Übungen zur Quantenmechanik II

A. Wipf, Sommersemester 2006

Blatt 9

Aufgabe 19: Lorentztransformationen: Eine beliebige eigentliche und orthochrone Lorentztransformation hat die Form

$$\Lambda\left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\theta}\right)=\exp\left(\omega(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\theta})\right)$$

mit infinitesimaler Erzeugenden

$$\omega(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\theta})=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ -\alpha_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\alpha_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie die Transformation mit $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\theta})=(\alpha\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{0})$. **2 Punkte**

2. Zeigen Sie, dass

   $$\Lambda(R\boldsymbol{\alpha},0)=\Lambda(R)\Lambda(\boldsymbol{\alpha},0)\Lambda^{-1}(R)\quad\text{mit}\quad\Lambda(R)=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right).$$

   gilt, wobei R eine eigentliche Drehung darstellt. **3 Punkte**

3. Lorentzboosts haben die Form

   $$\Lambda(\boldsymbol{\alpha},0)=\begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha)\boldsymbol{e}^T \\ -\sinh(\alpha)\boldsymbol{e} & \delta_{ij}-(1-\cosh(\alpha))e_ie_j \end{pmatrix},$$

   wobei α den Betrag von $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{e}$ der Einheitsvektor in Richtung von $\boldsymbol{\alpha}$ bezeichnet. Diese Boosts bilden das Inertialsystem I auf I' ab:

   $$x \quad\mapsto\quad x'=\Lambda x\,.$$

   Welche Koordinaten x hat der Ursprung $x'=(x'^0,\boldsymbol{0})$ von I'? Benutzen Sie das Resultat, um $\boldsymbol{\alpha}$ als Funktion der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ von I' relativ zu I auszudrücken. Schreiben Sie $\Lambda(\boldsymbol{\alpha},0)$ als Funktion von $\boldsymbol{v}$. Benützen Sie die gängigen Abkürzungen

   $$\beta=\frac{v}{c}\quad\text{und}\quad\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

   4 Punkte

4. Betrachten Sie einen Urmeter, welcher in I' ruht. Die Endpunkte des Urmeters seien

$$x' = \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y' = \begin{pmatrix} ct' \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Koordinaten (x, y) haben die Endpunkte des Urmeters in I, falls sich I' relativ zu I in der 1-Richtung bewegt, $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_1$. Welche Länge des Stabes mißt der Beobachter im Inertialsystem I? Zeichen Sie Raumzeit-Diagramme mit den Weltlinien der Endpunkte des Urmeters I und I'. **2 Punkte**

5. Eine Uhr ruhe in I' am Ursprung. Gegeben sind zwei Zeiten $x'^0 = 0$ und $y'^0 = t'$. Berechnen Sie $\Delta t := y^0 - x^0$. **1 Punkt**

Insgesamt 12 Punkte