21.06.2006

# Übungen zur Quantenmechanik II

A. Wipf, Sommersemester 2006

## Blatt 10

**Aufgabe 20: Das skalare Feld:**
Betrachtet werden soll ein komplexes Klein-Gordon-Feld $\phi$ in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes mit dem Potential $A_\mu$. Die Lagrangedichte (das Feldtheoretische Analogon zur Lagrange-Funktion) des Systems lautet:

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^\dagger, A_\mu) = D_\mu \phi \overline{D}^\mu \phi^\dagger - m^2 \phi^\dagger \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{1}$$

wobei

$$D_\mu \phi = \left( \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \phi$$

ist, und $F^{\mu\nu} = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ der elektromagnetische Feldstärketensor ist. Der Viererstrom $j^\mu$ des Systems wurde in der Vorlesung als

$$j^\mu = \frac{i}{2m} \left( \phi^\dagger D^\mu \phi - \phi \bar{D}^\mu \phi^\dagger \right) \tag{2}$$

definiert.

1. Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen des Systems?
   Hinweis: Sie müssen die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht herleiten, sondern nur die Bewegungsgleichungen der dynamischen Variablen aufstellen.

2. Zeigen Sie, dass der Strom $j^\mu$ eichinvariant ist, d.h. invariant unter der Transformation
   $$A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu \lambda, \quad \phi \mapsto e^{\frac{ie}{\hbar c}\lambda} \phi$$

3. Welcher Bedingung muss $\phi$ genügen, damit der Strom erhalten ist, also damit gilt:
   $$\partial_\mu j^\mu = 0,$$
   Zeigen Sie die Stromerhaltung unter dieser Bedingung, und berechnen sie die nach dem Noether'schen Theorem dazugehörige erhaltene Ladung.

**Bitte wenden!**

Nun sollen die beiden Felder $\phi$ und $\phi^\dagger$ durch reelle Komponenten $\phi_1$ und $\phi_2$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2),\end{aligned}$$

und $\Phi$ soll als Vektor in einem zweidimensionalen Raum mit Basisvektoren $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$, $\Phi = \boldsymbol{i}\phi_1 + \boldsymbol{j}\phi_2$ geschrieben werden.

4. Schreiben Sie die Lagrangedichte des Systems mit dieser neuen Parametrisierung. Wie lauten die Eichtransformationen nun? Interpretieren Sie diese geometrisch und stellen Sie das Ergebnis in einer Skizze dar.

**Insgesamt 6 Punkte**

**Aufgabe 21: Streuung eines Klein-Gordon-Teilchens:**
Betrachtet wird die Streuung eines Klein-Gordon-Teilchens mit Impuls $p$ und Energie $E_p$ in $1+1$ Dimensionen. Das Teilchen treffe bei $x = 0$ auf eine elektrostatische Barriere $V(x) = eU\theta(x), (U > 0)$ mit

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

1. Berechnen Sie die stationären Zustände der Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left\{\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V\right)^2 + \left(\hbar^2\partial_x^2 - m^2c^2\right)\right\}\phi = 0$$

   Anleitung: Machen Sie für $x < 0$ den Ansatz

$$\phi(x,t) = e^{-iE_pt/\hbar}\left(e^{ipx^1/\hbar} + re^{-ipx^1/\hbar}\right),$$

   d.h. es gibt einlaufende und reflektierte Anteile. Setzen Sie für $x > 0$

$$\phi(x,t) = \tau e^{-iE_pt/\hbar}e^{iqx/\hbar}$$

   $\phi$ und $\partial_x\phi$ sollen bei $x = 0$ stetig sein.

2. Berechnen Sie Reflexions- und Transmissionskoeffizient $\mathcal{R}$ und $\mathcal{T}$ für die drei Fälle $V < E_p - mc^2$, $E_p - mc^2 < V < E_p + mc^2$ und $V > E_p + mc^2$.

3. Interpretieren Sie $\mathcal{R}$ und $\mathcal{T}$ für $V > E_p + mc^2$.

**3+3+1 Punkte**

**Abgabetermin:** Donnerstag 29.06.06 nach der Vorlesung