle$  der Cartan-Generatoren zerfallen in Multipletts unter der Wirkung von  $H_\alpha, E_{\pm\alpha}$ .

Im Folgenden schreiben wir wieder  $H_\alpha$  und  $E_\alpha$  anstelle von  $D_*(H_\alpha)$  und  $D_*(E_\alpha)$ .

Es sein  $\sigma_\beta$  die Weyl-Reflektion zu einer beliebigen Wurzel  $\beta$  und  $\boldsymbol{\delta} = \sigma_\beta(\alpha)$ . Die Spiegelung  $\sigma_\beta$  ändert ein Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^r$  nicht, so dass gilt

$$H_\delta|\sigma_\beta(\boldsymbol{\mu})\rangle = \frac{2(\boldsymbol{\delta}, \sigma_\beta(\boldsymbol{\mu}))}{\boldsymbol{\delta}^2}|\sigma_\beta(\boldsymbol{\mu})\rangle = \frac{2(\alpha, \boldsymbol{\mu})}{\alpha^2}|\sigma_\beta(\boldsymbol{\mu})\rangle. \quad (15.10)$$

Deshalb ist für jede Wurzel  $\boldsymbol{\delta}$  der Vektor  $|\sigma_\beta(\boldsymbol{\mu})\rangle$  Eigenvektor von  $H_\delta$  mit ganzzahligem Eigenwert, d.h.  $\sigma_\beta(\boldsymbol{\mu})$  ein Gewicht der Darstellung. Damit werden die Gewichte unter den Weyl-Reflektionen ineinander abgebildet. Die Weyl-Reflektionen erzeugen die Weyl-Gruppe, und wir folgern:

Die Menge der Gewichte ist invariant unter der Weylgruppe.

### 15.1.1 Fundamentale und dominante Gewichte

Da alle Wurzeln durch Weyl-Reflektionen aus den einfachen Wurzeln hervorgehen (jedes Orbit enthält nach Lemma 35 auf Seite 244 mindestens eine einfache Wurzel), genügt es die Quantisierungsbedingung (15.9) für eine Basis von einfachen Wurzeln zu fordern. Entsprechend können

wir im Gewichtsgitter eine Basis von *fundamentalen Gewichten*  $\mu_{(i)}$  einführen, definiert durch

$$2 \frac{(\mu_{(i)}, \alpha_{(j)})}{\alpha_{(j)}^2} = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq r. \quad (15.11)$$

Jedes Gewicht ist dann eine ganzzahlige Linearkombination der fundamentalen Gewichte,

$$\mu = \sum n_i \mu_{(i)}, \quad n_i \in \mathbb{Z}. \quad (15.12)$$

Sind alle ganzzahligen Koeffizienten  $n_i \geq 0$ , dann heißt  $\mu$  *dominantes Gewicht*. Offensichtlich ist ein Gewicht  $\mu$  dominant genau dann, wenn gilt

$$(\alpha_{(i)}, \mu) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (15.13)$$

Jedes Gewicht kann mit einem Element der Weyl-Gruppe in ein eindeutiges dominantes Gewicht abgebildet werden. In anderen Worten: in jedem Weyl-Orbit gibt es ein eindeutiges dominantes Gewicht.

### Fundamentale Gewichte von $\mathfrak{su}(3)$

Für  $SU(3)$  sind die fundamentalen Gewichte

$$\mu_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mu_{(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15.14)$$

### 15.1.2 Höchstes Gewicht

In jeder endlich-dimensionalen Darstellung einer Lie-Algebra können wir einen Zustand  $|\mu\rangle$  mit höchstem Gewicht finden, so dass

$$(\delta, \mu) \quad \text{maximal ist,} \quad (15.15)$$

worin  $\delta$  ein ausgezeichnetes dominantes Gewicht ist. Es ist der nach Hermann Weyl genannte Weyl-Vektor und kann als Summe über alle fundamentalen Gewichte oder als halbe Summe der positiven Wurzeln geschrieben werden:

**Lemma 37** *Der Weyl-Vektor hat die Darstellungen*

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha = \sum_i \mu_{(i)}. \quad (15.16)$$

*Beweis:* Wir wollen die letzte Identität beweisen und nehmen dazu an,  $\delta$  sei die halbe Summe der positiven Wurzeln. Sei nun  $\alpha_{(i)}$  eine der einfachen Wurzeln. Wegen der Orthogonalität der Weyl-Reflexionen ist

$$(\sigma_{\alpha_{(i)}}(\delta), \alpha_{(i)}) = (\delta, \sigma_{\alpha_{(i)}}(\alpha_{(i)})) = (\delta, -\alpha_{(i)}). \quad (15.17)$$

Gemäß Lemma 36 permutiert die Weyl-Reflexion  $\sigma_{\alpha_{(i)}}$  alle positiven Wurzeln, mit Ausnahme von  $\alpha_{(i)}$ , das in  $-\alpha_{(i)}$  abgebildet wird. Deshalb ist  $\sigma_{\alpha_{(i)}}(\delta) = \delta - \alpha_{(i)}$ . Zusammen mit (15.17) ergibt sich  $2(\delta, \alpha_{(i)}) = \alpha_{(i)}^2$ . Wegen den Orthogonalitäts-Relationen zwischen den einfachen Wurzeln und fundamentalen Gewichten in (15.11) gilt aber auch

$$2 \sum_j (\mu_{(j)}, \alpha_{(i)}) = \alpha_{(i)}^2.$$

Die halbe Summe der positiven Wurzeln hat also das gleiche Skalarprodukt mit allen einfachen Wurzeln wie die Summe der fundamentalen Gewichte. Dies beweist das obige Lemma.

Der Weyl-Vektor tritt in der Weylschen Formel für die Dimension einer irreduziblen Darstellung auf. Da eine positive Wurzel eine Linearkombination von einfachen Wurzeln mit nicht-negativen (ganzzahligen) Koeffizienten ist, hat dieser Vektor ein positives Skalarprodukt mit allen positiven Wurzeln und ein negatives Skalarprodukt mit allen negativen Wurzeln. Ein Zustand mit höchstem Gewicht  $\mu$  wird deshalb von allen  $E_\alpha$  mit  $\alpha > 0$  annihiliert,

$$E_\alpha |\mu\rangle = 0, \quad \alpha > 0. \quad (15.18)$$

Wäre dem nicht so, dann gäbe es einen Zustand mit Gewicht  $\mu + \alpha$  für das  $(\mu + \alpha, \delta) > (\mu, \delta)$  gelten würde. Dies ist nicht möglich, da nach Voraussetzung  $\mu$  höchstes Gewicht ist. Zu jedem höchsten Gewicht  $\mu$  gibt es also eine eindeutige irreduzible Darstellung. Sie besteht aus Zuständen der Form

$$E_{-\beta_1} E_{-\beta_2} \cdots E_{-\beta_m} |\mu\rangle, \quad \beta_i > 0. \quad (15.19)$$

Man kann beweisen, dass jedes ganze Gewicht als höchstes Gewicht einer irreduziblen Darstellung auftritt:

**Satz 64 (Dominante Gewichte und irreduzible Darstellungen)** Sei  $\mathfrak{g}$  eine halbeinfache Lie-Algebra über  $\mathbb{C}$ . Dann sind die irreduziblen Darstellungen von  $\mathfrak{g}$  in Bijektion zu den dominanten Gewichten.

### Die Gewichte von $\mathfrak{su}(3)$

Die Gewichte

$$\mu_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_{(1)} - \alpha_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mu_{(1)} - \alpha_{(3)} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine 3-dimensionale Darstellung mit höchstem Gewicht  $\mu_{(1)}$ . Es ist die fundamentale Darstellung mit Eigenvektoren

$$|\mu_{(3)}\rangle \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mu_{(3)} - \alpha_{(1)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\mu_{(3)} - \alpha_{(3)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun gibt es noch eine weitere 3-dimensionale Darstellung mit höchstem Gewicht  $\boldsymbol{\mu}_{(2)}$ , nämlich

$$\boldsymbol{\mu}_{(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}_{(2)} - \boldsymbol{\alpha}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\mu}_{(2)} - \boldsymbol{\alpha}_{(3)} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bis auf Permutationen können wir die Eigenwerte der zu dieser Darstellung gehörenden  $D_*(H_i)$ ,  $i = 1, 2$  ablesen. Folgende Matrizen haben diese Eigenwerte (die Matrizen sind immer nur bis auf Äquivalenz bestimmt)

$$D_*(H_1) = -H_1 \quad \text{und} \quad D_*(H_2) = -H_2.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$|\boldsymbol{\mu}_{(2)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{\mu}_{(2)} - \boldsymbol{\alpha}_{(2)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{\mu}_{(2)} - \boldsymbol{\alpha}_{(3)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Stufenoperatoren sind dann

$$D_*(E_\alpha) = -E_\alpha^t. \quad (15.20)$$

Dies sind genau die Erzeugenden der komplex konjugierten Darstellung

$$D : U \mapsto U^*. \quad (15.21)$$

Dies ist leicht einzusehen:

$$\dot{U}(0) = X \implies D_*(X) = \dot{U}^*(0) = X^* = (X^\dagger)^t = -X^t. \quad (15.22)$$

## 15.2 Tensorprodukt von Darstellungen

Es seien  $D_1$  und  $D_2$  zwei Darstellungen auf Vektorräumen  $\mathcal{V}_1$  und  $\mathcal{V}_2$ . Dann ist die Tensorprodukt-Darstellung

$$D = D_1 \otimes D_2 : g \mapsto D_1(g) \otimes D_2(g) \quad (15.23)$$

ebenfalls eine Darstellung auf  $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ . Diese ist im Allgemeinen reduzibel, auch wenn die Darstellungen  $D_i$  irreduzibel waren. Die induzierte Darstellung der Lie-Algebra ist

$$\begin{aligned} D_*(X)(v_1 \otimes v_2) &= \frac{d}{ds} \left( D_1(g(s)) \otimes D_2(g(s)) \right) (v_1 \otimes v_2) \\ &= D_{*1}(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes D_{*2}(X)v_2, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$D_*(X) = D_{*1}(X) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes D_{*2}(X). \quad (15.24)$$

Sind  $|\mu_{(i)}\rangle$  Eigenvektoren der Cartan-Generatoren in den Darstellungen  $D_i$  mit höchsten Gewichten  $\mu_{(i)}$ , dann ist offenbar  $|\mu_{(1)}\rangle \otimes |\mu_{(2)}\rangle$  Eigenvektor der Cartan-Generatoren des Tensorprodukts der beiden Darstellungen mit höchstem Gewicht  $\mu_{(1)} + \mu_{(2)}$ .

**Tensorprodukt  $3 \times \bar{3}$  in  $su(3)$**

Schauen wir uns die Tensordarstellung  $3 \times \bar{3}$  von  $SU(3)$  etwas genauer an. Die 9 Gewichte der

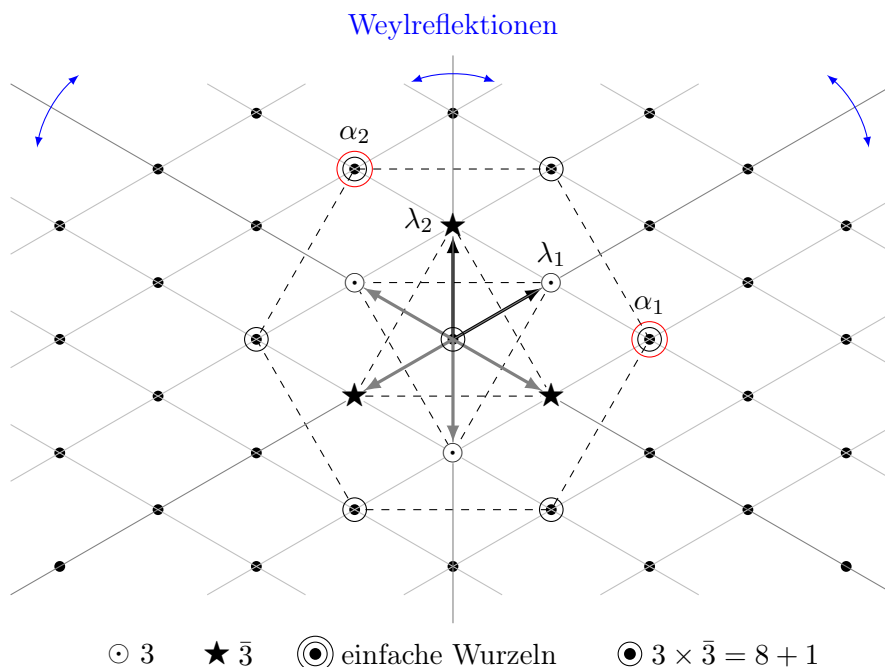


Abbildung 15.1: Wurzeln und Gewichtsgitter von  $SU(3)$ .

Tensorproduktarstellung sind die Summen der Gewichte der einzelnen Darstellungen,

$$\{\mu^{3 \times \bar{3}}\} = \{\mu_{(i)}^3 + \mu_{(j)}^{\bar{3}} \mid i, j = 1, 2, 3\}. \tag{15.25}$$

Diese Gewichte sind in Abbildung 15.1 eingezeichnet. Das höchste Gewicht ist die Summe der höchsten Gewichte, also  $(1, \sqrt{3})$ . Nun wollen noch bestimmen, was die irreduziblen Bestandteile dieser 9-dimensionalen Darstellung sind. Sei  $v_i w_j$  die 9 Komponenten eines Vektors im Tensorprodukt der Darstellungsräume von  $3$  und  $\bar{3}$ . Unter der Tensordarstellung transformieren diese wie

$$v_i w_j \mapsto U_{ip} U_{jq}^* v_p w_q \iff X \mapsto UXU^\dagger = UXU^{-1}, \quad X_{ij} = v_i w_j. \tag{15.26}$$

Da aber

$$\text{Sp}X \mapsto \text{Sp}(UXU^{-1}) = \text{Sp}X \tag{15.27}$$

invariant ist, ist  $\text{Sp}X = \sum v_i w_i$  ein eindimensionaler invarianter Unterraum der Tensorprodukt-darstellung. Auf dem Unterraum senkrecht dazu, d.h. auf denjenigen  $X$  mit  $\text{Sp}X = 0$ , ist (15.26) genau die adjungierte Darstellung. Als gilt

$$3 \times \bar{3} = 1 \oplus 8, \quad 8 = \text{adjungierte Darstellung.} \tag{15.28}$$

Eine beliebig irreduzible Darstellung von  $SU(3)$  wird durch Angabe zweier nicht-negativen ganzen Zahlen charakterisiert. Zerlegt man nämlich das höchste Gewicht  $\mu$  einer Darstellung in die fundamentalen Gewichte,

$$\mu = n_1 \mu_{(1)} + n_2 \mu_{(2)}, \quad n_i \in \mathbb{N}_0, \tag{15.29}$$

dann charakterisieren  $(n_1, n_2)$  die Darstellung eindeutig. Die tiefsten irreduziblen Darstellungen von  $SU(3)$  sind in folgender Tabelle aufgezählt:

$(n_1, n_2)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,2)$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(0,3)$	$(3,0)$	$(1,2)$	$(2,1)$
$D(n_1, n_2)$	1	3	$\bar{3}$	6	$\bar{6}$	$8 = \bar{8}$	10	$\bar{10}$	15

Zum Beispiel hat die 10-dimensionale Darstellung 10 das höchste Gewicht

$$\mu^{10} = 3 \cdot \mu^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Die zehn Gewichte dieser Darstellung sind die neun großen Punkte auf den Seiten des gleichseitiges Dreiecks im Gewichtsdiagramm 15.2 sowie dem Punkt im Ursprung. Der Eckpunkt des Dreiecks rechts oben gehört zum höchsten Gewicht der Darstellung 10.

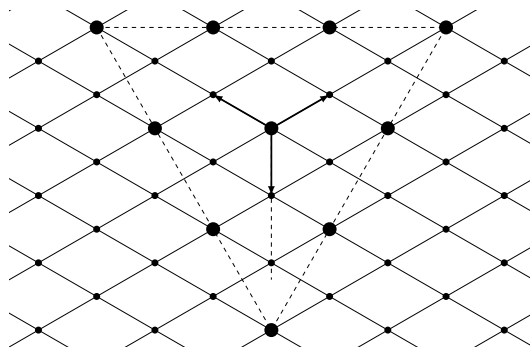


Abbildung 15.2: Gewichte der Darstellung 10 im Gewichtsgitter von  $su(3)$ .

## 15.3 Young diagrams

Im Abschnitt 4.2.1 diskutierten wir die Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe  $S_n$ . Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl Partitionen ( $n$ ) von  $n$ . Zum Beispiel kann 4 auf 5 Arten als Summe von ganzen Zahlen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &4 \\ &3 + 1 \\ &2 + 2 \\ &2 + 1 + 1 \\ &1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Die geordnete Partition  $1 + 3$  ist dabei gleich wie die geordnete Partition  $3 + 1$ . Die Partitionen können als Young Diagramme (auch Ferrers Diagramme genannt) visualisiert werden. Zum Beispiel die Partition  $6 + 4 + 3 + 1$  von 14 wird durch das folgende Diagramm dargestellt:

## 15.4 Und so weiter .....

## 15.5 Aufgaben zu Kapitel 15

### Aufgabe 15.1: Sphärische Harmonische als irreduzible Darstellungen von $SO(3)$

Seien  $x^1, x^2, x^3$  kartesische Koordinaten in  $\mathbb{R}^3$ . Der Raum der Funktionen auf der Einheitskugel  $S^2$  wird durch den Raum aller Polynome  $P_n(x) = \sum f_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} \dots x^{i_n}$  (mit komplexen Koeffizienten) aufgespannt, wobei die Einbettung von  $S^2$  in  $\mathbb{R}^3$  durch  $\sum (x^i)^2 = 1$  definiert ist. Wir benötigen noch den Raum aller Polynome vom Grad  $\leq n$ ,

$$\mathcal{C}_n(S^2) = \bigoplus_{k \leq n} P_k(x).$$

Die natürliche Darstellung von  $SO(3)$  auf  $\mathbb{R}^3$  – gegeben durch  $\mathbf{x} \rightarrow R\mathbf{x}$  mit  $R \in SO(3)$  – definiert eine  $SO(3)$ -Darstellung auf den stetigen Funktionen auf  $S^2$  durch

$$\psi(\mathbf{x}) \mapsto (\Gamma(R)\psi)(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}).$$

1. Prüfen Sie nach, dass  $\Gamma$  eine Darstellung ist.
2. Bestimmen Sie die entsprechende Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(3)$  auf  $\mathcal{C}_n(S^2)$ , d.h. die Wirkung der Generatoren  $J_i$  auf einem Polynom.
3. Finden Sie die Polynome mit  $J_+ P_n(x) = 0$ , d.h. die höchsten Gewichtsvektoren.



4. Finden Sie die Zerlegung in irreduzible Darstellungen

$$\mathcal{C}_n(S^2) = \bigoplus_k n_k(\text{spin } k),$$

wobei  $\text{spin } k$  die Spin  $k$  Darstellung bezeichnet. Bestimmen Sie die Multiplizitäten  $n_k$ .

5. Finden Sie explizit die Darstellungsräume von  $\text{spin } 0$ ,  $\text{spin } 1$  und  $\text{spin } 2$  als Polynome in den kartesischen Koordinaten.
6. Gehen Sie zu Kugelkoordinaten über und erklären Sie den Zusammenhang mit den sphärischen harmonischen  $Y_m^\ell$ .

## 16 Relativistische Feldtheorien

*The importance of group theory was emphasized very recently when some physicists using group theory predicted the existence of a particle that had never been observed before, and described the properties it should have. Later experiments proved that this particle really exists and has those properties.*

IRVING ADLER

Mit der speziellen Relativitätstheorie verträgliche Wechselwirkungen werden durch relativistische Feldtheorien beschrieben und die zugehörigen Feldgleichungen lassen sich aus einem Hamilton'schen Wirkungsprinzip ableiten. Dabei zeichnet die Wirkung kein Inertialsystem aus. In anderen Worten, die Feldgleichungen sind die Euler-Lagrange Gleichung für eine Poincaré-invariante Wirkung.

### 16.1 Langrange'scher Formalismus

In einer lokalen Feldtheorie ist die Wirkung das Raumzeit-Integral über eine lokale Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}(x)$ ,

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(x) \equiv \int dt d\mathbf{x} \mathcal{L}(t, \mathbf{x}), \quad (16.1)$$

wobei für fast alle Feldtheorien  $\mathcal{L}$  eine Funktion nur der Felder und ihrer ersten Ableitungen ist,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ . Dies wollen wir im Folgenden immer annehmen<sup>1</sup>. Das Feld  $\phi$  kann mehrere Komponenten haben. Zum Beispiel kann es eine Kollektion von mehreren Skalarfeldern, wie das Higgsfeld im Standardmodell, oder sogar ein Tensorfeld sein. Die Raumzeit-Dimension  $d$  sei variabel. Das Volumenelement des Raumes bezeichnen wir mit  $d\mathbf{x}$ . Wir benutzen natürlich Einheiten, in denen  $\hbar = c = 1$  ist.

Die (Frechet) Ableitung eines Funktionals (zum Beispiel der Wirkung) ist definiert durch

$$S[\phi + \delta\phi] = S[\phi] + \delta S + \mathcal{O}(\delta\phi^2) = S[\phi] + \int d^d x \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) + \mathcal{O}(\delta\phi^2), \quad (16.2)$$

worin die Variation  $\delta\phi$  eine Testfunktion ist, die auf dem Rand des betrachteten Gebiets (oder „im Unendlichen“) verschwindet. Die mathematischen Aspekte der Variationsrechnung sind klar und

---

<sup>1</sup>Und dies, obwohl Feldtheorien mit höheren Ableitungen zur Zeit en vogue sind. Die entsprechenden quantisierten Feldtheorien haben allerdings oft Unitaritätsprobleme.

verständlich in [9] dargelegt. Zum Beispiel ist die Variation einer Wirkung mit Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  gleich

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta \phi \right) \\ &= \int d^d x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \int d^d x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right). \end{aligned} \quad (16.3)$$

Das letzte Integral kann mit dem Gauss'schen Satz in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden. Das Feld  $\phi$  soll am Rand des Integrationsgebietes konstant sein und deshalb wird, wie oben angenommen, die Variation  $\delta \phi$  dort verschwinden.

#### Euler-Lagrange Gleichungen für $\phi$

Das Hamilton'sche Variationsprinzip  $\delta S = 0$  führt auf folgende Bewegungsgleichungen:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (16.4)$$

Für eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  sind die Bewegungsgleichungen verallgemeinerte Wellengleichungen zweiter Ordnung<sup>2</sup>. So hat ein reelles Skalarfeld, welches ein freies und ungeladenes Teilchen beschreibt, die quadratische Wirkung

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2). \quad (16.5)$$

Die darin auftretende Konstante  $\mu$  ist die inverse Compton-Wellenlänge des Teilchens. Als Euler-Lagrange Gleichung findet man die lineare *Klein-Gordon Gleichung*

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \square \phi + \mu^2 \phi = 0. \quad (16.6)$$

Die allgemeine Lösung ist eine Überlagerung von ebenen Wellen  $e^{ikx}$  mit  $kx = k_\mu x^\mu$ . Die Komponenten des Wellenzahl 4-Vektors erfüllen dabei die Dispersionsrelation  $k_\mu k^\mu = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = \mu^2$ .

Die Wirkung sollte unter Poincaré-Transformationen (5.45) invariant sein, damit das Äquivalenzprinzip nicht verletzt wird. Unter diesen Transformationen ändert sich ein Tensorfeld gemäß

$$\phi'(x') = \mathcal{S} \phi(x), \quad x' = \Lambda x + a, \quad (16.7)$$

wobei  $\mathcal{S}$  von  $\Lambda$  abhängt. Für ein Skalarfeld ist  $\mathcal{S}(\Lambda) = \mathbb{1}$  und entsprechend  $\phi'(x') = \phi(x)$ .

?

Zeigen Sie, dass die Wirkung  $S$  in (16.5) invariant unter Poincaré-Transformationen ist. Dazu benötigen Sie  $d^d x' = d^d x$ .

<sup>2</sup>Für fermionische Felder ergeben sich allerdings Feldgleichungen erster Ordnung.

Das 4-er Potenzial der Elektrodynamik  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$  ist ein Vektorfeld, das unter Poincaré-Transformationen wie folgt transformiert,

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\alpha A_\alpha(x). \quad (16.8)$$

Dies bedeutet, dass für ein Vektorfeld  $\mathcal{S} = \Lambda$  ist. Der Feldstärketensor  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  ist ein anti-symmetrisches Tensorfeld zweiter Stufe mit

$$F'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}(x). \quad (16.9)$$

Seine Komponenten sind die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}, \mathbf{B}). \quad (16.10)$$

Allgemein hat ein Tensorfeld  $p'$ ter Stufe  $p$  Komponenten  $\phi = (\phi_{\mu_1 \dots \mu_p})$  und transformiert wie

$$\phi'_{\mu_1 \dots \mu_p}(x') = \mathcal{S}_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} \phi_{\nu_1 \dots \nu_p}(x) \quad \text{mit} \quad \mathcal{S}_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} = \Lambda_{\mu_1}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\mu_p}^{\nu_p}. \quad (16.11)$$

Die Gruppe der Poincaré-Transformationen wirkt dann auf dem unendlich-dimensionalen Raum der Felder  $\{\phi(x)\}$ . Dieser Wirkungsraum wird mit Feldraum oder Konfigurationsraum bezeichnet.

Die Abbildung  $\Lambda \mapsto \mathcal{S}$  ist nicht beliebig. Sie muss mindestens zwei Konsistenzbedingungen erfüllen. Wird gar nicht transformiert, dann müssen  $\Lambda$  und  $\mathcal{S}$  die Eins-Abbildungen sein:  $\mathcal{S}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}_\phi$ . Werden zwei Poincaré-Transformationen hintereinander ausgeführt, zuerst  $x' = \Lambda x$  und danach  $x'' = \Lambda' x'$ , dann gilt

$$\phi''(x'') = \mathcal{S}(\Lambda') \phi'(x') = \mathcal{S}(\Lambda') \mathcal{S}(\Lambda) \phi(x). \quad (16.12)$$

Dies muss zum gleichen Ergebnis führen, wie wenn man die zusammengesetzte Transformation  $x'' = \Lambda'' x$  mit  $\Lambda'' = \Lambda' \Lambda$  in einem Schritt ausführt,

$$\phi''(x'') = \mathcal{S}(\Lambda' \Lambda) \phi(x). \quad (16.13)$$

Den Vergleich mit (16.12) und das davor gewonnene Resultat fassen wir zusammen:

$$\mathcal{S}(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}(\Lambda' \Lambda) = \mathcal{S}(\Lambda') \mathcal{S}(\Lambda), \quad (16.14)$$

wobei das Produkt zweier  $\mathcal{S}$  wie folgt definiert ist:

$$(\mathcal{S}' \mathcal{S})_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} = \mathcal{S}'_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \mathcal{S}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\nu_1 \dots \nu_p} \implies \mathbb{1}_\phi = \delta_{\mu_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\mu_p}^{\nu_p}. \quad (16.15)$$

### Felder transformieren mit Homomorphismen der Lorentzgruppe

Die Eigenschaften (16.14) bedeuten, dass die Abbildung  $\Lambda \mapsto \mathcal{S}(\Lambda)$  ein Homomorphismus von der Gruppe der Lorentz-Transformationen in die Gruppe der invertierbaren  $\mathcal{S}$  definiert.

In vielen Anwendungen liegt für jedes  $x$  der Wert  $\phi(x)$  des Feldes in einem linearen Raum. Dann bilden die Feldkonfigurationen selbst einen linearen Raum und  $\mathcal{S}$  ist eine lineare Abbildung. Einen Gruppenshomomorphismus, der jedem Gruppenelement eine invertierbare lineare Abbildung zuordnet, heißt *Darstellung*. Darstellungen von Gruppen werden in den Kapitel 10 und 11 ausführlich behandelt.

## 16.2 Hamilton'scher Formalismus

Wie in der Mechanik existiert neben dem kovarianten Lagrange-Formalismus die Hamilton'sche Formulierung. Der Übergang zwischen beiden geschieht mithilfe einer Legendre-Transformation, bei der das Geschwindigkeitsfeld  $\dot{\phi} = \partial_t \phi$  durch das kanonisch konjugierte Impulsfeld  $\pi$  ersetzt wird. Letzteres ist definiert als

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}. \quad (16.16)$$

Die kanonisch konjugierten Felder  $\{\phi, \pi\}$  zu einer festen Zeit

$$(\phi(x), \pi(x))|_{x^0} \equiv (\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})) \quad (16.17)$$

sind Koordinaten im Phasenraum der zugrundeliegenden Feldtheorie<sup>3</sup>. Im Gegensatz zum Lagrange'schen Formalismus wird im Hamilton'schen Formalismus eine Zeit ausgezeichnet, und er ist damit nicht kovariant, da Gleichzeitigkeit eine vom Inertialsystem abhängige Eigenschaft ist. Da im Hamilton'schen Zugang die Zeit fixiert ist, schreiben wir (zum Beispiel)  $\phi(\mathbf{x})$  anstelle von  $\phi(x)$ . Die *fundamentalen Poisson-Klammern* von Feld und konjugiertem Impulsfeld lauten dann

$$\{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\} = \{\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = 0, \quad \{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (16.18)$$

Wir betonen nochmals, dass hierin die Felder zu einer festen Zeit auftreten. Allgemeiner führt man die Poisson-Klammer von Funktionen auf dem Phasenraum ein. Da der Phasenraum selbst ein Funktionenraum ist, spricht man dann von Funktionalen auf dem Phasenraum.

### Poisson-Klammer von Funktionalen auf dem Phasenraum

<sup>3</sup>Alternativ kann der Raum aller Lösungen  $\phi(t, \mathbf{x})$  als Phasenraum gewählt werden.

Die Poisson-Klammer von zwei Funktionalen  $F[\phi, \pi]$  und  $G[\phi, \pi]$  ist

$$\{F, G\} = \int d\mathbf{x} \left( \frac{\delta F}{\delta \phi(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi(\mathbf{x})} - \frac{\delta F}{\delta \pi(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \phi(\mathbf{x})} \right). \quad (16.19)$$

Die Poisson-Klammer ist offensichtlich bilinear und antisymmetrisch. Sie erfüllt aber auch die Produktregel (Derivationsregel)

$$\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H \implies \{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G, \quad (16.20)$$

und die Jacobi-Identität

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0. \quad (16.21)$$

Die Beweise dieser Eigenschaften sind Inhalt der Aufgabe 16.3. Aus der Definition (16.19) folgen für ein Funktional  $F[\phi, \pi]$  die Relationen

$$\{\phi(\mathbf{x}), F\} = \frac{\delta F}{\delta \pi(\mathbf{x})}, \quad \{\pi(\mathbf{x}), F\} = -\frac{\delta F}{\delta \phi(\mathbf{x})}, \quad (16.22)$$

welche in ähnlicher Form in der klassischen Mechanik vorkommen. Damit, und mit den Identitäten

$$\frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \phi(\mathbf{x})} = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \frac{\delta \pi(\mathbf{y})}{\delta \pi(\mathbf{x})} = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (16.23)$$

findet man die fundamentalen Poisson-Klammer (16.18) wieder.

Wie ebenfalls aus der Mechanik bekannt ist, erhält man die Hamiltonfunktion als Legendre-Transformierte der Lagrangefunktion,

$$H = \int d\mathbf{x} \pi(\mathbf{x}) \dot{\phi}(\mathbf{x}) - L, \quad L = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(\dot{\phi}, \nabla \phi, \phi). \quad (16.24)$$

Die Feldgleichungen sind die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\mathbf{x}) &= \{\phi(\mathbf{x}), H\} = \frac{\delta H}{\delta \pi(\mathbf{x})} \\ \dot{\pi}(\mathbf{x}) &= \{\pi(\mathbf{x}), H\} = -\frac{\delta H}{\delta \phi(\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (16.25)$$

Im Gegensatz zu den Euler-Lagrange Gleichungen sind dies Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit.

### Hamiltonfunktion für das freie reelle Skalarfeld

Die Lagrangefunktion für das reelle Skalarfeld mit Lagrangedichte (16.5) ist

$$L = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left( \dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - \mu^2 \phi^2 \right), \quad (16.26)$$

so dass  $\pi = \dot{\phi}$  ist. Setzt man  $\dot{\phi} = \pi$  in (16.24) ein, dann findet man die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H &= \int d\mathbf{x} \pi^2 - \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (\pi^2 - (\nabla\phi)^2 - \mu^2\phi^2) \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \mu^2\phi^2) . \end{aligned} \quad (16.27)$$

Sie ist ein quadratisches Funktional auf dem Phasenraum. Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}) \quad , \quad \dot{\pi}(\mathbf{x}) = \Delta\phi(\mathbf{x}) - \mu^2\phi(\mathbf{x}) . \quad (16.28)$$

Sie führen wieder auf die Klein-Gordon Gleichung

$$\ddot{\phi}(\mathbf{x}) = \dot{\pi}(\mathbf{x}) = \Delta\phi(\mathbf{x}) - \mu^2\phi(\mathbf{x}) \implies \square\phi + \mu^2\phi = 0 . \quad (16.29)$$

Nach dieser Einführung in grundlegende Eigenschaften von klassischen Feldtheorien wenden wir uns ihren möglichen Symmetrien zu.

## 16.3 Noether Theorem für innere Symmetrien

Translationen, Drehungen und Lorentzboosts sind Raumzeit-Symmetrien. Dies sind Transformationen, die auch auf das Argument  $x$  der Felder wirken. Neben diesen gibt es die sogenannten *inneren Symmetrien*, die nicht auf die Raumzeit-Koordinaten wirken. Zum Beispiel ist die Lagrangedichte für eine komplexes Skalarfeld

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - V(\phi^*\phi) \quad (16.30)$$

invariant unter Phasentransformationen,

$$\phi(x) \mapsto e^{i\alpha}\phi(x) \quad , \quad \phi^*(x) \mapsto e^{-i\alpha}\phi^*(x) \quad (16.31)$$

mit reeller und konstanter Phase  $\alpha$ . Etwas allgemeiner betrachten wir nun Felder mit Werten in einem Vektorraum  $\mathcal{V}$  mit Skalarprodukt. Dies bedeutet, dass für jedes  $x$  der Wert  $\phi(x)$  in  $\mathcal{V}$  liegt und  $(\phi(x), \phi(x))$  sich nicht ändert, wenn  $\phi(x)$  mit einer unitären Matrix transformiert,

$$(U\phi(x), U\phi(x)) = (\phi(x), \phi(x)) . \quad (16.32)$$

Wir wollen annehmen,  $U$  sei eine globale Transformation. Dies bedeutet, dass  $U$  nicht von  $x$  abhängt und deshalb  $U\partial_\mu\phi = \partial_\mu(U\phi)$  gilt. Dann ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi, \partial^\mu\phi) - V((\phi, \phi)) , \quad (16.33)$$

ebenfalls invariant unter den globalen Transformationen

$$\phi(x) \longmapsto U\phi(x) . \quad (16.34)$$

?

Überzeugen Sie sich davon, dass die Menge dieser unitären Transformationen eine Gruppe bilden. Man spricht deshalb von inneren *Symmetrien*.

Eine unitäre Matrix hat die Darstellung  $U = \exp(iX)$  mit einer hermiteschen Matrix  $X$ . Für unitäre Operatoren ist diese Tatsache in der Quantenmechanik von Bedeutung. Später, wenn wir Liegruppen und Liealgebren untersuchen, werden wir darauf zurückkommen. Die infinitesimalen Symmetrien sind demnach

$$\phi \mapsto U\phi \approx \phi + iX\phi \equiv \phi + \delta_X\phi, \quad X^\dagger = X. \quad (16.35)$$

Nach dem (ersten) Theorem von EMMY NOETHER gehört zu jedem reellen Parameter einer kontinuierlichen Symmetriegruppe ein kovariant erhaltener Strom und dann eine zeitlich erhaltene Noether-Ladung. Dies wollen wir nun für inneren Symmetrien beweisen. Unter den Symmetrien (16.35) ändert die Lagrangedichte nicht, so dass gilt

$$0 = \delta_X \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta_X \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_X \phi. \quad (16.36)$$

Benutzen wir im letzten Term die Euler-Lagrange Gleichungen in der Form

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right), \quad (16.37)$$

dann erhalten wir sofort den kovariant erhaltenen Noether-Strom

#### Noetherstrom für innere Symmetrien

Ist die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  invariant unter den Transformationen (16.35), dann gilt

$$\partial_\mu J_X^\mu = \partial_0 J_X^0 + \text{div} \mathbf{J}_X = 0, \quad J_X^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_X \phi. \quad (16.38)$$

Aus dieser Kontinuitätsgleichung folgt nun sofort die Erhaltung der zugehörigen *Noether-Ladung*. Dazu integrieren wir die Kontinuitätsgleichung über den Raum zu einer festen Zeit und wandeln das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral um,

$$0 = \int d\mathbf{x} \partial_\mu J_X^\mu = \frac{\partial}{\partial x^0} \int d\mathbf{x} J_X^0 + \int d\mathbf{x} \text{div} \mathbf{J}_X = \frac{\partial}{\partial x^0} \int d\mathbf{x} J_X^0 + \oint d\mathbf{f} \mathbf{J}_X. \quad (16.39)$$

Verschwindet die 3-er Stromdichte  $\mathbf{J}_X$  im räumlich Unendlichen schnell genug (was wir annehmen wollen), dann folgt die Erhaltung der Noetherladung,

$$\frac{d}{dt} Q_X = 0, \quad Q_X = \int_{x^0} d\mathbf{x} J_X^0 = \int_{x^0} d\mathbf{x} \pi(x) \delta_X \phi(x). \quad (16.40)$$



Im letzte Schritt machten wir davon Gebrauch, dass die Ableitung von  $\mathcal{L}$  nach  $\partial_0\phi$  in (16.38) gleich dem Impulsfeld ist.

Wir haben gesehen, dass zu jedem linear unabhängigen  $X$  eine zeitlich erhaltene Ladung gehört. Die Anzahl dieser Noether-Ladungen ist damit gleich der Dimension der kontinuierlichen Symmetriegruppe. Es stellt sich nun die Frage, wie diese Ladungen auf die Felder der Theorie wirken. Mithilfe der Produktregel und den fundamentalen Poisson-Klammern findet man

$$\begin{aligned}\{\phi(\mathbf{x}), Q_X\} &= \int d\mathbf{y} \{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y}) \delta_X\phi(\mathbf{y})\} = \delta_X\phi(\mathbf{x}) \\ \{\pi(\mathbf{x}), Q_X\} &= \int d\mathbf{y} \{\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y}) \delta_X\phi(\mathbf{y})\} = \delta_X\pi(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (16.41)$$

Bei der Rechnung haben wir angenommen, dass  $\delta_X\phi$  keine Zeitableitungen des Feldes enthält. Auf den rechten Seiten stehen die mit den infinitesimalen Symmetrien transformierten Phasenraum-Variablen. Damit haben wir gezeigt, dass eine erhaltene Noetherladung über die Poisson-Klammer diejenige Symmetrie generiert, aus der sie ursprünglich hervorging.

#### Globale U(1) Eichtransformationen

Wir kehren zum komplexen Skalarfeld mit Lagrangedichte (16.30) zurück. Die infinitesimale Form der Phasentransformation (16.31) ist

$$\delta_\alpha\phi = i\alpha\phi, \quad \delta_\alpha\phi^* = -i\alpha\phi^*, \quad (16.42)$$

und die zugehörigen Noetherströme lauten

$$J_\alpha^\mu = \alpha J^\mu, \quad J_\mu = i(\partial_\mu\phi^\dagger\phi - \phi^\dagger\partial_\mu\phi). \quad (16.43)$$

Mithilfe der Feldgleichung  $\square\phi + V'(\phi^*\phi)\phi$ , worin der Strich die Ableitung nach dem Argument ist, prüft man schnell nach, dass  $J^\mu$  kovariant erhalten ist. Die erhaltene Noetherladung ist die vom Feld getragene elektrische Ladung,

$$Q = i \int_{x^0} d\mathbf{x} (\pi_\phi\phi - \pi_{\phi^*}\phi^*). \quad (16.44)$$

Die elektrische Ladung erzeugt wiederum die Symmetrie:  $\{\phi, Q\} = i\phi$  und  $\{\phi^*, Q\} = -i\phi^*$ .

## 16.4 Noether-Theorem für Translationen

Unter einer Verschiebung in Raum und Zeit transformiert ein Feld wie folgt:

$$\phi(x - a) = \phi(x) - a^\mu\partial_\mu\phi(x) + \mathcal{O}(a^2) = \phi(x) + \delta_a\phi(x) + \mathcal{O}(a^2). \quad (16.45)$$

Die Lagrangedichte ist eine Skalarfeld und transformiert wie  $\phi$  unter infinitesimalen Translationen,

$$\delta_a \mathcal{L} = -a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \quad (16.46)$$

Translationen gehören zur Poincaré-Gruppe und deshalb muss in einer relativistischen Theorie die Wirkung invariant unter Verschiebungen sein. Sie ist es auch, da die Änderung der Lagrangedichte in (16.46) eine totale Ableitung ist, die nach Integration über Raum und Zeit verschwindet. Die Änderung von  $\mathcal{L}$  bei kleinen Verschiebungen können wir auch anderweitig bestimmen, da wir die Änderung der Argumente kennen:

$$\delta_a \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta_a \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_a \phi. \quad (16.47)$$

Setzen wir die rechten Seiten von (16.46) und (16.47) gleich und ersetzen noch  $\partial \mathcal{L} / \partial \phi$  mithilfe der Feldgleichungen (16.37), dann führt dies auf die Identität

$$a^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} a^\nu \partial_\nu \phi \right).$$

Dies drückt gerade die kovariante Erhaltung des zu den Translationen in Richtung von  $a^\mu$  gehörenden Noetherstroms aus,

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0, \quad J_a^\mu = a^\nu T_{\nu}^\mu, \quad T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (16.48)$$

Da  $\mathcal{L}$  unter kleinen Verschiebungen nur bis auf eine totale Divergenz erhalten ist, haben diese Noetherströme, verglichen mit denjenigen einer inneren Symmetrie (16.38), einen Zusatzterm proportional zu  $\mathcal{L}$ .

---

?

---

Beweisen Sie, dass dieser Energie-Impuls Tensor kovariant erhalten ist,  $\partial_\mu T_{\nu}^\mu = 0$ . Beim Beweis müssen Sie die Feldgleichungen benutzen.

---

Da die Translationen eine  $d$ -parametrische Symmetriegruppe bilden, gibt es  $d$  kovariant erhaltene Noetherströme, codiert im Energie-Impuls Tensor  $T_{\nu}^\mu$ . Die Noether-Ladungen sind die im Feld gespeicherte Energie und der im Feld gespeicherte Impuls,

$$P^\mu = \begin{pmatrix} P^0 \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \int_{x^0} d\mathbf{x} T^{0\mu}, \quad \dot{P}^\mu = 0. \quad (16.49)$$

### Energie und Impuls des Skalarfelds

Das reelle Skalarfeld hat die Lagrangedichte und den symmetrischen Energie-Impuls Tensor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad \text{und} \quad T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (16.50)$$

Mit  $\dot{\phi} = \pi$  sind Energie und Impuls durch die Integrale

$$H = \int_{x^0} d\mathbf{x} \mathcal{H}(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{P} = \int_{x^0} d\mathbf{x} \mathcal{P}(\mathbf{x}) \quad (16.51)$$

gegeben, mit der Hamiltondichte und der Impulsdichte als Integranden:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = \pi \nabla\phi. \quad (16.52)$$

Umgekehrt erzeugen die Noetherladungen (16.49) die infinitesimalen Verschiebungen des Feldes,

$$\{P_\mu, \phi\} = -\partial_\mu\phi. \quad (16.53)$$

Für  $\mu = 0$  erkennen wir die Hamilton'sche Bewegungsgleichung

Um einzusehen, dass die wichtige Relation (16.53) gleichbedeutend damit ist, dass Energie und Impuls die Verschiebungen in Zeit und Raum erzeugen, betrachten wir die Taylorentwicklung

$$\phi(x - a) = \phi(x) - a^\mu \partial_\mu \phi(x) + \frac{1}{2!} (a^\mu \partial_\mu)^2 \phi(x) + \dots \quad (16.54)$$

Hier machen wir von der Beziehung (16.53) Gebrauch und erhalten

$$\phi(x - a) = \phi(x) + \{aP, \phi(x)\} + \frac{1}{2} \{aP, \{aP, \phi(x)\}\} + \dots, \quad (16.55)$$

worin  $aP$  für  $a^\mu P_\mu$  steht. Für infinitesimal kleine Translationen gilt also, wie angekündigt

$$\delta_a \phi = \phi(x - a) - \phi(x) \approx \{aP, \phi\}. \quad (16.56)$$

Ordnen wir nun einer Funktion  $F$  im Phasenraum den linearen Operator  $\text{ad}_F$  zu, definiert durch

$$\text{ad}_F G = \{F, G\}, \quad (16.57)$$

dann schreibt sich eine infinitesimale Verschiebung (16.56) gemäß

$$\delta_a \phi = \text{ad}_{aP} \phi. \quad (16.58)$$

?

Beweisen Sie die Identitäten  $\text{ad}_{\alpha F + \beta G} = \alpha \text{ad}_F + \beta \text{ad}_G$  und  $\text{ad}_{\{F, G\}} = \text{ad}_F \text{ad}_G - \text{ad}_G \text{ad}_F$ .

Die endlichen Verschiebungen in (16.55) sind dann durch wiederholte Anwendung von  $\text{ad}_{aP}$  gegeben,

$$\phi(x - a) = (e^{\text{ad}_{aP}} \phi)(x). \quad (16.59)$$

Während  $\text{ad}_{aP}$  die kleinen Verschiebungen erzeugt, erzeugt  $\exp(\text{ad}_{aP})$  die endlichen Verschiebungen.

### Energie-Impuls des elektromagnetischen Feldes

In der Elektrodynamik führt man den antisymmetrischen Feldstärketensor (16.10). Das Heraufziehen seiner Indices ist gleichbedeutend mit einem Vorzeichenwechsel des elektrischen Feldes, so dass  $(F^{\mu\nu}) = (-\mathbf{E}, \mathbf{B})$  ist. Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \quad (16.60)$$

Aus der letzten Darstellung folgt unmittelbar

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\rho)} = -F^{\mu\rho}, \quad (16.61)$$

und dieses Resultat wird bei der Berechnung des Energie-Impuls Tensors benötigt,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\rho)} \partial_\nu A_\rho - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} = -F_\mu{}^\rho \partial_\nu A_\rho + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (16.62)$$

Die Noetherladungen Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes haben die explizite Form

$$H = \int_{x^0} d\mathbf{x} (E_i \dot{A}_i - \mathcal{L}) \quad \text{und} \quad P_i = \int_{x^0} d\mathbf{x} (E_j \partial_i A_j). \quad (16.63)$$

Obwohl es uns gelang, einen kovariant erhaltenen Energie-Impuls Tensor zu konstruieren, ist eine weitere Verbesserung dieses Tensor nötig. Energie-Impuls Tensoren sind nämlich nicht eindeutig und können abgeändert werden, ohne die erhaltenen Ladungen  $(H, \mathbf{P})$  abzuändern. Der wichtigste Grund für eine Verbesserung ist derjenige, dass Energie und Impuls als Quellen des Gravitationsfeldes wirken. Die Einstein'schen Feldgleichungen enthalten den Energie-Impuls Tensor der Materie und zwar derart, dass dabei vorausgesetzt werden muss, dass dieser kovariant erhalten und symmetrisch ist [8]. Der über das Noether-Theorem gewonnene kanonische Tensor (16.60) ist zwar kovariant erhalten, aber nicht symmetrisch. Zudem ist er nicht invariant unter lokalen Eichtransformationen

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \lambda. \quad (16.64)$$

Er hängt also von der frei wählbaren Eichung ab und kann unmöglich eine beobachtbare Größe sein.

Schlussendlich bemerkt man noch, dass  $\mathcal{L}$  unabhängig von  $\dot{A}_0$  ist und deshalb das zu  $A_0$  konjugierte Impulsfeld verschwindet. Systeme mit dieser Eigenschaft heißen *singuläre Systeme*. Das singuläre Verhalten rührt von der Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen Eichtransformationen (16.64). Singuläre Systeme sind Systeme mit Zwangsbedingungen, deren Behandlung im Rahmen der kanonischen Formulierung aufwändiger ist. Ich verweise hier auf die reichhaltige Literatur, zum Beispiel den Übersichtsartikel [10].

### 16.4.1 Verbesserung von Noetherströmen

Nur für einfache Skalarfelder ist der kanonische Energie-Impuls Tensor symmetrisch. Aber man kann einen nicht-symmetrischen Tensor mithilfe der Belinfante Symmetrisierung verbessern [11]. So gelingt es, einen kovariant erhaltenen und symmetrischen Energie-Impuls Tensor zu konstruieren, den man in die Einstein'schen Feldgleichungen einsetzen darf.

Wir nehmen wieder an, die Lagrangedichte sei unter einer Symmetrietransformation  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$  bis auf eine totale Ableitung invariant,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu. \quad (16.65)$$

Dies ist der Fall für infinitesimale Translationen, Lorentz Transformationen und weitere Raumzeit-Symmetrien (wie konforme Transformationen oder eine Supersymmetrie). Bei der Behandlung der Translationen haben wir gesehen, dass der zugehörige Noetherstrom folgende Form hat,

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi - V^\mu. \quad (16.66)$$

Zur Verbesserung von  $J^\mu$  bemerken wir, dass  $V^\mu$  in (16.65) nur bis auf einen Term der Form  $\partial_\nu A^{\mu\nu}$  mit anti-symmetrischen  $A_{\mu\nu}$  bestimmt ist. Es folgt, dass der Noetherstrom nicht eindeutig ist,

$$J^\mu \mapsto J^\mu - \partial_\nu A^{\mu\nu}. \quad (16.67)$$

Für räumlich lokalisierte Felder ändert sich die erhaltene Noether-Ladung bei dieser Änderung nicht,

$$J^0 \mapsto J'^0 = J^0 - \partial_i A^{0i} \implies Q' = Q.$$

Derartige Verbesserungen wurden in der Literatur ausführlich diskutiert. In der Elektrodynamik können wir den Korrekturterm  $-\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)$  zum Tensor  $T^{\mu\nu}$  in (16.62) addieren. Der verbesserte Energie-Impuls Tensor ist kovariant erhalten, symmetrisch und eichinvariant,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_\mu^\rho F_{\rho\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}. \quad (16.68)$$

Die zugehörigen zeitlich konstanten Ladungen sind aus der Elektrodynamik wohl bekannt:

#### Erhaltene Energie und erhaltener Impuls:

Ein elektromagnetisches Feld trägt folgende Energie und folgenden Impuls,

$$H = \frac{1}{2} \int_{x^0} d\mathbf{x} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = \int_{x^0} d\mathbf{x} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}. \quad (16.69)$$

Den „korrekten“ Tensor (16.68) erhält man auch, wenn man das Maxwellfeld minimal ans Gravitationsfeld koppelt, die entsprechende Wirkung nach der Metrik variiert und schlussendlich wieder annimmt, die Metrik sei die Minkowski-Metrik.

## 16.5 Lorentztransformationen und Drehimpuls

Nach der Anwendung des Noether-Theorems auf die Translationen in Raum und Zeit, was auf die Komponenten des Energie-Impuls Tensors führte, werden wir nun die 6 Noetherströme für die Lorentzsymmetrie gewinnen. Da die Lorentztransformationen die Drehungen im Raum enthalten, sollten drei der 6 Noetherladungen den Komponenten des Drehimpulses sein.

Zu Beginn von Kapitel 16 begründeten wir, dass in einer relativistischen Feldtheorie ein Tensorfeld unter Poincaré-Transformationen, gegeben durch  $x' = \Lambda x + a$ , gemäß  $\phi'(x') = \mathcal{S}\phi(x)$  transformiert. Dabei definiert  $\Lambda \mapsto \mathcal{S}$  eine Darstellung der Lorentzgruppe. Die induzierte Abbildung  $\mathcal{S}_*$  der Lorentzalgebra bildet dann eine Basis der Lorentzalgebra in eine Basis ihrer Darstellung ab, also

$$\mathcal{S}_*(M_{\mu\nu}) = S_{\mu\nu}. \quad (16.70)$$

Insbesondere gehorchen die  $S_{\mu\nu}$  denselben Vertauschungsregeln wie die  $M_{\mu\nu}$  in (13.80). Wir notieren noch, dass ein allgemeines Element (13.68) der Lorentzalgebra (mit kovarianten Indizes  $(\rho, \sigma)$ ) folgende Form hat,

$$\frac{i}{2}((\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu})_{\rho\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{01} & -\omega^{02} & -\omega^{03} \\ \omega^{01} & 0 & \omega^{12} & \omega^{13} \\ \omega^{02} & -\omega^{12} & 0 & \omega^{23} \\ \omega^{03} & -\omega^{13} & -\omega^{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{10} & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{20} & \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{30} & \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (16.71)$$

Wir haben hier  $\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0$  benutzt und kontravariante Indizes mit der Minkowski-Metrik in kovariante umgewandelt. Ziehen wir den Index  $\rho$  noch mit der Metrik hoch, dann finden wir

$$\frac{i}{2}((\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^0_1 & \omega^0_2 & \omega^0_3 \\ \omega^1_0 & 0 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ \omega^2_0 & \omega^2_1 & 0 & \omega^2_3 \\ \omega^3_0 & \omega^3_1 & \omega^3_2 & 0 \end{pmatrix} = (\omega^{\rho}_{\sigma}) \equiv \omega. \quad (16.72)$$

Diese Relationen sind etwas verwirrend. Einerseits treten die  $\omega^{\mu\nu}$  als Entwicklungskoeffizienten in der Entwicklung eines beliebigen Elements der Lorentzalgebra nach der Basis  $(M_{\mu\nu})$  auf, andererseits ist die Matrix  $\omega$  dieser Koeffizienten (nachdem der erste Index hochgezogen ist) proportional zum allgemeinen Element  $(\omega, M)$  der Lorentzalgebra.

Unter einer Lorentztransformation transformiert ein Feld gemäß

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \mathcal{S}\phi(\Lambda^{-1}x) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\phi\left(e^{-\frac{i}{2}(\omega, M)}x\right) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\phi(e^{-\omega}x) \\ &= \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right)\phi(x) - (\omega^{\alpha\beta}x_{\beta}\partial_{\alpha})\phi(x) + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &\approx \phi(x) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu} + iS_{\mu\nu}) \equiv \phi(x) + \delta_{\omega}\phi(x). \end{aligned} \quad (16.73)$$

Damit haben die Erzeugenden  $J_{\mu\nu}$  der Lorentztransformationen in

$$\delta_\omega \phi = \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \phi \quad (16.74)$$

folgende explizite Darstellung,

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = \frac{1}{i} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + S_{\mu\nu}. \quad (16.75)$$

Die Differentialoperatoren  $L_{\mu\nu}$  kommutieren mit den konstanten Darstellungsmatrizen  $S_{\mu\nu}$ , so dass die  $L_{\mu\nu}$ , die  $S_{\mu\nu}$  und damit auch die  $J_{\mu\nu}$  die Lorentzalgebra (13.72) erfüllen. Die Operatoren mit nur räumlichen Indizes  $L_{ij}$  und  $S_{ij}$  beschreiben den Bahndrehimpuls und Spin des Teilchens.

### 16.5.1 Noetherladungen für die Lorentzsymmetrie

Ähnlich wie bei den Translationen ist die Variation der Lagrangedichte bei infinitesimalen Lorentztransformationen eine totale Divergenz. Da  $\mathcal{L}$  wie ein skalares Feld transformiert, gilt

$$\delta_\omega \mathcal{L} = \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu \quad \text{mit} \quad V^\mu = -\omega^{\mu\rho} x_\rho \mathcal{L}. \quad (16.76)$$

Setzen wir für die Variation des Feldes  $\delta_\omega \phi$  im kovariant erhaltenen Noetherstrom

$$J_\omega^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \delta_\omega \phi - V^\mu \quad (16.77)$$

das Ergebnis (16.74) ein, dann finden wir die einfache Form

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} \delta_\omega \phi = \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \omega^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} \phi. \quad (16.78)$$

Die Subtraktion von  $V^\mu$  führt dann für jede Matrix  $\omega$  auf den Noetherstrom

$$J_\omega^\mu = \frac{\omega^{\rho\sigma}}{2} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)} (x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) \phi - (\delta_\sigma^\mu x_\rho - \delta_\rho^\mu x_\sigma) \mathcal{L} + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} S_{\rho\sigma} \phi \right). \quad (16.79)$$

An dieser Stelle bemerkt man, dass die spinunabhängigen Terme durch den kanonischen Energie-Impuls Tensor ausgedrückt werden können – sie sind gleich  $x_\rho T_\sigma^\mu - x_\sigma T_\rho^\mu$ .

#### Noetherströme der Lorentz-Symmetry

Die Noetherströme zur Lorentzinvarianz sind Linearkombinationen der Ströme  $J^{\mu\rho\sigma} = -J^{\mu\sigma\rho}$ ,

$$J_\omega^\mu = \omega_{\rho\sigma} J^{\mu\rho\sigma}, \quad J^{\mu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}) + \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} S^{\rho\sigma} \phi. \quad (16.80)$$

Wegen der Antisymmetrie in  $\rho$  und  $\sigma$  existiert zu jedem  $\rho < \sigma$  ein unabhängiger Noetherstrom. Die zugehörigen 6 Noetherladungen sind

$$Q^{\rho\sigma} = -Q^{\sigma\rho} = \int_t d\mathbf{x} J^{0\rho\sigma}. \quad (16.81)$$

Die Raum-Zeit und die Raum-Raum Komponenten haben die explizite Form

$$\begin{aligned} Q^{i0} &= \frac{1}{2} \int_{x^0} d\mathbf{x} (x^i \mathcal{H} - \pi x^0 \partial^i \phi - i\pi S^{0i} \phi), \\ Q^{ij} &= \frac{1}{2} \int_{x^0} d\mathbf{x} \pi (x^i \partial^j \phi - x^j \partial^i \phi + iS^{ij} \phi). \end{aligned} \quad (16.82)$$

Eine Rechnung zeigt, dass diese Ladungen genau diejenigen Lorentztransformationen erzeugen, aus denen sie hervorgegangen sind,

$$\{\phi, Q^{\mu\nu}\} = \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \phi. \quad (16.83)$$

Zum Beispiel ist in der Elektrodynamik

$$Q^{\mu\rho\sigma} = \left( \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} x^\sigma F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\xi} x^\sigma \partial^\rho A_\xi - F^{\mu\rho} A^\sigma \right) - (\rho \leftrightarrow \sigma). \quad (16.84)$$

Im Unterabschnitt 16.4.1 haben wir gezeigt, wie für rein bosonische Theorien ein kovariant erhaltener, aber unsymmetrischer Energie-Impuls Tensor verbessert werden kann. Wenn man die Felder ans Gravitationsfeld koppelt und die resultierende Wirkung nach der Metrik variiert, gewinnt man einen erhaltenen und symmetrischen Tensor. Koppelt man aber fermionische Felder ans Gravitationsfeld, dann muss man ein Vielbein einführen. Variiert man die Wirkung nach dem Vierbein, dann findet man zwar einen kovariant erhaltenen, aber im Allgemeinen unsymmetrischen Tensor. Dieser muss nachträglich verbessert werden.

## 16.6 Symmetrien in Quantenfeldtheorien

Der Übergang von einer klassischen Feldtheorie zur entsprechenden Quantenfeldtheorie geschieht (formal) mithilfe der Korrespondenzregel: nach dieser werden dem klassischen Feld  $\phi(\mathbf{x})$  und kanonisch konjugierten Impulsfeld am Raumpunkt mit Koordinate  $\mathbf{x}$  die Feldoperatoren  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  und  $\hat{\pi}(\mathbf{x})$  zugeordnet. Die Poisson-Klammer zwischen klassischen Feldern wird durch  $-i$  mal dem Kommutator der entsprechenden Feldoperatoren ersetzt. Insbesondere gehen die fundamentalen Poisson-Klammern (16.18) in folgende Kommutatoren über:

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad [\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{y})] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = 0. \quad (16.85)$$

Die Zeitentwicklung der Feldoperatoren im Heisenberg-Bild folgt aus den Bewegungsgleichungen

$$i \frac{d}{dt} \hat{\phi}(\mathbf{x}) = [\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{H}] \quad \text{und} \quad i \frac{d}{dt} \hat{\pi}(\mathbf{x}) = [\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{H}]. \quad (16.86)$$



Ähnlich den Feldoperatoren gewinnt man den Hamiltonoperator, indem man in der Hamiltonfunktion  $H(\phi, \pi)$  die Felder durch die entsprechenden Feldoperatoren ersetzt.<sup>4</sup> Die Lösung der Bewegungsgleichungen (bei gegebenen Anfangsbedingungen) legt das Quantenfeld zu allen Zeitpunkten fest,  $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(x^0, \mathbf{x})$ . Das Quantenfeld wirkt auf Zustände im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  der Quantenfeldtheorie. Dies kann ein Fockraum über einem Vakuumzustand  $|0\rangle$  mit minimaler Energie sein.

Ein wichtiges *Theorem von Wigner* besagt nun, dass jede Symmetrie als linear unitäre (oder anti-linear antiunitäre) Transformation auf die Zustandsvektoren wirkt. Für die Poincaré-Symmetrie bedeutet dies

$$\hat{\phi}(x) \mapsto S\hat{\phi}(\Lambda^{-1}(x-a)) = \hat{U}(a, \Lambda)\hat{\phi}(x)\hat{U}^{-1}(a, \Lambda) \quad (16.87)$$

mit unitärem Operator  $\hat{U}$ , der von der Verschiebung  $a$  und der Lorentz-Transformation  $\Lambda$  abhängt.<sup>5</sup> Für die Verschiebungen können wir den unitären Operator  $\hat{U}(a)$  mithilfe des klassischen Ausdrucks (16.59) gewinnen, wenn wir die Poissonklammer in (16.57) durch  $-i$  mal dem Kommutator ersetzen,

$$\hat{\phi}(x-a) = e^{-i \text{ad}_{a\hat{P}} \hat{\phi}} \quad \text{mit} \quad \text{ad}_{\hat{F}} \hat{G} = [\hat{F}, \hat{G}]. \quad (16.88)$$

Entwickeln wir die Exponentialfunktion in Potenzen von  $a$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{-i \text{ad}_{a\hat{P}} \hat{\phi}} &= \hat{\phi} - i[a\hat{P}, \hat{\phi}] - \frac{1}{2!}[a\hat{P}, [a\hat{P}, \hat{\phi}]] + \frac{i}{3!}[a\hat{P}, [a\hat{P}, [a\hat{P}, \hat{\phi}]]] + \dots \\ &= e^{-i a\hat{P}} \hat{\phi} e^{i a\hat{P}}, \quad \text{mit} \quad a\hat{P} = a^\mu \hat{P}_\mu. \end{aligned} \quad (16.89)$$

---

?

---

Versuchen Sie, diese Identität zu beweisen.

---

Der Vergleich von (16.88) mit (16.89) offenbart, dass

$$\hat{\phi}(x-a) = \hat{U}(a)\hat{\phi}(x)\hat{U}^{-1}(a) \quad \text{mit} \quad \hat{U}(a) = e^{-i a\hat{P}}. \quad (16.90)$$

Die infinitesimale Form der Transformation gewinnt man durch Vergleich der Ordnungen  $\mathcal{O}(a)$ ,

$$[\hat{P}_\mu, \hat{\phi}] = -i\partial_\mu \hat{\phi}. \quad (16.91)$$

Eine ähnliche Vorgehensweise für die Lorentztransformationen führt auf die allgemeineren Beziehungen für Poincaré-Transformationen in (16.87). Dies werden wir in Kapitel 17 sehr ausführlich diskutieren.

---

<sup>4</sup>Die dabei auftretenden mathematischen Probleme, zum Beispiel divergente Ausdrücke, werden an dieser Stelle nicht weiter erörtert.

<sup>5</sup>Für Spinorfelder muss man die zweifache Überlagerung der Lorentzgruppe, die Spingruppe, einführen.

### 16.6.1 Konsequenzen für Korrelationsfunktionen

In einer relativistischen Quantenfeldtheorie (QFT) kann der Zustand mit kleinster Energie – er wird Vakuumzustand genannt – keine negative Energie haben. Dies wäre im Widerspruch zur Stabilität des Vakuums. Tatsächlich sollte der Vakuumzustand keine Energie, keinen Impuls und keinen Drehimpuls haben. Diese Forderung ist, wie wir weiter unten sehen werden, äquivalent zur Forderung, dass der Vakuum-Zustand  $|0\rangle$  unter Poincaré-Transformationen invariant ist,

$$\hat{U}(a, \Lambda)|0\rangle = |0\rangle \iff \hat{U}^{-1}(a, \Lambda)|0\rangle = |0\rangle. \quad (16.92)$$

Er sieht dann, in Einklang mit dem als gültig vorausgesetzten Äquivalenzprinzip, in allen Inertialsystemen gleich aus. Für die Translationen in Raum und Zeit benutzen wir (16.90), um den Feldoperator bei  $x$  mit dem Feldoperator am Ursprung in Verbindung zu bringen:

$$\hat{\phi}(0) = \hat{U}(x)\hat{\phi}(x)\hat{U}^{-1}(x) \quad \text{bzw.} \quad \hat{\phi}(x) = e^{ix\hat{P}}\hat{\phi}(0)e^{-ix\hat{P}}. \quad (16.93)$$

Für die Zweipunktsfunktion folgt dann aus der Translationsinvarianz des Vakuums (16.92)

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle &= \langle 0|e^{ix\hat{P}}\hat{\phi}(0)e^{-i(x-y)\hat{P}}\hat{\phi}(0)e^{-iy\hat{P}}|0\rangle \\ &= \langle 0|\hat{\phi}(0)e^{-i(x-y)\hat{P}}\hat{\phi}(0)|0\rangle = \langle 0|\hat{\phi}(x-y)\hat{\phi}(0)|0\rangle = W(x-y). \end{aligned} \quad (16.94)$$

Dies bedeutet, dass sie nur von der Differenz  $x - y$  abhängt. Dies drückt die Homogenität der Raumzeit aus.

Die Zweipunktsfunktion transformiert auch kovariant unter Lorentztransformationen. Wir benutzen (16.87) in der Form

$$\hat{U}(\Lambda)\hat{\phi}(x)\hat{U}^{-1}(\Lambda) = \mathcal{S}\hat{\phi}(\Lambda^{-1}x). \quad (16.95)$$

Für ein Skalarfeld mit  $\mathcal{S} = \mathbb{1}$  erhalten wir aus der Lorentzinvarianz des Vakuums in (16.92) die Beziehung

$$W(x) = \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)|0\rangle = \langle 0|\hat{\phi}(\Lambda^{-1}x)\hat{\phi}(0)|0\rangle = W(\Lambda^{-1}x), \quad (16.96)$$

was die Kovarianz der Zweipunktsfunktion unter Lorentztransformationen ausdrückt. Dagegen erfüllt die Zweipunktsfunktion eines Vektorfeldes  $\hat{V}_\mu(x)$  folgende Relation,

$$W_{\mu\nu}(x) \equiv \langle 0|\hat{V}_\mu(x)\hat{V}_\nu(0)|0\rangle = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma W_{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x). \quad (16.97)$$

Diese Kovarianzbedingungen schränken die möglichen Formen der Zweipunktsfunktion erheblich ein. Ähnliche Einschränkungen existieren auch für höhere Korrelationsfunktionen.

Wie findet man nun die infinitesimalen Erzeuger von *inneren Symmetrien* in einer QFT? Ausgangspunkt ist hier wieder das klassische Resultat, diesmal in der Form (16.41), zusammen mit der Ersetzung der Poissonklammer durch den Kommutator,

$$\{\phi, Q_X\} = \delta_X\phi \longmapsto [\hat{\phi}, \hat{Q}_X] = i\delta_X\hat{\phi}. \quad (16.98)$$

Die letzte Relation bedeutet, dass  $\hat{Q}_X$  die infinitesimalen Symmetrien erzeugt,

$$\delta_X \hat{\phi} = i[\hat{Q}_X, \hat{\phi}], \quad (16.99)$$

und die endlichen Symmetrietransformationen durch Exponentieren zustande kommen,

$$\hat{\phi} \mapsto U \hat{\phi} U^{-1}, \quad U = \exp(i\hat{Q}). \quad (16.100)$$

### Erzeugende von Symmetrien

Die Generatoren  $\hat{Q}$  von Symmetrien in einer Quantentheorie gewinnt man, indem man in den klassischen Noether-Ladungen die Felder durch die zugehörigen Feldoperatoren ersetzt.

## 16.7 Aufgaben zu Kapitel 16

### Aufgabe 16.1: Lorentzinvarianz der Elektrodynamik

Beweisen Sie, dass die Lagrangedichte der Maxwell'schen Theorie,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

wie folgt transformiert:  $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ . Was folgt daraus für  $\delta\mathcal{L}$  und warum folgt daraus die Invarianz der Wirkung.

### Aufgabe 16.2: Variationelle Ableitungen

Es sei  $u(x)$  eine reelle Funktion der reellen Variablen  $x$ . Die erste und zweite variationelle Ableitung eines Funktionals  $F[u]$  sind definiert durch

$$F[u + \delta u] = F[u] + \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \delta u(x) + \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta^2 F}{\delta u(x) \delta u(y)} \delta u(x) \delta u(y) + O(\delta u^3).$$

Sei nun  $F[u]$  ein Funktional der Form

$$F[u] = \int dx f(u, u_x, u_{xx}, \dots).$$

Hierin ist  $u_x$  die erste und  $u_{xx}$  die zweite Ableitung von  $u$  nach  $x$ . Beweisen Sie, dass die erste variationelle Ableitung von  $F$  folgende Form hat:

$$\frac{\delta F}{\delta u(x)} = \frac{\partial f}{\partial u(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x(x)} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial u_{xx}(x)} - \dots = \sum_{n=0,1,\dots} (-1)^n \left( \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\partial f}{\partial u^{(n)}(x)}$$

Beweisen Sie nun, dass die zweite variationelle Ableitung von  $F$  wie folgt lautet:

$$\frac{\delta^2 F[u]}{\delta u(x)\delta u(y)} = \delta(x-y) \sum_{m,n=0,1,\dots} \left( (-)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{(nm)}(x) \frac{d^m}{dx^m} + (-)^m \frac{d^m}{dx^m} f_{(mn)}(x) \frac{d^n}{dx^n} \right).$$

Dabei benutzen wir die Notation

$$f_{(mn)}(x) = \frac{\partial^2 f}{\delta u^{(m)}(x)\delta u^{(n)}(x)}.$$

Bemerkung: Sie dürfen annehmen, die Funktion  $u(x)$  und alle ihre Ableitungen fallen für  $|x| \rightarrow \infty$  so schnell ab, dass partiell integriert werden kann ohne dass Oberflächenterme auftreten.

### Aufgabe 16.3: Produktregel und Jacobi-Identität für Poisson-Klammer

Punkte im Phasenraum einer klassischen Feldtheorie werden durch Feldkonfigurationen  $(\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}))$  repräsentiert. Die Funktionale  $F[\phi, \pi]$  und  $G[\phi, \pi]$  seien Observablen (Funktionen vom Phasenraum in die reellen Zahlen) einer klassischen Feldtheorie. Deren (Standard) Poisson-Klammer ist

$$\{F, G\} = \int d\mathbf{x} \left( \frac{\delta F}{\delta \phi(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi(\mathbf{x})} - \frac{\delta F}{\delta \pi(\mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \phi(\mathbf{x})} \right).$$

Beweise die Produktregel

$$\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H \implies \{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G.$$

Es sei  $H[\phi, \pi]$  eine weitere Observable. Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0.$$

Hinweis: Die Argumente sind analog wie in der klassischen Mechanik. Der einzige Unterschied ist, dass in einer Feldtheorie die Anzahl Freiheitsgrade unendlich ist.

### Aufgabe 16.4: Erhaltungsgrößen

Eine Symmetrie eines physikalischen Systems bedingt nach dem Noether-Theorem eine Erhaltungsgröße. Man bestimme die Symmetrien und die entsprechenden Erhaltungsgrößen folgender Systeme:

- freies Teilchen in  $d$  Dimensionen
- Bewegung eines Planeten im Newtonschen Gravitationspotenzial eines schwarzen Lochs

### Aufgabe 16.5: Infinitesimale Lorentztransformationen

Unter Lorentztransformationen  $x' = \Lambda x$  transformiert ein Skalarfeld gemäß  $\phi'(x') = \phi(x)$ . Jede eigentliche Lorentztransformation hat die Form

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \Lambda = e^\omega$$

mit infinitesimalen Erzeugenden  $\omega = (\omega^\mu{}_\nu)$  mit  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ . Bestimmen Sie die infinitesimale Form der Lorentztransformation des Feldes.

### Aufgabe 16.6: Komplexes Skalarfeld

Es sei  $\phi$  ein komplexes Skalarfeld, welches die KG-Gleichung erfüllt. Die Wirkung ist

$$S = \int d^4x (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi).$$

Finden Sie die zu  $\phi$  und  $\phi^*$  kanonisch konjugierten Impulsfelder. Berechnen Sie die Heisenberg-Gleichungen und zeigen Sie, dass diese auf die Klein-Gordon Gleichung führen.

### Aufgabe 16.7: Ein integrables System

Es sei  $u(x)$  eine reelle Funktion der Variablen  $x \in \mathbb{R}$  und  $u_x$  die erste,  $u_{xx}$  die zweite usw. Ableitung von  $u$  nach  $x$ . Beweisen Sie, dass die Variationsableitung eines Funktionals  $F$  mit lokaler Dichte,  $F[u] = \int dx f(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ , folgende Form hat:

$$\frac{\delta F}{\delta u(x)} = \frac{\partial f}{\partial u(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x(x)} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial u_{xx}(x)} - \dots$$

Definieren Sie nun folgende Klammer zwischen zwei Funktionalen,

$$\{F, G\} = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{d}{dx} \frac{\delta G}{\delta u(x)}.$$

Beweisen Sie, dass dies eine Poisson-Klammer definiert, d.h. antisymmetrisch und bilinear ist und die Jacobi-Identität erfüllt. Die Hamilton-Funktion sei

$$H = \int dx \left( u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 \right).$$

Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichung für  $u(t, x)$ . Recherchieren Sie dann, ob dies eine bekannte Gleichung der mathematischen Physik ist.

# 17 Konform-invariante Feldtheorien

*Das Hebelgesetz der Physik lehrt uns: Wenn Du weißt, wo Du ansetzen musst, kannst Du mit geringer Kraft viel bewegen.*

ACHIM REICHERT

Die Gruppe der Lorentz- oder allgemeiner der Poincaré-Transformationen und deren Lie-Algebren wurden in den Abschnitten 5.5 und 13.6 eingeführt und diskutiert. Nun wenden wir uns einer Unterklasse von relativistischen Feldtheorien zu – den konform invarianten relativistischen Feldtheorien. Wir beginnen mit der Diskussion der konformen Symmetrie und danach mit der Charakterisierung von konform invarianten Feldtheorien. Im letzten Abschnitt wenden wir uns den konformen Feldtheorien in  $1 + 1$  Dimensionen zu. Für diese Theorien ist die Symmetriealgebra unendlich-dimensional. Es sind die Virasoro-Algebra und für speziellere Modelle eine Kac-Moody Algebra.

## 17.1 Konforme Symmetrie

Qualitativ neue Eigenschaften treten in einer physikalischen Theorie auf, wenn neben Translations- und Lorentzinvarianz auch Invarianz unter Skalentransformation gefordert wird. Damit ist gemeint, daß ein System, in dem alle Längen mit einem Faktor  $c > 0$  skaliert werden, sich identisch zum ursprünglichen System verhält. Es zeigt sich, daß nahezu alle skaleninvariante Modelle sogar invariant unter einer größeren Symmetriegruppe sind: der *Gruppe der konformen Transformationen*. Dies sind winkelerhaltende Transformationen. Zu Verschiebungen, Lorentztransformationen und Dilatationen kommen dann noch die speziell-konformen Transformationen, wie die Inversion an der Einheitssphäre, hinzu.

Die wenigsten physikalischen Modelle sind skaleninvariant, da die meisten Systeme eine charakteristische Länge haben. Das Inverse der charakteristischen Länge wird mit der Masse identifiziert. Entsprechend sind masselose Theorien gute Kandidaten für konform invariante Modelle. Skaleninvarianz beobachtet man auch bei Systemen in der Nähe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung.

### 17.1.1 Konforme Abbildungen

Wir beginnen mit einer geometrischen Charakterisierung von konformen Abbildungen. Unter einer konformen Abbildung

$$x^\mu \mapsto y^\mu = y^\mu(x^\nu) \quad (17.1)$$

versteht man definitionsgemäß eine winkeltreue Koordinatentransformation

$$dy^\mu dy_\mu = e^{\varphi(x)} dx^\mu dx_\mu. \quad (17.2)$$

Konforme Abbildungen ändern das lorentzinvariante Längenelement nur bis auf einen (im Allgemeinen orts- und zeitabhängigen) positiven Faktor,

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} = e^{\varphi(x)} \eta_{\alpha\beta}. \quad (17.3)$$

---

?

---

Überzeugen Sie sich davon, dass auch die Umkehrabbildung  $y^\mu \mapsto x^\mu(x^\alpha)$  winkeltreu ist mit

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\delta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\sigma} = e^{-\varphi(y)} \eta_{\delta\sigma} \quad (17.4)$$


---

Insbesondere werden bei konformen Abbildungen Lichtkegel in sich abgebildet. Wir betrachten nun eine von einem Vektorfeld  $X(x)$  erzeugte infinitesimale konforme Transformation,

$$y^\mu \approx x^\mu + X^\mu(x) \implies \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \approx \delta^\mu_\alpha + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}, \quad (17.5)$$

Für die identische Abbildung verschwindet  $\varphi$  in (17.2). Deshalb ist für eine infinitesimale Transformation  $\varphi$  gleichfalls infinitesimal klein und wir können schreiben  $e^\varphi \approx 1 + \delta\varphi$ . Nun entwickeln wir die Beziehung (17.2) bis zur ersten Ordnung und erhalten

$$\eta_{\alpha\beta} + X_{\alpha,\beta} + X_{\beta,\alpha} + \dots = \eta_{\alpha\beta} + \delta\varphi \eta_{\alpha\beta} + \dots, \quad X_{\alpha,\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Man sieht hier, dass die symmetrisierte Ableitung von  $X$  proportional zu  $\eta_{\alpha\beta}$  sein muss. Mittel Spurbildung findet man

$$\delta\varphi = \frac{2}{d} \partial_\rho X^\rho \implies X_{\alpha,\beta} + X_{\beta,\alpha} = \frac{2}{d} \eta_{\alpha\beta} \partial_\rho X^\rho. \quad (17.6)$$

Die letzte Beziehung ist die sogenannte *konforme Killing-Gleichung*. Wir halten das Resultat fest:

#### Konforme Killingvektorfelder

Winkel erhaltende konforme Abbildungen werden durch Vektorfelder erzeugt, welche die

konforme Killing-Gleichung erfüllen:

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho X^\rho. \quad (17.7)$$

In drei oder mehr Dimensionen gibt es  $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$  konforme Killingfelder, und jedes Feld erzeugt eine konforme Abbildung. Die verschiedenen konformen Abbildungen und ihre konformen Vektorfelder sind in Tabelle 17.1 angegeben.

Symmetrien	Anzahl	$y(x)$	$e^{\varphi(x)}$	$X^\mu(x)$	$\delta\varphi(x)$
Translationen	$d$	$x^\mu + a^\mu$	1	$a^\mu$	0
Lorentztransf.	$\frac{1}{2}d(d-1)$	$\Lambda^\mu_\nu x^\nu$	1	$\omega^\mu_\nu x^\nu$	0
Dilatation	1	$e^\lambda x^\mu$	$e^{2\lambda}$	$\lambda x^\mu$	$2\lambda$
spezielle konf. Transf.	$d$	$\frac{x^\mu - x^2 c^\mu}{1 - 2c \cdot x + c^2 x^2}$	$\frac{1}{(1 - 2c \cdot x + c^2 x^2)^2}$	$2(c \cdot x)x^\mu - x^2 c^\mu$	$4c \cdot x$

Tabelle 17.1: Die konformen Transformationen im  $d$ -dimensionalen Minkowskiraum, ihre Anzahl, das zugehörige konforme Killingfeld, der konforme Faktor  $e^\varphi$  und der Beitrag erster Ordnung  $\delta\varphi$  zu  $\varphi$ .

Diese hängen von den reellen Parametern  $(a^\mu, \Lambda^\mu_\nu, \lambda, c^\mu)$  ab. In vier Raumzeit-Dimensionen sind es 15 Parameter.

?

Prüfen Sie nach, dass für Dilatationen  $\delta\varphi = 2\lambda$  und für spezielle konforme Transformationen  $\delta\varphi = 4c \cdot x$ .

### 17.1.2 Konform invariante Feldtheorien

Nun wenden wir uns konform invarianten (bosonischen) Feldtheorien zu. Zuerst zeigen wir, dass jede Feldtheorie, die kovariant und Weyl-invariant an das Gravitationsfeld gekoppelt werden kann, eine konform invariante Theorie im Minkowski-Raum ist.

#### Invarianz unter Weyl-Transformationen

In einer Weyl-invarianten Theorie ist die Wirkung invariant unter Weyltransformationen der Metrik,

$$g_{\mu\nu}(y) \mapsto \hat{g}_{\mu\nu}(y) = e^{\sigma(y)} g_{\mu\nu}(y), \quad (17.8)$$



und der Materiefelder,

$$S(e^{\sigma(y)} g_{\mu\nu}(y), e^{w_\phi \sigma(y)} \phi(y)) = S(g_{\mu\nu}(y), \phi(y)). \quad (17.9)$$

Darin ist  $w_\phi$  das sogenannte *Weyl-Gewicht* des Materiefelds.

Nun kommen wir zu den Diffeomorphismen, welche in lokalen Koordinaten die Form (17.1) haben. Unter einem Diffeomorphismus transformieren die kovarianten und kontravarianten Komponenten eines Tensorfeldes gemäß

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu\dots}(y) &= \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \dots T_{\alpha\beta\dots}(x), & \Lambda_\mu^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \\ T'^{\mu\nu\dots}(y) &= \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \dots T^{\alpha\beta\dots}(x), & \Lambda_\alpha^\mu &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \end{aligned} \quad (17.10)$$

Die konforme Invarianz im Minkowski Raum kann nun wie folgt begründet werden

1. Im ersten Schritt transformiert man die kartesischen Koordinaten im Minkowski-Raum mittels einer konformen Transformation (17.1), und fasst diese als allgemeine Koordinatentransformation auf. Wegen der Diffeomorphismen-Invarianz der Wirkung ändert sich diese dabei nicht. Zum Beispiel gilt für ein Materiefeld  $\phi_{\mu\nu}$

$$\left\{ x^\mu, \eta_{\mu\nu}, \phi_{\alpha\beta}(x) \right\} \mapsto \left\{ y^\mu, g_{\mu\nu}(y) = e^{\varphi(y)} \eta_{\mu\nu}, \phi'_{\alpha\beta}(y) \right\}, \quad \phi'_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \phi_{\mu\nu}(x(y)). \quad (17.11)$$

Diese Invarianz gilt für jedes kovariant an das (äußere) Gravitationsfeld gekoppelte Materiefeld.

2. Im zweiten Schritt bringen wir mit einer kompensierenden Weyltransformation die Metrik wieder in Minkowski-Form,

$$\left\{ y^\mu, e^{\varphi(y)} \eta_{\mu\nu}, \phi'_{\alpha\beta}(y) \right\} \mapsto \left\{ y^\mu, \hat{g}_{\mu\nu} = e^{\sigma(y)+\varphi(y)} \eta_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} \eta_{\mu\nu}, e^{w\sigma} \phi'_{\alpha\beta}(x) \right\}. \quad (17.12)$$

Der entsprechend Weylfaktor ist gegeben durch

$$e^{-\sigma} = e^\varphi = \frac{1}{d} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dy^\alpha} \frac{dx^\nu}{dy^\beta}. \quad (17.13)$$

Für eine Weyl-invariante Feldtheorie ist die Wirkung invariant unter der Transformation (17.13).

Führen wir nun zuerst die Koordinatentransformation (17.11) und danach die kompensierende Weyltransformation (17.12) aus, dann erhalten wir für eine weylinvariante Theorie die Symmetrie

$$\left\{ x^\mu, \eta_{\mu\nu}, \phi_{\alpha\beta}(x) \right\} \mapsto \left\{ y^\mu, \eta_{\mu\nu}, e^{-w\varphi} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \phi_{\alpha\beta}(x(y)) \right\}. \quad (17.14)$$

Dies ist eine Symmetrietransformation im Minkowski-Raum, unter der die Koordinaten und Felder transformieren. Die Transformation ändert die Winkel zwischen zwei sich schneidenden Gerade nicht und deshalb ist es eine konforme Transformation im Minkowski-Raum.

Wir kehren zu den infinitesimalen konformen Transformationen (17.3) zurück und bestimmen die entsprechenden infinitesimalen Änderungen des Materiefeldes,

$$\phi_{\alpha\beta} \mapsto (1 - w\varphi)(\delta_\alpha^\mu - \partial_\alpha X^\mu)(\delta_\beta^\nu - \partial_\beta X^\nu)\phi_{\mu\nu}(x - X), \quad (17.15)$$

woraus man die infinitesimale Transformation abliest,

### Konforme Transformation eines Tensorfelds

Unter einer infinitesimalen konformen Transformation mit konformen Killingfeld  $X$  – diese sind Tabelle 17.1 angegeben – transformiert eine Tensorfeld wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta_X \phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} &= -(L_X \phi)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} - w\varphi \phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} \\ (L_X \phi)_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} &= X^\mu \partial_\mu \phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} + \partial_{\alpha_1} X^\mu \phi_{\mu \alpha_2 \dots} + \partial_{\alpha_2} X^\mu \phi_{\alpha_1 \mu \dots} + \dots \end{aligned} \quad (17.16)$$

Der lineare Operator  $L_X$  ist die Lie-Ableitung in Richtung von  $X$ . Der Faktor von  $\varphi = -2\partial_\rho X^\rho/d$  ist das Weylgewicht  $w$  des Materiefeldes.

Für ein Skalarfeld enthält die  $L_X \phi$  keine Terme mit Ableitungen des konformel Killingfeldes  $X$ , und wir finden den einfacheren Ausdruck

$$\delta_X \phi = - \left( X^\mu \partial_\mu - \frac{2w}{d} \partial_\rho X^\rho \right) \phi. \quad (17.17)$$

Für eine infinitesimale konforme Transformation mit dem allgemeinsten konformen Killingfeld

$$X^\mu = a^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + 2(c \cdot x)x^\mu - x^2 c^\mu \quad (17.18)$$

ändert sich ein Skalarfeld folgendermaßen:

$$\delta_X \phi = i \left( a^\mu P_\mu + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu} + \lambda D + c^\mu K_\mu \right) \phi. \quad (17.19)$$

Hierin treten die (hermiteschen) Erzeugenden der Translationen, Lorentz-Transformationen, Dilatationen und spezielle konformen Transformation auf,

$$\begin{aligned} P_\mu &= i\partial_\mu, \\ L_{\mu\nu} &= \frac{1}{i}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \\ D &= i(x^\mu \partial_\mu - 2w), \\ K_\mu &= i(2x_\mu x^\rho \partial_\rho - x^2 \partial_\mu - 4w c \cdot x). \end{aligned} \quad (17.20)$$

Die von diesen Generatoren erzeugte Liealgebra ist die konforme Algebra, die eine Verallgemeinerung der Poincaré-Algebra darstellt:

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= [K_\mu, K_\nu] = [D, D] = 0 \quad , \quad [P_\mu, D] = iP_\mu \quad , \quad [K_\mu, D] = -iK_\mu \\
[P_\mu, K_\nu] &= 2iL_{\mu\nu} + 2i\eta_{\mu\nu}D \quad , \quad [L_{\mu\nu}, D] = 0 \\
[P_\rho, L_{\mu\nu}] &= -i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \quad , \quad [K_\rho, L_{\mu\nu}] = -i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu) \\
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma}) .
\end{aligned} \tag{17.21}$$

Dies sind genau die Kommutationsregeln der Erzeugenden der nichtkompakten Gruppe  $SO(2, d)$ . Um den Zusammenhang zwischen der konformen Algebra und der Liealgebra  $so(2, d)$  direkt herzustellen, führen wir zuerst folgende Koordinaten im Raum  $\mathbb{R}^{d+2}$  ein:

$$\xi_m = (\xi_{-1}, x_\mu, \xi_d) . \tag{17.22}$$

Die Signatur des Raums ist  $(d, 2)$  und als Längenelement wählen wir

$$d\xi^2 = d\xi_{-1}^2 + \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\xi_d^2 = \eta_{mn}d\xi^m d\xi^n . \tag{17.23}$$

Wir betrachten infinitesimale Transformation in diesem Raum und zerlegen die Generatoren wie folgt,

$$2L_{mn} = -2L_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & P_\mu & D \\ -P_\mu & L_{\mu\nu} & P_\mu \\ -D & -P_\mu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K_\mu & D \\ -K_\mu & L_{\mu\nu} & -K_\mu \\ -D & K_\mu & 0 \end{pmatrix} . \tag{17.24}$$

Die  $SO(2, d)$  Kommutationsregeln

$$[L_{mn}, L_{pq}] = i(\eta_{mp}L_{nq} + \eta_{nq}L_{mp} - \eta_{mq}L_{np} - \eta_{np}L_{mq}) \tag{17.25}$$

sind nun äquivalent zu den denjenigen der konformen Algebra (17.21). Die Dimension der Liealgebra ist bekanntlich

$$\frac{1}{2}D(D-1) \quad \text{mit} \quad D = d+2 , \tag{17.26}$$

und dies ist gerade die Dimension der konformen Gruppe in  $d$  Raumzeit-Dimensionen.

## 17.2 Konforme Feldtheorien in 1 + 1 Dimensionen

### 17.2.1 Virasoro-Algebra

### 17.2.2 Kac-Moody Algebra

## 17.3 Aufgaben zu Kapitel 17

### Aufgabe 17.1: Konforme Transformation eines Vektorfelds

## 18 Eichtheorien

*Symmetry principles have moved to a new level of importance in this century and especially in the last few decades; there are symmetry principles that dictate the very existence of all the known forces of nature.*

S. WEINBERG

Alle fundamentale Wechselwirkungen der Physik werden durch Eichtheorien modelliert: Dies sind die Maxwell'sche Theorie, das Weinberg-Salam Modell der elektroschwachen Wechselwirkung (welche die Maxwell'sche Theorie inkludiert), die Quantenchromodynamik der starken Wechselwirkung und die Einstein'sche Theorie der Gravitation. Die wohl-bekanntesten elektromagnetischen und gravitativen Kräfte sind langreichweitig, wogegen die schwache und starke Kräfte kurzreichweitig sind. Das Standardmodell der Teilchenphysik beschreibt alle (mikroskopischen) Wechselwirkungen mit Ausnahme der Gravitation. Es beschreibt die den Elementarteilchen zugeordneten Felder und deren Propagation im Minkowskiraum. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass Eichtheorien durch wenige Angaben – im Wesentlichen die Teilchensorten und Symmetrien – festgelegt sind. Neben der Lorentzinvarianz sind dies die enorm wichtigen Eichsymmetrien. In diesem Kapitel besprechen wir das Eichprinzip, mit dem man eine globale Eichsymmetrie in einer lokale umwandeln kann. Dies gelingt allerdings nur, wenn man Eichpotenziale einführt, welche die Austauscheteilchen der Wechselwirkung beschreiben. Im Standardmodell sind dies das Photon der elektromagnetischen Wechselwirkung, die  $W^\pm$ -Bosonen und das  $Z$ -Boson der elektroschwachen Wechselwirkung und die Gluonen der starken Wechselwirkung. In diesem Kapitel wählen wir *natürliche Einheiten*, in denen  $c = \hbar = 1$  sind.

### 18.1 Eichtransformationen und minimale Kopplung

Erstmalig sind Sie den Potenzialen in Ihrer Vorlesung über Elektrodynamik begegnet. Bei der Lösung der homogenen Maxwell'schen Gleichungen wird man sehr natürlich auf Potenziale geführt. Dabei scheint deren Einführung nur ein mathematischer Lösungstrick zu sein. Das ist nicht der Fall und dies werden wir im Folgenden klarstellen. Wir beginnen mit den homogenen Maxwellgleichungen für das elektrische und magnetische Feld,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 . \quad (18.1)$$

Diese werden bekanntlich durch Einführung eines Vektorpotenzials  $\mathbf{A}$  und eines skalaren Potentials gelöst,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (18.2)$$

Nun ergibt sich die scheinbare Schwierigkeit, dass verschiedene Potentiale zu identischen elektromagnetischen Feldern Anlass geben. Ersetzt man nämlich  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  durch die Potentiale

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \lambda \quad , \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (18.3)$$

mit beliebiger orts- und zeitabhängiger Funktion  $\lambda$ , dann erhält man identische Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ .

---

?

---

Rechnen Sie nach, dass  $\varphi'$ ,  $\mathbf{A}'$  zu denselben elektromagnetischen Feldern führen wie  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ .

---

Transformationen (18.3) nennt man Eichtransformationen und  $\lambda(x)$  heißt Eichfunktion. Entsprechend nennt man die Konfigurationen  $\phi$ ,  $\mathbf{A}$  und  $\phi'$ ,  $\mathbf{A}'$  eichäquivalent.

Skalares und vektorielles Potenzial bilden zusammen das 4–er Potenzial

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (18.4)$$

In der relativistischen Notation nimmt die Eichtransformation (18.3) eine elegantere Form an,

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda. \quad (18.5)$$

### Eichtransformationen

Eine Transformation (18.5) mit beliebiger Eichfunktion  $\lambda(x)$  nennt man Eichtransformation. Die Potentiale  $A_\mu$  und  $A'_\mu$  heißen eichäquivalent. Sie haben dieselben Eichfelder und sind physikalisch nicht unterscheidbar.

In der Literatur findet man sehr oft die Aussage, die Eichpotentiale enthielten mehr Information als die Eichfelder. Dabei dient fast immer der Aharonov-Bohm-Effekt als Argument. Dass diese Schlussfolgerung nicht statthaft ist, kann man zum Beispiel in [12] nachlesen<sup>1</sup>.

Beim Übergang von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  nach  $A^\mu$  hat man redundante Freiheitsgrade eingeführt, und deshalb entsprechen Klassen von Potenzialen ein und demselben elektromagnetischen Feld. Man kann also ein 4–er Potenzial gemäß (18.5) transformieren, ohne „die Physik zu ändern“. Diese Freiheit bei der Wahl des Potentials kann man nutzen, um eine sogenannte Eichbedingung für das Potenzial

---

<sup>1</sup>Für nicht-Abelsche Eichfeldtheorien ist die Lage etwas komplizierter.

zu fordern. Eine derartige Eichbedingung sollte immer mit Hilfe einer geeigneten Umeichung (18.5) erfüllbar sein, und sie soll bei gegebenem elektromagnetischen Feld das Potenzial möglichst festlegen. Zum Beispiel kann immer die Lorenzeichung  $\partial_\mu A^\mu = 0$  erfüllt werden, und in dieser Eichung vereinfachen sich die inhomogenen Maxwellgleichungen,

$$\square A^\mu = j^\mu, \quad (j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}. \quad (18.6)$$

Hier wird man auf die elektrische 4-er Stromdichte  $j^\mu$  geführt. Da  $j^\mu$  und  $A^\mu$  Vektorfelder unter Lorentztransformationen sind, hat die Feldgleichung (18.6) in allen Inertialsystemen die gleiche Form.

## 18.2 Minimale Kopplung und kovariante Ableitung

Will man in der Hamilton'schen Formulierung der klassischen Mechanik die Hamiltonfunktion für ein geladenes Punktteilchen in äußeren elektromagnetischen Feld gewinnen, so muss man die Potenziale  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  einführen. Die Hamiltonfunktion, die auf die bekannte Lorentz'sche Bewegungsgleichung für ein geladenes Punktteilchen führt, lautet nämlich

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi. \quad (18.7)$$

Man erhält diese aus der Hamiltonfunktion des freien Teilchens, wenn man folgende minimale Kopplung (auch minimale Substitution genannt) vornimmt:

$$E \longrightarrow E - e\varphi \quad , \quad \mathbf{p} \longrightarrow \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}. \quad (18.8)$$

Der Beweis dieser Aussage ist Inhalt von Aufgabe 18.1. Also wird eine äußeres elektromagnetisches Feld eingeführt, indem man Energie und Impuls gemäß der Vorschrift (18.8) ersetzt. Erinnern wir uns daran, dass Energie  $E$  und Impuls  $\mathbf{p}$  Komponenten des 4-er Impulses sind,

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad (18.9)$$

dann schreibt sich die minimale Kopplung (18.8) wie folgt:

$$p_\mu \longrightarrow p_\mu - eA_\mu. \quad (18.10)$$

Der (naive) Übergang von der klassischen zur Quantenmechanik geschieht im Schrödingerbild mithilfe der Korrespondenzregeln

$$E \longrightarrow i\partial_t \quad \text{und} \quad \mathbf{p} \longrightarrow \frac{1}{i}\nabla. \quad (18.11)$$

Kombinieren wir nun minimale Kopplung mit Korrespondenzregel, dann erhalten wir die Ankopplung von Materiefeldern an ein äußeres elektromagnetisches Feld mithilfe der Ersetzungen

$$p_\mu \mapsto p_\mu - eA_\mu \mapsto i(\partial_\mu + ieA_\mu) \equiv iD_\mu. \quad (18.12)$$

Auf der rechten Seite steht die sogenannte kovariante Ableitung.

### Kovariante Ableitung

Die Kopplung eines geladenen Teilchens an das elektromagnetische Feld geschieht durch Ersetzung der partiellen durch die kovarianten Ableitungen in der zugehörigen Feldgleichung,

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (18.13)$$

Warum heißt die Ableitung kovariant? Um diese Frage zu beantworten, prüfen wir nach, wie sie ändert, wenn wir anstelle von  $A_\mu$  das eichtransformierte  $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\lambda$  einsetzen,

$$D_\mu(A') = \partial_\mu + ieA'_\mu = \partial_\mu + ie(A_\mu - \partial_\mu\lambda) = e^{ie\lambda}(\partial_\mu + ieA_\mu)e^{-ie\lambda}. \quad (18.14)$$

Dies bedeutet, dass die kovariante Ableitung unter Eichtransformationen homogen transformiert,

$$D_\mu(A') = gD_\mu(A)g^{-1}, \quad \text{mit } g(x) = e^{ie\lambda(x)} \in U(1). \quad (18.15)$$

Für jeden Raumzeitpunkt mit Koordinate  $x$  ist  $g(x)$  ein Element der Gruppe  $U(1)$ . Die Funktion  $x \mapsto g(x)$  ist demnach ein  $U(1)$ -wertiges Feld.

Gemäß unserer Diskussion von Noether-Ladungen in Abschnitt 16.3 transformiert ein komplexes Skalarfeld, das spinlose Teilchen der Ladung  $e$  beschreibt, wie folgt unter *globalen* Eichtransformationen,

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = g\phi(x), \quad g = e^{ie\lambda}. \quad (18.16)$$

Global bezieht sich hier auf die Tatsache, dass  $g$  an allen Punkten im Minkowskiraum denselben Wert annimmt. Die Lagrangedichte ist invariant unter diesen globalen  $U(1)$ -Transformationen

$$\mathcal{L}_M(\phi) = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + V(\phi^*\phi) = \mathcal{L}_M(\phi'), \quad (18.17)$$

und der zugehörige kovariant erhaltene Noetherstrom  $j^\mu$  wird als Dichte des elektrischen Stromes identifiziert. Man kann nun die globale Eichsymmetrie zu einer lokalen Eichsymmetrie erheben, wenn man partielle Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzt,

$$\mathcal{L}_M(\phi) = D_\mu\phi^*D^\mu\phi + V(\phi^*\phi). \quad (18.18)$$

Wenn wir nun das Skalarfeld und das Eichpotenzial gleichzeitig mit einer orts- und zeitabhängigen (lokalen) Eichtransformation transformieren,

$$\phi'(x) = g(x)\phi(x), \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\lambda(x), \quad g(x) = e^{ie\lambda(x)}, \quad (18.19)$$

dann transformiert  $D_\mu\phi$  genauso wie  $\phi$  unter lokalen Eichtransformationen,

$$D'_\mu\phi' = (gD_\mu g^{-1})(g\phi) = g(D_\mu\phi), \quad g = g(x). \quad (18.20)$$

Hierin ist  $D'_\mu$  die mit dem transformierten Potenzial  $A'_\mu$  gebildete kovariante Ableitung und  $D_\mu$  diejenige mit ursprünglichen Potenzial  $A_\mu$ . Wir fassen zusammen:

### Eichinvarianz von $\mathcal{L}$

Die Lagrangedichte (18.18), in der partielle durch kovariante Ableitungen ersetzt wurden, ist invariant unter den lokalen Eichtransformationen (18.19) des Materiefeldes  $\phi$  und des Eichpotenzials  $A_\mu$ .

Will man eine globale Symmetrie „lokal machen“, dann muss man offensichtlich ein neues Feld, das Vektorpotenzial  $A_\mu$ , einführen<sup>2</sup>. In Übung 18.2 wird gezeigt, dass die eichinvariante Lagrangedichte (18.18) zu folgender kovarianten Klein-Gordon-Gleichung führt:

$$D_\mu D^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0. \quad (18.21)$$

Man gewinnt sie aus der Feldgleichung (16.6) für ein freies Feld, wenn man darin gewöhnliche durch kovariante Ableitungen ersetzt.

?

Überzeugen Sie sich davon, dass wenn  $(\phi, A_\mu)$  die Klein-Gordon-Gleichung (18.21) erfüllen, es auch die eichtransformierten Felder  $(\phi', A'_\mu)$  tun.

Das neu eingeführte Vektorfeld  $A_\mu$  wird genauso wie das ursprüngliche Materiefeld propagieren. Seine Dynamik wird durch eine noch zu findende Lagrangedichte bestimmt. Diese sollte invariant unter lokalen Eichtransformationen sein, da nur das elektromagnetische Feld – und nicht etwa das Potenzial – messbar ist. Zur Konstruktion der Lagrangedichte bestimmen wir zuerst den Kommutator von zwei kovarianten Ableitungen. Mit der Definition (18.13) ergibt sich

$$[D_\mu, D_\nu] = ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \equiv ieF_{\mu\nu}, \quad (18.22)$$

worin auf der rechten Seite der antisymmetrische Feldstärketensor auftritt

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.23)$$

<sup>2</sup>Es gibt auch Variationen dieser Konstruktion, zum Beispiel für nichtlineare  $CP^N$ -Modelle.



Da die kovariante Ableitung homogen transformiert, siehe (18.15), haben die eichäquivalente Potenzial  $A_\mu$  und  $A'_\mu$  dieselbe Feldstärke,  $F_{\mu\nu}(A') = F_{\mu\nu}(A)$ .

Die lorentz- und eichinvarianten Wirkung des Vektorpotenzials ist aus der Elektrodynamik bekannt,

$$S_{\text{ED}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{ED}}, \quad \mathcal{L}_{\text{ED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (18.24)$$

Ein Massenterm der Form  $\mu^2 A_\mu A^\mu$  ist nicht erlaubt, da er nicht eichinvariant ist. Mithilfe der Variation des Feldstärketensors

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu \quad (18.25)$$

findet man für die Variation der Wirkung  $S_{\text{ED}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{ED}}$  nach dem Potenzial

$$\delta S_{\text{ED}} = -\frac{1}{2} \int d^4x \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \int d^4x \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \implies \frac{\delta S_{\text{ED}}}{\delta A_\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu}. \quad (18.26)$$

Die vollständige Wirkung für das System bestehend aus Materiefeld und Eichpotenzial ist nun

$$S[\phi, A] = S_{\text{ED}}[A] + S_{\text{M}}[\phi, A]. \quad (18.27)$$

Mithilfe der variationellen Charakterisierung des Noetherstroms in Aufgabe 18.3 nehmen die Euler-Lagrange-Gleichungen folgende einfache Form an,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad D_\mu D^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0, \quad (18.28)$$

worin der Noetherstrom zu den (globalen) Eichtransformationen auftritt. Auf beiden Seiten der Gleichungen stehen Tensoren, so dass die Feldgleichungen in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben. Der Feldstärketensor und der Noetherstrom sind beide eichinvariant während  $D_\mu D^\mu \phi$  unter Eichtransformation genauso transformiert wie  $\phi$ . Dies bedeutet, dass die Feldgleichungen eichinvariant bzw. eichkovariant sind. Gelten sie für eine Konfiguration  $(\phi, A_\mu)$ , dann gelten sie automatisch auch für jede eichäquivalente Konfiguration  $(\phi', A'_\mu)$ .

### 18.2.1 Minimale Kopplung von geladenen Fermionen

Teilchen mit Spin 0 werden durch Skalarfelder und Teilchen mit Spin 1 durch Vektorfelder beschrieben. Beide Teilchensorten sind Bosonen und transformieren nach einer Darstellung der Lorentzgruppe. Fermionen haben halbganzen Spin und werden deshalb durch Spinoren beschrieben, die nach einer treuen Darstellung der quantenmechanischen Lorentzgruppe  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  transformieren. Letztere ist die universelle Überlagerungsgruppe der eigentlichen Lorentzgruppe. Die quantenmechanische Lorentzgruppe hat zwei inäquivalente irreduzible 2-dimensionale Darstellungen. Verlangt man nun, dass die Theorie die Parität nicht verletzt, so muss man diese beiden

Darstellungen zu einer vierdimensionalen und bezüglich  $SL(2, \mathbb{C})$  reduziblen Darstellung kombinieren. Zum Beispiel werden Elektronen, Muonen und Quarks durch 4-komponentige Spinorfelder

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (18.29)$$

beschrieben. Die Komponenten  $\psi_\alpha$  mit  $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$  sind die Spinkomponenten des Spinorfelds. Freie Teilchen mit Spin 1/2 erfüllen die kräftefreie Diracgleichung

$$i\rlap{\not{D}}\psi - m\psi = 0. \quad (18.30)$$

Der darin auftretende freie Diracoperator  $\rlap{\not{D}}$  ist ein matrixwertiger Differentialoperator erster Ordnung,

$$\rlap{\not{D}} = \gamma^\mu \partial_\mu \quad (18.31)$$

mit  $4 \times 4$ -Matrizen  $\gamma^\mu$  als Koeffizienten. Diese sogenannten Diracmatrizen erfüllen die Antikommutationsregeln

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_4. \quad (18.32)$$

Die globalen  $U(1)$ -Eichtransformationen  $\psi \mapsto e^{ie\lambda} \psi$  bilden Lösungen in Lösungen ab. Die Diracgleichung ist die Euler-Lagrange Gleichung zur Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} (i\rlap{\not{D}} - m) \psi, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (18.33)$$

Diese ist eichinvariant, da der Dirac-konjugierte Spinor  $\bar{\psi}$  unter Eichtransformationen gemäß  $\bar{\psi} \mapsto \bar{\psi} e^{-ie\lambda}$  transformiert.

Die globale Eichinvarianz kann zu einer lokalen Eichinvarianz erweitert werden, wenn wir ein Eichpotenzial einführen und partielle durch kovariante Ableitungen ersetzen.

### Diracgleichung im elektromagnetischen Feld

Die Diracgleichung für das Feld eines geladenen Elektrons im elektromagnetischen Feld lautet

$$i\rlap{\not{D}}\psi = m\psi, \quad \text{mit} \quad \rlap{\not{D}} = \gamma^\mu D_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (18.34)$$

Sie ist die Euler-Lagrange Gleichung zur lorentz- und eichinvarianten Lagrangedichte

$$S_\psi = \int d^4x \mathcal{L}_\psi, \quad \mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} (i\rlap{\not{D}} - m) \psi. \quad (18.35)$$

Unter lokalen Eichtransformationen der Felder

$$\psi(x) \mapsto e^{ie\lambda(x)} \psi(x) \quad , \quad A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) - \partial_\mu \lambda(x) \quad (18.36)$$

ist die Lagrangedichte invariant. Die Wirkung des Gesamtsystems ist nun die Summe aus Maxwell-Term (18.24) und Dirac-Term (18.35):

$$S = S_{\text{ED}} + S_{\psi}. \quad (18.37)$$

Diese Wirkung ist Ausgangspunkt bei der Quantisierung der Elektrodynamik. Die quantisierte Elektrodynamik (QED: quantum electrodynamics) ist eine der erfolgreichsten und am besten getesteten Theorien der Physik. Sie beschreibt Photonen, beschrieben durch das quantisierte  $A_{\mu}$ -Feld, in Wechselwirkung mit Elektronen, beschrieben durch das quantisierte  $\psi$ -Feld.

### 18.3 Nicht-Abelsche Eichtheorien

Nichtabelsche Eichtheorien sind Theorien mit lokaler Eichinvarianz, wobei die Eichtransformationen an jedem Raumzeit-Punkt Elemente einer nicht-Abelschen Gruppe sind. Für die Teilchenphysik genügt es, die nicht-Abelschen Eichgruppen  $SU(2)$  und  $SU(3)$  zu betrachten. Zum Beispiel transformieren die Quarks nach einer irreduziblen Darstellung der Eichgruppe  $SU(3)$ . Es sei  $g \in G$  ein Element der Eichgruppe  $G$  und  $g \mapsto U(g)$  eine  $n$ -dimensionale Darstellung der Eichgruppe. Dann transformieren die Fermionen in einem Multiplett (einer irreduziblen Darstellung) von  $G$  unter globalen Eichtransformationen gemäß

$$\Psi \mapsto U(g)\Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}. \quad (18.38)$$

Man beachte, dass jedes  $\psi_a$  mit  $a = 1, \dots, n$  ein 4-komponentiger Spinor ist. Die Eichtransformation  $U$  wirkt nicht auf die Spinkomponenten  $\alpha$ , sondern nur auf die Komponenten  $a$ . Für die Quarks sind dies die Farbkomponenten<sup>3</sup>. Die Lagrangefunktion für freie Fermionen lautet

$$\mathcal{L}_{\psi} = \bar{\Psi} \begin{pmatrix} i\rlap{/}\partial - m & & \\ & \ddots & \\ & & i\rlap{/}\partial - m \end{pmatrix} \Psi = \bar{\Psi} (i\mathbb{1} \otimes \rlap{/}\partial - m)\Psi \quad (18.39)$$

mit Dirac-konjugiertem Spinor

$$\bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n), \quad \bar{\psi}_a = \psi_a^{\dagger} \gamma^0. \quad (18.40)$$

Der erste Faktor im Tensorprodukt  $\mathbb{1} \otimes \rlap{/}\partial$  wirkt im Farbraum und der zweite im Spinraum. Im Farbraum ist der freie Diracoperator also proportional zur Einheitsmatrix. Unter *globalen* Eichtransformation

$$\Psi \longrightarrow U\Psi, \quad \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}U^{-1}, \quad U = U(g) \quad (18.41)$$

ist die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\psi}$  offensichtlich invariant.

<sup>3</sup>Daneben gibt es noch die Flavour-Komponenten die inert unter Eichtransformationen sind.

### 18.3.1 Lokale Eichinvarianz

Nun hänge das Gruppenelement  $g$  vom Raumzeitpunkt ab,  $g = g(x)$ . Wie im Abelschen Fall wollen wir eine Theorie konstruieren, die unter lokalen Eichtransformationen invariant ist. Wir betrachten zuerst Fermionen, die unter der definierenden Darstellung  $U(g) = g$  transformieren,

$$\Psi(x) \longrightarrow g(x)\Psi(x). \quad (18.42)$$

Die lokale Eichinvarianz wird wieder durch eine minimale Kopplung an ein Eichpotenzial erreicht. Dabei ersetzen wir partielle durch eine kovariante Ableitungen mit Vektorpotenzial  $A_\mu$ ,

$$\partial_\mu \Psi \longrightarrow D_\mu \Psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi. \quad (18.43)$$

Die kovariante Ableitung soll kovariant transformieren, d.h.  $D_\mu \Psi$  soll gleich transformieren wie  $\Psi$ . Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung

$$D_\mu(A') = gD_\mu(A)g^{-1} \implies ieA'_\mu = g(\partial_\mu + ieA_\mu)g^{-1}. \quad (18.44)$$

Daraus lesen wir die Eichtransformation des Eichpotenzials ab,

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} - \frac{i}{e}g\partial_\mu g^{-1}. \quad (18.45)$$

Da der letzte Term in der Liealgebra der Eichgruppe liegt, werden wir das Eichpotenzial  $A_\mu$  als Vektorfeld mit Werten in dieser Liealgebra wählen<sup>4</sup>. Dies ist auch im Einklang damit, dass dann der erste Term  $gA_\mu g^{-1}$  in der Liealgebra liegt.

Im Allgemeinen transformiert ein Materiefeld nicht nach der definierenden Darstellung der Eichgruppe. Transformiert es nach einer Darstellung  $g \mapsto U(g)$ , dann ist seine kovariante Ableitung

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + ieU_*(A_\mu))\Psi. \quad (18.46)$$

Hier tritt das Eichpotenzial in der induzierten Abbildung  $U_*$  der Liealgebra auf.

---

?

---

Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung (18.46) für ein Feld in einer beliebigen Darstellung wie folgt unter lokalen Eichtransformationen transformiert: transformiert,

$$D_\mu(A') = U(g)D_\mu(A)U^{-1}(g). \quad (18.47)$$


---

Daraus ergibt sich nun unmittelbar die Eichinvarianz der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\Psi} (i\rlap{-}/D - m) \Psi, \quad \rlap{-}/D = \gamma^\mu D_\mu. \quad (18.48)$$

---

<sup>4</sup>Genau genommen liegt  $iA_\mu$  in der Liealgebra.

Es fehlt noch die nicht-Abelsche Verallgemeinerung der Maxwell'schen Lagrangedichte. Diese muss invariant unter lokalen Eichtransformationen sein und für die Eichgruppe  $U(1)$  mit der Dichte  $\mathcal{L}_{ED}$  in (18.24) übereinstimmen. Zu ihrer Konstruktion betrachten wir wie im Abelschen Fall den Kommutator zweier kovarianten Ableitungen (in der definierenden Darstellung):

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu] = ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu]) \equiv ieF_{\mu\nu}. \quad (18.49)$$

Nach Konstruktion liegen die Komponenten  $F_{\mu\nu}$  des antisymmetrischen Feldstärketensors in der Liealgebra der Eichgruppe. Aus dem Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung in (18.47) liest man nun sofort ab, wie er diese Komponenten unter Eichtransformationen transformieren,

$$F_{\mu\nu}(A') = gF_{\mu\nu}(A)g^{-1}. \quad (18.50)$$

Im Gegensatz zur Elektrodynamik ist der Feldstärketensor nicht mehr eichinvariant. Er transformiert nach der adjungierten Darstellung der Eichgruppe. Die lorentz- und eichinvariante Wirkung für das Eichfeld  $A_\mu$  hat nun die Form

$$S_{YM} = \int d^4x \mathcal{L}_{YM}, \quad \mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \text{Sp}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}). \quad (18.51)$$

Sie beschreibt eine reine Yang-Mills Theorie ohne Materiefelder und verallgemeinert diejenige der abelschen Maxwell-Theorie. Im nicht-abelschen Fall ist die Feldstärke

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] \quad (18.52)$$

allerdings quadratisch im Eichpotenzial, da sie den Kommutator zweier Potenziale enthält. Dies bedeutet, dass die Lagrangedichte Terme quadratisch, kubisch und quartisch im Potenzial enthält. Die entsprechenden Feldgleichungen – die Yang-Mills-Gleichungen – sind deshalb nicht-lineare partielle Differentialgleichungen. In nicht-Abelschen Fall gilt das Superpositionsprinzip der linearen Maxwell-Theorie nicht mehr.

Das Eichpotenzial und die Feldstärke sind Liealgebra wertig und können nach einer Basis  $\{T_a\}$  der Liealgebra  $\mathcal{G}$  der Eichgruppe  $G$  entwickelt werden,

$$A_\mu = A_\mu^a T_a \implies F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a. \quad (18.53)$$

Die Beziehung (18.52) impliziert für die Komponenten in den Entwicklungen den Zusammenhang

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - ef_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad [T_b, T_c] = if_{bc}^a T_a. \quad (18.54)$$

Hier treten die reellen Strukturkonstanten der Liealgebra auf.

### Die Wirkung von Eichtheorien mit Fermionen

Die Bewegungsgleichungen einer nicht-Abelschen Eichtheorie für Fermionen sind die Euler-Lagrange-Gleichungen der lorentz- und eichinvarianten Wirkung

$$S[\Psi, A] = S_{YM}[A] + S_\psi[\Psi, A] = \int d^4x \mathcal{L}_{YM} + \int d^4x \mathcal{L}_\psi \quad (18.55)$$

mit den Lagrangedichten (18.51) und (18.48).

Eine Eichtheorie ist bestimmt durch Angabe der Eichgruppe  $G$ , der Darstellungen nach denen die Materiefelder transformieren, der universellen Kopplungskonstante  $e$  in der kovarianten Ableitung und weiterer Parameter im Materiesektor. Im Weinberg-Salam Modell der elektroschwachen Wechselwirkung sind dies zum Beispiel die Parameter im Higgspotential, in der KMS-Matrix oder die Yukawa Kopplungen.

### 18.3.2 Infinitesimale Eichtransformationen

Wir wollen nun annehmen, das Gruppenelement  $g$  sei nahe der Eins und entwickeln

$$g = e^{ieX} \approx \mathbb{1} + ieX \implies g^{-1} \approx \mathbb{1} - ieX. \quad (18.56)$$

Bis auf den Faktor  $i$  ist  $X$  ein Element der Liealgebra der Eichgruppe, kurz Eichalgebra genannt. In der Physik haben wir eine Vorliebe für hermitesche Matrizen, und deshalb schreiben wir (im Gegensatz zu den Mathematikern) gern ein  $i$  in der Entwicklung (18.56). Die Entwicklung setzen wir in (18.42) und in (18.45) ein, und erhalten in führender Ordnung in  $e$  die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} \phi' &= g\phi \approx \phi + ieX\phi \\ A'_\mu &= gA_\mu g^{-1} - \frac{i}{e}g\partial_\mu g^{-1} \approx A_\mu - ie[A_\mu, X] - \partial_\mu X, \end{aligned} \quad (18.57)$$

woraus wir die infinitesimalen Änderungen der Felder ablesen,

$$\delta\phi = ieX\phi \quad \text{und} \quad \delta A_\mu = -\partial_\mu X - ie[A_\mu, X] = -D_\mu X. \quad (18.58)$$

Aus (18.50) ergibt sich unmittelbar die infinitesimale Änderung des Felstärketensors,

$$\delta F_{\mu\nu} = ie[X, F_{\mu\nu}]. \quad (18.59)$$

In abelschen Eichtheorien verschwinden alle Kommutatoren und  $F_{\mu\nu}$  ist eichinvariant.

?

Überzeugen Sie sich davon, dass die Variation der Felstärke die einfache Form (18.59) hat.

Es sei nun  $T_a$  (bis auf  $i$ ) eine Basis der Liealgebra,

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \quad (T_a, T_b) = \delta_{ab}. \quad (18.60)$$

Hierin sind  $f_{bc}^a$  die reellen und antisymmetrischen Strukturkonstanten. Für unitäre Eichgruppen sind die Elemente der Liealgebra hermitesche Matrizen und wir wählen für diese das Skalarprodukt  $(X, Y) = \text{Sp}(XY)$ . Nun entwickeln wir Liealgebra-wertige Felder nach dieser Basis, zum

Beispiel  $X = X^a T_a$ , und setzen die Entwicklungen in die Transformationsformeln (18.58,18.59) ein. Dies führt auf folgende infinitesimalen Transformationen der Komponenten des Potentials und der Feldstärke,

$$\delta A_\mu^a = -(D_\mu X)^a = -\partial_\mu X^a + e f_{bc}^a A_\mu^b X^c \quad \text{und} \quad \delta F_{\mu\nu}^a = e f_{bc}^a F_{\mu\nu}^b X^c. \quad (18.61)$$

Die Eichinvarianz der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$  führt auf die *eich-kovariante Erhaltung* der Stromdichte (diese werden auch Eichströme genannt)

$$J_a^\mu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\mu^a}. \quad (18.62)$$

Um dies einzusehen berechnen wir die Variation der Materiewirkung unter einer beliebigen Eichtransformation – diese Variation muss ja verschwinden – und benutzen dabei das Resultat (18.61) für die Änderung des Potentials,

$$\delta S_M = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\mu^a} \right) \delta A_\mu^a = - \int d^4x J_a^\mu \delta A_\mu^a = \int d^4x J_a^\mu \left( \partial_\mu X^a - e f_{bc}^a A_\mu^b X^c \right) = 0. \quad (18.63)$$

Wir wollen nun annehmen,  $X^a$  verschwinde im räumlich und zeitlich Unendlichen, damit wir partiell integrieren dürfen. Dann impliziert (18.63)

$$(D_\mu J^\mu)_a = \partial_\mu J_a^\mu - e f_{ab}^c A_\mu^b J_c^\mu = 0. \quad (18.64)$$

Für  $A_\mu = 0$  sind die Eichströme gleich den erhaltenen Noetherströmen, die zu den globalen Eichtransformationen gehören,  $\partial_\mu (J^\mu|_{A=0}) = 0$ .

### Eichströme für Skalarfelder und Diracfelder

Ein Diracfeld hat folgende Lagrangedichte und Eichströme:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \quad J_a^\mu(\psi) = e\bar{\psi}\gamma^\mu T_a\psi. \quad (18.65)$$

Für skalare Felder lauten Lagrangedichte und Eichströme wie folgt:

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi + V(\phi^\dagger\phi), \quad J_a^\mu(\phi) = -ie(D^\mu\phi, T_a\phi) + h.c \quad (18.66)$$

### 18.3.3 Feldgleichungen

Wir betrachten zuerst eine allgemeine Eichtheorie für skalare Teilchen und Fermionen mit Spin 1/2, und nehmen dabei an, dass die Materieteilchen nach der definierenden Darstellung der Eichgruppe transformieren. Der Übergang zu Materie in anderen Darstellungen ist dann relativ einfach. Nach passender Wahl der Eichgruppe und Darstellungen für die Materieteilchen, erhält man die Eichtheorie der elektroschwachen beziehungsweise der starken Wechselwirkung.

Die vollständige Lagrangedichte enthält drei Terme: den Yang-Mills-Term, den Beitrag der Skalarfelder und den Betrag der Fermionen:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\psi, \quad \mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu}, \quad (18.67)$$

wobei die Terme  $\mathcal{L}_\phi$  und  $\mathcal{L}_\psi$  oben eingeführt wurden. Eine mögliche Yukawa-Wechselwirkung zwischen Fermionen und Skalaren wurde hier noch nicht berücksichtigt. Das sogenannte Higgspotential  $V$  muss natürlich eichinvariant sein,  $V(g\phi) = V(\phi)$ .

?

Versuchen Sie, folgende Variationen zu berechnen, worin auf den rechten Seiten die Eichströme auftreten:

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{YM}} &= \int \delta A_\mu^a (D_\mu F^{\mu\nu})_a, \\ \delta S_\phi &= - \int \left( \delta\phi, D^2\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi^\dagger} \right) - \int \delta A_\mu^a J_a^\mu(\phi), \\ \delta S_\psi &= \int \delta\bar{\psi} (i\not{D} - m)\psi + h.c. - \int \delta A_\mu^a J_a^\mu(\psi). \end{aligned} \quad (18.68)$$

### Feldgleichungen

Die Feldgleichungen für die Theorie mit Lagrangedichte (18.67) sind die Yang-Mills Gleichung, die kovariante Klein-Gordon Gleichung und die kovariante Dirac Gleichung:

$$\begin{aligned} (D_\mu F^{\mu\nu})_a &= J_a^\nu(\phi) + J_a^\nu(\psi), \\ D^\mu D_\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi^\dagger} &= 0, \\ (i\not{D} - m)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (18.69)$$

Für eine nicht-Abelsche Eichtheorie sind die Yang-Mills Gleichungen im materiefreien Raum  $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$  nichtlineare partielle Differentialgleichungen, deren allgemeine Lösungen nicht bekannt sind.

## 18.4 Quantenchromodynamik

Die Quantenchromodynamik ist eine Eichtheorie mit Eichgruppe  $SU(3)$ . Ihre elementaren Bausteine der Materie sind die Quarks, aus denen Mesonen und Baryonen zusammengesetzt sind. Es existieren 6 Quarksorten: up Quarks, down Quarks, strange Quarks, charm Quarks, bottom Quarks und top Quarks. Sie haben den Spin  $1/2$  und sind somit Fermionen. Einige ihrer Quantenzahlen und ihre Massen sind in der Tabelle 18.1 aufgeführt.



Generation	Name	Symbol	$e$	$I_z$	$C$	$S$	$T$	$B'$	$Y$	MEV/c <sup>2</sup>
1	Up	u	$\frac{2}{3}$	$I_z = +\frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+\frac{1}{3}$	2,2
1	Down	d	$-\frac{1}{3}$	$I_z = -\frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+\frac{1}{3}$	4,7
2	Charm	c	$\frac{2}{3}$	$C = +1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+\frac{4}{3}$	1280
2	Strange	s	$-\frac{1}{3}$	$S = -1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-\frac{2}{3}$	96
3	Top	t	$\frac{2}{3}$	$T = +1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+\frac{4}{3}$	173 100
3	Bottom	b	$-\frac{1}{3}$	$B' = -1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-\frac{2}{3}$	4 180

Tabelle 18.1: Die 6 Quarks haben sehr unterschiedliche Massen. Angegeben sind die elektrischen Ladung  $e$ , die Flavour-Quantenzahlen  $I_z, C, S, T, B'$  und die Hyperladung  $Y$ . Jedes Quark in dieser Tabelle kommt noch in 3 Farben vor. Die Massen stammen von der Particle Data Group [14].

Man beachte die Massenhierarchie: up, down und strange Quarks sind wesentlich leichter als charm, top und bottom Quarks. Betrachten wir nur die drei leichten Flavours – die schweren kommen in der Natur kaum vor – dann kann man deren Massen in einer ersten Näherung gleich setzen,  $m_u = m_d = m_s$ . In dieser Näherung sind die Lagrangedichten der drei Flavours identisch,

$$\mathcal{L}_\psi = \sum_{f=u,d,s} \bar{\psi}_f (i\not{D} - m) \psi_f = \bar{\psi} (i\not{D} \otimes -m) \otimes \mathbb{1}_f \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}. \quad (18.70)$$

Die letzte Schreibweise macht deutlich, dass für gleiche Quarkmassen die Lagrangedichte eine globale  $U_V(3)$  Flavoursymmetrie aufweist. Der Index  $V$  deutet darauf hin, dass es sich um eine Vektorsymmetrie handelt.

Die drei leichten Quarks transformieren nach der fundamentalen Darstellung  $\mathbf{3}$  der  $U_V(3)$ :

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \mapsto U_V \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad U_V \in U_V(3), \quad (18.71)$$

während ihre Antiteilchen nach der komplex konjugierten Darstellung  $\bar{\mathbf{3}}$  transformieren. Ein System aus einem Quark und einem Antiquark transformiert dann gemäß,

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}, \quad (18.72)$$

und deshalb sollte Oktetts und Singletts von Mesonen existieren. Ein gebundenes System von drei Quarks transformiert dagegen wie

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}, \quad (18.73)$$

und entsprechend sollten die Baryonen als Singulett, Oktett oder Dekuplett auftreten. Da verschiedene Teilchen in einem irreduziblen Multipllett ineinander transformiert werden können, müssen sie gleiche Masse haben.

Die Hadronen lassen sich tatsächlich sehr gut in das idealisierte Drei-Flavourmodell einordnen. In Abbildung 18.1 sind das Mesonen-Oktett und das Baryonen-Oktett gezeigt.

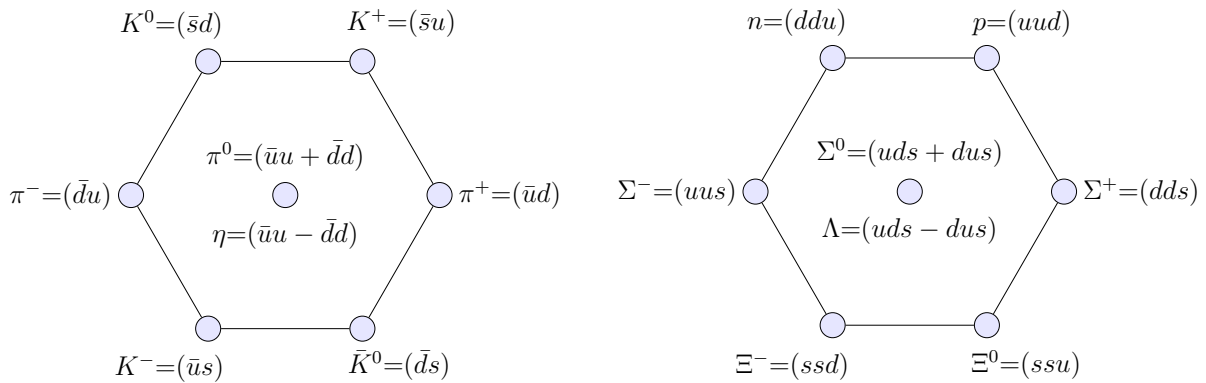


Abbildung 18.1: Das Oktett der pseudoskalaren Mesonen mit  $J^P = 0^-$  (links) und dasjenige der Baryonen mit  $J^P = 1/2^+$  (rechts). Das ebenfalls existierende Oktett aus Vektormesonen mit  $J^P = 1^-$  und Dekuplett mit  $J^P = 3/2^+$  Baryonen sind hier nicht gezeigt. Die Flavoursymmetrie ist allerdings nur approximativ realisiert, da die Quarks in Wirklichkeit verschieden schwer sind. Deshalb haben die Hadronen in einem Multipllett auch etwas unterschiedliche Massen.

Wenn wir die Quarkmassen der leichten Quarks vernachlässigen und  $m_u = m_d = m_s = 0$  setzen, dann hat die Lagrangedichte der QCD eine erweiterte Flavoursymmetrie. In diesem Fall ist  $\mathcal{L}_\psi$  eine Summe von zwei Termen: die Dichte für linkshändige und diejenige für rechtshändige Quarks. Um dies einzusehen, zerlegen wir das Spinorfeld des up-Quarks,

$$u = u_R + u_L, \quad u_R = P_R u, \quad u_L = P_L u, \quad \text{mit} \quad P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5), \quad P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5). \quad (18.74)$$

Die hermitesche Matrix  $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  anti-kommutiert mit allen  $\gamma^\mu$  und ihr Quadrat ist  $\mathbb{1}$ . Deshalb sind die  $P_R$  und  $P_L$  orthogonale Projektoren mit  $P_R P_L = P_L P_R = 0$  und  $P_R + P_L = \mathbb{1}$ .

?

Überlegen Sie sich, dass  $\not{D}$  und  $\gamma^0$  beide mit  $\gamma_5$  antikommutieren und daraus folgt:

$$P_R \not{D} P_R = P_L \not{D} P_L = 0 \quad \text{und} \quad \bar{u}_R = \overline{P_R u} = \bar{u} P_L, \quad \bar{u}_L = \overline{P_L u} = \bar{u} P_R. \quad (18.75)$$

Aus diesen Beziehungen folgt nun die Zerlegung

$$\bar{u}\not{D}u = \bar{u}_R\not{D}u_R + \bar{u}_L\not{D}u_L, \quad (18.76)$$

mit den entsprechenden Zerlegungen für die  $d$  und  $s$  Quarks folgt dann für das System aus drei masselosen Quarks

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi}_R(\not{D} \otimes \mathbb{1}_f)\psi_R + i\bar{\psi}_L(\not{D} \otimes \mathbb{1}_f)\psi_L, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}. \quad (18.77)$$

Im chiralen Limes ist  $\mathcal{L}_\psi$  demnach invariant unter globalen  $U_R(3) \times U_L(3)$  Flavour-Transformationen

$$\psi_R \mapsto U_R\psi_R \quad \text{und} \quad \psi_L \mapsto U_L\psi_L, \quad U_R, U_L \in U(3). \quad (18.78)$$

Eine vollständig äquivalente Parametrisierung der Symmetrie ist

$$\psi \mapsto (U_V P_R + U_A P_L)\psi, \quad \psi \mapsto (U_A P_R + U_A^{-1} P_L)\psi, \quad U_V, U_A \in U(3). \quad (18.79)$$

Die Transformation mit  $U_V$  nennt man vektoriell, da sie gleichermaßen auf recht- und linkshändige Fermionen wirkt. Die Transformation mit  $U_A$  heißt dagegen axial, da sie auf rechts- und linkshändige Fermionen entgegengesetzt wirkt.

Jede unitäre Matrix kann gemäß  $U = e^{i\lambda V}$  mit  $\det V = 1$  zerlegt werden. Diese Zerlegung führt zur Identifikation von  $U(3)$  mit  $SU(3) \times U(1)/\mathbb{Z}_3$ , siehe Aufgabe 8.4. Dies bedeutet, dass im chiralen Grenzfall die globale Flavoursymmetrie der klassischen Theorie (modulo diskreter Untergruppe) gleich

$$SU_R(3) \times U_R(1) \times SU_L(3) \times U_L(1) \quad (18.80)$$

ist. Aber nicht alle Symmetrien einer klassischen Theorie sind in der quantisierten Theorie realisiert. In der QCD verhält sich die axiale  $U_A(1)$  anomal. Diese sogenannte  $U_A(1)$ -Anomalie ist dafür verantwortlich, dass die QCD eine etwas verminderte Symmetrie aufweist:

### QCD im chiralen Grenzfall

Im chiralen Limes besitzt die QCD mit drei masselosen Flavours neben der lokalen Eichinvarianz die globale

$$SU_V(3) \times SU_A(3) \times U_V(1). \quad (18.81)$$

Flavour-Symmetrie. Der letzte Symmetriefaktor führt zur Erhaltung der Baryonenzahl.

Dies ist noch nicht die ganze Wahrheit. Wäre nämlich (18.81) die Symmetriegruppe der QCD im chiralen Grenzfall, dann müssten die Mesonen und Baryonen in Multipletts dieser Gruppe auftreten. Tatsächlich treten sie nur in Multipletts der kleineren Gruppe  $SU_V(3)$  auf. Die axiale  $SU_A(3)$  ist im Spektrum der gebundenen Zustände nicht sichtbar. Sie ist in der Tat nicht realisiert,

weil sie spontan gebrochen ist. In der Quantentheorie wird ein skalares Kondensat gebildet, ähnlich der spontanen Magnetisierung in einem Ferromagneten, und dieses Kondensat bricht die axiale  $SU_A(3)$  vollständig. Schlussendlich erinnern wir daran, dass die Flavoursymmetrie in der Natur nur näherungsweise realisiert ist. Die Quarks sind nicht masselos und sind tatsächlich verschieden schwer. Mehr dazu findet man in [13].

### 18.4.1 Die QCD ist eine $SU(3)$ -Eichtheorie

Die Quarks sind eigentümliche Teilchen: ihre elektrischen Ladungen sind nicht ganzzahlige Vielfache der Elementarladung und sie sind in der Natur noch nie beobachtet worden. Freie Quarks gibt es demnach nicht als asymptotische Teilchen, die im Detektor nachgewiesen werden können. Sie treten nur in Mesonen und Baryonen auf. Dieses sogenannte *Confinement von Quarks* wird durch ihre gegenseitige starke Wechselwirkung erklärt. Die QCD ist eine Eichtheorie mit Eichgruppe  $SU(3)$  (nicht mit der Flavoursymmetrie verwechseln!) und die Gluonen – dies sind die Teilchen, die durch das Vektorpotenzial beschrieben werden – sind für das Confinement verantwortlich. Jedes der sechs Quarks kommt in 3 Farben (colours) vor, also zum Beispiel gibt es ein Farb-Multiplett von drei  $u$ -Quarks oder eine Farb-Multiplett von drei  $d$ -Quarks,

$$(u_\alpha) = \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix}, \quad (d_\alpha) = \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (18.82)$$

Ein  $u$ -Quark kann also rot, gelb oder grün sein, oder nach den Regeln der Quantenmechanik irgendeine Superposition dieser drei Farben. Die Mischung der Farben geschieht mit einer  $SU_c(3)$  Transformation

$$\psi \longrightarrow U_c \psi, \quad \psi = u, d, s, \dots, \quad U_c \in SU_c(3). \quad (18.83)$$

Insgesamt existieren also 6 Triplets, also 18 verschiedene Quarks.

Die Eichsymmetrie ist eine exakte innere Symmetrie, im Gegensatz zur approximativen Flavour-Symmetrie und die 6 Flavours transformieren nach der fundamentalen Darstellung 3 der Eichgruppe  $SU_c(3)$

$$\psi_{j\alpha} : \quad \alpha \in \{1, 2, 3\} : \text{Farb-}SU(3); \quad j \in \{u, d, c, s, t, b\} : \text{Flavour-Index.}$$

Das Liealgebra-wertige Vektorpotenzial beschreibt die 8 Gluonen,

$$A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad a = 1, \dots, 8, \quad \text{Spin} = 1. \quad (18.84)$$

Nun folgen wir den bekannten Regeln um die Lagrangedichte der QCD aufzuschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 (F_{\mu\nu}^a)^2 \\ & + \sum_{j=1}^{n_f} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \bar{\psi}_{j\alpha} (i\not{\partial}\delta^{\alpha\beta} - e\gamma^\mu A_\mu^a T_a^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha\beta} m_j) \psi_{j\beta}. \end{aligned} \quad (18.85)$$

Nach Konstruktion ist diese Dichte invariant unter lokalen  $SU_c(3)$ -Eichtransformationen. Im chiralen Grenzfall mit verschwindenden Quarkmassen ist sie auch invariant unter Flavourtransformationen.

### 18.4.2 Infinitesimale Flavoursymmetrien und spontane Symmetriebrechung

Die vektorielle Flavoursymmetrie wirkt im Flavour-Raum gemäß

$$\psi \longmapsto e^{iX} \psi, \quad e^{iX} \in SU_V(3), \quad (18.86)$$

worin für drei Flavours  $\psi$  drei Komponenten im Flavourraum hat, siehe (18.70). Die axialen Transformationen sind dagegen

$$\psi \longmapsto e^{i\gamma_5 Y} \psi, \quad e^{iY} \in SU_A(3). \quad (18.87)$$

Zu diesen globalen Symmetrien gehören  $8 + 8 = 16$  kovariant erhaltene Noetherströme

$$J_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu X_a \psi, \quad J_a^{5\mu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 X_a \psi, \quad a = 1, 2, \dots, 8, \quad (18.88)$$

welche die spurlosen und hermiteschen Generatoren  $X_a$  der Flavour- $SU(3)$  enthalten (welche von den obigen Generatoren  $T_a$  der Eichgruppe zu unterscheiden sind). Wie schon erwähnt, ist im Spektrum der Hadronen nur eine (approximative)  $SU_V(3)$ -Symmetrie sichtbar. Das Fehlen der axialen Symmetrie im Spektrum der beobachteten Teilchen wird durch die spontane Brechung dieser Symmetrie erklärt. Dies bedeutet, dass im chiralen Grenzfall der Vakuumzustand der QCD nur invariant unter vektoriellen Transformationen ist, nicht aber unter axialen. Dies kommt dadurch zum Ausdruck, dass die zugehörigen Noetherladungen den Vakuumzustand annihilieren (invariant lassen) oder nicht invariant lassen,

$$Q_a |0\rangle = 0 \quad \text{aber} \quad Q_a^5 |0\rangle \neq 0. \quad (18.89)$$

Nach dem wichtigen Goldstone-Theorem existieren dann im chiralen Limes 8 masselose Anregungen, die sogenannten Goldstone-Bosonen. Für 3 masselose Flavours sind dies die Teilchen im Mesonen-Oktett in Abbildung 18.1. In Realität sind aber  $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$  nicht masselos, da die Quarks es nicht sind. Zusätzlich sind die leichten Quarks verschieden schwer, und dies gibt Anlass zu einer Massenaufspaltung innerhalb des Oktetts.

## 18.5 Weinberg-Salam Modell

Das Modell von Weinberg und Salam beschreibt höchst erfolgreich die elektroschwache Wechselwirkung, die zum Beispiel für den  $\beta$ -Zerfall des Neutrons verantwortlich ist. Die schwach wechselwirkende Materieteilchen sind die Leptonen, die Quarks und das Higgs-Teilchen. Diese kommen in drei Familien vor, wie in Tabelle 18.2 gezeigt. Die erste Familie enthält das  $u$  und  $d$  Quark, das Elektron und das Elektronen-Neutrino. Bis auf die Masse sind die Familien identisch und es genügt im Folgenden, nur die Mitglieder der ersten Familie zu berücksichtigen.

I	II	II		
$u$	$c$	$t$	$\gamma$	$H$
$d$	$s$	$b$	$g$	
$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	$Z^0$	
$e$	$\mu$	$\tau$	$W^\pm$	

Tabelle 18.2: Die drei Generationen der Materie (Fermionen), die Eichbosonen und das Higgsteilchen. Bis auf die Gluonen  $g$  nehmen alle an der elektroschwachen Wechselwirkung teil.

Die Eichgruppe ist die 4-dimensionale halbeinfache Liegruppe  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ . Entsprechend existieren 4 Eichpotenziale

$$A_a^\mu : SU(2) - \text{Eichfelder} \quad , \quad B^\mu : U_Y(1) - \text{Eichfeld} \quad , \quad (18.90)$$

welche die Eichbosonen  $W^\pm, Z^0, \gamma$  der elektroschwachen Wechselwirkung beschreiben. Diese vermitteln die Kraft zwischen den Materieteilchen. Etwas gewöhnungsbedürftig ist die Tatsache, dass rechts- und linkshändige Fermionen nach verschiedenen Darstellungen der Eichgruppe transformieren.

### Leptonen und Quarks der ersten Familie im Weinberg-Salam Modell

Die rechtshändige Fermionen

$$e_R, u_R, d'_R, \quad (18.91)$$

sind  $SU(2)$ -Singletts, während die linkshändige Fermionen  $SU(2)$ -Dubletts sind,

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}. \quad (18.92)$$

Man beachte, dass im Standardmodell der Teilchenphysik kein rechtshändiges Neutrino vorkommt.

Die linkshändigen Fermionen transformieren nach der definierenden 2-dimensionalen Darstellung der Eichgruppe  $SU(2)$ . Zum Beispiel wirkt der schwache Isospin, dies ist der Generator  $\tau_3$  in der Liealgebra, wie folgt auf das up-quark:

$$\tau_3 u_R = 0, \quad \tau_3 u_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +u_{1,L} \\ -u_{2,L} \end{pmatrix}. \quad (18.93)$$

Die Mitglieder jedes Multipletts tragen dieselbe  $U_Y(1)$ -Hyperladung  $Y$  und die elektrische Ladung eines Fermions berechnet sich nach der Formel von *Gell-Mann* und *Nishijima* gemäß

$$Q = \tau_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (18.94)$$

Für Fermionen der ersten Familie ergibt sich dann folgende Zuordnung der Quantenzahlen  $Y$  und  $Q$ :

	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	$e_R$	$u_R$	$d_R$
Y	-1	$\frac{1}{3}$	-2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
Q	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Tabelle 18.3: Die Fermionen der ersten Familie mit ihren elektrischen Ladungen und Hyperladungen.

Die Kopplungskonstante der  $U_Y(1)$  sei  $g'$  und diejenige der  $SU(2)$  sei  $g$ . Dann sind die kovarianten Ableitungen der rechts- und linkshändigen Fermionen gegeben durch

$$D_\mu \psi_R = \left( \partial_\mu + i \frac{g'}{2} y B_\mu \right) \psi_R, \quad D_\mu \psi_L = \left( \partial_\mu + i \frac{g'}{2} y B_\mu + i \frac{g}{2} A_\mu^a \tau_a \right) \psi_L, \quad (18.95)$$

worin die Hyperladung  $y$  des betreffenden Multipletts erscheint. Damit bildet man nun den eichinvarianten fermionischen Anteil der Lagrangedichte,

$$\mathcal{L}_\psi = i \bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R + i \bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L,$$

welcher eine (nicht explizit geschriebene) Summe über die fünf Multipletts der ersten Familie einschließt. Ein expliziter Massenterm für die Fermionen kommt hier nicht vor. Die Fermionen und

drei der vier Eichbosonen erhalten ihre Masse über den nach Peter Higgs benannten Mechanismus. Dieser benötigt ein Skalarfeld, das im Weinberg-Salam Modell ein komplexes SU(2)-Dublett mit Hyperladung  $Y = 1$  ist,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix} \implies Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18.96)$$

Die kovariante Ableitung des Skalarfeldes ist entsprechend

$$D_\mu \phi = \left( \partial_\mu + i \frac{g'}{2} B_\mu + i \frac{g}{2} A_\mu^a \tau_a \right) \phi. \quad (18.97)$$

Die Fermionen und Eichbosonen erhalten eine Masse über ihre Wechselwirkung mit den skalaren Teilchen, die bei tiefen Temperaturen in kondensieren. Diese Kondensation rührt von deren Selbst-Wechselwirkung, beschrieben durch die eichinvariante Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - V(\phi). \quad (18.98)$$

Das quartische Potenzial mit einer negativen Konstante vor dem  $\phi^2$ -Term,

$$V(\phi) = -c^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

hat am Ursprung ein lokales Maximum. Ein entsprechendes Mexican-Hut Potenzial für  $\phi \in \mathbb{C}$  (und nicht  $\mathbb{C}^2$ , wie im Weinberg-Salam Modell) ist in Abbildung 18.2 gezeigt.

Alle Minima des Potenzials sind mögliche klassische Grundzustände (Vakuumbestände). Wir wählen einen elektrisch neutralen Zustand der keine Ladung trägt, und die Zuordnung der Ladungen in (18.96) legt folgende Wahl nahe,

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (18.99)$$

Dieser Vakuum-Erwartungswert ist nicht mehr invariant unter allen Eichtransformationen, sondern nur noch unter Eichtransformationen in der Stabilisatorgruppe von  $\langle \phi \rangle$ . Diese ist eine U(1)-Untergruppe der Eichgruppe. Dies bedeutet, dass die Eichsymmetrie zu einer Abelschen U(1) gebrochen wird,

$$\text{SU}_L(2) \times \text{U}_Y(1) \longrightarrow \text{U}_Q(1). \quad (18.100)$$

Am Minimum des Potenzial ist der quadrierte Vakuum-Erwartungswert gleich  $v^2/2$ .

---

?

---

Überlegen Sie sich, welche Untergruppe von  $\text{SU}(2) \times \text{U}_Y(1)$  den Grundzustand (18.99) invariant lässt.

---



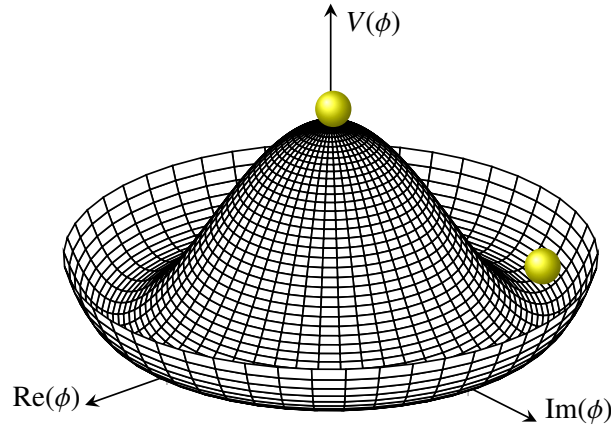


Abbildung 18.2: Ein Mexican-Hut Potenzial für ein komplexes Skalarfeld.

### 18.5.1 Massenerzeugung

Wir zerlegen das Skalarfeld in seinen Kondensatanteil  $\langle\phi\rangle$  und die Quantenfluktuationen um das Kondensat,

$$\phi \mapsto \langle\phi\rangle + \phi, \quad (18.101)$$

setzen diese Zerlegung in die Lagrangedichte ein und entwickeln diese bis zur quadratischen Ordnung in den Quantenfeldern. Daraus können wir die Massen der Felder ablesen, zumindest in der semi-klassischen Näherung. Das Quadrat der kovarianten Ableitung des Skalarfeldes hat die Entwicklung

$$(D_\mu)^\dagger(D^\mu\phi) = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}A_\mu^A M_{AB}^2(v)A_B^\mu + \dots, \quad (18.102)$$

woraus man die Massen der Vektorbosonen

$$A_\mu^a = (A_\mu^1, A_\mu^1, A_\mu^3, B_\mu) \quad (18.103)$$

abliest. Dazu müssen wir die Massenmatrix diagonalisieren. Diese lautet

$$M^2(v) = \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix}.$$

### Massen der Eichbosonen

Man findet folgende Eigenzustände und Massen:

$$\begin{aligned} W^\pm : \quad m^2 &= \frac{1}{4}g^2v^2, \\ Z : \quad m^2 &= \frac{1}{4}v^2(g^2 + g'^2), \\ A : \quad m^2 &= 0 \quad (\text{Photon}). \end{aligned} \tag{18.104}$$

Drei der vier Eichbosonen erhalten eine Masse von der Ordnung  $gv$ , und ein Eichboson bleibt masselos. Letzteres wird mit dem Photon identifiziert.

Um die Masse der Fermionen abzulesen entwickeln wir die Yukawa-Wechselwirkung zwischen Skalarfeld und Fermionen bis zur quadratischen Ordnung,

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = \gamma_e \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \langle \phi \rangle e_R + \dots \propto (\gamma_e v) e_L e_R + \dots \tag{18.105}$$

Es folgt, dass die Fermionen über den Higgs-Mechanismus eine Masse proportional zum Vakuumerwartungswert  $v$ , multipliziert mit ihrer Yukawa-Kopplung erhalten. Man beachte, dass die Neutrinos masselos bleiben, da die erste Komponente des Kondensats  $\langle \phi \rangle$  verschwindet.

## 18.6 Aufgaben zu Kapitel 18

### Aufgabe 18.1: Hamilton'sche Bewegungsgleichung für ein geladenes Punktteilchen

Zeigen Sie, dass die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für ein Punktteilchen mit Hamiltonfunktion (18.7) auf die Lorentz'schen Bewegungsgleichung für  $\boldsymbol{x}$  führen.

### Aufgabe 18.2: Klein-Gordon-Gleichung im äußeren elektromagnetischen Feld

Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung zur Lagrangedichte (18.18) folgende Form hat,

$$D_\mu D^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0.$$

Darin ist  $A_\mu$  ein äußeres Feld und  $\phi$  wird variiert.

### Aufgabe 18.3: Noetherstrom für minimal gekoppeltes Skalarfeld

Wir betrachten ein minimal gekoppeltes komplexes Skalarfeld mit Lagrangedichte (18.18).

- Prüfen Sie mit einer expliziten Rechnung, dass der erhaltene Noetherstrom folgende Form hat,

$$J^\mu = -ie((D_\mu \phi)^\dagger \phi - \phi^\dagger D_\mu \phi).$$

- Die Lagrangedichte ist eichinvariant,

$$\mathcal{L}_M(e^{i\lambda}\phi, A_\mu - i\partial_\mu\lambda) = \mathcal{L}_M(\phi, A_\mu).$$

Zeigen Sie nun, dass daraus folgende alternative Formel für den Noetherstrom folgt,

$$J^\mu(x) = -\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial A_\mu}\Big|_{A=0} = -\frac{\delta S_M}{\delta A_\mu(x)}\Big|_{A=0}.$$

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Belger und L. Ehrenberg, *Theorie und Anwendung der Symmetriegruppen*, Teubner, Leipzig, 1988
- [2] Michael Artin, *Algebra*, Birkhäuser, 1998
- [3] E. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, Vieweg, Berlin, 1931
- [4] A. Hurwitz, *Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration*, Göttinger Nachrichten, 1897, 71-90.
- [5] H. Weyl, *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1939.
- [6] J. von Neumann, *Die Einführung Analytischer Parameter in Topologischen Gruppen*, Annals of Mathematics 2 (1933) 34.
- [7] A. Haar, *Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen*, Annals of Mathematics 2 (1933) 34.
- [8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972
- [9] P. Blanchard, E. Brüning, *Direkte Methoden der Variationsrechnung*, Springer (1982).
- [10] A. Wipf, *Hamilton's formalism for systems with constraints*, Lecture Notes in Physics 434 (1994) 22-58
- [11] F. Belinfante, *On the spin angular momentum of mesons*, Physica **6** (1939) 887; *On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields*, Physica **7** (1940) 449; L. Rosenfeld, *Sur le tenseur d'impulsion-énergie*, Mém. Acad. Roy. Belg. Sci. **18** (1940) 1; M.J. Gotay and J.E. Marsden, *Stress-Energy-Momentum Tensors and the Belinfante-Rosenfeld Formula*, Contemporary Math. **132** (1992) 367.
- [12] L. O'Riada, N. Straumann und A. Wipf, *On The Origin Of The Aharonov-Bohm Effect*, Comments Nucl. Part. Phys. 20 (1991) 15; *Aharonov-Bohm Effect In Presence Of Superconductors*, Found. Phys. 23 (1992) 703.
- [13] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume II*, Cambridge University Press (1996).

- 
- [14] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C.* **40** (2016) and 2017 update
- [15] Wolfgang Rindler und Sebastian Linden, *Relativitätstheorie: Speziell, Allgemein und Kosmologisch*, Wiley-VCH (2016).
- [16] Domenico Giulini, *Special Relativity: a first encounter*, Oxford University Press (2005).
- [17] Reinhard Meinel, *Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie für Bachelorstudenten*, Springer Spektrum (2016)
- [18] Helmut Günther, *Die Spezielle Relativitätstheorie: Einsteins Welt in einer neuen Axiomatik*, Springer Spektrum (2013).
- [19] Mikio Nakahara, *Differentialgeometrie, Topologie und Physik*, Springer Spektrum (2015)
- [20] Rainer Orloff, *Geometrie der Raumzeit: Eine mathematische Einführung in die Relativitätstheorie*, Springer Spektrum (2018)
- [21] Max Wagner, *Gruppentheoretische Methoden in der Physik*, Vieweg Lehrbuch Mathematische Physik, Springer, Berlin (1998)