29.06.2006

# Übungen zur Quantenmechanik II

A. Wipf, Sommersemester 2006

## Blatt 11

**Aufgabe 22: Dirac-Algebra I:**
Betrachten Sie die Dirac-Matrizen $\gamma^\mu$ in der chiralen Darstellung

$$\gamma^\mu_\chi = \left( \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \right)$$

sowie in der Dirac-Darstellung

$$\gamma^\mu_D = \left( \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \right)$$

wobei $\mathbb{1}_2$ die zweidimensional Einheitsmatrix ist, und $\sigma$ ein Vektor ist, dessen drei Komponenten die drei Pauli-Matrizen $\sigma_1, \sigma_2$ und $\sigma_3$ sind.

Zeigen Sie, daß beide Darstellungen die Dirac-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ erfüllen und durch eine unitäre Transformation $U$

$$\gamma^\mu_D = U \gamma^\mu_\chi U^\dagger$$

miteinander in Beziehung stehen. Bestimmen Sie $U$ explizit.

**2 Punkte**

**Aufgabe 23: Dirac-Algebra II:**
Gegeben seien die Matrizen $\{\mathbb{1}_4, \gamma^\mu, \;\gamma^{\mu\nu}, \gamma_5\gamma^\mu, \gamma_5\}$, wobei die $\gamma^\mu$ die Dirac-Algebra erfüllen. Hierbei ist $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, und $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

1. $(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}_4$.
2. $\mathrm{Tr}\,(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}) = \mathrm{Tr}\,(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}\gamma_5) = 0$ für ungerades $n$.
3. $\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$.
4. $\mathrm{Tr}\,(\gamma_5) = \mathrm{Tr}\,(\gamma^{\mu\nu}) = \mathrm{Tr}\,(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$.
5. $\mathrm{Tr}\left(\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu}\right) = -4\left(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu}\right)$.

**4 Punkte**

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 24: Pauli-Matrizen:**
Zeigen Sie, daß die Pauli-Matrizen $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ eine Basis für die komplexen $2 \times 2$-Matrizen bilden. Beweisen Sie dazu, daß $\mathrm{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$ gilt und verwenden Sie diese Gleichung, um zu zeigen, daß aus $a_\mu \sigma^\mu = 0$ $a_\mu = 0$ folgt.

**2 Punkte**

**Aufgabe 25: Dirac-Matrizen:**
Zeigen Sie, daß die Matrizen $\{\mathbb{1}_4, \gamma^\mu, \gamma^{\mu\nu}, \gamma_5\gamma^\mu, \gamma_5\}$ eine Basis für die komplexen $4\times4$-Matrizen bilden, d.h., daß sie linear unabhängig sind. Multiplizieren Sie dazu die Gleichung

$$a\mathbb{1}_4 + b_\mu \gamma^\mu + c_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} + d_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + e\gamma_5 = 0$$

mit den Matrizen $\{\mathbb{1}_4, \gamma^\mu, \gamma^{\mu\nu}, \gamma_5\gamma^\mu, \gamma_5\}$ und bilden Sie die Spur. Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 23. **3 Punkte**

**Aufgabe 26: Bonusaufgabe für Interessierte:**
Was ist der gruppentheoretische Zusammenhang zwischen $SO(3)$ und $SU(2)$? Was ist der Zusammenhang zwischen $SO(3,1)^\uparrow$ und $SL(2,\mathbb{C})$? Was ergibt sich daraus für die Physik?

Hinweis: Diese Aufgabe fällt etwas aus dem Rahmen der übrigen Aufgaben heraus, und ist mehr als Denkanreiz gedacht. Sie fliesst nicht in die Wertung ein, es ist jedoch möglich Bonuspunkte zu bekommen. Es ist in der Aufgabenstellung bewusst Interpretationsspielraum gelassen. Es ist Ihnen überlassen wie ausführlich Sie diese Aufgabe behandeln, für die volle Punktzahl wird jedoch erwartet, daß Sie selbstständig in der Literatur recherchieren, und Ihre Erkenntnisse auf etwa 1-3 Seiten wiedergeben. Wo möglich sollen Sie auch Illustrationen verwenden.

**5 Punkte**

**Abgabetermin:** Donnerstag 06.07.06 nach der Vorlesung