

# Elektrodynamik

Vorlesungs-Skriptum

Andreas Wipf

Theoretisch-Physikalisches-Institut

Friedrich-Schiller-Universität Jena

5. Auflage, SS 2015

1. Auflage SS 2000

©2015 Andreas Wipf, Universität Jena

Kopieren für den privaten Gebrauch unter Angabe des Autors gestattet.

Kommerzielle Verwertung ist nicht gestattet.

Hinweise auf Druckfehler nehme ich gerne entgegen ([wipf@tpi.uni-jena.de](mailto:wipf@tpi.uni-jena.de))

Markus Hansen, Markus Huber, Thomas Strobl und Ulrich Theis halfen beim Korrektur lesen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung in die Elektrostatik</b>	<b>1</b>
1.1	Das Coulombsche Gesetz und Maßsysteme . . . . .	1
1.1.1	Messung und Einheit der Ladung . . . . .	3
1.2	Das elektrische Feld . . . . .	4
1.3	Feldgleichungen der Elektrostatik . . . . .	12
1.3.1	Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung . . . . .	13
1.4	Energie des elektrostatischen Feldes . . . . .	15
1.4.1	Probleme mit der Selbstenergie . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Randwertprobleme der Elektrostatik</b>	<b>19</b>
2.1	Ideale Leiter im elektrischen Feld . . . . .	19
2.1.1	Randbedingungen für Metalle . . . . .	20
2.1.2	Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	22
2.2	Die Methode der Spiegelladungen . . . . .	23
2.2.1	Punktladung in der Nähe einer ebenen Metallplatte . . . . .	23
2.2.2	Punktladung in der Nähe einer leitenden Kugel . . . . .	25
2.2.3	Leitende Kugel im homogenen Feld . . . . .	27
2.3	Die Methode der Greenschen Funktionen . . . . .	29
2.3.1	Dirichlet-Problem . . . . .	31
2.3.2	Neumann-Problem . . . . .	32
2.4	Kapazitäten . . . . .	33
2.4.1	Kugelkondensator . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Multipole und spezielle Funktionen</b>	<b>37</b>
3.1	Dipole und Quadrupole . . . . .	38
3.2	Energie und Drehmoment von Multipolen . . . . .	40
3.3	Differentialoperatoren . . . . .	41
3.3.1	Differentialoperatoren in rechtwinkligen Koordinaten . . . . .	43

3.4	Legendre-Polynome und Kugelfunktionen . . . . .	44
3.4.1	Separationsansatz . . . . .	44
3.4.2	Potenzreihen und erzeugende Funktionen . . . . .	53
3.4.3	Helmholtz-Funktionen und zugeordnete Legendre-Polynome . . . . .	55
3.4.4	Punktladung in einem geerdeten „Faradaykäfig“ . . . . .	56
3.5	Zylindersymmetrische Probleme . . . . .	56
3.6	Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten . . . . .	58
3.7	Anhang: Vollständige Funktionensysteme . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Elektrisches Feld in Materie</b>	<b>63</b>
4.1	Polarisation und dielektrische Verschiebung . . . . .	63
4.2	Grenzflächen zwischen Dielektrika . . . . .	70
4.2.1	Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld . . . . .	72
4.3	Clausius-Mosottische Formel . . . . .	75
4.4	Feldenergie im Dielektrikum . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>78</b>
5.1	Strom und Stromdichte . . . . .	78
5.1.1	Stromerhaltung . . . . .	79
5.2	Das magnetische Feld und das Biot-Savart-Gesetz . . . . .	80
5.3	Die Grundgleichungen der Magnetostatik . . . . .	86
5.3.1	Integrale Form der Grundgleichungen . . . . .	87
5.3.2	Das Magnetostatische Potential . . . . .	88
5.3.3	Das magnetische Feld einer langen Spule . . . . .	88
5.4	Induktionskoeffizienten . . . . .	89
5.5	Multipolentwicklung . . . . .	92
5.5.1	Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im Magnetfeld . . . . .	94
5.6	Magnetismus in Materie . . . . .	95
5.6.1	Makroskopische Grundgleichungen . . . . .	95
5.6.2	Grenzflächen . . . . .	99
5.6.3	Kugel im homogenen Magnetfeld . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Maxwell-Gleichungen</b>	<b>102</b>
6.1	Induktionsgesetz . . . . .	102
6.2	Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom . . . . .	106
6.3	Die Maxwell-Gleichungen . . . . .	106
6.3.1	Integralform der Maxwell-Gleichungen . . . . .	108

6.3.2	Elektromagnetische Potentiale . . . . .	110
6.3.3	Eichtransformationen . . . . .	111
6.3.4	Maxwell-Gleichungen im Vakuum . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b>	<b>115</b>
7.1	Vakuumlösungen . . . . .	115
7.2	Ebene Wellen . . . . .	116
7.2.1	Monochromatische ebene Wellen . . . . .	119
7.3	Kugelwellen . . . . .	122
7.4	Bessel-Wellen . . . . .	123
7.5	TE- und TM-Wellen . . . . .	125
7.6	Überlagerung von ebenen Wellen . . . . .	126
7.7	Anhang: Fourier-Reihen und Integrale . . . . .	127
<b>8</b>	<b>Wellen in Medien</b>	<b>130</b>
8.1	Wellen in homogenen Leitern . . . . .	130
8.1.1	Transversal-Schwingungen und Skin-Effekt . . . . .	130
8.1.2	Anwendung: Der Skin-Effekt im zylindrischen Leiter . . . . .	133
8.1.3	Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen . . . . .	134
8.2	Dispersion in Isolatoren . . . . .	137
8.3	Kausalität und Kramers-Kronig-Relationen . . . . .	140
<b>9</b>	<b>Relativistische Form der Elektrodynamik</b>	<b>144</b>
9.1	Poincare-Transformationen . . . . .	144
9.2	Ströme, Potentiale und Feldstärke . . . . .	148
9.3	Relativistische Form der Maxwell-Gleichungen . . . . .	150
9.3.1	Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung . . . . .	152
9.4	Erhaltungssätze für Energie und Impuls . . . . .	155
<b>10</b>	<b>Relativistische Punktteilchen</b>	<b>161</b>
10.1	Eigenzeit, 4-er Geschwindigkeit und 4-er Impuls . . . . .	161
10.1.1	Ein freies Elektron kann kein Photon absorbieren . . . . .	164
10.2	Relativistische Teilchen in elektromagnetischen Feldern . . . . .	165
10.2.1	Starke Felder in der Natur und im Laboratorium . . . . .	165
10.2.2	Relativistische Form der Lorentzschen Bewegungsgleichungen . . . . .	166
10.3	Bewegung im konstanten Feld . . . . .	167
10.4	Relativistische Teilchen in ebenen Wellenfeldern . . . . .	171
10.4.1	Gepulste ebene Wellen . . . . .	173

---

10.4.2	Teilchen in elliptisch polarisierten harmonischen Wellenfeldern . . . . .	174
<b>11</b>	<b>Erzeugung und Abstrahlung von Wellen</b>	<b>181</b>
11.1	Inhomogene Wellengleichung . . . . .	181
11.2	Strahlungsfeld in der Fernzone . . . . .	186
11.3	Multipolentwicklung . . . . .	189
11.3.1	Elektrisches Dipolfeld . . . . .	189
11.3.2	Magnetisches Dipol- und elektrisches Quadrupolfeld . . . . .	190
11.4	Abgestrahlte Leistung . . . . .	191
11.5	Liénard-Wiechert-Potentiale . . . . .	194
11.5.1	Die Feldstärken . . . . .	196
11.5.2	Gleichförmig bewegte Teilchen . . . . .	197
11.6	Der Hertz'sche Dipol . . . . .	199
11.7	Abstrahlung von bewegten Ladungen . . . . .	199
11.7.1	Nichtrelativistische Teilchen . . . . .	200
11.7.2	Relativistische Teilchen . . . . .	201

# Kapitel 1

## Einführung in die Elektrostatik

Nach altbewährter Methode kann man elektrische Ladungen erzeugen, indem man zum Beispiel Glas mit einem Seidentuch reibt. Der geriebene Körper zieht ein Kügelchen aus Holundermark an, was vor dem Reiben nicht der Fall war. Diese Erscheinung erklären wir folgendermaßen: Atome bestehen aus einem positiv geladenen kleinen Atomkern<sup>1</sup> und einer um den Kern herum angeordneten Hülle aus negativ geladenen Elektronen. Die positive Ladung des Kerns und die negative Ladung der Hülle sind normalerweise<sup>2</sup> dem Betrage nach gleich groß, so dass Atome insgesamt keine Ladung tragen. Bei manchen Substanzen lassen sich Elektronen der Hülle relativ leicht entfernen. Das geschieht zum Beispiel durch Reiben des Glases mit Seide. Dabei gehen Elektronen vom Glas auf die Seide über, so dass nach dem Reiben das Glas positiv, das Seidentuch aber negativ geladen ist. Reibt man dagegen einen Gummistab mit Katzenfell, so gehen Elektronen vom Fell zum Stab über. Durch Streichen des Glas- und Gummistabes aneinander kann man wieder für einen Ausgleich der Ladungen zwischen beiden Stäben sorgen.

Wir haben hier schon von einem fundamentalen Naturgesetz – *dem Erhaltungssatz für die elektrische Ladung* – Gebrauch gemacht. Nach diesem Gesetz ist die Summe aller elektrischen Ladungen zeitlich konstant. Erzeugt man durch Ladungstrennung und Ladungstransport eine positive Ladung an einem Ort, dann entsteht eine negative Ladung an einem anderen Ort. Wir sehen die Existenz elektrischer Ladungen als gegebene Tatsache an. Die beobachteten Anziehungs-, Abstoßungs- und Wärmewirkungen sind die Folgen der Wechselwirkungen zwischen Ladungen.

### 1.1 Das Coulombsche Gesetz und Maßsysteme

Zwischen elektrisch geladenen Körpern wirken Kräfte, die vom Ladungszustand abhängen. Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens ziehen sich an, Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab. Für zwei kugelförmige Körper, deren Durchmesser viel kleiner als ihr Abstand ist, ist das Kraftgesetz besonders einfach. Diese Kraft kann man zum Beispiel auf eine Art messen, die in Abb. 1.1 dargestellt ist: Aus den Ablenkungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der geladenen Kügelchen aus

---

<sup>1</sup>Der Durchmesser des Atomkerns beträgt etwa  $10^{-13}$  cm.

<sup>2</sup>Für Ionen fehlen einige Elektronen in der Hülle.

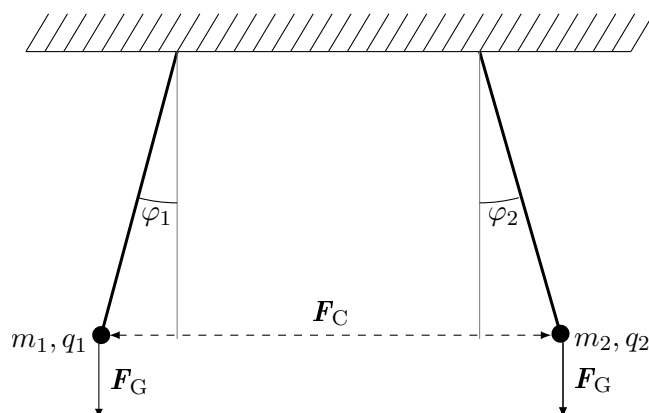


Abbildung 1.1: Eine Methode zur Bestimmung der Kraft zwischen zwei elektrischen Ladungen.

ihren Gleichgewichtslagen und ihren Massen kann man die wirkende Kraft  $F_C$  berechnen<sup>3</sup>. Die Experimente zeigen, dass die Kraft proportional zu den elektrischen Ladungen  $q_i$  und invers proportional zum Quadrat des Abstands  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  der beiden Ladungen ist. Diese *Coulombkraft* wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Damit ergibt sich das folgende Kraftgesetz für zwei Punktladungen

$$\mathbf{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (1.1)$$

Die *Dielektrizitätskonstante* des Vakuums  $\epsilon_0$  bestimmt die Stärke der Wechselwirkung; ihr numerischer Wert hängt von der gewählten Maßeinheit für die Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  ab.

Das Coulombgesetz (1.1) ist die Grundlage der *Elektrostatik*, in der man ruhende oder stationäre Ladungsverteilungen betrachtet. Die  $1/r^2$ -Abhängigkeit der Coulombkraft ist über viele Längenbereiche experimentell bestätigt. Im Zentimeter- bis Meterbereich kann man das Gesetz durch Experimente an makroskopischen geladenen Körpern im Labor direkt nachprüfen. Für mikroskopische Distanzen vergleicht man die Resultate von Streuexperimenten (zum Beispiel ionisierte Heliumkerne an Goldkernen oder Elektronen an Positronen) mit den Vorhersagen der Theorie, welche auf dem Coulombgesetz beruhen<sup>4</sup>. Für astronomische Skalen kann man die planetaren Magnetfelder „ausmessen“, deren Form eng mit dem Coulombgesetz verknüpft ist. Bisher wurde im Längenbereich von  $10^{-16}$ cm bis einigen astronomischen Einheiten keine Abweichung vom Coulombgesetz gefunden.

Für die Coulombkraft gilt das *Superpositionsprinzip*: Die von mehreren Ladungen auf eine gegebene Ladung ausgeübte Kraft ergibt sich als Summe der einzelnen Coulombkräfte zwischen den Ladungen und der gegebenen Ladung. Das Superpositionprinzip gilt nicht für alle Kräfte in der Natur und ist keine Selbstverständlichkeit.

<sup>3</sup>Die elektrische Kraft hält der von der Gravitation herrührenden Rückstellkraft  $m_i g \sin \varphi_i$  das Gleichgewicht.

<sup>4</sup>Kommt man einem „Punktteilchen“ näher als seine Comptonwellenlänge, dann hängt seine Ladung vom Abstand ab,  $e = e(r)$ .

### 1.1.1 Messung und Einheit der Ladung

Die Ladung kann man zum Beispiel mit dem sogenannten *Blättchenelektroskop*, dargestellt in Abb. 1.2, messen. Die beiden dünnen Aluminium- oder Goldfolienblättchen  $B_1$  und  $B_2$  sind

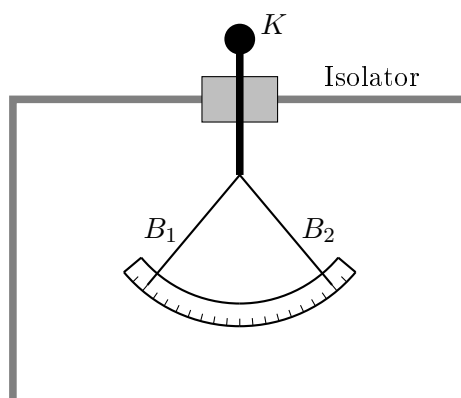


Abbildung 1.2: *Blättchen Elektroskop*.

mit dem metallischen Kopf  $K$  leitend verbunden, aber gegen das Gehäuse isoliert. Bringt man elektrische Ladung auf  $K$ , so verteilt sich diese auf die beiden Blättchen. Diese stoßen sich gegenseitig ab und spreizen auseinander. Die Abstoßung wird umso größer, je größer die auf  $K$  aufgebrachte Ladung ist. Nach einer Eichung der Skala kann man über den Ausschlag der Blättchen die Größe der Ladung messen.

Wie wir schon erwähnten, gilt für die Ladungen der *Erhaltungssatz*: Die Summe der Ladungen eines abgeschlossenen Systems ist erhalten. Des Weiteren treten in der Natur nur quantisierte Ladungen auf. Die Ladung des Protons wird mit  $q = e$  und diejenige des Elektrons mit  $q = -e$  bezeichnet. Die Ladungen aller Elementarteilchen<sup>5</sup> sind quantisiert. Allerdings spielt die Quantisierung der elektrischen Ladung für makroskopische Körper mit  $q \gg e$  keine Rolle.

Erst nach Einführung einer Ladungseinheit oder gleichbedeutend nach Festlegung der Konstanten  $\varepsilon_0$  in (1.1) wird die Ladung zur Meßgröße. Es wäre am natürlichsten, das Ladungsquant, also die Ladung des Protons, als Ladung 1 LE zu definieren. Danach wäre die Konstante  $\varepsilon_0$  eine bestimmbare Größe der Dimension

$$[\varepsilon_0] = \frac{(\text{LE})^2}{\text{Nm}^2}, \quad \text{N}=\text{Newton}, \quad \text{m}=\text{Meter}.$$

International eingeführt ist allerdings die Ladungseinheit

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C},$$

<sup>5</sup>Die fundamentalen geladenen Elementarteilchen sind die Leptonen  $e, \mu, \tau$ , die Quarks  $u, d, c, s, t, b$  und die Eichbosonen  $W^\pm$ . Das Proton besteht aus zwei up-Quarks und einem down-Quark.



für die Elektrizitätsmenge. Sie wird mit Hilfe pro Zeiteinheit durch einen Leiter fließenden elektrischen Stromes definiert,

$$1 \text{ A} = 1 \text{ Ampere} = 1 \text{ C/s} . \quad (1.2)$$

Diese Definition führt zur Festlegung

$$\varepsilon_0 = 8.854\,187 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} . \quad (1.3)$$

Ein Coulomb ist eine enorm große Ladung. Zwei Körper im Abstand von 1m, die je ein Coulomb Ladung tragen, üben eine Kraft von

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} \sim 9 \cdot 10^9 \text{ N} \quad (1.4)$$

aufeinander aus.

Es fehlt noch die Festlegung der Stromeinheit. Diese kann über die Kraft zwischen zwei parallelen, unendlich langen und Strom durchflossenen (idealisierten) Drähten im Abstand  $d$  bestimmt werden. Fließt durch jeden Draht der Strom  $I = \Delta q / \Delta t$ , so wirkt auf jedes Drahtstück der Länge  $\Delta l$  die Kraft (siehe später)

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{d} ,$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Zwei Drähte im Abstand von  $d = 1\text{m}$ , durch die jeweils 1 *Ampere* fließt, erfahren eine Kraft pro Länge von  $2 \cdot 10^{-7} \text{N/m}$ .

Die universelle Elementarladung (z.B. Betrag der Ladung des Elektrons) ist dann

$$e = 1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{C}, \quad \text{Unsicherheit } 0.30 \text{ ppm} . \quad (1.5)$$

Neben der Ladungseinheit benutzen wir als mechanische Einheiten für Länge, Masse und Zeit den Meter (m), das Kilogramm (kg) und die Sekunde (s). Die Arbeits- und Leistungseinheiten sind

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}, \quad 1 \text{ Watt} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{s}} . \quad (1.6)$$

Das Maßsystem mit der Einheit Ampere als vierter Grundeinheit heißt MKSA-System oder SI-System. MKSA steht für Meter, Kilogramm, Sekunde und Ampere und SI für Systeme International d'Unites.

## 1.2 Das elektrische Feld

Zum Begriff des elektrischen Feldes gelangt man, wenn man nach der *Übertragung der elektrischen Kräfte* von einer Ladung  $q_1$  auf eine andere Ladung  $q_2$  fragt. In der Elektrostatik muss man diese Frage nicht unbedingt stellen. Man kann sich damit begnügen, dass eine Kraft zwischen elektrischen Ladungen wirkt; die Ausbreitung der Kraft ist in der Statik unwesentlich. Geht man

allerdings zu zeitlich rasch veränderlichen Ladungs- und Stromverteilungen über<sup>6</sup>, so stellt sich die Frage nach der Ausbreitung von Kraft und Energie erneut. Nun kann sie nicht mehr umgangen werden, da sich elektromagnetische Wirkungen mit der endlichen Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Daher ist es angebracht, schon in der Elektrostatik nach der Art der Kraftübertragung zwischen Ladungen zu fragen. Dies führt uns auf den Begriff der elektrischen Feldstärke, oft nur elektrisches Feld genannt. Vom Feldwirkungsstandpunkt aus müssen wir uns eine von den Ladungszentren ausgehende Erregung des umgebenden Raumes vorstellen.

Wir definieren das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  über die auf einen (möglichst kleinen) geladenen Probekörper ausgeübte Kraft, geteilt durch die Ladung des Probekörpers,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (1.7)$$

Das elektrische Feld variiert von Ort zu Ort nach Richtung und Größe. Durch den Grenzfall  $q \rightarrow 0$  wird erreicht, dass die Probeladung die vorhandenen Ladungen nicht stört, z.B. in diesen keine Polarisation der elektrischen Ladung hervorruft.

Die Dimension des elektrischen Feldes ist

$$[\mathbf{E}] = \text{N/C}. \quad (1.8)$$

Wenn wir der Richtung von  $\mathbf{E}$  folgen, durchlaufen wir eine *elektrische Kraftlinie bzw. Feldlinie*. Man kann das Feldlinienbild festlegen, indem man von jeder positiven Ladungseinheit eine Feldlinie ausgehen lässt. Entsprechend endet an jeder negativen Ladungseinheit eine Feldlinie. Dann ist die Dichte der Feldlinien proportional zur elektrischen Feldstärke.

Nun bewegen wir eine Probeladung  $q$  längs eines die Punkte  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  verbindenden Weges  $C$ . Die auf dem kleinen Wegstück  $d\mathbf{r}$  vom Feld an der Probeladung verrichtete Arbeit ist gleich  $d\mathbf{r}$  multipliziert mit der Kraft  $q|\mathbf{E}|$  in Richtung des Weges, also gleich  $q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ . Der Ausdruck ist positiv, wenn eine positive Ladung in Richtung von  $\mathbf{E}$  bewegt wird, wobei also Arbeit nach außen gewonnen wird. Für ein ortsabhängiges  $\mathbf{E}$  ist die *gewonnene Arbeit* bei der Bewegung einer Ladung durch das Linienintegral

$$q \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(s) ds \equiv qV \quad (1.9)$$

gegeben. Hier durchläuft  $\mathbf{r}(s)$  die Kurve  $C$ , welche den Anfangspunkt  $\mathbf{r}_1$  mit dem Endpunkt  $\mathbf{r}_2$  der Bewegung verbindet, also  $\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}(s_2) = \mathbf{r}_2$ . Wir nennen das Linienintegral  $V$  die *Spannung*. Zur Berechnung der Spannung muss neben den Endpunkten auch der verbindende Weg bekannt sein. Nur in wirbelfreien Feldern mit  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  ist nach dem Stokesschen Satz das Linienintegral und damit die Arbeit im elektrischen Feld unabhängig vom Weg. Dann sagen wir statt Spannung auch *Potentialdifferenz* zwischen den Punkten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$ . Die Einheit der

---

<sup>6</sup>Siehe Kapitel 5

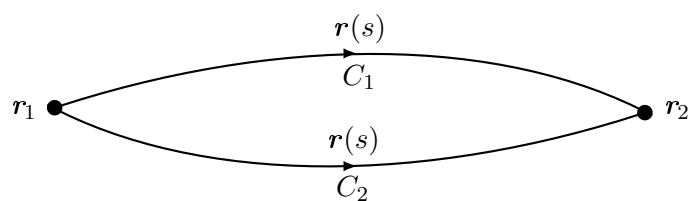


Abbildung 1.3: Die Spannung hängt vom Weg ab.

Spannung im SI-Einheitensystem ist

$$[V] = \text{J/C}. \quad (1.10)$$

Nun betrachten wir  $N$  Punktladungen  $q_1, \dots, q_N$ , die an den Orten  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  ruhen. Nach dem Superpositionsprinzip<sup>7</sup> ist eine Punktladung  $q$  am Orte  $\mathbf{r}$  der Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

ausgesetzt. Entsprechend ist das elektrische Feld von  $N$  Punktladungen gleich

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (1.11)$$

Das Feld einer positiv geladenen Punktladung ist in Abb. 1.4 dargestellt. Ebenfalls gezeigt sind

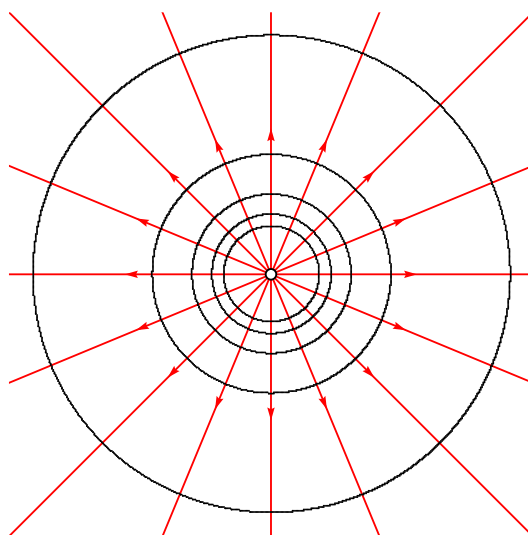


Abbildung 1.4: Äquipotentialflächen und elektrisches Feld einer Punktladung.

<sup>7</sup>Für Punktladungen treten keine Polarisierungseffekte auf.

die Äquipotentialflächen, die auf den folgenden Seiten eingeführt werden. Abbildung 1.5 zeigt dagegen die Äquipotentialflächen und das elektrische Feld für zwei entgegengesetzt geladene bzw. zwei gleich geladene Punktteilchen.

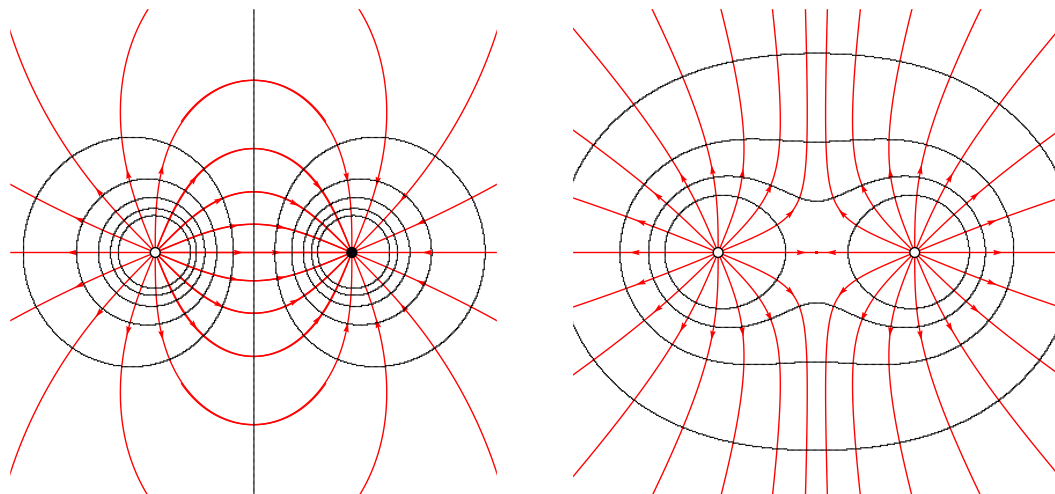


Abbildung 1.5: Äquipotentialflächen und elektrisches Feld für zwei entgegengesetzt geladene (links) und zwei gleich geladene Teilchen (rechts).

Das elektrische Feld (1.11) ist der Gradient einer Funktion  $\Phi$  und seine Quellen sind an den Orten der Punktladungen lokalisiert. Um dies einzusehen, benutzen wir die Formeln

$$\begin{aligned}\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} &= -\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).\end{aligned}\quad (1.12)$$

Gradient, Divergenz und Rotation sind lineare Operationen und deshalb folgt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Da ein Gradientenfeld immer wirbelfrei ist, impliziert dieses Resultat

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.13)$$

Wegen  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  hängt die Spannung längs eines Weges  $C : \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$  nur von den Endpunkten ab

$$V \equiv \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2) \quad (1.14)$$

und wird zu einer Potentialdifferenz. Entsprechend hängt die bei der Bewegung einer Probeladung *zu leistende Arbeit* ebenfalls nur von dem Anfangs- und Endpunkt ab,

$$A = -q \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q\Phi(\mathbf{r}_2) - q\Phi(\mathbf{r}_1). \quad (1.15)$$

Bewegt man eine Ladung längs einer beliebigen, geschlossenen Kurve, dann verschwindet die Arbeit. Also ist für Coulombfelder die *elektrische Ringspannung* gleich Null,

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.16)$$

Bewegt sich eine Ladung allein unter der Kraftwirkung des Feldes, gilt also für den Probekörper mit der Masse  $m$  die Bewegungsgleichung<sup>8</sup>

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}, \quad (1.17)$$

so wird die dem Feld entnommene Arbeit wegen des Energiesatzes gleich der Zunahme der kinetischen Energie des Körpers sein,

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = q\Phi(\mathbf{r}_1) - q\Phi(\mathbf{r}_2). \quad (1.18)$$

Hier bezeichnen  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  die Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Probekörpers. Deshalb gibt man die kinetische Energie, die ein geladenes und anfangs ruhendes Teilchen beim Durchlaufen einer bestimmten Strecke erhält, meist unmittelbar durch das Produkt aus Ladung und durchlaufener Spannung an. Ein Proton hat die kinetische Energie von 1 KeV, wenn die Spannungsdifferenz zwischen Anfangs- und Endort 1000 Volt beträgt.

Die Feldlinien schneiden die *Äquipotentialflächen*, auf denen das elektrostatische Potential  $\Phi$  konstant ist, orthogonal. Zum Beweis betrachten wir eine Kurve  $\mathbf{r}(s)$  in einer solchen Fläche. Dann ist  $\Phi(\mathbf{r}(s))$  konstant und entsprechend gilt

$$0 = \frac{d}{ds} \Phi(\mathbf{r}(s)) = \nabla \Phi(\mathbf{r}(s)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(s) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(s).$$

Daher ist das elektrische Feld orthogonal zu allen Tangentialvektoren an die Fläche, d.h. orthogonal zur Äquipotentialfläche. Bei der Bewegung einer Probeladung auf einer festen Äquipotentialfläche wird also weder Arbeit verrichtet noch gewonnen.

Wir benutzen nun die Gaußsche Integralformel, um den Fluss des elektrischen Feldes durch die Oberfläche  $\partial V$  eines beliebig gewählten Raumgebiets  $V$  mit der im Gebiet enthaltenen Ladung in Verbindung zu bringen. Sei also  $\mathbf{n}$  das nach außen gerichtete Einheitsfeld orthogonal zu  $\partial V$

---

<sup>8</sup>Bezüglich der Verhältnisse bei hohen Geschwindigkeiten verweise ich auf das Kapitel über die relativistische Mechanik.

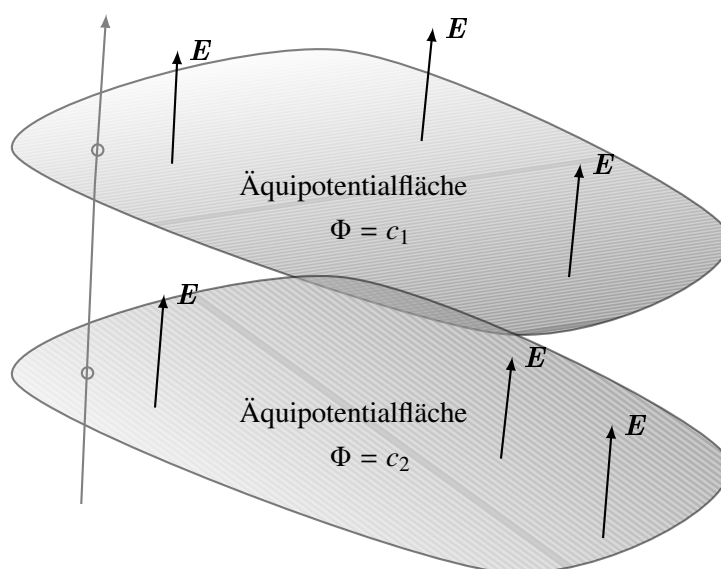


Abbildung 1.6: Die Flusslinien schneiden die Äquipotentialflächen orthogonal.

und  $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$  das gerichtete Oberflächenelement,

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} df = E_n df, \quad E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n},$$

dann ist nach dem Gaußschen Satz

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d^3r.$$

Nach Definition der Dirac'schen Delta-Distribution ist das letzte Integral gleich 1, wenn die Ladung  $q_i$  in  $V$  liegt und es verschwindet, wenn sie außerhalb liegt. Folglich erhalten wir

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i: \mathbf{r}_i \in V} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} q(V), \quad (1.19)$$

wobei  $q(V)$  die gesamte in  $V$  enthaltene elektrische Ladung bezeichnet. Der gesamte durch  $\partial V$  strömende Fluss der elektrischen Feldstärke, oft als *elektrischer Kraftfluss* bezeichnet, ist demnach proportional zur Ladung in  $V$ .

Wie sieht nun das elektrische Feld einer beliebigen Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$  aus? Die elektrische Ladungsdichte ist so definiert, dass für jedes Raumgebiet  $V$

$$q(V) = \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (1.20)$$

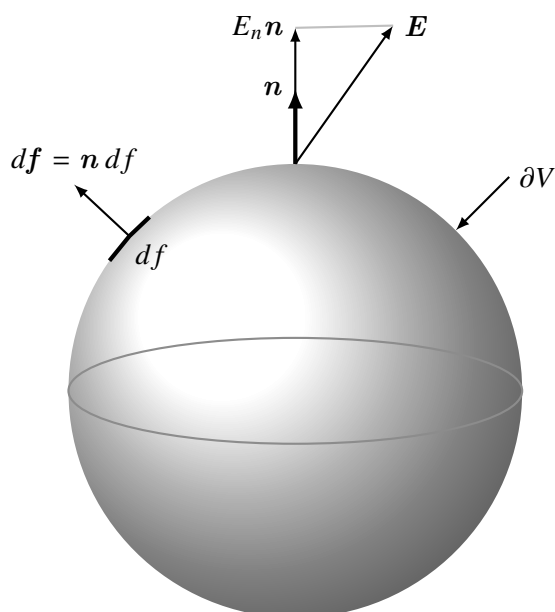


Abbildung 1.7: Der Fluss des elektrischen Feldes durch  $\partial V$  misst die Ladung in  $V$ .

die in  $V$  enthaltene Ladung ist. Wir zerlegen  $V$  in viele kleine disjunkte Teilgebiete,

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N, \quad V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j,$$

und schreiben die Ladung  $q(V)$  als Summe der Ladungen in den Teilgebieten

$$q(V) = \sum_i q(V_i) = \sum_i \int_{V_i} \rho(\mathbf{r}) d^3r.$$

Wir wählen die Volumen der Teilgebiete  $V_i$  so klein, dass die darin enthaltenen Ladungen  $q(V_i)$  als Punktladungen betrachtet werden können. Dies setzt voraus, dass der Ort  $\mathbf{r}$ , wo das elektrische Feld gemessen wird, weit weg von  $V_i$  ist. Etwas genauer: Ist  $\mathbf{r}_i \in V_i$  und  $d_i$  der „Durchmesser“ von  $V_i$ , dann muss  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \gg d_i$  gelten.

Nach dem Superpositionsprinzip ist das elektrische Feld aller „Punktladungen“  $q(V_i)$  gleich der Summe der elektrischen Felder der einzelnen „Punktladungen“,  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  mit

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q(V_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \int_{V_i} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} d^3r' \quad \text{für } d_i \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|.$$

Nun machen wir den Grenzübergang  $|V_i| \rightarrow 0$ , wobei die  $q(V_i)$  in der Tat zu Punktladungen werden, und erinnern uns daran, dass  $\mathbf{r}_i$  in  $V_i$  liegt. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung konvergiert die Riemannsche Summe gegen das entsprechende Integral und wir erhalten

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (1.21)$$

Die obige Bedingung  $d_i \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$  bedeutet nun, dass  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  gelten muss. Wir wollen noch einsehen, dass wir für stetige Ladungsdichten diese Einschränkung fallen lassen können. Dazu bestimmen wir den Beitrag der Ladungen in der Umgebung des Ortes  $\mathbf{r}$  zum Integral (1.21). Wir dürfen  $\mathbf{r} = 0$  annehmen und als Umgebung  $V_\epsilon$  eine Kugel mit Radius  $\epsilon$  um  $\mathbf{r} = 0$  wählen. Für stetige  $\rho$  können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden und finden

$$\int_{V_\epsilon} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r'} d^3r' = \rho(\bar{\mathbf{r}}) \int_{V_\epsilon} \frac{1}{r'} d^3r' = 4\pi\rho(\bar{\mathbf{r}}) \int_0^\epsilon dr' r'^2 = 2\pi\rho(\bar{\mathbf{r}})\epsilon^2,$$

wobei  $\bar{\mathbf{r}} \in V_\epsilon$  ist und  $r'$  die Länge von  $\mathbf{r}'$  bezeichnet. Verkleinern wir die Umgebung, d.h. lassen wir  $\epsilon \rightarrow 0$  streben, dann erhalten wir keinen Beitrag dieser Umgebung zum Integral für  $\Phi(0)$ . Also dürfen wir die Einschränkung  $\mathbf{r} \notin V$  im Integral (1.21) für  $\Phi$  oder im entsprechenden Integral für  $\mathbf{E}$  aufgeben,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.22)$$

Die Ladungsdichte von  $N$  Punktladungen an den Orten  $\mathbf{r}_i$  ist offensichtlich

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.23)$$

Für diese unstetige Verteilung liefert das Integral (1.21)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \int_V d^3r' q_i \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (1.24)$$

das korrekte elektrische Coulomb-Potential für Punktladungen. Deshalb sind (1.21,1.22) die Verallgemeinerung des Coulombgesetzes für Punktladungen auf beliebige Ladungsverteilungen. Für beliebige Ladungsverteilungen ist das elektrische Feld ein Gradientenfeld und damit verschwinden alle elektrischen Ringspannungen,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{für alle geschlossenen Wege.} \quad (1.25)$$

Dies bedeutet insbesondere, dass es in der Elektrostatik *keine geschlossenen Feldlinien* gibt. Gäbe es nämlich nur eine geschlossene Feldlinie, so wäre bei der Führung einer Testladung entlang dieser Linie die Arbeit ungleich Null.



### 1.3 Feldgleichungen der Elektrostatik

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  ist durch sein Wirbelfeld  $\nabla \times \mathbf{E}$  und sein Quellenfeld  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Für Punktladungen ist es wirbelfrei mit Quellen an den Positionen der Punktladungen. Wegen des Superpositionsprinzipes gelten diese Aussagen auch für beliebige Ladungsverteilungen  $\rho(\mathbf{r})$ . Davon wollen wir uns aber noch direkt überzeugen. Für beliebige Ladungsdichten ist das elektrische Feld durch das Integral (1.22) eindeutig bestimmt und wir wählen diese Integraldarstellung als Ausgangspunkt. Wegen  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  ist  $\mathbf{E}$  wirbelfrei,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (1.26)$$

Für das Quellenfeld finden wir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Damit finden wir als zweite Bestimmungsgleichung für  $\mathbf{E}$  die partielle Differentialgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.27)$$

Die Gleichungen (1.26,1.27) sind die *Feldgleichungen der Elektrostatik*. Die erste Gleichung (1.26) heißt auch homogene Gleichung, die zweite Gleichung (1.27) wegen des Quellterms auf der rechten Seite inhomogene Gleichung. Diese Feldgleichungen sind partielle Differentialgleichungen, die das Feld lokal bestimmen<sup>9</sup>. Das Grundproblem der Elektrostatik ist, aus einer gegebenen Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  das Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  zu berechnen.

In einigen Darstellungen der Elektrostatik werden diese beiden Grundgleichungen in den Vordergrund gestellt. Aus ihnen kann man natürlich wieder die allgemeine Lösung konstruieren: Jedes wirbelfreie Vektorfeld ist ein Gradientenfeld, d.h. es gibt ein Potential  $\Phi$  mit  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ . Damit wäre die homogene Feldgleichung bereits gelöst. Setzen wir diese Lösung der homogenen Gleichung in die inhomogene Gleichung (1.27) ein, so erhalten wir die wichtige *Poisson-Gleichung*

$$-\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \quad (1.28)$$

Um diese inhomogene elliptische partielle Differentialgleichung zu lösen, beschafft man sich zuerst eine Greenfunktion von  $-\Delta$ , d.h. eine Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , welche

$$-\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.29)$$

<sup>9</sup>für eine eindeutige Festlegung der Lösung benötigt man noch die Randbedingungen, siehe unten.

erfüllt. Eine Greenfunktion ist also eine Lösung von (1.28) für eine Punktquelle der Ladung 1. Vermittels der Greenfunktion kann man nun eine Lösung von (1.28) konstruieren,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'). \quad (1.30)$$

Dies ist leicht zu beweisen,

$$-\Delta\Phi(\mathbf{r}) = - \int d^3r' \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}).$$

Von unseren obigen Resultaten über das Potential wissen wir natürlich bereits, dass

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.31)$$

das Potential für eine Punktladung, und damit eine Greenfunktion ist. Deshalb ist eine Lösung von (1.28)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.32)$$

Dies ist allerdings noch nicht die allgemeine Lösung von (1.28). Um eine solche zu finden, müssen wir eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung  $\Delta\Phi_h = 0$  zu  $\Phi$  addieren. Damit lautet die allgemeine Lösung von (1.28)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \Phi_h(\mathbf{r}), \quad \Delta\Phi_h = 0. \quad (1.33)$$

Die harmonische Funktion  $\Phi_h$  wird durch die physikalischen Randbedingungen eindeutig bestimmt.

Wir fassen zusammen: Die differentiellen *Grundgleichungen der Elektrostatik* lauten

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (1.34)$$

Diese sind äquivalent zu den Integralformen

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \, d\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} q(V) \quad \text{und} \quad \oint \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0. \quad (1.35)$$

Die homogene Gleichung in (1.34) wird durch Einführung des Potentials  $\Phi$  gelöst. Die verbleibende inhomogene Gleichung für  $\Phi$  ist die Poisson-Gleichung mit der Lösung (1.33).

### 1.3.1 Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

Wir werden nun das Potential und das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) \implies q = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad (1.36)$$

bestimmen. Aus Symmetriegründen weist das elektrische Feld in Normalenrichtung  $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ . Die erste Gleichung in (1.35) vereinfacht sich zu

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}, \quad q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr',$$

so dass man für das elektrische Feld die Bestimmungsgleichung

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} \quad (1.37)$$

erhält, wobei  $q(r)$  die Ladung innerhalb einer (gedachten) Kugel vom Radius  $r$  bezeichnet. Insbesondere für eine homogen geladene Kugel mit Ladungsdichte

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r = |\mathbf{r}| < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

gilt  $q(r) = (r/R)^3 q$  für  $r < R$  und  $q(r) = q$  für  $r > R$ . Dabei bezeichnet  $q$  die Gesamtladung der Kugel. Deshalb ist das elektrische Feld

$$E_r(r) = \begin{cases} qr/(4\pi\varepsilon_0 R^3) & r < R \\ q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & r > R. \end{cases} \quad (1.38)$$

Das Potential  $\Phi$  hängt aus Symmetriegründen ebenfalls nur vom Radius ab und

$$E_r(r) = -\frac{d\Phi(r)}{dr}. \quad (1.39)$$

Die Lösung außerhalb der Kugel ist

$$\Phi(r > R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (1.40)$$

wobei die Integrationskonstante wegen unserer Normierungsbedingung  $\Phi(\infty) = 0$  wegfällt. Außerhalb der Kugel ändert sich das Feld nicht, wenn wir bei gleich bleibender Ladung die Kugel verkleinern. Das Feld ist *identisch zum Feld einer Punktladung im Kugelzentrum*. Innerhalb der Kugel ist

$$\Phi(r < R) = -\frac{1}{6\varepsilon_0} \rho_0 r^2 + c = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^3} + c. \quad (1.41)$$

Für beschränkte Ladungsdichten ist das elektrische Feld stetig und entsprechend das Potential differenzierbar. Dies legt die Integrationskonstante  $c$  fest und wir erhalten

$$\Phi(r < R) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (1.42)$$

Die Ladungsverteilung, das elektrische Feld und Potential einer homogen geladenen Kugel sind in der Abbildung 1.8 gezeigt.

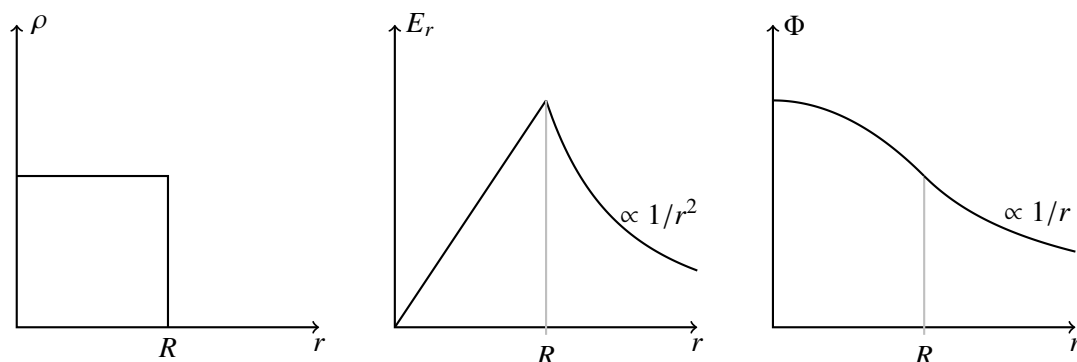


Abbildung 1.8: *Ladungsverteilung  $\rho(r)$ , Feldstärke  $E_r(r)$  und Potential  $\Phi(r)$  einer homogen geladenen Kugel.*

Ist dagegen die Ladung gleichmäßig auf einer (unendlich dünnen) *Kugelschale* vom Radius  $R$  verteilt, wie es bei idealen Leitern der Fall ist, dann findet man mit der ersten Gleichung in (1.35) ein verschwindendes Innenfeld,

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ q/(4\pi\epsilon_0 r^2) & r > R. \end{cases} \quad (1.43)$$

Mit Messungen außerhalb der Kugel kann man nicht entscheiden, ob die Ladungen in der Kugel homogen verteilt sind oder gleichmäßig auf der Kugeloberfläche sitzen.

## 1.4 Energie des elektrostatischen Feldes

Wir wollen zuerst die Frage beantworten, was die Energie eines geladenen Testteilchens in einem gegebenen elektrischen Feld ist. Wir nehmen an, das elektrische Feld sei lokalisiert. Dann dürfen wir das elektrostatische Potential im Unendlichen auf Null normieren,  $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ . Wir bringen eine Testladung aus dem Unendlichen an den Ort  $\mathbf{r}$ . Dabei müssen wir die Arbeit

$$A = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q\Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (1.44)$$

verrichten. Hier ist  $C$  irgendein Weg, der aus dem Unendlichen nach  $\mathbf{r}$  führt. Nun bewegen wir  $N$  Testladungen<sup>10</sup> aus dem Unendlichen an die Orte  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ . Die verrichtete Arbeit ist

$$A = \sum_{i=1}^N q_i \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) = \sum_i q(V_i) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) = \sum_i \int_{V_i} d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i).$$

Hier ist  $V_i$  ein kleines Volumen, das genau die Ladung am Ort  $\mathbf{r}_i$  enthält. Da  $\mathbf{r}_i$  in  $V_i$  liegt, erhalten wir im Grenzfall einer Ladungsverteilung für die Energie dieser Ladungsverteilung in einem *äußeren elektrischen Feld*

$$U = A = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (1.45)$$

Für eine Punktladung ist dieses Resultat identisch mit (1.44).

Nun wollen wir uns von der Testteilchenapproximation lösen und bestimmen die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung in ihrem eigenen Feld. Dazu bringen wir zuerst die Ladung  $q_2$

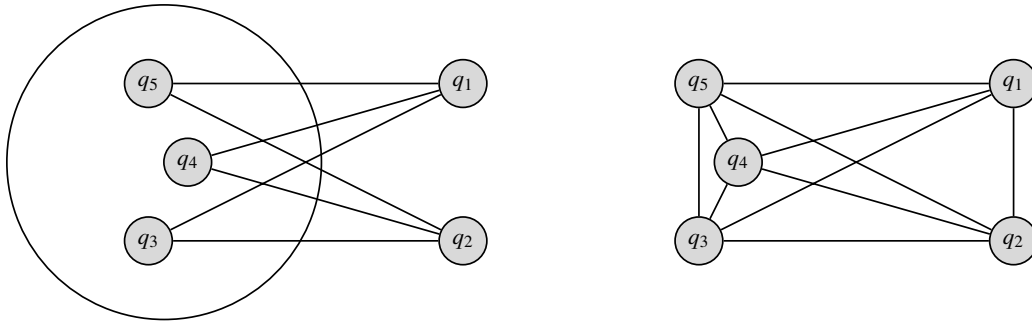


Abbildung 1.9: Energie von Testteilchen im äußeren Feld (linkes Bild) und Gesamtenergie von wechselwirkenden geladenen Teilchen (rechtes Bild).

aus dem Unendlichen in die Nähe von  $q_1$ , danach  $q_3$  aus dem Unendlichen in die Nähe von  $q_1$  und  $q_2$  usw. Es sei  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  die Energie von  $N$  Punktladungen, die an den Orten  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  ruhen. Nun transportieren wir eine weitere Punktladung  $q_{N+1}$  aus dem Unendlichen in die Nähe der vorhandenen  $N$  Punktladungen. Die Energie des aus  $N + 1$  Teilchen bestehenden Systems ist dann

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N+1}) = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) + \frac{q_{N+1}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{N+1}|}.$$

Mit  $U_1 = 0$  können wir diese Induktionsformel lösen und finden

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.46)$$

<sup>10</sup>Die Ladungen der Teilchen seien so klein, dass sie weder das gegebene elektrische Feld ändern noch gegenseitig wechselwirken.

Um die Energie einer kontinuierlichen Ladungsverteilung  $\rho$  zu finden, teilen wir das Gebiet  $V$ , welches die Ladungen enthält, in kleine Teilgebiete  $V_i$  auf. Wie früher sei  $q(V_i)$  die in  $V_i$  enthaltene Ladung. Wir dürfen  $q(V_i)$  als Punktladung behandeln und obiges Resultat anwenden. Dies führt auf

$$U \approx \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q(V_i)q(V_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{\int_{V_i} d^3r \rho(\mathbf{r}) \int_{V_j} d^3r' \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ \approx \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.47)$$

Lassen wir die Volumen der Teilgebiete gegen Null streben, dann wird das Resultat exakt, solange die Ladungsverteilungen stetig sind.

Mit (1.32) wird (1.47) zu

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \Phi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}). \quad (1.48)$$

Im Gegensatz zu (1.45) ist hier  $\Phi$  das durch  $\rho$  erzeugte Potential und nicht ein externes Potential; dieser Unterschied führt zu dem relativen Faktor 1/2 verglichen mit (1.45).

Zur weiteren Umformung der Energie benutzen wir die Poisson-Gleichung  $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon_0$ :

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \Phi \Delta\Phi = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.49)$$

Hier haben wir die bei der partiellen Integration auftretenden Randterme vernachlässigt. Dies ist für lokalisierte Ladungsverteilungen erlaubt. Die Form (1.49) legt nahe,

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \quad (1.50)$$

als *Energiedichte* des elektrischen Feldes zu interpretieren.

### 1.4.1 Probleme mit der Selbstenergie

Für unstetige Verteilungen macht (1.47) im Allgemeinen keinen Sinn. Zum Beispiel folgt für Punktladungen aus (1.47) die Formel (1.46), aber ohne die Einschränkung  $i \neq j$  in der Summe. Damit ist die Energie *einer* Punktladung in ihrem eigenen Feld schon unendlich. Um eine Punktladung zu erzeugen, braucht es in der klassischen Elektrodynamik unendlich viel Energie. Dieses Problem der *unendlichen Selbstenergie* taucht im modifizierten Gewand in der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes wieder auf.

Das Problem kann anhand der homogen geladenen *Kugel* studiert werden. Die Energiedichte des Feldes (1.38) ist

$$u(r) = \begin{cases} (qr/4\pi\epsilon_0 R^3)^2 & r < R \\ (q/4\pi\epsilon_0 r^2)^2 & r > R \end{cases}$$

und entsprechend ist die Feldenergie

$$U = 2\pi\epsilon_0 \int u(r)r^2 dr = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.51)$$

Für eine punktförmige Kugel  $R \rightarrow 0$  divergiert die Selbstenergie der geladenen Kugel.

Für eine homogen geladene *Kugelschale* ist die Feldenergie

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{q^2}{r^4} r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.52)$$

Genauso wie für die homogen geladene Kugel divergiert die Feldenergie für  $R \rightarrow 0$ . Sie ist gleich der Ruheenergie des Elektrons,  $U = m_e c^2$ , wenn

$$R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2m_e c^2} = 1.4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \quad (1.53)$$

Das Doppelte von  $R$  bezeichnet man als *klassischen Elektronenradius*,

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2,818\,375\,516\,10^{-15} \text{ m}. \quad (1.54)$$

## Kapitel 2

# Randwertprobleme der Elektrostatik

Ein elektrisches Feld verändert sich beim Einbringen von Körpern, weil sich durch Einwirkung des Feldes in bzw. auf den Körpern Ladungsverteilungen bilden (Influenz), die ihrerseits ein Feld erzeugen, welches sich dem vorher schon vorhandenen  $\mathbf{E}$ -Feld überlagert.

### 2.1 Ideale Leiter im elektrischen Feld

Metalle sind dadurch ausgezeichnet, dass in ihnen stets eine sehr große Anzahl von Elektronen nahezu ungehindert durch das gesamte Metall wandern können. Diese so genannten *Leitungselektronen* verursachen die elektrische Leitfähigkeit. Wenn im Metall anfangs ein elektrisches Feld vorhanden ist, dann werden die Leitungselektronen von diesem beschleunigt. Ihre Verteilung wird sich unter dem Einfluss von  $\mathbf{E}$  so lange ändern, bis  $\mathbf{E}$  selbst Null geworden ist. Die beweglichen Ladungen ordnen sich nach kurzer Zeit so an, dass das von ihnen erzeugte Feld das von außen ins Metall eindringende Feld kompensiert. Deshalb ist im statischen Fall das elektrische Feld in einem *idealen Leiter* stets Null und wegen  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  das Potential konstant.

Wir denken an die einfachsten elektrostatischen Versuche: Ein metallischer Leiter beliebiger Gestalt, ursprünglich isoliert aufgestellt, werde

1. an eine bekannte Spannung  $V$  (gegen Erde) gelegt oder
2. mit einer bekannten Ladung  $q$  geladen.

Gesucht wird das Feld außerhalb des idealen Leiters. Wir beschreiben es durch das zur Feldstärke gehörende Potential  $\Phi$ , das im Unendlichen auf Null normiert sei. Ausserhalb des Leiters gilt  $\Delta\Phi = 0$ . Auf der Oberfläche und im Innern ist  $\mathbf{E} = 0$  oder  $\Phi = V = \text{const.}$  Für den Sonderfall einer Kugel vom Radius  $R$  hat die hier in Betracht kommende Lösung der Differentialgleichung  $\Delta\Phi = 0$  die Form

$$\Phi = \frac{RV}{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \frac{RV}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{für} \quad r > R. \quad (2.1)$$



Sei  $S$  eine die geladene Kugel umschließende Sphäre, dann ist

$$q = \varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi\varepsilon_0 R V,$$

welches

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad \text{und} \quad E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad r > R \quad (2.2)$$

für eine ideal leitende Kugel der Ladung  $q$  liefert (siehe auch (1.43)). Das äußere Feld ist identisch zum Feld einer Punktladung im Zentrum der Kugel mit derselben Ladung. Wegen

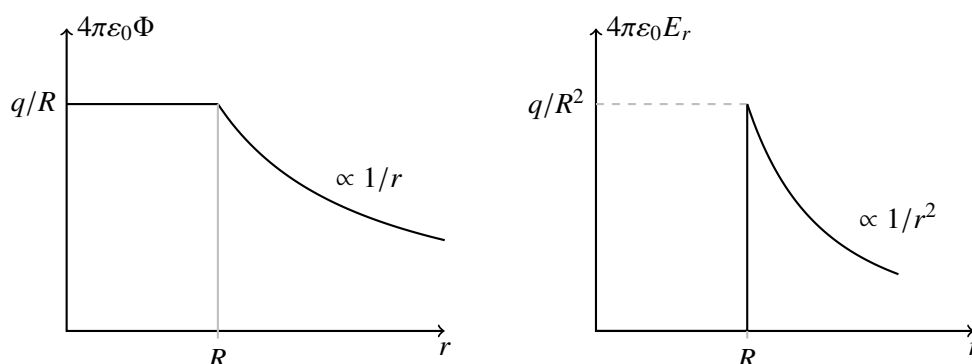


Abbildung 2.1: Das Potential und Radialkomponente des elektrischen Feldes einer ideal leitenden geladenen Kugel.

$$\rho(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \partial_r (r^2 E_r) = \frac{1}{4\pi r^2} \partial_r (q\theta(r - R)) = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r - R) \quad (2.3)$$

sitzt die gesamte Ladung eines idealen Leiters auf der Leiteroberfläche. Deshalb führt man die *Flächenladungsdichte* ein:  $\sigma \Delta f$  ist die im Oberflächenelement  $\Delta f$  enthaltene Ladung. Die Kugeloberfläche hat den Flächeninhalt  $4\pi R^2$  und entsprechend ist  $\sigma = q/4\pi R^2$ . Die Normalenkomponente des elektrischen Feldes  $E_r$  an der Oberfläche ist proportional zur Flächenladungsdichte,  $E_r = \sigma/\varepsilon_0$ . Dies ist auch für beliebige Leiteroberflächen der Fall, wie wir gleich sehen werden.

### 2.1.1 Randbedingungen für Metalle

In einem Metall verschwindet das elektrische Feld und  $\Phi$  ist konstant. Deshalb ist die Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche, die von den elektrischen Feldlinien senkrecht geschnitten wird. Dies kann man auch mit Hilfe der homogenen Gleichung (1.34) direkt beweisen: Dazu bewege man eine Einheitsladung entlang eines Weges wie in Abb. 2.2. Da die Ringspannung verschwindet und im Leiter  $\mathbf{E} = 0$  ist, ergibt sich

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \sim l t \cdot \mathbf{E}_{\text{außen}},$$

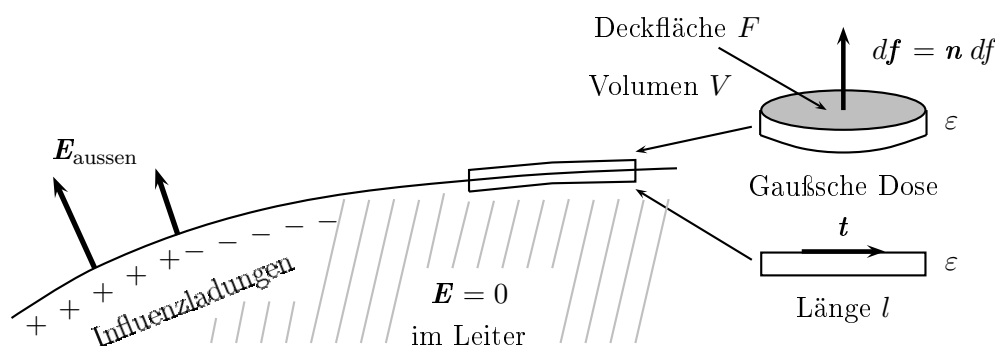


Abbildung 2.2: Ein Vakuumbereich durch Metall begrenzt.

wobei wir die Wegstücke senkrecht zur Oberfläche beliebig kurz wählten, damit sie keinen Beitrag zur Ringspannung geben. Da dies für beliebige Wege gilt, verschwindet die tangentielle Komponente des Außenfeldes,

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{\text{außen}} = 0 \quad \text{auf der Leiteroberfläche,} \quad (2.4)$$

d.h. das  $\mathbf{E}$ -Feld ist senkrecht zur Leiteroberfläche.

Bei der leitenden Kugel sprang die Normalkomponente des elektrischen Feldes beim Übergang vom Leiter ins Vakuum. Der Sprung kann mit der auf der Leiteroberfläche induzierten Influenzladung in Verbindung gebracht werden. Zum Beweis führt man eine „Gaußsche Dose“ ein, deren Deckfläche infinitesimal von der Grenzfläche entfernt im Vakuum und deren Grundfläche ebenfalls infinitesimal von der Grenzfläche im Metall verläuft, siehe Abb. 2.2. Die elektrische Ladung in der Dose ist gleich der Flächenladungsdichte  $\sigma(\mathbf{r})$  multipliziert mit der Dosedeckfläche. Mit der inhomogenen Grundgleichung (1.35) finden wir

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \rho_{\text{außen}} \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_F \sigma d\mathbf{f}.$$

Es folgt unmittelbar, dass

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\text{außen}} = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \quad \mathbf{r} \in \text{Metalloberfläche.} \quad (2.5)$$

Die Bedingungen (2.4,2.5) sind wegen  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  äquivalent zu

$$\Phi = \text{const.} \quad \text{und} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{auf der Leiteroberfläche.} \quad (2.6)$$

In den Anwendungen<sup>1</sup> sind meistens die Potentialwerte auf den einzelnen Metallkörpern bekannt. Dann stellt sich das folgende mathematische Problem:

<sup>1</sup>Man denke nur an Kondensatoren.

Gegeben seien  $N$  Metallkörper, welche die durchschnittsfremden Gebiete  $L_i$  ausfüllen und Oberflächen  $\partial L_i$  haben, siehe Abb. 2.3. Auf den Oberflächen aller Leiter ist das Potential konstant und

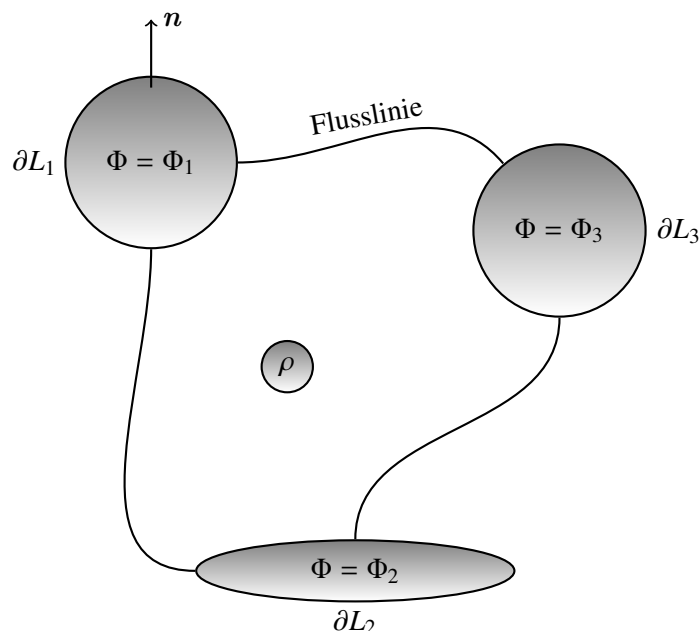


Abbildung 2.3: Das Dirichlet-Problem in Anwesenheit von idealen Leitern und Ladungen.

damit ergibt sich ein *Potentialproblem mit Randbedingungen*, auch Randwertproblem genannt:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} && \text{außerhalb der Leiter} \\ \Phi(\mathbf{r})|_{\partial L_i} &= \Phi_i = \text{const.} && \text{auf den Leiteroberflächen.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die Suche von Lösungen einer (elliptischen) Differentialgleichung bei vorgegebenen Werten auf Rändern heißt *Dirichlet-Problem*. Wir werden zeigen, dass das vorliegende Dirichlet-Problem eine eindeutige Lösung hat. Aus dem eindeutigen  $\Phi$  kann man dann mit der Formel (2.6) die Oberflächenladungen berechnen.

### 2.1.2 Eindeutigkeit der Lösung

Es seien  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  zwei Lösungen des Randwertproblems (2.7) und  $V$  das Raumgebiet *außerhalb der Leiter*. Für die Differenz  $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$  folgt dann

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{in } V \quad \text{und} \quad \Psi|_{\partial V} = 0. \quad (2.8)$$

Der Rand  $\partial V$  des Raumbereichs ist die Vereinigung der Ränder  $\partial L_i$  der Leiter. Im Integral

$$\int_V d^3r (\Psi \Delta \Psi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Psi) = \int_V d^3r \nabla \cdot (\Psi \nabla \Psi) = - \sum_i \oint_{\partial L_i} df \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad (2.9)$$

verschwindet die rechte Seite, da  $\Psi$  auf allen Leiteroberflächen verschwindet. Das negative Vorzeichen in der letzten Gleichung berücksichtigt, dass die Normalenvektoren  $\mathbf{n}$  in das Gebiet  $V$  hineinzeigen. Wegen  $\Delta \Psi = 0$  im Gebiet  $V$  außerhalb der Leiter, ist

$$\int_V d^3r \nabla \Psi \nabla \Psi = 0.$$

Also verschwindet  $\nabla \Psi$  in  $V$ , das heißt,  $\Psi$  ist konstant. Die Konstante muss Null sein wegen der Randbedingungen für  $\Psi$ . Damit wäre die Eindeutigkeit bewiesen.

Sind anstelle der Potentialwerte die Ladungsdichten auf den Leiteroberflächen vorgegeben, dann muss man das folgende Randwertproblem lösen:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} && \text{außerhalb der Leiter} \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{r})|_{\partial L_i} &= -\frac{\sigma_i(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} && \text{auf den Leiteroberflächen.} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Die  $\sigma_i$  sind die auf den Rändern der Leiter sitzenden Flächenladungsdichten. Ähnlich wie das Dirichlet-Problem hat dieses so genannte *Neumann-Problem* eine eindeutige Lösung: Für gegebene  $\rho$  und  $\sigma_i$  ist das Potential bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

## 2.2 Die Methode der Spiegelladungen

Mit dieser Methode kann man für viele symmetrische Anordnungen von Punktladungen in Gegenwart von idealen Leitern das Potential auf einfache Art bestimmen.

### 2.2.1 Punktladung in der Nähe einer ebenen Metallplatte

Zur Illustration betrachten wir eine Punktladung in der Nähe einer geerdeten Metallplatte, siehe Abb. 2.4. Die Metallplatte teilt den Raum in zwei Hälften,  $x > 0$  und  $x < 0$ . Wir setzen eine punktförmig gedachte Ladung an die Stelle  $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_x$ , d.h. rechts von der Platte im Abstand  $r_0$ , und suchen das Potential im rechten Halbraum. Gesucht ist also eine Lösung von

$$\Delta \Phi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \text{für } x > 0, \quad \Phi(0, y, z) = 0. \quad (2.11)$$

Wir wissen bereits, dass die Lösung im rechten Halbraum die Form

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \Phi_h(\mathbf{r}), \quad \Delta \Phi_h = 0, \quad (2.12)$$

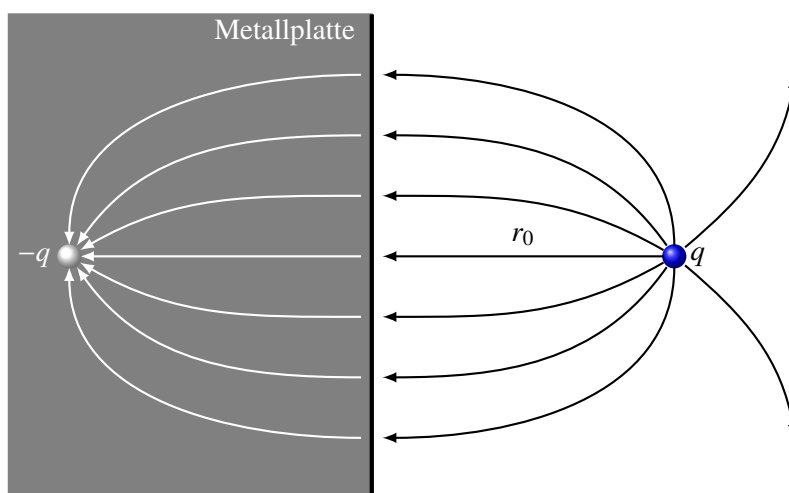


Abbildung 2.4: Bei der Bestimmung des Potentials einer Punktladung und geerdeten Metallplatte kann die Platte durch eine geeignet gewählte Spiegelladung (auch Bild- oder Scheinladung genannt) ersetzt werden.

haben muss. Wir suchen also eine in *diesem Gebiet* harmonische Funktion  $\Phi_h$ , so dass  $\Phi$  bei  $x = 0$  verschwindet. Um diese zu finden, nehmen wir die Platte weg und setzen dafür eine Spiegelladung an den an der Plattenebene gespiegelten Ort  $-\mathbf{r}_0$ . Diese soll die Ladung  $-q$  tragen. Aus Symmetriegründen muss das Potential von Ladung und Spiegelladung bei  $x = 0$  verschwinden, genauso wie das Potential von Ladung und Platte. Das Feld der Spiegelladung hat seine Quelle im linken Halbraum und deshalb erfüllt das Potential von Ladung *und* Spiegelladung,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|} \right), \quad (2.13)$$

im *rechten Halbraum* die Potentialgleichung (2.11) und verschwindet bei  $x = 0$ . Nach dem Eindeutigkeitssatz ist  $\Phi$  dann die Lösung des ursprünglichen Problems für eine Ladung  $q$  bei  $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_x$  und eine Metallwand bei  $x = 0$ . Die Feldstärke, die die Oberflächenladung im rechten Halbraum und somit auch am Ort der Ladung  $q$  erzeugt, ist identisch mit derjenigen, die von der Spiegelladung  $-q$  hervorgerufen wird. Auf  $q$  wirkt somit die auf die Leiteroberfläche hin gerichtete Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2r_0)^2}. \quad (2.14)$$

Die Erscheinung, dass ein elektrisch geladener Körper auf der Oberfläche eines benachbarten, ursprünglich ungeladenen Leiters Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens hervorruft, bezeichnet man als *elektrische Influenz*.

Die Kraft divergiert für  $r_0 \rightarrow 0$  und unsere Betrachtung versagt bei kleinen Entfernungen  $r_0$  der Probeladung von der Grenzfläche. Der Grund ist in der atomistischen Struktur der Materie und

der Ladungsträger zu suchen. Einem der Oberfläche näher als  $10 - 100$  Ångström kommenden Teilchen erscheint diese nicht mehr glatt. Das herannahende geladene Teilchen verschiebt die freien Ladungsträger des Leiters. Dieser Verschiebungseffekt erstreckt sich bei starker Annäherung des Teilchens nicht nur auf eine dünne Oberflächenschicht, sondern auch in die Tiefe des Metalls. Die Spiegelkraft bleibt selbst bei einem auftreffenden Teilchen endlich.

### 2.2.2 Punktladung in der Nähe einer leitenden Kugel

Als weitere Anwendung der Spiegelladungsmethode betrachten wir eine Punktladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r}_0$  außerhalb einer um den Koordinatenursprung zentrierten leitenden Kugel mit Radius  $R$ . Wir suchen das Potential  $\Phi$  mit  $\Phi(r = R) = 0$ . Falls eine einzige Spiegelladung  $q'$  genügt, dann muss deren Position  $\mathbf{r}_1$  aus Symmetriegründen auf dem Strahl vom Ursprung zur Ladung  $q$  liegen. Wir setzen also

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_0 = r_0\mathbf{n} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_1 = r_1\mathbf{n}.$$

Die Anordnung von Ladung und Spiegelladung ist in der Abbildung 2.5 gezeigt. Nun müssen wir  $q'$  und  $r_1$  so wählen, dass das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r}\mathbf{e}_r - r_0\mathbf{n}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r}\mathbf{e}_r - r_1\mathbf{n}|} \right) \quad (2.15)$$

auf der Kugeloberfläche verschwindet. Die Bestimmungsgleichung lautet

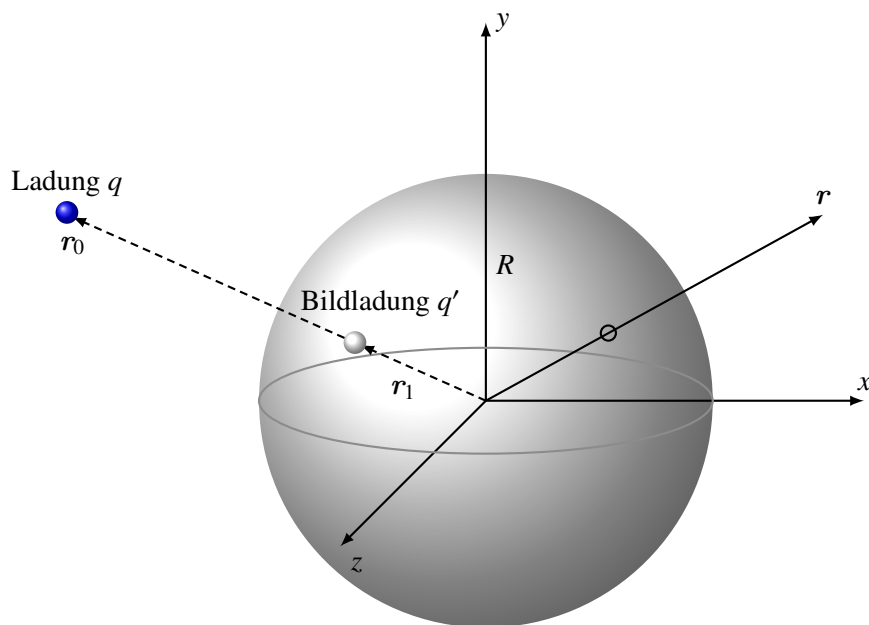


Abbildung 2.5: Bei der Bestimmung des Potentials einer Punktladung am Ort  $\mathbf{r}_0$  außerhalb einer geerdeten Metallkugel kann die Kugel durch eine Spiegelladung am Ort  $\mathbf{r}_1$  ersetzt werden.

$$0 = \frac{q}{R|\mathbf{e}_r - r_0\mathbf{n}/R|} + \frac{q'}{r_1|\mathbf{n} - R\mathbf{e}_r/r_1|},$$

und ist erfüllt für alle Werte von  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}$  falls gilt

$$\frac{q}{R} = -\frac{q'}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{r_0}{R} = \frac{R}{r_1}.$$

Damit ist die Spiegelladung und ihr Abstand vom Ursprung gleich

$$q' = -\frac{R}{r_0}q \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{R^2}{r_0}, \quad (2.16)$$

und das elektrostatische Potential hat die Form

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{\xi q}{|\mathbf{r} - \xi^2\mathbf{r}_0|} \right), \quad \xi = \frac{R}{r_0} < 1. \quad (2.17)$$

Bewegen wir die Ladung ins Unendliche,  $r_0 \rightarrow \infty$ , dann wandert die abnehmende Spiegelladung ins Zentrum der Kugel. Bewegen wir sie dagegen nahe an die Kugel heran, dann nimmt die Spiegelladung zu und wandert vom Zentrum weg in Richtung der Ladung. Kommt  $q$  der Kugel sehr nahe, dann strebt die Spiegelladung gegen  $-q$  und sitzt an dem an der Kugeloberfläche gespiegelten Ort.

Die durch die Ladung auf der Metalloberfläche induzierte *Flächenladungsdichte* ist

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{\xi(1-\xi^2)}{(1+\xi^2-2\xi\cos\theta_0)^{3/2}}, \quad (2.18)$$

wobei  $\theta_0$  der Winkel zwischen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}_0$  ist. In Abb. 2.6 ist die Flächenladungsdichte in Einheiten von  $-q/4\pi R^2$  geplottet. Die Influenzladungen auf der Kugeloberfläche sind in Richtung der Punktladung konzentriert. Je näher die Ladung der Kugel kommt, desto akzentuierter ist diese Konzentration.

Die Kraft auf die Punktladung ist gleich der Kraft zwischen Ladung und Spiegelladung. Der Abstand der Ladungen ist  $r_0 - r_1 = r_0(1 - R^2/r_0^2)$ . Gemäß Coulombs Kraftgesetz ist diese *anziehende Kraft*

$$|\mathbf{F}| = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|r_0 - r_1|^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} \frac{\xi^3}{(1-\xi^2)^2}, \quad \xi = \frac{R}{r_0}. \quad (2.19)$$

Weit weg von der Kugel, d.h. für kleine  $\xi$ , ist die Kraft invers proportional zu  $r_0^3$  und nahe der Kugel invers proportional zum quadrierten Abstand von der Kugeloberfläche.

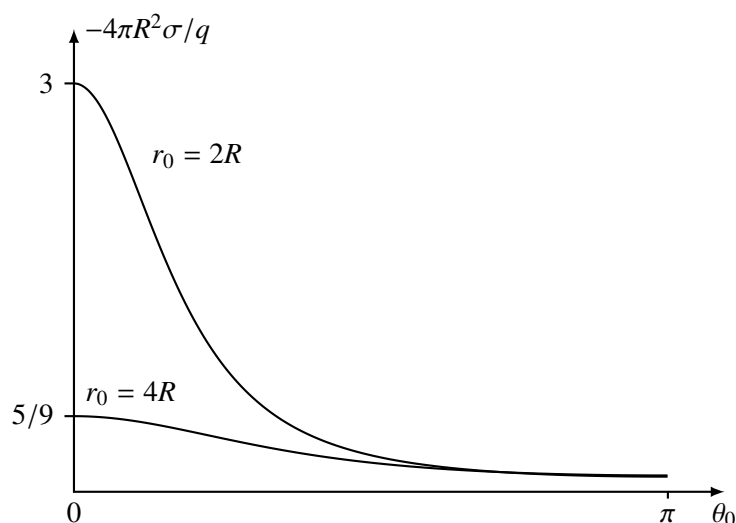


Abbildung 2.6: Oberflächenladungsdichte  $\sigma$  einer geerdeten Metallkugel induziert durch eine Punktladung  $q$  im Abstand  $r_0$  vom Zentrum der Kugel.  $\theta_0$  ist der Winkelabstand zwischen Punktladung und Ort auf der Kugeloberfläche.

### 2.2.3 Leitende Kugel im homogenen Feld

Wir betrachten nun eine *leitende Kugel* im homogenen Feld, dessen asymptotische Kraftlinien parallel zur  $x$ -Achse verlaufen. In Abwesenheit der Kugel sind Potential und homogenes Feld

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = -E_0x \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x. \quad (2.20)$$

Wir denken es uns entstanden durch die Superposition zweier Felder, dem einer fernen Ladung  $-q$  am Ort  $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_x$  und dem einer Ladung  $q$  am gespiegelten Ort  $-\mathbf{r}_0$ . Für große  $r_0$  ist das Potential der beiden Ladungen

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x+r_0)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x-r_0)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &\rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left( \frac{1}{\sqrt{1+2x/r_0}} - \frac{1}{\sqrt{1-2x/r_0}} \right) \rightarrow -\frac{qx}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad \text{für } r_0 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Um Übereinstimmung mit (2.20) herzustellen, muss mit  $r_0$  auch  $q$  anwachsen, so dass

$$\frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} = E_0 \quad (2.22)$$

konstant ist.



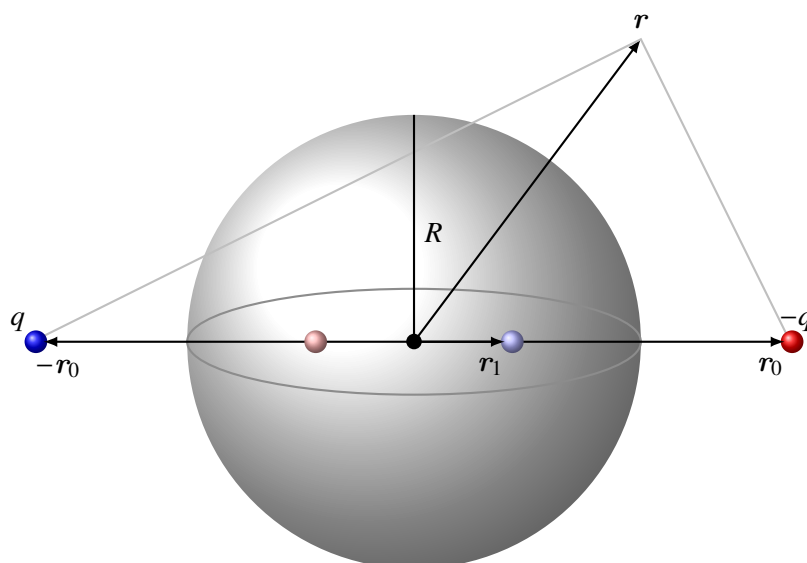


Abbildung 2.7: Zwei ins Unendliche rückende Ladungen  $\pm q$  und ihre Spiegelladungen in Bezug auf eine leitende Kugel vom Radius  $R$  erzeugen ein homogenes elektrisches Feld und einen elektrischen Dipol im Mittelpunkt der Kugel.

Nun berücksichtigen wir die leitende Kugel im zweiten Schritt. Auf ihrer Oberfläche muss das Potential verschwinden. Wie oben ersetzen wir die leitende Kugel durch zwei Spiegelladungen auf der Verbindungslinie zwischen den bereits vorhandenen Ladungen bei  $r_0$  und  $-r_0$ . Gemäß (2.16) sind die Spiegelladungen und deren Orte gegeben durch

$$q' = \frac{R}{r_0} q \quad \text{bei} \quad r_1 = \frac{R^2}{r_0} e_x \quad \text{und} \quad -q' \quad \text{bei} \quad -r_1.$$

Die Spiegelladungen  $\pm q'$  kommen sich nahe wenn die Ladungen  $\mp q$  auseinanderrücken und bilden im Grenzfall  $r_0 \rightarrow \infty$  einen elektrischen Dipol mit dem Moment

$$\mathbf{p} = 2r_1 q' = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0. \quad (2.23)$$

wobei wir im letzten Schritt von der Beziehung in (2.22) Gebrauch machten. Das von den

Spiegelladungen erzeugte Dipolfeld ist

$$\begin{aligned}\Phi_D &= \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1|} \right) \\ &= \frac{Rr_0E_0}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-r_1)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+r_1)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &\rightarrow \frac{Rr_0E_0}{2r} \left( \frac{1}{\sqrt{1-2xr_1/r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+2xr_1/r^2}} \right) \rightarrow E_0R^3 \frac{x}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

In der letzten Zeile haben nach der Taylorentwicklung  $r_1$  durch  $R^2/r_0$  ersetzt. Wir schließen, dass im homogenen Feld die Randwertaufgabe dadurch gelöst wird, dass wir im Mittelpunkt der Kugel einen virtuellen elektrischen Dipol mit endlichem Moment anbringen. Aus dem ursprünglich homogenen Feld entsteht dann das durch den Dipol gestörte Feld mit Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = E_0 \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) x. \quad (2.25)$$

Das entsprechende elektrische Feld hat die Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}. \quad (2.26)$$

Wie gefordert nimmt  $\Phi$  auf der Kugeloberfläche  $r = R$  den konstanten Wert 0 an. Die Influenzladung auf der Oberfläche ist

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta, \quad (2.27)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen der Richtung des elektrischen Feldes im Unendlichen und dem betrachteten Punkt auf der Kugeloberfläche bezeichnet. Das Oberflächenintegral dieser Ladungsdichte verschwindet und es gibt keinen Unterschied zwischen einer geladenen und einer ungeladenen isolierten Kugel. Die Feldlinien in der Umgebung einer leitenden Kugel im asymptotisch homogenen Feld sind in Abbildung (2.8) skizziert.

## 2.3 Die Methode der Greenschen Funktionen

Bisher haben wir das Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \text{in } V \quad \text{und} \quad \Phi(\mathbf{r})|_{\partial V} = 0 \quad (2.28)$$

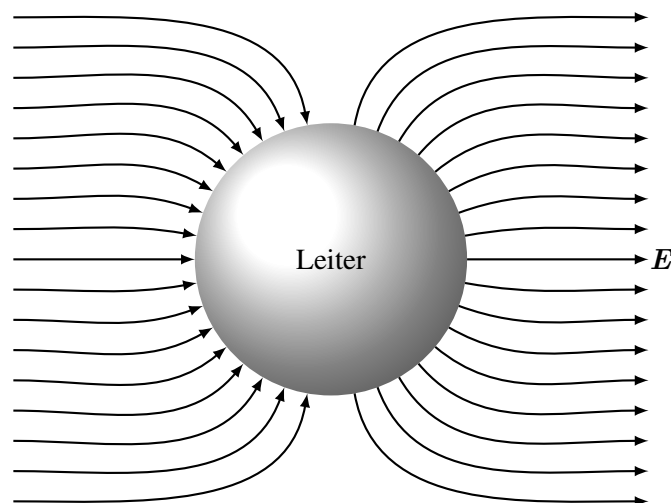


Abbildung 2.8: Eine leitende Kugel im homogenen elektrischen Feld.

für Punktladungen untersucht und für einige Fälle gelöst. Die spezielle Lösung für eine Einheitsladung mit Ladungsdichte  $\rho = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  heißt *Greensche Funktion*  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,

$$\Delta G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{in } V \quad \text{und} \quad G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = 0. \quad (2.29)$$

Die Greensche Funktion  $G_D$  für den Halbraum (2.13) und den Außenraum einer Kugel (2.17) haben wir mit der Spiegelladungsmethode berechnet. Weitere Beispiele werden Sie in den Übungen kennen lernen. Aus der Greenschen Funktion lässt sich nun die allgemeine Lösung von (2.28) gewinnen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'). \quad (2.30)$$

In Abschnitt 1.3 haben wir gezeigt, dass dieses  $\Phi$  tatsächlich die Poissongleichung erfüllt. Diese Lösung verschwindet auch auf der Leiteroberfläche, da  $G_D$  diese Eigenschaft hat. Deshalb ist  $\Phi$  die eindeutige Lösung des Randwertproblems (2.28).

Im Allgemeinen verschwindet das Potential auf den Leiteroberflächen allerdings nicht. Auch könnten anstelle der Potentialwerte Ladungsdichten auf den Leiteroberflächen vorgegeben sein. In jedem Falle hat im interessierenden Raumbereich  $V$  die Green-Funktion die Form

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \Delta G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (2.31)$$

mit einer harmonischen und symmetrischen Funktion  $G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Die Freiheit bei der Wahl dieser Funktion nutzt man aus, um die Randbedingungen zu realisieren. Dabei wird folgende *Greensche*

Identität gebraucht

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' (\Phi(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \Phi(\mathbf{r}')) \\ &= \int_V d^3 r' (\Phi(\mathbf{r}') \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' \Phi(\mathbf{r}')) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3 r' \Phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

um das Potential  $\Phi$  am Orte  $\mathbf{r} \in V$  durch die Ladungsverteilung innerhalb des Gebiets und seinen Werten auf dem Rand  $\partial V$  des Gebiets auszudrücken:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \left( \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right). \quad (2.32)$$

Bei der Herleitung dieser Formel wurde nirgendwo angenommen, dass  $\Phi$  auf  $\partial V$  konstant ist. Deshalb ist sie nicht nur für die Behandlung von idealen Leitern nützlich.

### 2.3.1 Dirichlet-Problem

Ist das Potential auf dem Rande  $\partial V$  bekannt, dann wählt man die auf dem Rande verschwindende Dirichlet-Greenfunktion  $G_D$  in (2.29). Dann gilt

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}'). \quad (2.33)$$

Verschwindet das Potential auf den Leiteroberflächen, dann vereinfacht sich diese Formel weiter auf das frühere Resultat (2.30). Gibt es in  $V$  keine elektrischen Ladungen, dann ist  $\Phi$  eine Lösung der Laplace-Gleichung (eine *harmonische Funktion*) und kann eindeutig aus ihren Randwerten rekonstruiert werden.

### Feld einer Ladungsverteilung in der Nähe einer leitenden Kugel

In (2.17) haben wir mit der Spiegelladungsmethode die Green-Funktion  $G_D$  für das Außengebiet einer Kugel vom Radius  $R$  bestimmt,

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - R^2\mathbf{r}'/r'^2|} \right). \quad (2.34)$$

Ihre Normalenableitung auf der Kugeloberfläche ist

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'} \Big|_{r'=R} = -\frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\xi}{R^2} \frac{\xi^2 - 1}{(1 + \xi^2 - 2\xi \cos \theta')^{3/2}},$$

wobei  $\xi = R/r$  und  $\theta'$  den Winkel zwischen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  bezeichnen. Mit Hilfe von (2.33) können wir nun das Feld einer Ladungsverteilung außerhalb der Kugel berechnen, wenn wir das Potential

auf der Kugeloberfläche kennen. Für eine leitende Kugel ist  $\Phi = \Phi_L$  konstant auf der Oberfläche und wegen

$$\oint df' \frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = 2\pi R^2 \oint d\theta' \sin \theta' \frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{R}{r}$$

ist das elektrostatische Potential außerhalb der Kugel

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \frac{R\Phi_L}{r}. \quad (2.35)$$

Es ist äquivalent zum Potential erzeugt von der Ladungsdichte  $\rho$ , seiner Spiegelladungsdichte innerhalb der Kugel und einer Punktladung  $4\pi\varepsilon_0 R\Phi_L$  im Ursprung.

### 2.3.2 Neumann-Problem

Ist die Normalenableitung des Potentials auf den Leiterrändern vorgegeben, dann wird man die Neumann-Greenfunktion  $G_N$  wählen, für die der zweitletzte Term in (2.32) konstant ist. Wegen des Gaußschen Satzes ist

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \nabla' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \oint_{\partial V} df' \frac{\partial G_N}{\partial n'} = \int_V d^3r' \Delta' G_N = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0},$$

falls  $\mathbf{r}$  in  $V$  liegt, und wir können deshalb nicht verlangen, dass die Normalableitung von  $G_N$  am Rand des Gebietes verschwindet. Aber wir können fordern, dass

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'} = -\frac{1}{\varepsilon_0 |\partial V|}, \quad |\partial V| = \text{Volumen von } \partial V, \quad (2.36)$$

gilt. Dann vereinfacht sich (2.32) zu

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi_0 = \int_V d^3r' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \varepsilon_0 \oint_{\partial V} df' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'}, \quad (2.37)$$

wobei  $\Phi_0$  das über die Leiteroberfläche gemittelte Potential bezeichnet,

$$\Phi_0 = \frac{1}{|\partial V|} \oint_{\partial V} df \Phi(\mathbf{r}). \quad (2.38)$$

Für ideale Leiter gilt (2.6) und das Außenpotential ist durch die Ladungsverteilung  $\rho$  außerhalb der Leiter und die Flächenladungsdichten auf den Leiteroberflächen bestimmt,

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi_0 = \int_V d^3r' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \oint_{\partial V} df' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}'). \quad (2.39)$$

Für Dielektrika muss man allerdings die allgemeinere Formel (2.37) benutzen.

## 2.4 Kapazitäten

Wie früher betrachten wir mehrere Leiter eingebettet in das Vakuum. Außerhalb der Leiter seien keine freibeweglichen Ladungsdichten. Die elektrischen Potentiale  $\Phi_{L_i}$  auf den Leitern  $\#i$  seien vorgegeben. Gesucht sind die Ladungen  $q_i$  auf den Leitern. Da die Grundgleichungen linear sind, können wir das Potential als Superposition von Fundamentallösungen  $\Phi_i(\mathbf{r})$  schreiben

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_{L_i} \Phi_i(\mathbf{r}). \quad (2.40)$$

Dabei ist  $\Phi_i$  die Lösung, die auf dem  $i$ 'ten Leiter den Wert 1 hat und auf den anderen Leitern verschwindet,

$$\Phi_i(\mathbf{r})|_{\partial L_j} = \delta_{ij}. \quad (2.41)$$

Die Ladung auf dem  $i$ 'ten Leiter ist dann gegeben durch

$$q_i = -\varepsilon_0 \oint_{\partial L_i} df \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sum_j C_{ij} \Phi_{L_j} \quad (2.42)$$

mit den *Kapazitätskoeffizienten*

$$C_{ij} = -\varepsilon_0 \oint_{\partial L_i} df \frac{\partial \Phi_j}{\partial n}. \quad (2.43)$$

In diesen Formeln sind die Normalableitungen in Richtung des Raumbereichs  $V$ , d.h. weg von den Leitern, zu wählen. Der Koeffizient  $C_{ij}$  misst die auf dem  $i$ 'ten Leiter induzierte Ladung, wenn alle Leiter, mit Ausnahme des  $j$ 'ten, geerdet sind. Die Kapazität ist also eine Ladung je Spannung und die entsprechende Einheit F[arad]=C/V wurde nach Michael Faraday benannt: Ein Kondensator mit einer Kapazität von einem Farad (F) kann durch das Aufladen auf eine Spannung von einem Volt (V) eine Ladung von einem Coulomb (C) speichern. Wäre die Spannung des  $j$ 'ten Leiters 1V und die auf dem  $i$ 'ten Leiter gespeicherte Ladung 1C, dann wäre  $C_{ij} = 1 \text{ F}$ .

Die elektrostatische Energie der Kapazitäten ergibt sich aus

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \nabla(\Phi \nabla \Phi) = -\frac{\varepsilon_0}{2} \sum_i \oint_{\partial L_i} df \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

und nimmt eine einfache Form an,

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_{L_i} q_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_{L_i} C_{ij} \Phi_{j,L}. \quad (2.44)$$

Als Anwendung berechnen wir nun die Kapazität von Kugel- und Plattenkondensatoren.

### 2.4.1 Kugelkondensator

Der Kugelkondensator besteht aus einer inneren Kugel mit Radius  $R_1$  und einer äußeren Kugelschale mit Innenradius  $R_2$ . Die Kugel trage die Ladung  $q$  und die Kugelschale die entgegengesetzte Ladung  $-q$ . Im Außenraum und in der Kugelschale verschwindet das Potential,  $\Phi_{L_2} = 0$ . Im Raum zwischen Kugel und Kugelschale ist

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (2.45)$$

In der leitenden Kugel ist das Potential konstant

$$\Phi(r) = \Phi_{L_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad r \leq R_1. \quad (2.46)$$

Man kann die Ladung  $q$  durch die Potentialdifferenz zwischen den Leitern ausdrücken,  $q = C(\Phi_{L_1} - \Phi_{L_2})$ , wobei  $C$  die oben eingeführte Kapazität  $C_{12}$  ist. Wegen

$$\Phi_{L_1} - \Phi_{L_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

ist diese gegeben durch

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (2.47)$$

Zur Bestimmung der Kapazität einer isolierten Kugel lassen wir den Radius  $R_2$  der Schale gegen

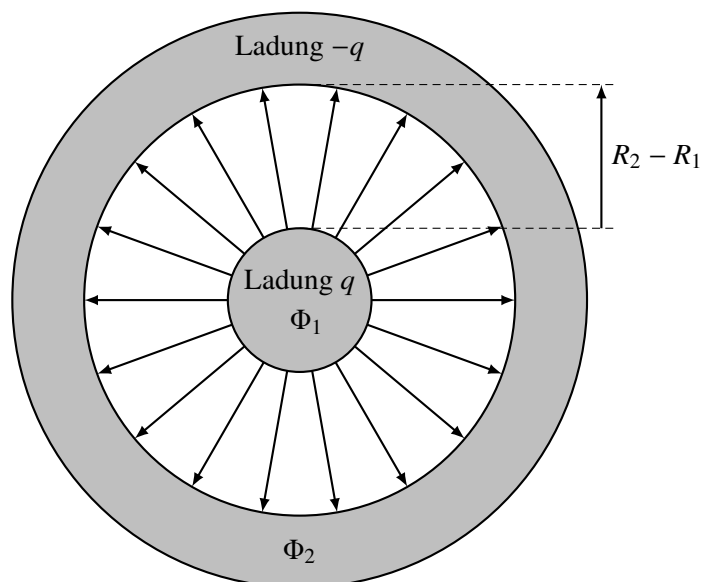


Abbildung 2.9: Zur Kapazität eines Kugelkondensators.

$\infty$  streben und finden für eine Kugel vom Radius  $R \equiv R_1$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R, \quad 4\pi\epsilon_0 = 1.11 \cdot 10^{-10} \text{ As/Vm}. \quad (2.48)$$

Die Kapazität einer Kugel ist also proportional zu ihrem Radius. Zur Illustration berechnen wir die Kapazität der Erde, die von einem elektrischen Feld umgeben ist. Es ist in ebenem Gelände senkrecht von oben nach unten gerichtet und hat im zeitlichen Mittel den Wert

$$|\mathbf{E}| \approx 130 \text{ Volt/m}.$$

Diese rührt von einer negativen Ladung

$$q = 4\pi\epsilon_0 R^2 |\mathbf{E}| \approx 5.9 \cdot 10^5 \text{ C}$$

auf der Erde, wobei wir für die Erdoberfläche  $4\pi R^2$  den Wert  $5.1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$  benutzten. Gegenüber dem Fixsternsystem hat unsere Erde mit dem Radius  $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$  die Kapazität von etwa  $700 \mu\text{F}$ .

Lassen wir in (2.47) die Radien von Kugel und Kugelschale bei festgehaltener Differenz  $R_2 - R_1 = d$  gegen Unendlich streben, dann finden wir die Kapazität

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1^2 + R_1 d}{d} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1^2}{d} \left(1 + \frac{d}{R_1}\right). \quad (2.49)$$

Für große Radien erhält man zwei leitende ebene Platten im Abstand  $d$ , d.h. einen *Plattenkondensator* mit Kapazität

$$C = \epsilon_0 \frac{F}{d}, \quad F = \text{Fläche des Plattenkondensators}. \quad (2.50)$$

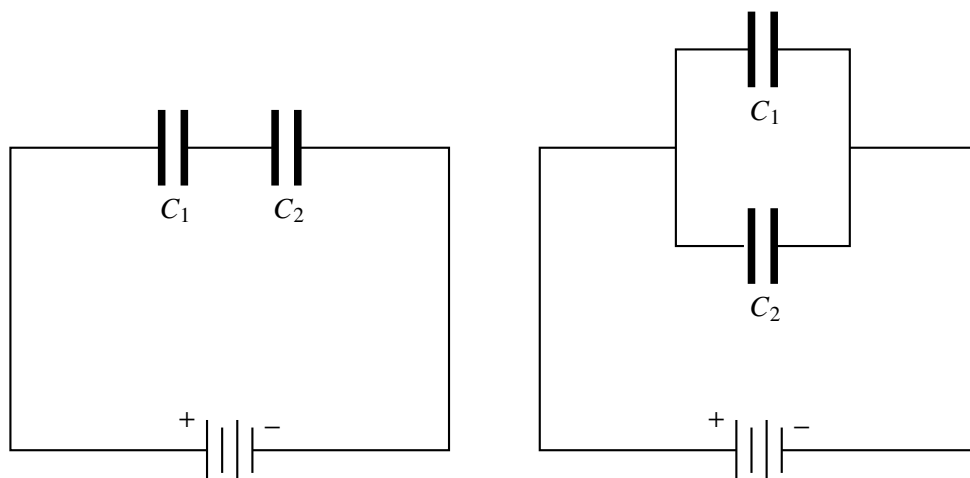
Die Zunahme der Kapazität mit der Plattenfläche wird bei Mehrplattenkondensatoren ausgenutzt. Eine Abart ist der abstimmbare Drehkondensator.

Wir notieren noch die Kapazität von zwei langen coaxialen Zylindern mit Radien  $R_1, R_2$  und Länge  $L$ ,

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\log(R_2/R_1)}. \quad (2.51)$$

Generell nimmt die Kapazität mit der Größe der Leiter zu. Kommen sich die Leiter näher, dann nimmt bei konstantem Feld ihre Potentialdifferenz ab und die Kapazität des Systems nimmt ebenfalls zu. Wir erwarten, dass das Einbringen eines Materials zwischen zwei Platten aufgrund der Influenz ebenfalls die Kapazität des Kondensators erhöht. Wir werden später auf diesen Punkt zurückkommen.





Abschließend notieren wir noch die Kapazität mehrerer Kondensatoren. Sind zwei Kondensatoren wie in der linken Abbildung in Reihe geschaltet, dann tragen beide die gleiche Ladung. Da die Gesamtspannung die Summe der Teilspannungen ist, gilt

$$\frac{1}{C_{\text{Reihe}}} = \frac{V}{q} = \frac{V_1}{q} + \frac{V_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \implies C_{\text{Reihe}} \leq \min(C_1, C_2). \quad (2.52)$$

Sind sie parallel geschaltet wie auf der rechten Seite der Abbildung, dann sind ihre Spannungen gleich und ihre Ladungen addieren zur Ladung des Systems, also

$$C_{\text{parallel}} = \frac{q_1 + q_2}{V} = C_1 + C_2 \implies C_{\text{parallel}} \geq \max(C_1, C_2). \quad (2.53)$$

## Kapitel 3

# Multipole und spezielle Funktionen

Wir betrachten eine statische und lokalisierte Ladungsverteilung. Diese sei nur innerhalb einer Kugel vom Radius  $R$  um den Ursprung ungleich Null. Für  $r > R$  kann das Potential  $\Phi$  nach Potenzen von  $R/r$  entwickelt werden. Diese Entwicklung wird im Folgenden abgeleitet.

Ausgangspunkt der Entwicklung ist das von der Ladungsverteilung erzeugte Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.1)$$

wobei wegen der Lokalisierung von  $\rho$  nur  $\mathbf{r}'$  mit Betrag  $r' < R$  zum Integral beitragen. Für  $r > R$  ist dann  $r' < r$  und wir dürfen das Coulomb-Potential in eine Taylor-Reihe nach  $r'/r$  entwickeln. Mithilfe der für  $0 \leq \xi < 1$  gültigen Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi}} = 1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 + \frac{5}{16}\xi^3 + \dots \quad (3.2)$$

erhalten wir, nachdem wir die Reihenglieder in Potenzen von  $r'/r$  entwickeln, folgende Reihendarstellung

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \frac{5(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^3 - 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')r^2 r'^2}{2r^7} + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Den Zähler im dritten Term können wir noch umformen:

$$3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 = (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) x_i x_j.$$

Hier und auch im Folgenden verwenden wir die Summenkonvention: Über alle Indizes, die zweimal in einem Produkt auftreten, wird summiert, in der obigen Formel also über  $i$  und  $j$ .

Wir führen nun folgende, die lokalisierte Ladungsverteilung charakterisierende Größen ein:

$$q = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad \text{Ladung} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{p} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \quad \text{Dipolmoment} \quad (3.5)$$

$$Q_{ij} = \int d^3r (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho(\mathbf{r}) \quad \text{Quadrupolmoment.} \quad (3.6)$$

Eingesetzt in (3.1) erhalten wir die gesuchte Reihenentwicklung für das Potential

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{Q}\mathbf{r})}{2r^5} + O(r^{-4}), \quad (3.7)$$

wobei  $\mathbf{Q} = (Q_{ij})$  der symmetrische und spurlose Quadrupoltensor ist. Das elektrische Feld  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  hat weit weg von der Quelle die Entwicklung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} + O(r^{-4}). \quad (3.8)$$

In großer Entfernung wirkt eine in einer Umgebung des Ursprungs lokalisierte Ladungsverteilung so, als ob sie aus einer im Ursprung befindlichen Punktladung der Stärke  $q$  besteht. Verschwindet die Gesamtladung  $q$  der Verteilung, dann beschreibt der führende Term einen elektrischen Dipol mit Moment  $\mathbf{p}$ .

### 3.1 Dipole und Quadrupole

**Das Dipolfeld:** Der zweite Term auf den rechten Seiten in (3.7) beschreibt das Dipolfeld. Es fällt für große Abstände mit einer Potenz von  $r$  schneller ab als das Coulomb-Feld. Der Name rührt daher, dass man 2 Punktladungen braucht, um einen Dipol zu erzeugen. In der Tat, für die leitende Kugel im konstanten elektrischen Feld erzeugten die nahe beieinander liegenden Spiegelladungen ein Dipolfeld. Sei also

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= q(\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \\ &\rightarrow -q\mathbf{a} \cdot \nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + O(a^2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

die Ladungsdichte zweier entgegengesetzt geladener Punktteilchen im Abstand  $a = |\mathbf{a}|$ . Nun führen wir den Limes  $a \rightarrow 0$  durch, wobei wir das Produkt  $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$  festhalten. Dann bleibt die Ladungsverteilung eines Dipols  $\mathbf{p}$  am Ort  $\mathbf{r}_0$ :

$$\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.10)$$

Das Potential des Dipols ist (siehe früher) gegeben durch

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (3.11)$$

Die Abbildung 1.5 zeigt das Feld und die Äquipotentialflächen eines Dipolfeldes.

**Das Quadrupolfeld:** Ein reines Quadrupolfeld kann, wie in Abb. (3.1) gezeigt, mit vier Punktladungen erzeugt werden:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r})/q &= \delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_1) + \delta(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_1) - \delta(\mathbf{r} - b\mathbf{e}_2) - \delta(\mathbf{r} + b\mathbf{e}_2) \\ &= \delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_1) + \delta(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_1) - 2\delta(\mathbf{r}) - \delta(\mathbf{r} - b\mathbf{e}_2) - \delta(\mathbf{r} + b\mathbf{e}_2) + 2\delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Erinnern wir uns hier an folgende Darstellung der zweiten Ableitung,

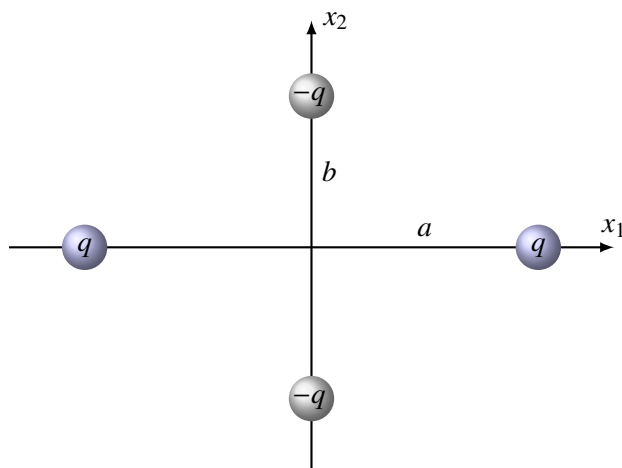


Abbildung 3.1: Vier benachbarte Punktladungen ohne Gesamtladung und Dipolmoment erzeugen ein Quadrupolfeld.

$$f''(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x - \epsilon) + f(x + \epsilon) - 2f(x)}{\epsilon^2}, \quad (3.13)$$

dann folgern wir, dass für  $a, b \rightarrow 0$  der Ausdruck für die Ladungsdichte gegen

$$\rho(\mathbf{r}) = q \left( a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta(\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

strebt. Beim Grenzübergang müssen die Größen  $qa^2$  und  $qb^2$  festgehalten werden, d.h. die Ladungen  $\pm q$  streben (dem Betrag nach) gegen Unendlich. Entsprechend erzeugen die vier Ladungen

das elektrische Potential

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left( a^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2(2x^2 - y^2 - z^2) - b^2(2y^2 - x^2 - z^2)}{r^5}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Die vier Ladungen haben weder eine Gesamtladung noch ein Dipolmoment. Deshalb verschwinden das Monopol- und Dipolfeld und man erhält ein reines Quadrupolfeld mit symmetrischem und spurlosen *Quadrupoltensor*:

$$\varphi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{Q}\mathbf{r})}{r^5}, \quad \mathbf{Q} = 2q \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 - 2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 - a^2 \end{pmatrix}.\quad (3.16)$$

Man kann sich noch kompliziertere Ladungsverteilungen ohne Gesamtladung, Dipol- und Quadrupolmoment beschaffen. Diese werden dann durch höhere Multipolmomente beschrieben.

## 3.2 Energie und Drehmoment von Multipolen

Die Ladungsdichte  $\rho$  sei wieder in einer Umgebung des Ursprungs lokalisiert. Ihre Energie im äußeren Feld beträgt

$$U = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}).\quad (3.17)$$

Wir entwickeln das äußere Potential für kleine Argumente und erhalten

$$\begin{aligned}U &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left( \Phi_{\text{ext}}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \Phi_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}}|_0 + \dots \right) \\ &= q \Phi_{\text{ext}}(0) + \mathbf{p} \cdot \nabla \Phi_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{6} \left( Q_{ij} + \delta_{ij} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) r^2 \right) \partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}}|_0 + \dots\end{aligned}\quad (3.18)$$

Der letzte Term proportional zum Integral über  $\rho r^2$  verschwindet, da  $\Delta \Phi_{\text{ext}}$  am Ursprung, wo keine Quellen von  $\Phi_{\text{ext}}$  sitzen, Null ist. Damit bleibt für das Wechselwirkungspotential

$$U = q \Phi_{\text{ext}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) - \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Big|_0 + \dots\quad (3.19)$$

Wir können daraus zum Beispiel die potentielle Energie zweier Dipole bestimmen. Der Dipol  $\mathbf{p}_1$  am Ort  $\mathbf{r}_1$  erzeugt am Aufpunkt  $\mathbf{r}_2$  das Feld

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{r}_{12} - \mathbf{p}_1 (r_{12})^2}{(r_{12})^5}, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|.$$

Die Wechselwirkungsenergie dieses Dipols mit einem zweiten Dipol  $\mathbf{p}_2$  am Ort  $\mathbf{r}_2$  ist

$$U_{12} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{(r_{12})^3} - 3 \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{(r_{12})^5} \right). \quad (3.20)$$

Die Kraft auf eine um den Ursprung konzentrierte Ladungsverteilung ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left( \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots \right) \\ &= q \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{6} (Q_{ij} \partial_i \partial_j) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Insbesondere wirken auf elektrische Dipole und Quadropole in einem räumlich konstanten Feld keine Kräfte. Das auf eine Ladungsverteilung in der Umgebung des Koordinatenursprungs wirkende *Drehmoment* ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{mech}} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \wedge (\mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (x_l \partial_l) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots) \\ &= \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + \frac{1}{3} (\mathbf{Q} \nabla) \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots, \end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei wir in der letzten Gleichung ausnutzten, dass  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  wirbelfrei ist. Das elektrische Feld wirkt auf den Dipol mit einem Drehmoment und stellt, sofern der Dipol nicht an einer Drehung gehindert wird, die Dipolrichtung parallel zur Feldrichtung.

### 3.3 Differentialoperatoren

Die bekanntesten krummlinigen Koordinaten sind die Kugelkoordinaten

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \equiv r \mathbf{e}_r, \quad (3.23)$$

für die sich die Koordinatenlinien senkrecht schneiden. Andere Beispiele von rechtwinkligen Koordinaten sind kartesische oder Zylinderkoordinaten. Die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\vartheta$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  in

$$d\mathbf{r} = g_r \mathbf{e}_r dr + g_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta d\vartheta + g_\varphi \mathbf{e}_\varphi d\varphi \quad (3.24)$$

bilden eine orthonormierte ortsabhängige Basis des  $\mathbb{R}^3$  und ein Vektor ist eine Linearkombination dieser Vektoren,

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad A_r = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_r) \quad \text{usw.}$$

Mit (3.23) berechnen sich die  $g$ -Koeffizienten der Kugelkoordinaten zu

$$g_r = 1, \quad g_\vartheta = r \quad \text{und} \quad g_\varphi = r \sin \vartheta. \quad (3.25)$$

Für Zylinderkoordinaten ist

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \rho \mathbf{e}_\varphi d\varphi + \mathbf{e}_z dz \quad (3.26)$$

mit der in Abbildung 3.2 skizzierten ortsabhängigen Orthonormalbasis  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ . Daraus lesen

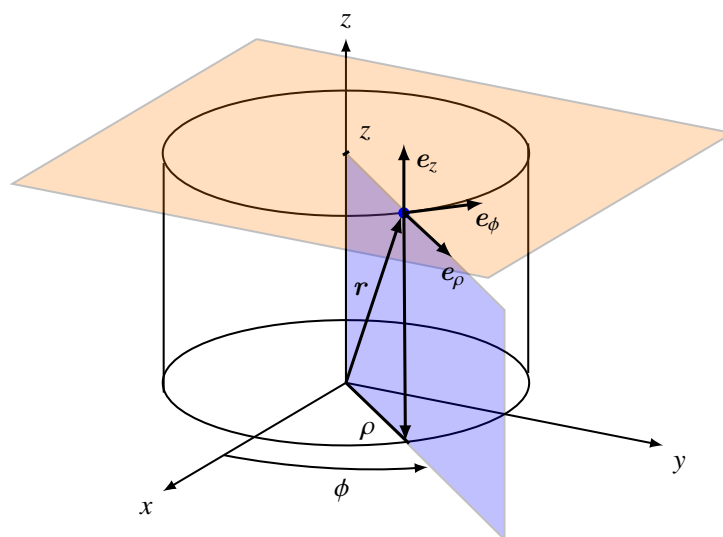


Abbildung 3.2: Koordinatenbasis für Zylinderkoordinaten.

wir unmittelbar die Koeffizienten  $g_\rho = 1$ ,  $g_\varphi = \rho$  und  $g_z = 1$  ab.

Im Folgenden betrachten wir beliebige rechtwinklige Koordinatensysteme mit im Allgemeinen von (3.25) verschiedenen metrischen Koeffizienten. Das Quadrat des Abstands zweier infinitesimal benachbarter Punkte  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  ist dann

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_r^2 dr^2 + g_\vartheta^2 d\vartheta^2 + g_\varphi^2 d\varphi^2. \quad (3.27)$$

Entsprechend ist ein durch  $dr$ ,  $d\vartheta$  und  $d\varphi$  gekennzeichnetes *Volumenelement* gegeben durch das Spatprodukt der drei Summanden auf der rechten Seite von (3.24),

$$dV = g_r g_\vartheta g_\varphi dr d\vartheta d\varphi. \quad (3.28)$$

+

Die gerichteten Flächenelemente der Koordinatenflächen sind:

$$\begin{aligned} r = \text{const} &: \mathbf{e}_r g_\vartheta g_\varphi d\vartheta d\varphi \\ \vartheta = \text{const} &: \mathbf{e}_\vartheta g_r g_\varphi dr d\varphi \\ \varphi = \text{const} &: \mathbf{e}_\varphi g_r g_\vartheta dr d\vartheta. \end{aligned} \quad (3.29)$$

### 3.3.1 Differentialoperatoren in rechtwinkligen Koordinaten

Im Folgenden werden wir die wichtigsten in der Elektrostatik auftretenden Differentialoperatoren für rechtwinklig krummlinige Koordinatensysteme bestimmen.

**Der Gradient:** Mit dem Ausdruck für  $d\mathbf{r}$  in (3.24) schreibt man

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} d\vartheta + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} d\varphi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= (\nabla\Phi, \mathbf{e}_r) g_r dr + (\nabla\Phi, \mathbf{e}_\vartheta) g_\vartheta d\vartheta + (\nabla\Phi, \mathbf{e}_\varphi) g_\varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (3.30)$$

und findet folgende Komponenten für den Gradienten  $\nabla\Phi = (\nabla\Phi)_r \mathbf{e}_r + (\nabla\Phi)_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + (\nabla\Phi)_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ :

$$(\nabla\Phi)_r = \frac{1}{g_r} \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (\nabla\Phi)_\vartheta = \frac{1}{g_\vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}, \quad (\nabla\Phi)_\varphi = \frac{1}{g_\varphi} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}. \quad (3.31)$$

**Die Divergenz:** Die Divergenz ist der Grenzwert eines Oberflächenintegrals

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}, \quad (3.32)$$

und mit Hilfe von (3.29) ergibt sich

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{1}{dV} \left( E_r g_\vartheta g_\varphi \Big|_r^{r+dr} d\vartheta d\varphi + E_\vartheta g_r g_\varphi \Big|_\vartheta^{\vartheta+d\vartheta} dr d\varphi + E_\varphi g_r g_\vartheta \Big|_\varphi^{\varphi+d\varphi} dr d\vartheta \right).$$

Für infinitesimale Volumen ergeben sich auf der rechten Seite die Ableitungen und wir finden folgenden Ausdruck für die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{g_r g_\vartheta g_\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} (E_r g_\vartheta g_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\vartheta} (E_\vartheta g_r g_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\varphi} (E_\varphi g_r g_\vartheta) \right). \quad (3.33)$$

**Der Laplace-Operator:** Mit  $\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi$  erhalten wir für rechtwinklige Koordinaten den Laplace-Operator

$$\Delta\Phi = \frac{1}{g_r g_\vartheta g_\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{g_\vartheta g_\varphi}{g_r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \frac{g_r g_\varphi}{g_\vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \frac{g_r g_\vartheta}{g_\varphi} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right) \right). \quad (3.34)$$

Diese Formeln gelten für beliebige orthogonale krummlinige Koordinaten (wenn wir diese mit  $r, \vartheta, \varphi$  bezeichnen).



Setzen wir an dieser Stelle aber die metrischen Koeffizienten (3.29) ein, dann gewinnen wir den Laplace-Operator für Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi. \quad (3.35)$$

Dabei wirkt der Operator  $\Delta_\Omega$  nur auf die Winkelvariablen<sup>1</sup>, nicht aber auf die radiale Variable,

$$\Delta_\Omega \Phi = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \quad (3.36)$$

Für im Unendlichen genügend schnell abfallende Funktionen  $\Psi, \Phi$  oder falls das Gebiet  $V$  keinen Rand hat dürfen wir partiell integrieren ohne Randterme aufzusammeln und erhalten

$$\int_V dV \Psi \Delta\Phi = - \int_V dV \nabla\Psi \cdot \nabla\Phi = \int_V dV \Phi \Delta\Psi, \quad \forall\Psi, \Phi.$$

Angewandt auf  $\Psi = \Phi$  finden wir, dass der Laplace-Operator im folgenden Sinne negativ ist,

$$\int_V \Phi \Delta\Phi \leq 0. \quad (3.37)$$

In Gebieten ohne elektrische Ladung erfüllt das Potential die Laplace-Gleichung  $\Delta\Phi = 0$ , und wir wollen nun einen vollständigen Satz von Lösungen der Laplace-Gleichung konstruieren. Lösungen der Laplace-Gleichungen heissen *harmonische Funktionen* und wir werden diesen Begriff hin und wieder verwenden.

## 3.4 Legendre-Polynome und Kugelfunktionen

In diesem Abschnitt konstruieren wir Lösungen der Laplace-Gleichung  $\Delta\Phi = 0$  in Kugelkoordinaten. Dabei werden wir auf die wichtigen Legendre-Polynome und Kugelflächenfunktionen treffen, die in der Atomphysik eine wichtige Rolle spielen.

### 3.4.1 Separationsansatz

Die Laplace-Gleichung ist linear und deshalb ist jede Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung ist. Um spezielle Lösungen der Laplace-Gleichung zu gewinnen machen wir einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten

$$\Phi = f(r)Y(\vartheta, \varphi). \quad (3.38)$$

Es wird sich zeigen, dass eine beliebige Lösung eine Linearkombination derartiger Lösungen ist. Eingesetzt in  $\Delta\Phi = 0$  führt der Ansatz (3.38) wegen (3.35) auf folgende partielle Differential-

---

<sup>1</sup>In der Quantenmechanik wird er eine sehr wichtige Rolle spielen: Er ist proportional zum quadrierten Drehimpuls.

gleichung für die radiale Funktion  $f(r)$  und die von den Winkeln abhängige Funktion  $Y(\vartheta, \varphi)$ :

$$\frac{1}{r}(rf)''Y + \frac{1}{r^2}f\Delta_\Omega Y = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{r}{f}(rf)'' + \frac{\Delta_\Omega Y}{Y} = 0. \quad (3.39)$$

Der Strich bezeichnet die Ableitung nach dem Radius. Die Summe einer nur von  $r$  abhängenden und einer nur von  $\vartheta, \varphi$  abhängenden Funktion kann nur verschwinden, wenn beide Summanden konstant sind und die Konstanten zu Null addieren. Bezeichnen wir die Separationskonstante mit  $\ell(\ell + 1)$  dann erhalten wir eine partielle Differentialgleichung für  $Y$  und eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $f$ :

$$-\Delta_\Omega Y_\ell(\vartheta, \varphi) = \ell(\ell + 1)Y_\ell(\vartheta, \varphi) \quad \text{und} \quad r(rf_\ell)'' = \ell(\ell + 1)f_\ell. \quad (3.40)$$

Da  $\Delta_\Omega$  ein negative Operator ist, siehe Ungleichung (3.37), ist die Separationskonstante  $\ell(\ell + 1)$  positiv. Deshalb dürfen wir  $\ell \geq 0$  annehmen. Später werden wir sehen, dass  $\ell$  sogar eine nicht-negative ganze Zahl sein muss. Die zweite Gleichung in (3.40) hat die unabhängigen Lösungen

$$f_\ell = a \cdot r^\ell \quad \text{und} \quad f_\ell = a \cdot r^{-\ell-1}. \quad (3.41)$$

Die erste Lösung divergiert für große Radien und die zweite divergiert am Ursprung.

Um spezielle Lösungen der ersten Gleichung in (3.40) zu finden machen wir nochmals einen Separationsansatz  $Y_\ell(\vartheta, \varphi) = P_\ell(\vartheta)Q(\varphi)$  (wir werden sehen, dass  $Q$  nicht von  $\ell$  abhängt) mit dem Resultat

$$\Delta_\Omega Y_\ell = Q(\varphi) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial P_\ell(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) + \frac{P_\ell(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Q(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\ell(\ell + 1)Q(\varphi)P_\ell(\vartheta).$$

Wir dividieren durch  $P_\ell Q$  und multiplizieren mit  $\sin^2 \vartheta$ :

$$\sin \vartheta \frac{1}{P_\ell(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial P_\ell(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) + \ell(\ell + 1) \sin^2 \vartheta + \frac{1}{Q(\varphi)} \frac{\partial^2 Q(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Offensichtlich müssen die Summe der ersten beiden Terme und der letzte Term jeweils konstant sein. Nennen wir die Separationskonstante  $m^2$ , dann folgt

$$0 = Q_m''(\varphi) + m^2 Q_m(\varphi) \quad (3.42)$$

$$0 = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial P_\ell^m(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) + \left( \ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) P_\ell^m(\vartheta). \quad (3.43)$$

Die erste Gleichung (3.42) hat die einfachen Lösungen

$$Q_m(\varphi) = e^{\pm im\varphi}. \quad (3.44)$$

Da die Azimutwinkel  $\varphi$  und  $\varphi + 2k\pi$  mit ganzzahligem  $k$  denselben Punkt beschreiben muss  $Q_m$  eine periodische Funktion mit Periode  $2\pi$  sein,  $Q_m(\varphi + 2\pi) = Q_m(\varphi)$ . Dies bedeutet, dass  $m$  in

(3.44) ganzzahlig sein muss. Damit haben die Lösungen folgende Form

$$\mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = a_{\ell m} e^{im\varphi} P_{\ell}^m(\vartheta), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{keine Summation}) \quad (3.45)$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten  $a_{\ell m}$ .

Zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.43) setzen wir

$$z = \cos \vartheta \in [-1, 1] \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dz} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta}. \quad (3.46)$$

Dann nimmt diese Gleichung folgende Form an,

$$\frac{d}{dz} \left( (1-z^2) \frac{dP_{\ell}^m}{dz} \right) + \left( \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) P_{\ell}^m = 0. \quad (3.47)$$

Nach einer konventionellen Normierung heissen die  $P_{\ell}^m$  *zugeordnete Legendre-Polynome* und die  $\mathcal{Y}_{\ell m}$  *Kugelflächenfunktionen*. Eine beliebige Lösung der Laplace-Gleichung lautet nun

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} \left( b_{\ell m} r^{\ell} + c_{\ell m} r^{-\ell-1} \right) \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi). \quad (3.48)$$

Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, dass diese Entwicklung immer möglich ist und wir werden auch sehen, wie man die Entwicklungskoeffizienten  $b_{\ell m}$  und  $c_{\ell m}$  aus den Randwerten von  $\Phi$  bestimmen kann.

### Legendre-Polynome

Statt die Differentialgleichung (3.43) für die  $P_{\ell}^m$  direkt zu lösen entwickeln wir zu deren Berechnung das Coulomb-Potential

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'}},$$

das für  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  ebenfalls die Laplace-Gleichung löst. Für  $r < r'$  entwickeln wir es in Potenzen von  $r/r'$  und für  $r > r'$  in Potenzen von  $r'/r$ . Dabei ist es nützlich

$$r_{<} = \min\{r, r'\}, \quad r_{>} = \max\{r, r'\} \quad \text{und} \quad z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' \quad (3.49)$$

einzuführen. Damit schreibt sich das Coulomb-Potential gemäss

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{>}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tz}} \quad t = \frac{r_{<}}{r_{>}}. \quad (3.50)$$

Entwickeln wir nach Potenzen von  $t$ , dann finden wir die für  $r \neq r'$  *konvergente Potenzreihe*:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} P_{\ell}(z), \quad z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'. \quad (3.51)$$

Die hier auftretende Funktionen  $P_{\ell}$  können aus diesen beiden Darstellungen für die Greenfunktion extrahiert werden:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tz}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} P_{\ell}(z). \quad (3.52)$$

Es sind offensichtlich Polynome vom Grade  $\ell$  und sie heissen *Legendre-Polynome*.

Die linke Seite der Darstellung (3.52) ändert sich nicht, wenn  $t$  und  $z$  gleichzeitig das Vorzeichen wechseln. Daraus folgt unmittelbar die Eigenschaft

$$P_{\ell}(-z) = (-1)^{\ell} P_{\ell}(z). \quad (3.53)$$

Für  $z = 1$  zeigen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  in die gleiche Richtung und wegen

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{\ell} t^{\ell},$$

erfüllen die Legendre-Polynome die Normierungsbedingung

$$P_{\ell}(z = 1) = 1. \quad (3.54)$$

Die Legendre-Polynome bis zur Ordnung 6 lauten

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= z \\ P_2(z) &= \frac{1}{2} (3z^2 - 1) \\ P_3(z) &= \frac{1}{2} (5z^3 - 3z) \\ P_4(z) &= \frac{1}{8} (35z^4 - 30z^2 + 3) \\ P_5(z) &= \frac{1}{8} (63z^5 - 70z^3 + 15) \\ P_6(z) &= \frac{1}{16} (231z^6 - 315z^4 + 105z^2 - 5). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Da die Greenfunktion für  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  die Laplace-Gleichung löst, muss jeder Term in der konvergenten Entwicklung (3.51) ebenfalls die Laplace-Gleichung lösen,

$$\Delta G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0 \implies \Delta_{\Omega} P_{\ell}(z) = -\ell(\ell+1)P_{\ell}(z). \quad (3.56)$$

Wir haben hier berücksichtigt, dass der  $r$ -abhängige Faktor  $t^\ell/r_>$  eine Lösung der radialen Differentialgleichung (3.40) ist. Für ein zylindersymmetrisches (axialsymmetrisches) System mit  $z$ -Achse als Symmetrieachse ist das Potential unabhängig von  $\varphi$ . Deshalb hängt die Greenfunktion für eine Punktladung auf der  $z$ -Achse auch nur von  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_3 = \cos \vartheta$  ab. Als Konsequenz vereinfacht sich die partielle Differentialgleichung für  $P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')$  in (3.56) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für  $P_\ell(\cos \vartheta)$ , der sogenannten *Legendre'schen Differentialgleichung*,

$$\frac{d}{dz} \left( (1 - z^2) \frac{dP_\ell}{dz} \right) + \ell(\ell + 1)P_\ell = 0, \quad z = \cos \vartheta. \quad (3.57)$$

Sie ist identisch zur Gleichung (3.47) mit  $m = 0$ .

### Vollständigkeit der Legendre-Polynome

Zur weiteren Untersuchung der  $P_\ell$  betrachten wir die in Abschnitt 2.2.2 mithilfe der Bildladungs-Methode bestimmte Dirichlet Green-Funktion *außerhalb* einer ideal leitenden Kugel mit Radius  $R$ , siehe (2.34),

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - r'_s \hat{\mathbf{r}}'|} \right), \quad \text{wobei} \quad r'_s = \frac{R^2}{r'} \quad (3.58)$$

der Abstand der Spiegelladung vom Ursprung ist. Dies ist auch die korrekte Greenfunktion für einen kugelförmige Hohlraum umgeben von einem idealen Leiter. Dann sind  $r$  und  $r'$  kleiner als  $R$  und die Spiegelladung liegt ausserhalb des Hohlraums. Wir entwickeln  $G_D$  nach Potenzen von  $r'/r$  beziehungsweise  $r/r'$ :

$$\begin{aligned} G_D(r > r' > R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \left( \frac{r'}{r} \right)^\ell - \frac{r'_s}{R} \left( \frac{r'_s}{r} \right)^\ell \right) P_\ell(z) \\ G_D(r < r' < R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \left( \frac{r}{r'} \right)^\ell - \frac{R}{r'_s} \left( \frac{r}{r'_s} \right)^\ell \right) P_\ell(z). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Die erste Reihendarstellung gilt ausserhalb der Kugel, die zweite innerhalb der Kugel. Wir benötigen noch die Normalenableitung von  $G_D$ ,

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'} = \mp \frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R},$$

wobei das obere Vorzeichen für  $r > r'$  und das untere für  $r < r'$  gilt.<sup>2</sup> Setzen wir die Reihenentwicklungen für  $G_D$  ein, so finden wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_D}{\partial n'}(r > R) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(z) \\ \frac{\partial G_D}{\partial n'}(r < R) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{1}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} P_{\ell}(z).\end{aligned}\quad (3.60)$$

Wegen der Identität (2.33) hat jede Lösung der Laplace-Gleichung in einem Gebiet  $V$  bzw. *jede in  $V$  harmonische Funktion* die Darstellung

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \oint_{\partial V} df' \frac{\partial G_D}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}').$$

Hier setzen wir obige Reihenentwicklungen für die Normalenableitung von  $G_D$  ein und erhalten

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \sum (2\ell+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} \oint d\Omega' P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \Phi(R\hat{\mathbf{r}}'), \quad r > R \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum (2\ell+1) \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} \oint d\Omega' P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \Phi(R\hat{\mathbf{r}}'), \quad r < R.\end{aligned}\quad (3.61)$$

Aus der Potenzreihenentwicklung für kleine  $r$  folgt insbesondere

$$\Phi(0) = \frac{1}{4\pi} \oint d\Omega' \Phi(R\hat{\mathbf{r}}'), \quad (3.62)$$

was bedeutet, dass der Wert einer harmonischen Funktion im Kugelzentrum gleich ihrem Mittelwert auf der Kugeloberfläche ist.

Für  $r = R$  fallen die beiden Entwicklungen in (3.61) zusammen und ergeben für  $R = 1$

$$\Phi(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell+1) \oint d\Omega' P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \Phi(\mathbf{e}_{r'}). \quad (3.63)$$

Diese wichtige Relation heißt *Vollständigkeitsrelation*: Eine „beliebige“ Funktion  $\Phi$  auf der Sphäre  $S^2$  kann als Linearkombination der Legendre-Polynome geschrieben werden. Diese Beziehung ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell+1) P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') &= \frac{1}{\sin\vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') \\ &= \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta').\end{aligned}\quad (3.64)$$

<sup>2</sup>Benutzt man  $G_D$  in (3.58), so findet man

$$\frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - R^2}{R} \frac{1}{(r^2 + R^2 - 2rRz)^{3/2}}$$

### Abhängigkeit vom Azimutwinkel und Kugelflächenfunktionen

Wir werden die Abhängigkeit der Legendre-Polynome  $P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')$  von Azimut- und Polarwinkel studieren und dabei eine Beziehung zwischen den Legendre Polynomen und den Kugelflächenfunktionen gewinnen. Das Legendre Polynom  $\mathcal{P}_\ell$  gehorcht der Differentialgleichung (3.56). Wir haben früher mithilfe der Separation der Variablen gezeigt, dass diese Differentialgleichung Lösungen mit einer einfachen exponentiellen  $\varphi$ -Abhängigkeit hat. Deshalb ist es naheliegend, das Argument  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$  von  $P_\ell$  in Potenzen von  $e^{i(\varphi-\varphi')}$  zu entwickeln:

$$z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin \vartheta' e^{i(\varphi-\varphi')} + \cos \vartheta \cos \vartheta' + \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin \vartheta' e^{-i(\varphi-\varphi')}. \quad (3.65)$$

Entwickelt man nun das Polynom  $P_\ell(z)$  vom Grade  $\ell$  ebenfalls in Potenzen von  $e^{i(\varphi-\varphi')}$ , dann erhält man die endliche Summe

$$P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{-im\varphi'} P_\ell^m(\cos \vartheta'), \quad (3.66)$$

worin die Potenzen  $m \in \{\ell, \ell-1, \dots, -\ell\}$  auftreten. Die Funktionen  $P_\ell^m$  sind reell und der Faktor mit dem Quotienten der Fakultäten ist Konvention und legt die Normierung der Funktionen  $P_\ell^m$  fest. Die Vorzeichen der  $P_\ell^m$  sind noch frei wählbar. Zum Beispiel erhält man für  $\ell = 0, 1$  und  $2$  die Entwicklungen

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= \cos \vartheta \cos \vartheta' + \frac{1}{2} \left( e^{i\varphi} \sin \vartheta e^{-i\varphi'} \sin \vartheta' + \text{h.c.} \right) \\ P_2 &= \frac{1}{4} (3 \cos^2 \vartheta - 1)(3 \cos^2 \vartheta' - 1) \\ &\quad + \frac{3}{8} \left( 4e^{i\varphi} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{-i\varphi'} \cos \vartheta' \sin \vartheta' + e^{2i\varphi} \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi'} \sin^2 \vartheta' + \text{h.c.} \right), \end{aligned} \quad (3.67)$$

woraus man bis auf ein Vorzeichen die  $P_\ell^m$  mit  $\ell \leq 2$  ablesen kann. Als Funktion der beiden Winkel erfüllt  $P_\ell$  die partielle Differentialgleichung (3.56) und damit löst  $P_\ell^m$  als Funktion von  $z = \cos \vartheta$  die Differentialgleichung (3.47). Die (regulären) Lösungen dieser Differentialgleichung sind bis auf Multiplikation mit einer Zahl eindeutig, und wir schließen, dass die Polynome  $P_\ell^m$  in (3.66) und (3.45) gleich gewählt werden können.

Nun führen wir schlussendlich die *Kugelflächenfunktionen*

$$\mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \vartheta) \quad (3.68)$$

ein, so dass die Reihe (3.66) folgende Form annimmt,

$$P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (3.69)$$

Damit schreibt sich die Vollständigkeitsrelation (3.64) folgendermassen:

$$\sum_{\ell=0,1,\dots} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta'). \quad (3.70)$$

Bis auf ein Vorzeichen sind  $\mathcal{Y}_{\ell, -m}$  und  $\mathcal{Y}_{\ell m}^*$  identisch. Konventionell wählt man dieses so, dass

$$\mathcal{Y}_{\ell, -m} = (-)^m \mathcal{Y}_{\ell m}^*. \quad (3.71)$$

Es genügt deshalb, die Funktionen mit  $m = 0, 1, \dots, \ell$  anzugeben.

Wir fassen zusammen: zur expliziten Berechnung der  $\mathcal{Y}_{\ell m}$  mit festem  $\ell$  ersetzt man das Argument  $z$  des Legendre-Polynoms  $P_\ell$  gemäß (3.65) und entwickelt nach Potenzen von  $e^{im(\varphi - \varphi')}$ . Als Resultat erhält man nach (3.69) (bis auf ein unbestimmtes Vorzeichen) die Kugelflächenfunktionen zu diesem  $\ell$ . Insbesondere für  $\ell = 0$  und 1 erhält man

$$\mathcal{Y}_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad \mathcal{Y}_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi}, \quad \mathcal{Y}_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta. \quad (3.72)$$

Die Kugelflächenfunktionen mit  $\ell = 1$  sind in Abbildung 3.3 gezeigt.  $\mathcal{Y}_{10}$  ist zylindersymmetrisch, hängt nicht vom Azimutwinkel ab und ist der  $z$ -Achse näher als  $\mathcal{Y}_{11}$ .

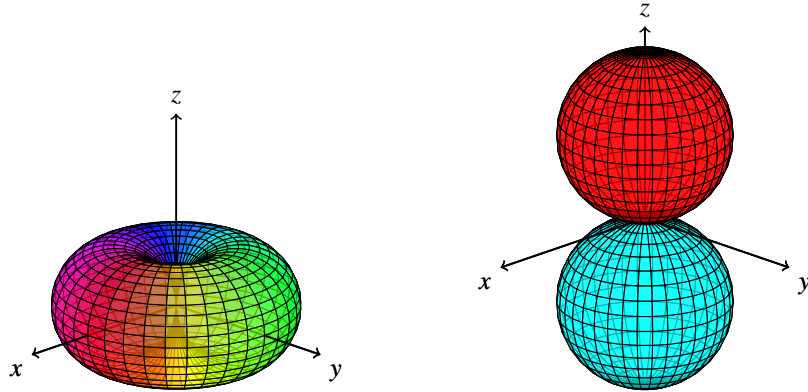


Abbildung 3.3: Kugelflächenfunktionen  $\mathcal{Y}_{11}$  (links) und  $\mathcal{Y}_{10}$  (rechts).

Für die Kugelflächenfunktionen mit  $\ell = 2$  erhält man analog

$$\mathcal{Y}_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, \quad \mathcal{Y}_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\varphi}, \quad \mathcal{Y}_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad (3.73)$$

und diese sind in Abbildung 3.4 graphisch dargestellt. Wie für  $\ell = 1$  beobachtet man auch hier,



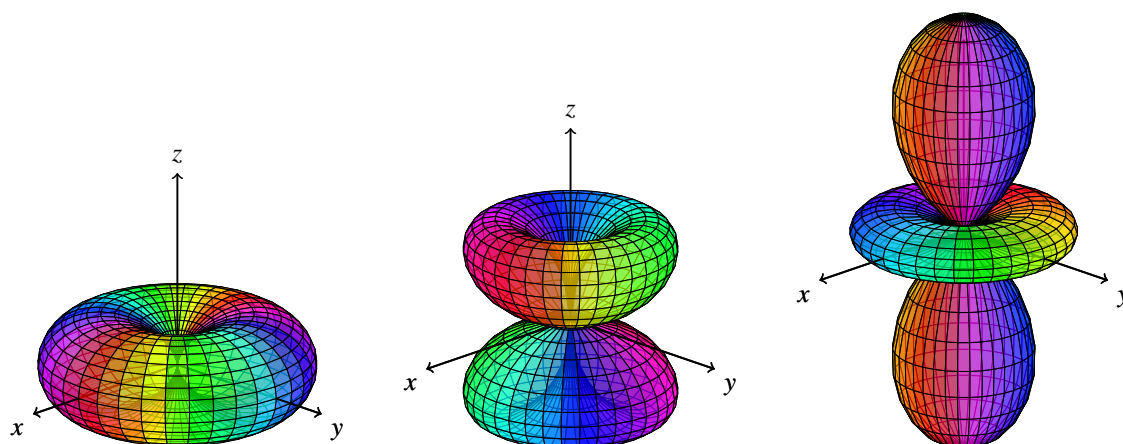


Abbildung 3.4: Kugelflächenfunktionen  $\mathcal{Y}_{22}$  (links),  $\mathcal{Y}_{21}$  (mittig) und  $\mathcal{Y}_{20}$  (rechts).

dass sich mit abnehmendem  $m$  der Träger der Kugelflächenfunktion der  $z$ -Achse nähert.

### Normierung und Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen spielen nicht nur in der Elektrodynamik eine herausragende Rolle. Man begegnet ihnen in der Quantenmechanik wieder, und zwar bei der Behandlung des Bahndrehimpulses. Deshalb lohnt es sich doppelt, einige wichtige Eigenschaften dieser speziellen Funktionen zu notieren. Sie bilden die Punkte auf der Kugeloberfläche  $S^2$  vom Radius 1, gekennzeichnet durch Azimut- und Polarwinkel, in die komplexen Zahlen ab.

Wegen der speziellen Winkelabhängigkeit des Arguments  $z$  in (3.65) ist

$$\mathcal{Y}_{\ell m} \propto \sum_{p-q=m} a_{\ell,p,q} \cdot (\sin \vartheta)^{p+q} e^{i(p-q)\varphi} \quad \text{mit } p, q \geq 0,$$

und deshalb verschwinden die Kugelfunktionen mit  $m \neq 0$  an den Polen,

$$\mathcal{Y}_{\ell, m \neq 0}(\vartheta = 0, \varphi) = \mathcal{Y}_{\ell, m \neq 0}(\vartheta = \pi, \varphi) = 0. \quad (3.74)$$

Zeigen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  in die gleiche Richtung, dann ist  $z = 1$  und die Normierung  $P_\ell(1) = 1$  bedingt

$$1 = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi)|^2 \Rightarrow \mathcal{Y}_{\ell 0}(0) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}}, \quad (3.75)$$

wobei wir  $\mathcal{Y}_{\ell 0}(0) > 0$  benutzten. Mit (3.69) ergibt sich dann für  $\vartheta' = 0$

$$P_\ell(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} \mathcal{Y}_{\ell 0}(\vartheta). \quad (3.76)$$

Integrieren wir (3.70) über  $\varphi$ , dann erhalten wir die Vollständigkeitsrelation für die Legendre-Polynome

$$\frac{1}{2} \sum_{\ell=0,1,\dots} (2\ell+1) P_\ell(z') P_\ell(z) = \delta(z-z'). \quad (3.77)$$

Diese Relation folgt auch aus (3.63) für  $\varphi$ -unabhängige Potentiale. Ausgedrückt durch die Kugelfunktionen lautet die Vollständigkeitsrelation (3.63) nun folgendermaßen

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0,1,\dots} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad c_{\ell m} = (\mathcal{Y}_{\ell m}, \Phi). \quad (3.78)$$

Wir haben hier das *Skalarprodukt* von zwei komplexwertigen Funktionen  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  eingeführt,

$$(\Psi, \Phi) = \oint_{S^2} d\Omega \Psi^*(\vartheta, \varphi) \Phi(\vartheta, \varphi). \quad (3.79)$$

Also kann *jede* (quadratintegrierbare) Funktion auf  $S^2$  als Linearkombination der linear unabhängigen Kugelfunktionen geschrieben werden. Der Koeffizient der Kugelfunktion  $\mathcal{Y}_{\ell m}$  in der Entwicklung ist gleich dem Skalarprodukt von  $\mathcal{Y}_{\ell m}$  mit der dargestellten Funktion. Mit (3.61) hat dann eine harmonische Funktion  $\Phi$  die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{\ell,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} (\mathcal{Y}_{\ell m}, \Phi_R) \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad r > R \\ &= \sum_{\ell,m} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} (\mathcal{Y}_{\ell m}, \Phi_R) \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad r < R, \end{aligned} \quad (3.80)$$

wobei  $\Phi_R$  die Restriktion von  $\Phi$  auf die Kugeloberfläche mit Radius  $R$  ist. Kennt man  $\Phi$  auf der Kugeloberfläche, dann kann man mit dieser Relation  $\Phi$  in der Kugel oder ausserhalb der Kugel bestimmen.

Wählen wir  $\Phi = \mathcal{Y}_{\ell m}$  in (3.78), dann folgt unmittelbar die Identität

$$(\mathcal{Y}_{\ell m}, \mathcal{Y}_{\ell' m'}) = \oint d\Omega \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \mathcal{Y}_{\ell' m'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (3.81)$$

Die Kugelfunktionen sind also orthogonal bezüglich des Skalarprodukts  $(\cdot, \cdot)$  und normiert. Sie bilden ein *vollständiges Orthonormalsystem* von Funktionen auf  $S^2$ .

### 3.4.2 Potenzreihen und erzeugende Funktionen

Man kann auch direkt versuchen, die Legendre'sche Differentialgleichung (3.57) mithilfe eines Potenzreihen-Ansatzes zu lösen:

$$P_\ell = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_0 \neq 0. \quad (3.82)$$

Wir nehmen an, die Reihe konvergiere und kann gliedweise differenziert werden. Einsetzen von (3.82) in (3.57) führt auf eine Rekursionsrelation, die  $a_n$  mit  $a_{n-2}$  verbindet. Aus dieser Relation folgt  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = 1$ . Für  $\alpha = 0$  kann man  $a_0$  und  $a_1$  beliebig vorgeben.<sup>3</sup> Der Koeffizientenvergleich liefert

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.83)$$

Für große  $n$  gilt

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \rightarrow 1$$

und nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius der Reihe (3.82) gleich Eins. Sie definiert eine analytische Funktion innerhalb des Einheitskreises. Diese Funktion muss auf dem Einheitskreis eine Singularität haben, es sei denn, die Reihe bricht ab und wird zu einem Polynom. Wegen (3.83) bricht sie genau dann ab, wenn  $\ell$  eine ganze Zahl ist. Da wir aber  $\ell \geq 0$  annehmen, muss  $\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$  sein. Die Rekursionsrelation (3.83) zeigt, dass für diese erlaubten Werte für  $\ell$  der Koeffizient  $a_{\ell+2}$  verschwindet und daher  $P_\ell$  ein Polynom vom Grade  $\ell$  sein muss.<sup>4</sup> Für  $a_1 = 0$  ist das Polynom gerade und für  $a_0 = 0$  ungerade.

Für *gerades*  $\ell$  erhalten wir

$$P_\ell = a_0 \left( 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{2!} z^2 + \dots + (-1)^{\frac{\ell}{2}} \frac{\ell(\ell-2) \cdots 2 \cdot (\ell+1) \cdots (2\ell-1)}{\ell!} z^\ell \right), \quad (3.84)$$

und für *ungerades*  $\ell$

$$P_\ell = a_1 \left( z - \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{3!} z^3 + \dots + (-1)^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{(\ell-1)(\ell-3) \cdots 2 \cdot (\ell+2) \cdots (2\ell-1)}{\ell!} z^\ell \right). \quad (3.85)$$

Normiert man schlussendlich die Legendre-Polynome  $P_\ell$  gemäß (3.54), dann findet man wieder die Lösungen (3.52).

**Erzeugende Funktion:** Die Legendre-Polynome können durch Ableiten von einfachen Polynomen erzeugt werden:

$$P_0(z) = 1, \quad P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2 - 1)^\ell. \quad (3.86)$$

*Beweis:* Wir differenzieren die einfache Differentialgleichung

$$(z^2 - 1)u' = 2\ell zu \quad (3.87)$$

<sup>3</sup>Für  $\alpha = 0$  gewinnt man schon die allgemeine Lösung der Legendre'schen DG.

<sup>4</sup> $a_\ell$  bestimmt  $a_{\ell+2}$ !

$(\ell + 1)$ -mal nach der Variablen  $z$ . Unter Benutzung von

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$(z^2 - 1)u^{(\ell+2)} + 2z(\ell + 1)u^{(\ell+1)} + \ell(\ell + 1)u^{(\ell)} = 2\ell zu^{(\ell+1)} + 2\ell(\ell + 1)u^{(\ell)}$$

beziehungsweise die Legendre'sche Differentialgleichung für  $u^{(\ell)}$ :

$$(z^2 - 1)u^{(\ell+2)} + 2zu^{(\ell+1)} - \ell(\ell + 1)u^{(\ell)} = 0.$$

Nun erfüllt aber gerade  $u = (z^2 - 1)^\ell$  die Gleichung (3.87). Setzen wir noch  $P_\ell = u^{(\ell)}/2^\ell \ell!$ , dann löst  $P_\ell$  die Legendre'sche Differentialgleichung.

### 3.4.3 Helmholtz-Funktionen und zugeordnete Legendre-Polynome

Wir kehren zur allgemeinen Gleichung (3.47) mit ganzzahligen  $\ell$  und  $m$  zurück. Löst  $P_\ell$  die Legendre'sche Differentialgleichung (3.57), dann löst die *Helmholtz'sche Funktion*

$$P_{\ell m} = \frac{d^m}{dz^m} P_\ell \quad (3.88)$$

die Differentialgleichung

$$\left( (1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2(m + 1)z \frac{d}{dz} + (\ell(\ell + 1) - m(m + 1)) \right) P_{\ell m} = 0.$$

Man braucht nur die Legendre-Differentialgleichung  $m$ -mal zu differenzieren. Wir schreiben nun

$$P_{\ell m}(z) = (-)^m (1 - z^2)^{-m/2} P_\ell^m(z)$$

und bestimmen durch Einsetzen die Differentialgleichung, der die *zugeordneten Legendre-Polynome*  $P_\ell^m$  dann genügen. Man findet die Differentialgleichung (3.47) und damit lösen die

$$P_\ell^m(z) = (-)^m (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_\ell(z) = \frac{(-)^m}{2^\ell \ell!} (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}} (z^2 - 1)^\ell \quad (3.89)$$

die Differentialgleichung (3.47). Die Helmholtz-Funktion  $P_{\ell m}$  ist ein Polynom vom Grade  $\ell - m$ . Das zugeordnete Legendre-Polynom  $P_\ell^m$  ist dann vom Grade  $\ell$ . Um zu den Kugelfunktionen zu gelangen, müssen wir die zugeordneten Legendre-Polynome mit  $\exp(im\varphi)$  und einem konventionellen Normierungsfaktor multiplizieren:

$$\mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0, \quad -\ell \leq m \leq \ell. \quad (3.90)$$

### 3.4.4 Punktladung in einem geerdeten „Faradaykäfig“

Innerhalb einer Kugel mit Radius  $R$  befinde sich am Ort  $\mathbf{r}_0$  eine Punktladung  $q$ . Auf der Kugeloberfläche soll das Potential verschwinden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass sich die Ladung auf der  $z$ -Achse ( $\vartheta_0 = 0$ ) befindet. Dann ist  $\Phi$  unabhängig vom Azimutwinkel  $\varphi$ . Das Potential in der Kugel schreiben wir als Summe des Coulomb-Potentials der Punktladung plus einer harmonischen Funktion,

$$\begin{aligned} \Phi(r < R, \vartheta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \Phi_h \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{>}} \sum_{\ell} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta) + \sum_{\ell} a_{\ell} \left( \frac{r}{R} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (3.91)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$r_{<} = \min(r, r_0) \quad \text{und} \quad r_{>} = \max(r, r_0), \quad r_0 = |z_0| \quad (3.92)$$

eingeführt. Das Potential verschwindet auf der Kugeloberfläche genau dann, wenn gilt

$$a_{\ell} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left( \frac{r_0}{R} \right)^{\ell}.$$

Deshalb ist das Potential einer auf der  $z$ -Achse liegenden Punktladung im geerdeten sphärischen Faradaykäfig

$$\Phi(r \leq R, \vartheta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell} \left( \frac{1}{r_{>}} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} - \frac{1}{R} \left( \frac{r_0 r}{R^2} \right)^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \vartheta). \quad (3.93)$$

Der harmonische Anteil ist identisch zum Potential der Spiegelladung außerhalb der Kugel,

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{\ell} \left( \frac{r_0 r}{R^2} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Rq/r_0}{\sqrt{|\mathbf{r} - R^2\mathbf{r}_0/r_0^2|}}. \quad (3.94)$$

## 3.5 Zylindersymmetrische Probleme

Wir legen die  $z$ -Achse in Richtung der Symmetrieachse. Dann hängt das Potential nicht vom Azimutwinkel ab und die allgemeine zylindersymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung lautet

$$\Phi(r, \vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( a_{\ell} r^{\ell} + \frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \vartheta), \quad P_{\ell}(z) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \mathcal{Y}_{\ell 0}(z). \quad (3.95)$$

Mit der Orthogonalitätsrelation ( $z = \cos \vartheta$ )

$$(P_\ell, P_{\ell'}) = 2\pi \int_{-1}^1 dz P_\ell(z) P_{\ell'}(z) = \frac{4\pi}{2\ell+1} (\mathcal{Y}_{\ell 0}, \mathcal{Y}_{\ell' 0}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \quad (3.96)$$

können wir den  $r$ -abhängigen Faktor leicht bestimmen:

$$(\Phi, P_\ell) = 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \vartheta \Phi(r, \vartheta) P_\ell(\cos \vartheta) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \left( a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} \right). \quad (3.97)$$

Suchen wir zylindersymmetrische Lösungen der Laplace-Gleichung in einem Gebiet, das den Koordinatenursprung enthält, dann verschwinden alle  $b_\ell$ . Für Lösungen in einem unbeschränkten Außengebiet verschwinden dagegen alle Koeffizienten  $a_\ell$ .

### Homogen geladener Ring

Wir berechnen das Feld eines geladenen Kreisrings mit Radius  $R$ , wie in der folgenden Abbildung 3.5 gezeigt. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Kreis in der  $x - y$ -Ebene liegt und

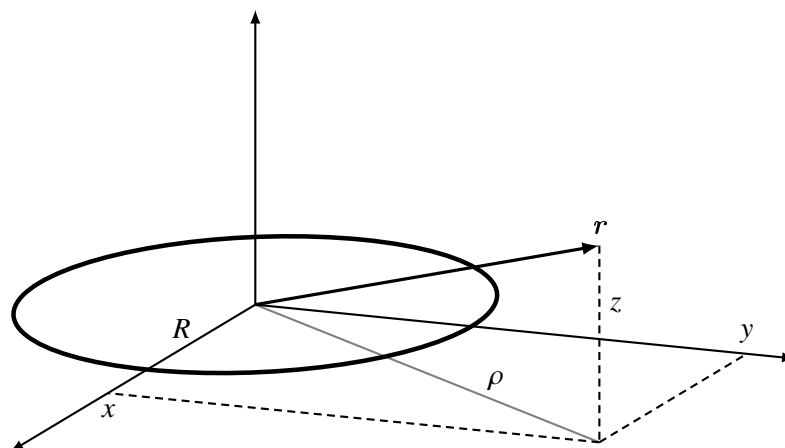


Abbildung 3.5: Zur Berechnung des Potentials eines homogen geladenen Kreisrings.

sein Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Die Ladung sei gleichmäßig auf den Kreis  $2\pi R$  verteilt. Dann ist die Ladungsdichte des als unendlich dünn idealisierten geladenen Kreises gleich

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi R} \delta(\rho - R) \delta(z), \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (3.98)$$

Wir berechnen zunächst das Potential auf der  $z$ -Achse. Ein Punkt  $(0, 0, z)$  auf dieser Achse hat denselben Abstand  $\sqrt{z^2 + R^2}$  zu jedem Punkt auf dem Ring, und entsprechend ist

$$\Phi(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \frac{\delta(\rho' - R) \delta(z')}{\sqrt{\rho'^2 + (z - z')^2}} \rho' d\rho' dz' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}. \quad (3.99)$$

Auf der Symmetrieachse ist das Feld identisch mit demjenigen einer Punktladung auf der Achse im Abstand  $\sqrt{z^2 + R^2}$ . Das Potential ist weg vom Kreisring harmonisch und hat für  $r < R$  und  $r > R$  jeweils die Reihenentwicklung (3.95). Diese definieren eine am Ursprung reguläre und im Unendlichen abfallende Funktion wenn die  $b_\ell$  für  $r < R$  und die  $a_\ell$  für  $r > R$  verschwinden. Nun können wir die Entwicklungen

$$\Phi(r < R) = \sum a_\ell r^\ell P_\ell(\cos \vartheta) \quad \text{und} \quad \Phi(r > R) = \sum \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \vartheta) \quad (3.100)$$

mit dem auf der  $z$ -Achse bekannten Resultat (3.99) vergleichen. Auf der Achse ist  $r = |z|$ . Mit

$$\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell (2\ell)! \left( \frac{t^\ell}{2^\ell \ell!} \right)^2 \quad t = \frac{|z|}{R} = \frac{r}{R},$$

und  $P_\ell(1) = 1$  finden wir so für die Innenlösung die Reihendarstellung

$$\begin{aligned} \Phi(r < R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \sum_{\ell} (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{(2^\ell \ell!)^2} \left( \frac{r}{R} \right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos \vartheta) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left( 1 - \frac{r^2}{4R^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + O\left((r/R)^4\right) \right). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Eine vergleichbare Rechnung führt auf die Außenlösung

$$\begin{aligned} \Phi(r > R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \sum_{\ell} (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{(2^\ell \ell!)^2} \left( \frac{R}{r} \right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos \vartheta) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left( 1 - \frac{R^2}{4r^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + O\left((R/r)^4\right) \right). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Weit weg vom Ring ist der führende Term, wie erwartet, das Coulomb-Feld. Der Kreisring hat kein Dipolmoment und die erste Korrektur zum Monopolanteil ist das Quadrupolfeld mit diagonalem Quadrupoltenor

$$\mathbf{Q} = \frac{qR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (3.103)$$

Da die Entwicklung der Aussenlösung nur ungerade Potenzen von  $1/r$  enthält verschwindet auch der Oktupolbeitrag und der nächste Beitrag stammt vom Hexadekupol.

### 3.6 Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Wie früher betrachten wir eine statische und lokalisierte Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$ . Mit Hilfe der Kugelfunktionen können wir nun relativ schnell die Multipolentwicklung des Potentials  $\Phi$  nach

inversen Potenzen von  $r$  ableiten. Dazu erinnern wir uns an die Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \\ &= \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi'). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Hat die Ladungsdichte ihren Träger innerhalb einer Kugel mit Radius  $R$ , dann folgt für  $r > R$

$$4\pi\varepsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{q_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad (3.105)$$

mit den *sphärischen Multipolmomenten*

$$q_{\ell m} = \int d^3r r^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \rho(\mathbf{r}). \quad (3.106)$$

Für  $\ell = 0$  erhalten wir das „Monopolmoment“ Ladung, für  $\ell = 1$  die Komponenten des Dipol-Momentes und für  $\ell = 2$  die Komponenten des symmetrischen und spurlosen Quadrupoltensors. Insbesondere für  $m = 0$  findet man

$$\begin{aligned} q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \\ q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r r \cos \vartheta \rho(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_3 \\ q_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int d^3r (3r^2 \cos^2 \vartheta - r^2) \rho(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{33}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Für festes  $\ell$  gibt es  $2\ell + 1$  Komponenten  $q_{\ell m}$ . In kartesischen Koordinaten ist die Anzahl unabhängiger Komponenten in der Multipolentwicklung nicht so offensichtlich. Wegen der Symmetrie und Spurfreiheit hat zum Beispiel der Quadrupoltensor  $9 - 3 - 1 = (2 \cdot 2 + 1) = 5$  unabhängige Komponenten. Von den  $3^3 = 27$  Komponenten des Oktupoltensors  $Q_{ijk}$  sind tatsächlich nur  $(2 \cdot 3 + 1) = 7$  unabhängig. Für die höheren Multipole ist die sphärische Multipolentwicklung wesentlich einfacher und eleganter als die Entwicklung in kartesischen Komponenten.

### 3.7 Anhang: Vollständige Funktionensysteme

Abschließend wollen wir die Eigenschaften der Legendre-Polynome und Kugelfunktionen geometrisch interpretieren. Wir werden dann besser verstehen, warum die  $P_{\ell}$  ein vollständiges Orthogonalsystem auf dem Raum der Funktionen  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  und die  $\mathcal{Y}_{\ell m}$  ein vollständiges Orthonormalsystem auf dem Raum der Funktionen  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  bilden. Diese Funktionen bilden



jeweils einen *linearen Raum*. Als inneres Produkt wählen wir

$$(f, g) = \int_M \rho(x) \bar{f}(x) g(x) d^n x, \quad \rho(x) > 0, \quad (3.108)$$

wobei in der Elektrostatik folgende Räume und Dichten  $\rho$  auftreten:

$$\begin{aligned} M = [-1, 1], \quad \rho(x) d^n x \rightarrow dz & \quad \text{für Legendre-Polynome,} \\ M = S^2, \quad \rho(x) d^n x \rightarrow \sin \vartheta d\vartheta d\varphi & \quad \text{für Kugelfunktionen.} \end{aligned}$$

Die Bilinearform  $(\cdot, \cdot)$  ist ein *Skalarprodukt*: Sie ist *linear* im zweiten Argument und *antilinear* im ersten Argument,

$$(f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 (f, g_1) + \alpha_2 (f, g_2) \quad \text{und} \quad (f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (3.109)$$

und sie ist *positiv*

$$(f, f) \geq 0 \quad \text{und} \quad (f, f) = 0 \quad \text{nur, falls} \quad f = 0. \quad (3.110)$$

Zwei Funktionen  $f, g$  (Vektoren in diesem unendlich-dimensionalen Funktionenraum) sind *orthogonal*, falls  $(f, g) = 0$  ist. Die Länge oder Norm einer Funktion ist

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}. \quad (3.111)$$

Also ist der Raum der stetigen Funktionen  $M \rightarrow \mathbb{C}$  ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, versehen mit einer Norm, ein so genannter *normierter Raum*. Der Abstand zwischen zwei Funktionen ist

$$d(f, g) = \|f - g\|. \quad (3.112)$$

Vergrößert man den Raum so lange bis man einen bezüglich der Metrik vollständigen Raum erhält, so heißt dieser *Hilbertraum*: Ein Hilbertraum ist demnach ein linearer Raum, der bezüglich der durch das innere Produkt induzierten Metrik vollständig ist. In einem Hilbertraum konvergieren zum Beispiel alle Cauchy-Folgen gegen ein Element des Raumes. Der Raum der stetigen Funktionen auf  $M$  ist bezüglich der durch (3.108) induzierten Norm nicht vollständig. Man kann ihn aber vervollständigen. Der etwas größere Raum wird mit

$$L_2(M, \rho) \quad (3.113)$$

bezeichnet. Es gilt der folgende

**Satz:** *In einem Hilbertraum gelten die Schwartz'sche und Dreiecksungleichung*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\| \quad \text{und} \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (3.114)$$

Weiterhin ist

$$\|g\| \leq \|\lambda f + g\| \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.115)$$

genau dann, wenn  $(f, g) = 0$  ist.

*Beweis:* Sei  $\alpha = (f, g)$ . Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = |\lambda|^2 \|f\|^2 + 2\Re(\bar{\alpha}\lambda) + \|g\|^2. \quad (3.116)$$

Damit gilt die letzte Aussage im Satz für  $\alpha = 0$ . Für  $f = 0$  sind die erste und letzte Behauptung trivial erfüllt. Sei nun  $f \neq 0$ . Wir setzen  $\lambda = -\alpha/\|f\|^2$ . Mit diesem  $\lambda$  wird (3.116) zu

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = \|g\|^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|f\|^2}.$$

Dies beweist die erste Ungleichung und zeigt, dass die dritte Behauptung nur für  $\alpha = 0$  gelten kann. Die zweite Ungleichung im Satz folgt aus der ersten (man quadriert die zweite Ungleichung).

Die Legendre-Polynome sind orthogonal im Hilbertraum  $L_2([-1, 1])$  und die Kugelfunktionen orthonormal in  $L_2(S^2, \sin \vartheta d\vartheta d\varphi)$ . Dies ist einfach zu beweisen. Dazu schreiben wir die entsprechenden Differentialgleichungen als Eigenwertgleichungen:

$$A f_\ell = \ell(\ell + 1) f_\ell, \quad A = -\frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} \quad \text{bzw.} \quad A = -\Delta_\Omega. \quad (3.117)$$

Der Differentialoperator  $A$  ist linear. Nach Wahl einer Basis im Funktionenraum ist er eine unendlich-dimensionale Matrix. Der zu  $A$  adjungierte Operator  $A^\dagger$  wird durch

$$(f, Ag) = (A^\dagger f, g) \quad (3.118)$$

definiert. Für einen *symmetrischen Operator* ist  $A = A^\dagger$ . Der Laplace-Operator  $\Delta_\Omega$  auf  $S^2$  ist offensichtlich symmetrisch, siehe (3.37). Der erste Differential-Operator  $A$  in (3.117) ist es ebenfalls:

$$(f, Ag) = \int_{-1}^1 dz \bar{f} A g = -(1 - z^2) (\bar{f} g' - \bar{f}' g) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 dz \overline{A f} g = (A f, g). \quad (3.119)$$

Wir setzen hier voraus, dass  $f$  und  $g$  bei  $z = \pm 1$  regulär sind, so dass keine Oberflächenterme auftreten.

Es seien nun  $f_\ell$  und  $f_{\ell'}$  Eigenfunktionen des symmetrischen Operators  $A$  mit Eigenwerten  $\ell(\ell + 1)$  bzw.  $\ell'(\ell' + 1)$ . Dann ist

$$(A f_\ell, f_{\ell'}) = \ell(\ell + 1)(f_\ell, f_{\ell'}) = (f_\ell, A f_{\ell'}) = \ell'(\ell' + 1)(f_\ell, f_{\ell'}).$$

Für  $\ell \neq \ell'$  muss also  $(f_\ell, f_{\ell'}) = 0$  gelten. Deshalb sind die Legendre-Polynome bzw. Kugelfunktionen orthogonal zueinander. Die Kugelfunktionen sind normiert. Es verbleibt noch, die Norm

der Legendre-Polynome zu bestimmen. Mit

$$\int_{-1}^1 dz \left( \frac{d^\ell}{dz^\ell} (1-z^2)^\ell \right)^2 = \frac{2}{2\ell+1} 4^\ell (\ell!)^2 \quad (3.120)$$

findet man, dass

$$(P_\ell, P_\ell) = \frac{2}{2\ell+1} \quad \text{und damit} \quad (P_\ell, P_{\ell'}) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} . \quad (3.121)$$

In der Analysis beweist man, dass die Eigenfunktionen jedes selbstadjungierten Operators  $A$  ein vollständiges Funktionensystem bilden. Sie bilden immer eine Basis im Hilbertraum.

## Kapitel 4

# Elektrisches Feld in Materie

Bisher untersuchten wir das von einer Ladungsverteilung erzeugte elektrische Vakuumfeld, beschrieben durch die beiden Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Nun sollen die entsprechenden Gleichungen in Isolatoren besprochen werden. Ein materieller Körper enthält positive und negative Ladungen, und zwar von jeder Sorte gleich viele, wenn er elektrisch neutral ist. Während nun beim *Leiter* eine der beiden Sorten frei beweglich ist (Elektronen beim Metall, Ionen beim Elektrolyten), sind beim *Isolator* beide Sorten quasielastisch an feste Orte gebunden. In einem Dielektrikum gibt es keine frei beweglichen Ladungen und die geladenen Teilchen können schwerlich aus ihrer Gleichgewichtsposition verschoben werden. Unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes verschieben sich die positiven Ladungen ein wenig in Richtung des Feldes und die negativen entgegengesetzt dazu, und zwar um eine der Stärke des Feldes proportionale Wegstrecke. Diese gegenseitige Verschiebung der Ladungen nennen wir *Polarisation* und beschreiben sie durch einen Vektor  $\mathbf{P}$ . Die Polarisation induziert Zusatzfelder, die das äußere Feld überlagern.

### 4.1 Polarisation und dielektrische Verschiebung

Wir nehmen an, dass die Maxwell-Gleichungen des Vakuums mikroskopisch gültig sind:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_m = \frac{\rho_m}{\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{E}_m = 0, \tag{4.1}$$

wobei  $\mathbf{E}_m$  und  $\rho_m$  das *mikroskopische* elektrische Feld die *mikroskopische* elektrische Ladungsdichte bezeichnen. Das mikroskopische Feld von etwa  $10^{23}$  Ladungsträgern je Kubikzentimeter ist aber derart kompliziert, dass seine exakte Bestimmung in makroskopischen Dielektrika praktisch unmöglich ist. In einer Elementarzelle eines Festkörpers oder in einem Atom ist es von der Größe  $E_m \approx e/(1A)^2 \approx 10^9 \text{V/cm}$ , dabei ist  $e$  die Elementarladung und  $1A = 10^{-8} \text{cm}$

ein Ångström. Noch schwerer wiegt unsere Unkenntnis über die Physik auf atomaren Skalen. Atomare Modelle lassen sich nur im Rahmen der Quantenmechanik korrekt entwickeln.

Messen wir allerdings nur Felder und Ladungsverteilungen auf makroskopischen Skalen, so mitteln wir automatisch über einen gewissen Raumbereich und ein Zeitintervall. Dabei werden die kurzwelligen und kurzzeitigen Fluktuationen des mikroskopischen Feldes geglättet. Die klassische Elektrodynamik in Medien ist deshalb nur sinnvoll für gemittelte Größen anwendbar.

Wir ordnen einem mikroskopischen Feld  $A_m(t, \mathbf{r})$  sein geglättetes mittleres Feld

$$\langle A_m \rangle(t, \mathbf{r}) = \int d^3r' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_m(t, \mathbf{r}') = \int d^3r' f(\mathbf{u}) A_m(t, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.2)$$

zu. Die Funktion  $f(\mathbf{r})$  sei in einer Umgebung des Ursprungs lokalisiert, nichtnegativ und auf Eins normiert, d.h.  $\int d^3r f(\mathbf{r}) = 1$ . Mögliche Glättungsfunktionen sind

$$f(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi b^3} \theta(b - r) \quad \text{oder} \quad f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2} b^3} \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right). \quad (4.3)$$

Mit der ersten Wahl mitteln wir über Kugeln vom Radius  $b$ , zentriert um  $\mathbf{r}$ . Die Gauß-Funktion

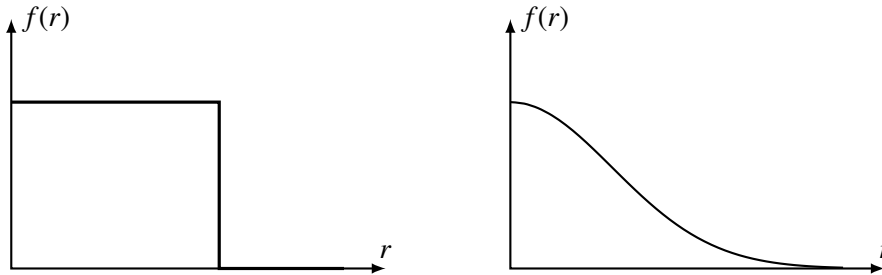


Abbildung 4.1: Zwei mögliche Glättungsfunktionen.

leistet im Wesentlichen das Gleiche, aber mit einer analytischen Glättung. Die Mittelung geschieht über eine Länge  $b$ , die viel größer als der typische Atomabstand von etwa  $a \sim 10^{-8}$  cm sein soll. Auf der anderen Seite soll  $b$  klein sein gegenüber der Skala, auf der die zu studierenden Phänomene variieren. Für eine Welle ist diese Skala durch die Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt, also fordern wir

$$a \ll b \ll \lambda. \quad (4.4)$$

Typische Mittelungslängen sind  $\mu\text{m} \rightarrow \text{mm}$ . Für  $b \sim 10^{-2}$  cm sind etwa  $10^{17}$  Teilchen in einem Mittelungsvolumen enthalten. Wegen der großen Zahl von Teilchen im Mittelungsvolumen werden durch die räumliche Mittelung auch die raschen zeitlichen Fluktuationen geglättet.

Man kann auch andere Mittelungen als in (4.2) benutzen. Die Resultate sollten aber von der Art der Mittelung unabhängig sein. Wir brauchen für die folgenden Betrachtungen die Annahme

$$\nabla \langle A_m \rangle = \langle \nabla A_m \rangle, \quad (4.5)$$

die auf die Mittlung (4.2) zutrifft,

$$\begin{aligned}\nabla\langle A_m\rangle(t, \mathbf{r}) &= \int d^3r' \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_m(t, \mathbf{r}') = - \int d^3r' \nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_m(t, \mathbf{r}') \\ &= \int d^3r' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' A_m(t, \mathbf{r}') = \langle \nabla A_m \rangle(t, \mathbf{r}).\end{aligned}\quad (4.6)$$

Wir definieren nun das *makroskopische elektrostatische Feld*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}_m \rangle(\mathbf{r}). \quad (4.7)$$

Da Mittlung und Ableitung vertauschen, erhalten wir aus den mikroskopischen Grundgleichungen (4.1) die makroskopischen Feldgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \rho_m \rangle(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.8)$$

Wegen

$$\langle \mathbf{E}_m \rangle(\mathbf{r}) = -\langle \nabla \Phi_m \rangle(\mathbf{r}) = -\nabla \langle \Phi_m \rangle(\mathbf{r}), \quad (4.9)$$

wobei  $\Phi_m$  das mikroskopische Potential ist, können wir das makroskopische elektrische Feld als Gradient des gemittelten skalaren Potentials  $\Phi = \langle \Phi_m \rangle$  schreiben.

Wir berechnen  $\Phi$  nun näherungsweise. Das Material bestehe aus  $N$  Atomen (Ionen, Moleküle). Die Ladung  $q_n$  des  $n$ 'ten Atoms ist die Summe der Ladungen der Kerne und Elektronen, aus denen das Atom zusammengesetzt ist.<sup>1</sup> Die Atome sind einige Ångström groß und damit ist der Abstand der Elektronen und des Kerns im  $n$ 'ten Atom zum Schwerpunkt  $\mathbf{r}_n$  des Atoms sehr viel kleiner als der Abstand zwischen dem Aufpunkt  $\mathbf{r}$  (wo  $\Phi$  gemessen wird) und  $\mathbf{r}_n$ . In der Multipolentwicklung für das vom  $n$ 'ten Atom am Orte  $\mathbf{r}$  erzeugte Potential dürfen wir damit die Dipolnäherung machen,

$$4\pi\varepsilon_0\Phi_n = \frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} + \frac{\mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3}\right), \quad (4.10)$$

wobei  $q_n$  die Ladung und  $\mathbf{p}_n$  das Dipolmoment des als klein angesehenen  $n$ 'ten Atoms ist. In dieser Näherung ist das von allen Atomen im Material erzeugte Potential durch die Summe der Monopol- und Dipolfelder der einzelnen Atome (Ionen) gegeben,

$$\begin{aligned}4\pi\varepsilon_0\Phi_m(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \left( \frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} + \frac{\mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} \right) \\ &= \int d^3r' \left( \frac{\rho_{m,f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right),\end{aligned}\quad (4.11)$$

<sup>1</sup>In der klassischen Elektrodynamik dürfen wir die Kerne und Elektronen als Punktteilchen ansehen.

wobei wir die Ladungsdichte der elektrischen Monopole und die Dipoldichte einführen,

$$\rho_{m,f} = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (4.12)$$

Statt über das Potential hätten wir direkt über die Näherung für die mikroskopische Ladungsdichte argumentieren können. In der Dipolnäherung ist die Ladungsdichte der Atome die Summe aus dem Monopol- und Dipolterm, siehe (3.10),

$$\rho_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N (q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) - \mathbf{p}_n \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)) = \rho_{m,f} + \rho_{m,P}, \quad (4.13)$$

und (4.11) ist dann äquivalent zu

$$4\pi\epsilon_0\Phi_m = \int d^3r' \left( \frac{\rho_{m,f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\rho_{m,P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \quad (4.14)$$

Nun mitteln wir (4.11), um vom mikroskopischen Potential zum mittleren Potential zu gelangen:

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3u f(\mathbf{u}) \int d^3r' \left( \frac{\rho_{m,f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'|^3} \right).$$

Wir setzen  $\mathbf{r}' + \mathbf{u} = \mathbf{r}''$ , so dass

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r'' \int d^3u f(\mathbf{u}) \left( \frac{\rho_{m,f}(\mathbf{r}'' - \mathbf{u})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}'' - \mathbf{u}) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \right) \\ &= \int d^3r'' \left( \frac{\rho_f(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}'') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \right) \\ &= \int d^3r' \left( \frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Im letzten Schritt haben wir die Integrationsvariable  $\mathbf{r}''$  wieder mit  $\mathbf{r}'$  bezeichnet und die *makroskopische Ladungsdichte* der freien Ladungsträger (Ionen)

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \int d^3u f(\mathbf{u}) \rho_{m,f}(\mathbf{r} - \mathbf{u}) = \sum_n q_n f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (4.16)$$

und die *makroskopische Polarisation*

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \int d^3u f(\mathbf{u}) \mathbf{P}_m(\mathbf{r} - \mathbf{u}) = \sum_n \mathbf{p}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (4.17)$$

eingeführt. Für die erste Wahl für  $f$  in (4.3) ist

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|V|} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} q_n \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|V|} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} \mathbf{p}_n, \quad (4.18)$$

wobei  $V$  die Kugel mit Radius  $b$  und  $\mathbf{r}$  als Zentrum ist. Die makroskopische Ladungsdichte entsteht durch Mittlung über alle Ladungen in  $V$ . Die gebundenen Ladungen werden sich in der Regel kompensieren, so dass  $\rho_f$  aus freien Überschussladungen resultiert. Die Polarisation  $\mathbf{P}$  ist das Dipolmoment je Volumeneinheit. Verschwindet das Dipolmoment der „Teilchen“, wie zum Beispiel das Dipolfeld der Elementarzelle eines Siliziumkristalls, dann muss man unter Umständen die Entwicklung (4.11) zu höheren Multipolmomenten fortsetzen. Für die Maxwell-Gleichungen benötigen wir die Quellen des elektrischen Feldes,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= -\Delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \rho_f(\mathbf{r}) + \int d^3r' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})).\end{aligned}\quad (4.19)$$

Die Ladungsdichte  $\rho$  setzt sich zusammen aus einer frei beweglichen Ladungsdichte  $\rho_f$  (zum Beispiel die Ladungsdichte, die auf eine Kondensatorplatte aufgebracht wird) und der *Polarisationsladungsdichte*

$$\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (4.20)$$

Wir veranschaulichen diese Gleichung. Wir betrachten einen Festkörper auf Skalen groß gegen den Atomabstand, so dass sich die Ladungen der Ionen und Elektronen kompensieren, siehe Abb. 4.2a. Legt man ein elektrisches Feld an, so verschieben sich die Elektronen gegenüber den Ionen wie in Abb. 4.2b. Im Inneren des Festkörpers hat man Ladungskompensation. Nur am Rand bleiben Netto-Ladungen übrig. Im dritten Bild ist die Polarisation in Feldrichtung eingezeichnet. In der Abb. 4.2d ist die Polarisationladungsdichte  $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  aufgetragen.

Damit setzt sich die Ladungsdichte  $\rho$  zusammen aus einer frei beweglichen Dichte  $\rho_f$  und der Polarisationladungsdichte  $\rho_P$ ,

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_P(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (4.21)$$

Nun führt man in der Maxwell-Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (4.22)$$

die *dielektrische Verschiebung* (elektrische Erregung)  $\mathbf{D}$  ein

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad (4.23)$$

so dass  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$  ist. Deshalb lauten die Grundgleichungen der Elektrostatik für die gemittelten Felder in Medien

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \quad (4.24)$$



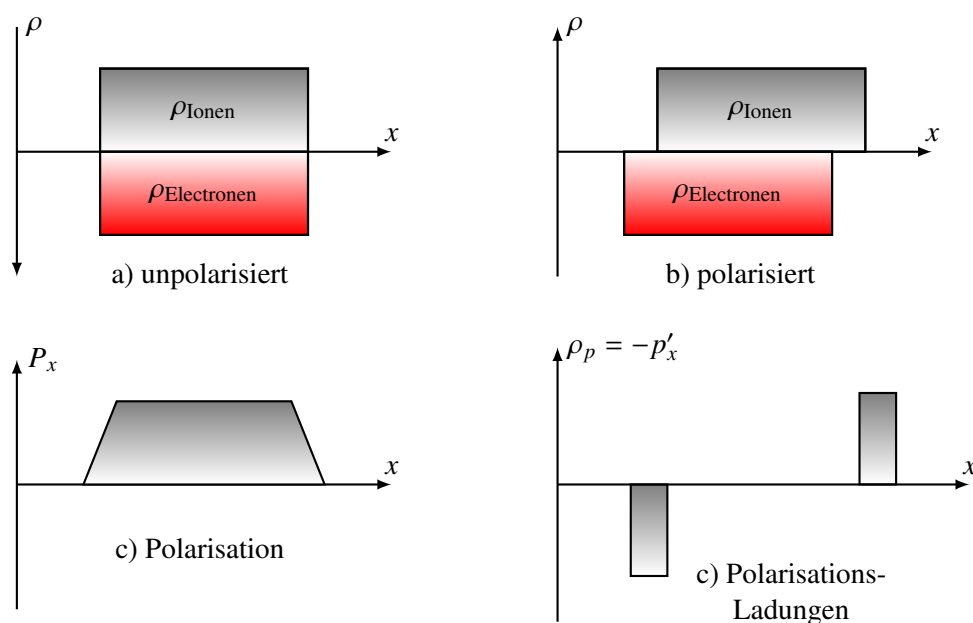


Abbildung 4.2: Zur Veranschaulichung der Polarisationsladungen.

Für den Fluss der dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche eines beliebigen Volumens erhält man dann die frei bewegliche Ladung  $q_f(V)$  innerhalb des Volumens

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = q_f(V). \quad (4.25)$$

Die Polarisationsladungsdichte resultiert aus induzierten Dipolen, d.h. aus Ladungsverschiebungen. Dabei wird Ladung weder zu- noch abgeführt. Die gesamte Polarisationsladung muss also verschwinden:

$$Q_P = \int_V d^3r \rho_P = - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{P} = - \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (4.26)$$

Hier ist  $V$  ein das Dielektrikum umschließendes Gebiet. Im SI-System wird  $\mathbf{E}$  in V/m,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{P}$  in As/m<sup>2</sup> gemessen.

Für viele dielektrische und paraelektrische Substanzen, man nennt sie *lineare Medien*, sind für schwache Felder  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{E}$  in guter Näherung proportional

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}), & \chi_e & \text{elektrische Suszeptibilität} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}), & \varepsilon & \text{Dielektrizitätskonstante (Permittivität)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Man definiert die relative Dielektrizitätskonstante (Permittivität)  $\varepsilon_r$  eines Mediums gemäß

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e. \quad (4.28)$$

Als Verhältnis der Permittivität  $\varepsilon$  des Mediums zu derjenigen des Vakuums  $\varepsilon_0$  ist die dimensionslos. Für anisotrope lineare Stoffe sind  $\chi_e$  und  $\varepsilon_r$  Tensoren und deshalb können  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{P}$  in verschiedenen Richtungen zeigen. Für isotrope lineare Medien sind Feld und Polarisation aber parallel und  $\varepsilon$  ein Skalar. Die Materialgrößen  $\varepsilon$  und  $\chi_e$  hängen von den äußeren Bedingungen wie Druck (bei Quarz) oder Temperatur ab. Ferroelektrika sind nichtlinear, da bei tiefen Temperaturen  $\mathbf{P}$  bereits für  $\mathbf{E} = 0$  von Null verschieden sein kann.

Man unterscheidet die Dielektrika nach den verschiedenen Typen von Polarisationen, die auftreten können:

- **Eigentliche Dielektrika:** Hier verschieben sich die in einem Teilchen gebundenen positiven und negativen elektrischen Ladungen relativ zueinander, wobei elektrische Dipole erzeugt werden. Man spricht von *Deformationpolarisation*. Die Dielektrizitätskonstante ist von der Stärke des elektrischen Feldes und (bei konstanter Dichte) der Temperatur unabhängig. Helium, Luft oder Kohlendioxid bei Raumtemperaturen sind eigentliche Dielektrika mit  $\varepsilon_r$  sehr nahe bei eins. Zum Beispiel hat Luft mit 1 atm und 18°C eine relative Permittivität  $\varepsilon_r = 1.00059$
- **Paraelektrikum:** Hier besteht die Materie aus permanenten Dipolen. Wasser, dessen H<sub>2</sub>O-Moleküle ein permanentes Dipolmoment besitzen, ist ein Paraelektrikum. In einem äußeren elektrischen Feld haben diese Momente die Energie  $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}$ . Diese wird durch Ausrichtung der Momente in Feldrichtung erniedrigt. Die thermischen Fluktuationen verhindern eine vollständige Ausrichtung. Je tiefer die Temperatur, desto größer ist diese sogenannte *Orientierungspolarisation*. Methylalkohol, Glycerin oder Wasser bei Raumtemperatur sind paraelektrische Stoffe. Bei 18°C haben sie Dielektrizitätskonstanten 31.2, 56.2 und 81.1.
- **Ferroelektrikum:** Hier können sich die permanenten Dipolmomente unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_C$  spontan, d.h. ohne äußeres Feld, ausrichten. Dies ist ein ähnlicher Effekt, wie die spontane Ausrichtung von permanenten magnetischen Dipolen in Ferromagneten, z.B. Eisen. Vertreter dieser Gruppe sind Bariumtitanat oder Kaliumdiwasserstoffphosphat. Ferromagnetische Stoffe sind durch die außerordentliche Größe der erreichbaren Dielektrizitätskonstanten gekennzeichnet. Man kann Werte von etlichen  $10^4$  beobachten. Diese sind aber nicht konstant und hängen von der angelegten Feldstärke und der Vorgeschichte des Stoffes ab. Ferroelektrika zeigen im Feld ein kompliziertes Verhalten und werden im Folgenden nicht mehr betrachtet.

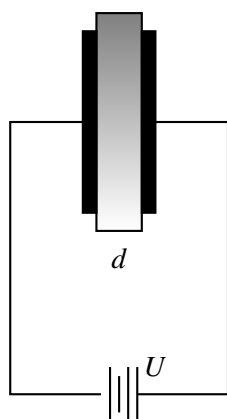
Für lineare Medien setzen wir  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  in die Gleichung für  $\mathbf{D}$  ein und finden

$$\rho_f = \nabla \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi). \quad (4.29)$$

Ist das Medium zusätzlich homogen, dann folgt die Poisson-Gleichung für das gemittelte Potential,

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_f. \quad (4.30)$$

In Isolatoren existieren in guter Näherung keine freien Ladungsträger und das gemittelte Potential



ist harmonisch. Bringen wir ein isotropes Dielektrikum zwischen die Platten eines Kondensators, so erhöht sich dessen Kapazität. Ist die  $x$ -Achse senkrecht zu den (als unendlich groß angenommenen) Platten mit Abstand  $d$ , dann ist das Potential des homogenen Feldes gleich

$$\phi = \frac{U}{d} x.$$

Bei festgehaltener Spannung  $U$  ist die Verschiebungsdichte  $D_m$  mit Materie proportional zur Dielektrizitätskonstante des Mediums zwischen den Kondensatorplatten,

$$\varepsilon_r = \frac{|D_m|}{|D_0|}. \quad (4.31)$$

Bei fester Spannung ist das elektrische Feld zwischen den Platten mit und ohne Medium gleich,  $E_m = E_0$ . Deshalb muss beim Einbringen des Dielektrikums die Ladung auf den Platten um einen Faktor  $\varepsilon$  erhöht werden, um die Abschirmung durch die Polarisationsladungen an den Oberflächen des Dielektrikums zu kompensieren. Dies führt zu einer Zunahme der Kapazität,

$$\varepsilon_r = \frac{\text{Kapazität des mit Materie gefüllten Kondensators}}{\text{Kapazität des leeren Kondensators}}. \quad (4.32)$$

Umgekehrt ist bei abgenommener Spannungsquelle die Ladung  $Q$  auf den Platten konstant und das elektrische Feld auf den Kondensatorplatten ändert nicht. Wegen der Stetigkeit der Normalkomponente von  $D_n$  beim Übergang ins Medium ist die dielektrische Verschiebung dann mit und ohne Medium gleich,  $D_m = D_0$ , und es gilt

$$\varepsilon_r = \frac{|E_0|}{|E_m|}. \quad (4.33)$$

Die Eigenschaft (4.32) ergibt eine Vorschrift zur Messung der Permittivität.

## 4.2 Grenzflächen zwischen Dielektrika

Wir betrachten die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika oder Dielektrikum und Vakuum. Unsere früheren Resultate über die Randbedingungen für Metalle können beinahe unverändert übernommen werden.

Wegen  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  verschwindet auch in Materialien die Ringspannung und

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{an der Grenzfläche,} \quad (4.34)$$

d.h. die *Tangentiale Komponente des elektrischen Feldes ist stetig*. Anstelle von (2.5) finden wir die Übergangsbedingung

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f. \quad (4.35)$$

Sind auf der Grenzfläche keine frei beweglichen Ladungen, so ist die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung  $\mathbf{D}$  stetig. Schließt das elektrische Feld in isotropen Medien ohne frei bewegliche Ladungen mit der Grenzflächennormalen  $\mathbf{n}$  die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ein, so gelten, wie

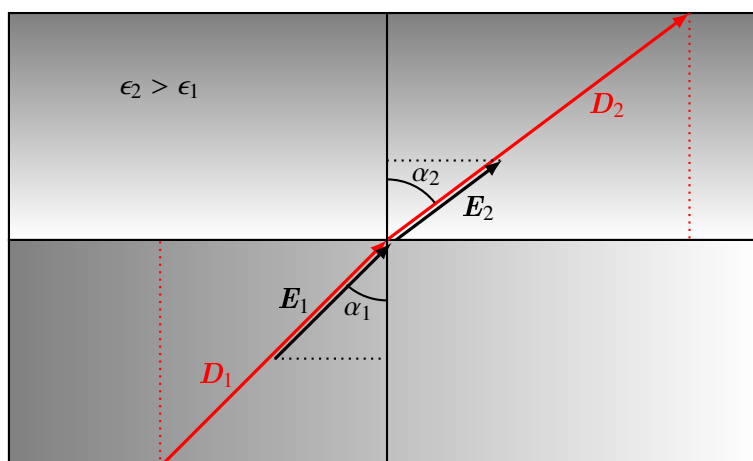


Abbildung 4.3: Beim Übergang in ein elektrisch dichteres Medium werden das  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$ -Feld von der Grenzflächennormalen weggebrochen.

man aus obiger Abbildung leicht abliest, die Relationen

$$|\mathbf{E}_1| \sin \alpha_1 = |\mathbf{E}_2| \sin \alpha_2 \quad , \quad |\mathbf{D}_1| \cos \alpha_1 = |\mathbf{D}_2| \cos \alpha_2. \quad (4.36)$$

Der „Einfallswinkel“ und „Brechungswinkel“ der Feldlinien stehen zueinander in der Beziehung

$$\frac{\tan \alpha_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\epsilon_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\epsilon_{2,r}}{\epsilon_{1,r}}. \quad (4.37)$$

Dieses Brechungsgesetz der elektrischen Kraftlinien weicht von dem optischen Brechungsgesetz auf zwei Arten ab: Es tritt die Tangens anstelle der Sinusfunktion auf und die elektrische Kraftlinie wird beim Eintritt in das elektrisch dichtere Medium von der Einfallsnormale fortgebrochen. Elektrisch dichter wird das Material mit der größeren Dielektrizitätskonstante bezeichnet. Ist Medium 2 elektrisch dichter, so folgt aus Gl. (4.37) in der Tat

$$\tan \alpha_2 > \tan \alpha_1.$$

Der Grenzfall des idealen Leiters mit  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$  ist enthalten. Hier wird  $\alpha_1 = 0$  und die Kraftlinien verlaufen senkrecht zur Leiteroberfläche.

### 4.2.1 Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

Wir betrachten eine dielektrische Kugel mit Radius  $R$  und Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_i$ , eingebettet in einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_a$ . Feld und Potential innerhalb der Kugel tragen den Index  $i$  und außerhalb der Kugel den Index  $a$ . In beiden Dielektrika gilt

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = -\varepsilon\nabla\Phi. \quad (4.38)$$

Die Stetigkeit von  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}$  und  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$  impliziert für das harmonische Potential  $\Phi$  die Übergangsbedingungen

$$\Phi_a|_R = \Phi_i|_R \quad \text{und} \quad \varepsilon_a \frac{\partial\Phi_a}{\partial r}|_R = \varepsilon_i \frac{\partial\Phi_i}{\partial r}|_R. \quad (4.39)$$

Gilt die erste Gleichung an einem Punkt der Kugeloberfläche, dann gilt sie wegen der Stetigkeit von  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}$  an allen Punkten auf der Oberfläche. Aber an einem Punkt können wir immer  $\Phi_a = \Phi_i$  erreichen. Weit weg von der Kugel ist das Feld homogen,

$$\Phi_a(\mathbf{r}) \approx -\mathbf{E}_\infty \cdot \mathbf{r} \quad \text{für} \quad r \gg R. \quad (4.40)$$

Die lineare Funktion  $\mathbf{E}_\infty \cdot \mathbf{r}$  ist eine harmonische Funktion mit  $\ell = 1$ . Deshalb erwarten wir für die Außenlösung eine harmonische Funktion mit  $\ell = 1$ , also eine Linearkombination des homogenen Feldes und eines Dipolfeldes,

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \left( -\mathbf{E}_\infty + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r}, \quad r > R. \quad (4.41)$$

Da am Ursprung kein (makroskopischer) Dipol sitzt, können wir ein konstantes elektrisches Innenfeld mit Potential

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{r}, \quad r < R, \quad (4.42)$$

ansetzen. Die Anschlussbedingungen (4.39) führen auf

$$\mathbf{E}_\infty - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \mathbf{E}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_\infty + \frac{\mathbf{p}}{2\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a} \mathbf{E}_i. \quad (4.43)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man das konstante Innenfeld und das induzierte Dipolmoment der dielektrischen Kugel als Funktionen des angelegten Feldes:

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \mathbf{E}_\infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \mathbf{E}_\infty R^3. \quad (4.44)$$

Speziell für eine Kugel mit dielektrischer Konstante  $\varepsilon$  im Vakuum mit  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$  ist

$$\mathbf{E}_i = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} \mathbf{E}_\infty, \quad \mathbf{D}_i = \frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 2} \varepsilon_0 \mathbf{E}_\infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^3 \mathbf{E}_\infty. \quad (4.45)$$

Durch die Polarisierung wird das elektrische Kraftfeld  $\mathbf{E}$  in einer dielektrischen Kugel schwächer als das primäre Außenfeld. Dies nennt man *Entelektrisierung*. Die Kraftlinien dringen in das Ku-

gelinnere ein. Außen werden sie durch die Wirkung des (virtuellen) Dipolmomentes gekrümmt, während sie innerhalb der Kugel parallel zur  $z$ -Achse verlaufen.

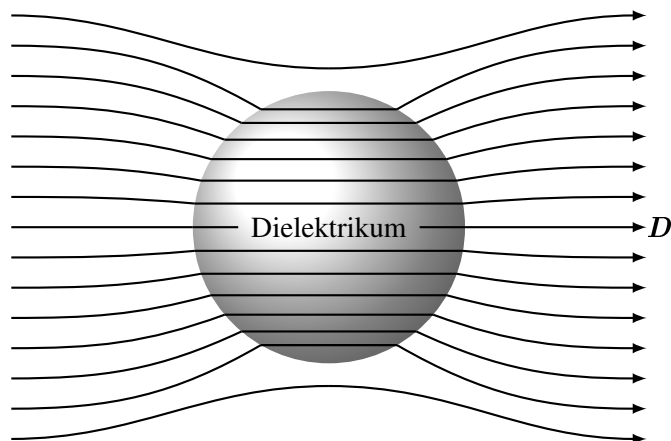


Abbildung 4.4: Eine dielektrische Kugel im Vakuum; Darstellung der quellenfreien Erregungslinien, d.h. der Feldlinien von  $\mathbf{D}$ . Ein Teil der (nicht eingezeichneten) Kraftlinien, d.h. der Feldlinien von  $\mathbf{E}$ , enden an der Oberfläche der Kugel.

Die Feldlinien zu  $\mathbf{D}$ , die so genannten *Erregungslinien*, sind überall quellenfrei, siehe Abbildung (4.4). Das gilt nicht für die *Kraftlinien*, d.h. den Feldlinien zum elektrischen Feld  $\mathbf{E}$ . Der Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow \infty$  beschreibt die ideal leitende Kugel im Vakuum. Dabei ist zu beachten, dass  $\mathbf{D}_i = \varepsilon \mathbf{E}_i$  beim Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow \infty$  endlich bleibt, was mit  $\mathbf{E}_i \rightarrow 0$  verträglich ist. Ist die Dipoldichte in der Kugel annähernd konstant, dann ist die Polarisation in der Kugel gleich dem Dipolmoment dividiert durch das Volumen der Kugel,

$$\mathbf{P} = \frac{3}{4\pi R^3} \mathbf{p}. \quad (4.46)$$

Die Felder  $\mathbf{E}_\infty$ ,  $\mathbf{E}_i$  und  $\mathbf{P}$  sind parallel und wegen (4.43) ist der Unterschied von Innenfeld und asymptotischen Feld proportional zur Polarisation,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_\infty - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3} = \mathbf{E}_\infty - \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}. \quad (4.47)$$

Die Polarisation im Innern der Kugel bewirkt eine Veränderung des mittleren elektrischen Feldes in der Kugel.

Die Entelektrifizierung in einem Dielektrikum hängt von dessen Geometrie ab. In einem Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse parallel zum äußeren Feld liegt, ist das Innenfeld ebenfalls homogen und parallel zum asymptotischen Außenfeld,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_\infty - \frac{N}{\varepsilon_0} \mathbf{P}. \quad (4.48)$$

Die Zahl  $N$  ist geometrieabhängig und heißt *Entelektrifizierungsfaktor*. Sind  $2a$  und  $2b$  die Länge

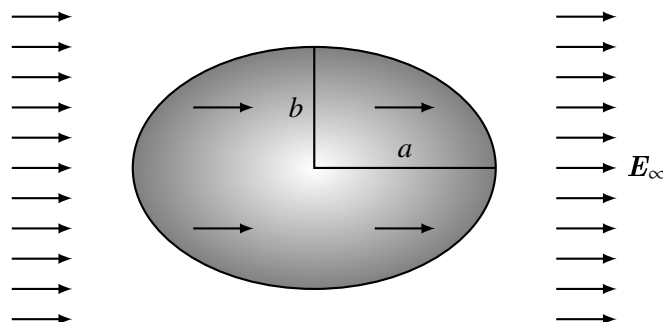


Abbildung 4.5: Das Elektrische Feld in einem dielektrischen Rotationsellipsoid wird abgeschwächt. Die Abschwächung wird durch den Entelektrifizierungsfaktor charakterisiert.

und der Durchmesser des Ellipsoids, dann lautet die Formel für den Entelektrifizierungsfaktor<sup>2</sup> als Funktion der Exzentrizität  $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$

$$N = \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \left( \frac{1}{2} \log \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \varepsilon \right). \quad (4.49)$$

Für die Kugel ist der Faktor  $1/3$  und er verschwindet für einen langen Stab in Richtung des äußeren Feldes. Das Resultat (4.49) ist in der folgenden Abbildung geplottet. Bei einem langen

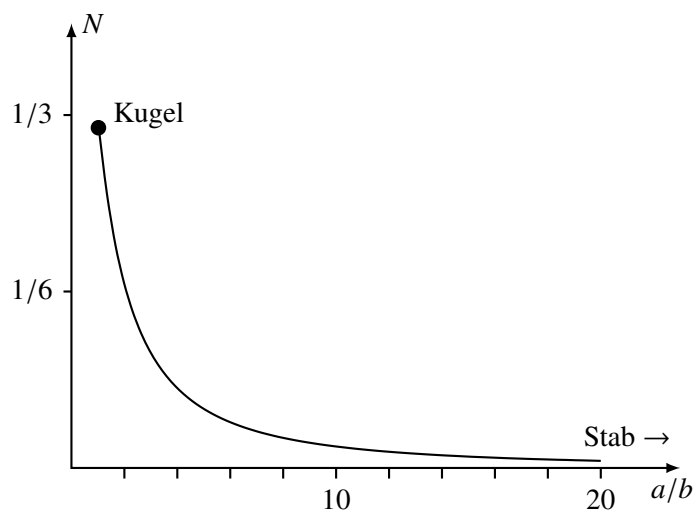


Abbildung 4.6: Die Abhängigkeit des Entelektrifizierungsfaktors eines Rotationsellipsoids von der Geometrie des Körpers. Für die Kugel ist  $N = 1/3$ .

<sup>2</sup>Siehe z.B. A. Sommerfeld „Elektrodynamik“ §13

Stab in Feldrichtung sind die weit voneinander entfernten Polarisationsladungen nicht mehr in der Lage, das Dielektrikum merklich zu entelektrifizieren. Dagegen ist für eine dünne Platte mit  $a/b = 0$  der Entmagnetisierungsfaktor maximal,  $N = 1$ .

Vertauscht man die dielektrische Materie und den leeren Raum, dann ergibt sich ein *kugelförmiger Hohlraum* umgeben von einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$ . Man findet im Hohlraum ein größeres Feld als im Außenraum,

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\varepsilon_r}{1 + 2\varepsilon_r} \mathbf{E}_\infty. \quad (4.50)$$

### 4.3 Clausius-Mosottische Formel

Wir verlassen vorübergehend den phänomenologischen Standpunkt und versuchen, ein molekulares Modell des Dielektrikums zu konstruieren. Für ein unpolares Molekül werden die Ladungen erst nach Anlegen eines elektrischen Feldes getrennt und bilden dann einen Dipol. Das dem äußeren Feld proportionale elektrische Moment  $\mathbf{p}$  ist charakteristisch für das Molekül. In der Beziehung

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.51)$$

ist  $\mathbf{E}$  das angelegte, makroskopisch messbare Feld, das auch bei Abwesenheit der Moleküle vorhanden wäre; der zweite Term ist die Polarisation. Wir wollen  $\mathbf{P}$  aus dem Verhalten der Moleküle im elektrischen Feld bestimmen.

Das Feld  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$  am Ort des Moleküls ist verschieden vom makroskopischen Feld  $\mathbf{E}$ . Im Feld  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$  ist das mittlere Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}, \quad (4.52)$$

wobei  $\alpha$  eine in der Quantenmechanik berechenbare atomare Konstante ist. Bei einer Dichte der Dipole (Atome, Moleküle)  $n$  ergibt sich die Polarisation

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}. \quad (4.53)$$

Wir müssen daher das effektive Feld  $\mathbf{E}_{\text{eff}}$  bestimmen, das auf den Dipol wirkt. Dazu schneiden wir eine Kugel vom Radius  $R$  aus der Materie um den Dipol heraus. Diese Dipole erzeugen, wie wir gerade gesehen haben, ein mittleres Feld

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_\infty = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P},$$

und dieses Feld fehlt nach dem Herausschneiden der Kugel. In Abwesenheit der Kugel ist das Feld  $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{E}_i + \mathbf{P}/3\varepsilon_0$ . Dafür ist das mikroskopische, schnell veränderliche Feld der einzelnen Dipole in der Kugel zu addieren,

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{\text{m,p}}, \quad \mathbf{E}_{\text{m,p}} = \sum_n \frac{3(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{r}_n) \mathbf{r}_n - r_n^2 \mathbf{p}_n}{r_n^5}. \quad (4.54)$$



Die Summe hängt von der Anordnung der Dipole, d.h. von der Kristallstruktur ab. Falls die Dipole auf einem kubischen Gitter sitzen, verschwindet die Summe.<sup>3</sup> Um dies einzusehen, setzen wir

$$\mathbf{r}_n = a\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3,$$

wobei  $a$  die Gitterkonstante ist. Die Summe über die Positionen  $\mathbf{r}_n$  der Teilchen wird zu einer Summe über das ganzzahlige Gitter,

$$\mathbf{E}_{\text{m,p}} = \frac{1}{a^3} \sum_{\mathbf{n}} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}^2 \mathbf{p}}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^{5/2}}. \quad (4.55)$$

Aus Symmetriegründen ist

$$\sum \frac{n_i n_j}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^{5/2}} = 0 \quad \text{für } i \neq j,$$

da sich die Beiträge der Dipole bei  $(n_i, n_j)$  und  $(n_i, -n_j)$  wegheben, und weiterhin ist

$$\sum \frac{n_i^2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^{5/2}}$$

unabhängig von  $i$ . Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. Damit bleibt für ein kubisches Gitter

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}} = n\alpha \left( \mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} \right) = n\alpha \left( 1 + \frac{\chi_e}{3} \right) \mathbf{E}, \quad (4.56)$$

woraus wir ablesen

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0 - n\alpha/3} \quad \text{oder} \quad \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (\text{Clausius-Mosotti}). \quad (4.57)$$

Wir haben die Relation  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$  benutzt. Die letzte Beziehung in (4.57) heißt *Clausius-Mosottische Formel*. Ins Optische übertragen, wobei  $\varepsilon$  das Quadrat des Brechungsindex bedeutet, heißt sie *Lorenz-Lorentzsche Formel*. Erweitern wir die rechte Seite dieser Formel mit  $m$ , der Masse der einzelnen Moleküle, so entsteht

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{\alpha}{m} \rho. \quad (4.58)$$

Die linke Seite ist demnach proportional zur Dichte  $\rho$  des Mediums und der Atomkonstanten  $\alpha/m$ . Für stark *verdünnte Gase* ist  $\varepsilon_r \sim 1$  und entsprechend gilt

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{\alpha}{m\varepsilon_0} \rho. \quad (4.59)$$

<sup>3</sup>Der Beweis stammt von H.A. Lorentz. Für andere Symmetrien ist das Verschwinden der Summe unbewiesen.

## 4.4 Feldenergie im Dielektrikum

Im Vakuum hatten wir in (1.48) für die elektrostatische Energie

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \Phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \quad (4.60)$$

gefunden. Wir hatten uns die endgültige Ladungsanordnung dadurch entstanden gedacht, dass die einzelnen Ladungselemente nacheinander aus dem Unendlichen in das betrachtete Gebiet gebracht werden. Bei Anwesenheit von Dielektrika muss nicht nur Arbeit verrichtet werden, um die makroskopische Ladung an den gewünschten Ort zu bringen, sondern auch, um im Medium einen bestimmten Polarisationsgrad zu erzeugen. Deshalb kann der Ausdruck (1.48) nicht ohne Weiteres übernommen werden. Bei Verschiebung der Ladungsdichte  $\delta\rho = \delta\rho_f + \delta\rho_P$  wird die elektrostatische Energie

$$\int d^3r \delta\rho_f \Phi + \int d^3r \delta\rho_P \Phi \quad (4.61)$$

zugeführt. Gleichzeitig sind in der Materie innere Potentiale  $\Phi_i$  vorhanden, so dass die Polarisation ins Gleichgewicht kommt, das heißt

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_f \Phi + \int d^3r \delta\rho_P (\Phi + \Phi_i).$$

Die Potentialkräfte müssen so beschaffen sein, dass für eine sehr langsame (adiabatische) Verschiebung der Polarisationsladungen  $\delta U = 0$  gilt, damit die Polarisation im Gleichgewicht ist,  $\Phi + \Phi_i = 0$ . Damit folgt

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_f \Phi = \int d^3r \nabla \cdot \delta \mathbf{D} \Phi = - \int d^3r \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi$$

beziehungsweise

$$\delta U = \int d^3r \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}. \quad (4.62)$$

Für lineare Medien ist  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  und die gesamte elektrostatische Energie ist

$$U = \int d^3r u(\mathbf{r}'), \quad u(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (4.63)$$

Die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist  $\varepsilon_0$  und (4.62) vereinfacht auf das frühere Resultat (1.50) für die elektrostatische Energie. Während (4.62) allgemeine Gültigkeit hat, gilt (4.63) nur für lineare Medien mit *konstantem*  $\varepsilon$ .

# Kapitel 5

## Magnetostatik

In diesem Kapitel behandeln wir zeitunabhängige Magnetfelder, auch magnetische Gleichfelder genannt. Dabei geht es um ein Verständnis der räumlichen Verteilung von Magnetfeldern in der Umgebung von Dauermagneten und stationären Strömen. Umgekehrt üben magnetische Felder eine Kraftwirkung auf Magnete und Ströme aus und dieser Effekt wird ebenfalls im vorliegenden Kapitel diskutiert. Die Grundbegriffe der Magnetostatik sind denen der Elektrostatik ähnlich. Der positiven und negativen elektrischen Ladung entsprechen Nordpol und Südpol eines Magneten. Im Gegensatz zur Elektrostatik können magnetische Polstärken allerdings nicht isoliert werden, sondern treten in einem Körper immer zusammen auf. Es gibt keine magnetischen Monopole.

### 5.1 Strom und Stromdichte

Legen wir eine Spannung zwischen den Enden eines metallischen Drahtes an, dann bewegen sich die freien Ladungsträger durch den Draht - es fließt ein elektrischer Strom. Die Ladungsmenge, die pro Zeit einen Querschnitt des Drahtes passiert, definiert den Strom

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (5.1)$$

Sind  $q$  und  $v$  die Ladung und mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger und  $n$  ihre (homogen angenommene) Dichte, dann ist  $Fvdt nq$  die in der Zeit  $dt$  durch den Leiterquerschnitt  $F$  fließende Ladung. Die Stromstärke ist dann

$$I = nFvq. \quad (5.2)$$

Die *Stromdichte*  $\mathbf{j}$  an einem Ort ist ein Vektor, der in die Bewegungsrichtung der elektrischen Ladungsträger zeigt und dessen Betrag die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurch tretende Elektrizitätsmenge misst. Bezeichnet  $d\mathbf{f} = n d\mathbf{f}$  das gerichtete Oberflächenelement,

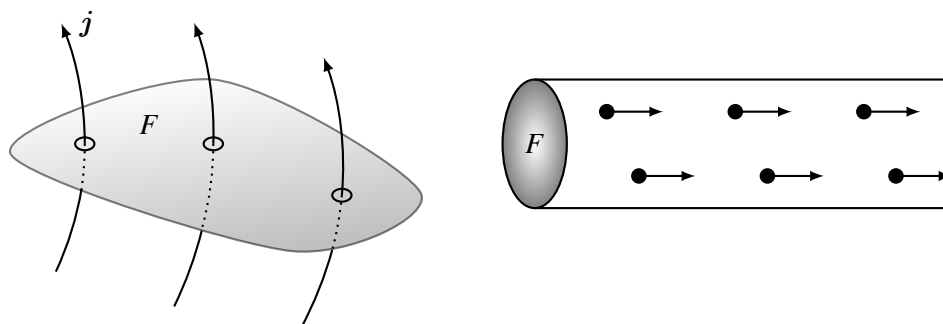


Abbildung 5.1: Der Fluss von  $\mathbf{j}$  durch die Fläche  $F$  ist gleich der Stromstärke.

dann ist der elektrische Strom durch die Fläche  $F$  gleich

$$I = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (5.3)$$

Sind die Ladungsträger Punktteilchen an den Orten  $\mathbf{r}_n(t)$  mit den Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_n(t)$ , dann ist ihre Ladungs- und Stromdichte

$$\rho_m(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{j}_m(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N q_n \mathbf{v}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (5.4)$$

Mitteln wir über mikroskopisch große und makroskopisch kleine Raumbereiche<sup>1</sup>  $V$ , dann erhalten wir die gemittelte Ladungs- und Stromdichte,

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} q_n \quad \text{und} \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} q_n \mathbf{v}_n(t). \quad (5.5)$$

Diese Dichten sind für bewegte Ladungsträger zeitabhängig, da sich deren Orte  $\mathbf{r}_n$  und Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_n$  mit der Zeit ändern. Haben alle Teilchen die gleiche Ladung  $q$ , was bei genügend kleinen Mittelungsvolumen der Fall sein wird, dann gilt

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{V} \sum \mathbf{v}_n = \frac{Nq}{V} \frac{1}{N} \sum \mathbf{v}_n = \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}).$$

Hier ist  $N$  die Anzahl Teilchen in  $V$  und  $Nq$  deren Gesamtladung. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  ist die *mittlere* Geschwindigkeit der Teilchen im betrachteten Raumgebiet.

### 5.1.1 Stromerhaltung

Die elektrische Ladung ist eine Erhaltungsgröße, d.h. in einem *abgeschlossenen System* ändert sie sich nicht. In *offenen Systemen* ist die zeitliche Änderung der Ladung  $q(V)$  in einem Raumbereich

<sup>1</sup>Wir bezeichnen die Raumbereiche und ihre Volumina beide mit  $V$ .

$V$  gleich dem Strom durch die Oberfläche  $\partial V$  des Bereichs,

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(t, \mathbf{r}) + \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (5.6)$$

Wenn die Stromdichte im Mittel aus dem Gebiet heraus zeigt, dann fließt Strom ab und die Ladung in  $V$  nimmt mit der Zeit ab. Für ein festgehaltenes Raumgebiet können wir die Zeitableitung unter das Integral ziehen und erhalten

$$\int_V d^3r \left( \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \right) = 0.$$

Da diese Gleichung für beliebige  $V$  gilt, muss der Integrand verschwinden,

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (5.7)$$

Diese Gleichung ist die wichtige *Kontinuitätsgleichung* der Elektrodynamik.

In der Magnetostatik interessiert nur der stationäre Fall von zeitunabhängigen Ladungs- und Stromdichten, der wegen (5.7)

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5.8)$$

nach sich zieht. In der Magnetostatik ist die Stromdichte quellenfrei. Daraus folgt unmittelbar die *Kirchhoffsche Knotenregel*: An jedem Verzweigungspunkt (Knoten) in einem elektrischen Schaltkreis muss ebenso viel Ladung zu- wie abfließen.

## 5.2 Das magnetische Feld und das Biot-Savart-Gesetz

Ähnlich wie das  $\mathbf{E}$ -Feld definieren wir das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  über seine messbare Kraftwirkung auf Ströme. Zu deren Bestimmung betrachten wir einen stromdurchflossenen, ruhenden dünnen Draht, durch den ein Strom  $I$  fließe. Auf ein kleines Wegelement  $d\mathbf{r}$  des Drahts wirkt eine Kraft  $d\mathbf{F}$ , für die gilt

$$d|\mathbf{F}| \propto I, \quad d|\mathbf{F}| \propto d|\mathbf{r}| \quad \text{und} \quad d\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}. \quad (5.9)$$

Die Kraft kann daher in der Form

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (5.10)$$

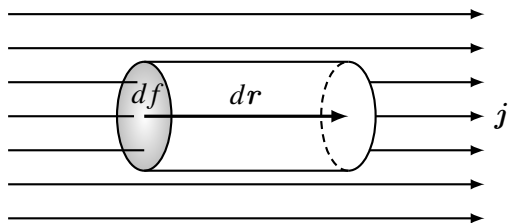
geschrieben werden. Durch diese Relation wird das Vektorfeld  $\mathbf{B}$  als Messgröße definiert. Das so definierte Feld wird *magnetische Induktion* oder auch *magnetische Flussdichte* genannt. In Analogie zu  $\mathbf{E}$ , das ja auch über seine Kraftwirkung auf geladene Probekörper eingeführt wurde, wäre die Bezeichnung magnetische Feldstärke angebrachter. Aber dieser Name ist schon für das weiter unten eingeführte Feld  $\mathbf{H}$  belegt. Oft werden wir  $\mathbf{B}$  einfach magnetisches Feld nennen.

Damit ist die von der magnetischen Induktion auf eine *linienförmige* Stromverteilung ausgeübte

Kraft gleich

$$\mathbf{F} = I \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5.11)$$

Um die *Kraftdichte* zu berechnen, betrachten wir einen kleinen Zylinder mit Volumen  $dV$  im



stromdurchflossenen Gebiet. Die Zylinderachse zeige in Richtung der Stromdichte. Dann zeigt  $d\mathbf{r} = \mathbf{n}|dr|$  in Richtung von  $\mathbf{j}$  und für die Kraft auf den Strom in  $dV$  ergibt sich der einfache Ausdruck

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = j dA |dr| \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV.$$

Definieren wir die Kraftdichte  $\mathbf{f}$  gemäß  $d\mathbf{F} = \mathbf{f} dV$  und setzen ein, dann hebt sich das Volumenelement weg und wir verbleiben mit

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (5.12)$$

Ein Punktteilchen mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  am Ort  $\mathbf{r}$  erfährt im Magnetfeld die *Lorentz-Kraft*

$$\mathbf{F} = \int d^3r' \mathbf{f}(\mathbf{r}') = q \int d^3r' \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5.13)$$

Dies vergleiche man mit der Kraft  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , die ein elektrisches Feld auf eine Probeladung ausübt. Im Magnetfeld erfährt ein geladenes Teilchen eine Kraft proportional zu seiner Ladung  $q$  und dem Betrag seiner Geschwindigkeit. Die Kraft wirkt senkrecht zur Feldrichtung und Geschwindigkeit. Im SI-System haben  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  gleiche Einheiten. Damit hat das Magnetfeld die Einheit Vs/m<sup>2</sup>. Man definiert

$$1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gau\ss} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A s}^2}. \quad (5.14)$$

Die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektrischen und magnetischen Feld ist also bestimmt durch die Anfangsbedingungen und die Lorentz'sche Bewegungsgleichung<sup>2</sup>

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.15)$$

Das Gesetz (5.15) lässt sich durch Ablenkungsversuche an Elektronen- und Ionenstrahlen überprüfen. Ein Magnetfeld hat keinen Einfluss auf den Betrag der Geschwindigkeit,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \right) = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Wir betrachten nun die Bewegung eines geladenen Teilchens im konstanten und in die  $z$ -Richtung

<sup>2</sup>Wir setzen hier  $v \ll c$  voraus.

zeigenden Magnetfelds. Die Komponenten der Bewegungsgleichung (5.15) lauten

$$\frac{dv_1}{dt} = \omega v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\omega v_1, \quad \frac{dv_3}{dt} = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{qB}{m}. \quad (5.16)$$

Die Bewegung in Richtung des Feldes wird durch das magnetische Feld nicht beeinflusst und wir brauchen uns nur um die Bewegung in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld zu kümmern. Die Lösung der beiden ersten Gleichungen in (5.16) ist

$$v_1 = v_0 \cos \omega(t - t_0), \quad v_2 = -v_0 \sin \omega(t - t_0).$$

Nochmalige Integration nach der Zeit ergibt

$$x - x_0 = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0), \quad y - y_0 = \frac{v_0}{\omega} \cos \omega(t - t_0). \quad (5.17)$$

Die Projektion der Bahnkurve auf die Ebene senkrecht zu  $\mathbf{B}$  ist also ein Kreis mit Mittelpunkt  $(x_0, y_0)$  (dies ist nicht der Anfangspunkt der Bahn). Der Kreisradius ist

$$R = \frac{v_0}{\omega}. \quad (5.18)$$

Berücksichtigen wir noch die Bewegung in Feldrichtung, so finden wir als allgemeine Bewegung im homogenen Magnetfeld eine *Schraubenlinie* mit Ganghöhe

$$h = 2\pi \frac{v_3}{\omega}. \quad (5.19)$$

Bei fester Anfangsgeschwindigkeit in Richtung des Magnetfeldes ist die Ganghöhe inverse proportional zur Kreisfrequenz. Diese charakteristische Bewegung ist in Abbildung 5.2 gezeigt.

Nachdem die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  messbar ist, kann experimentell bestimmt werden, welches Magnetfeld ein stromdurchflossener Leiter erzeugt. Am Ort  $\mathbf{r}'$  sei ein stromleitendes Drahtstück  $d\mathbf{r}'$ . Dieses ruft am Aufpunkt  $\mathbf{r}$  einen Beitrag  $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$  zum magnetischen Feld mit den Eigenschaften

$$d|\mathbf{B}| \propto I|d\mathbf{r}'|, \quad |d\mathbf{B}| \propto \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad d\mathbf{B} \perp d\mathbf{r}' \quad \text{und} \quad d\mathbf{B} \perp (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.20)$$

hervor. Demnach gibt jedes einzelne Stromelement  $I d\mathbf{r}' = \mathbf{j}(\mathbf{r}')dV$  am Orte  $\mathbf{r}'$  im Aufpunkt  $\mathbf{r}$  einen Feldbeitrag, der jeweils senkrecht zur Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  und dem Verbindungsvektor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  vom Quellpunkt zum Aufpunkt steht und mit dem inversen Quadrat des Abstandes abnimmt. Diese Eigenschaften können in

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.21)$$

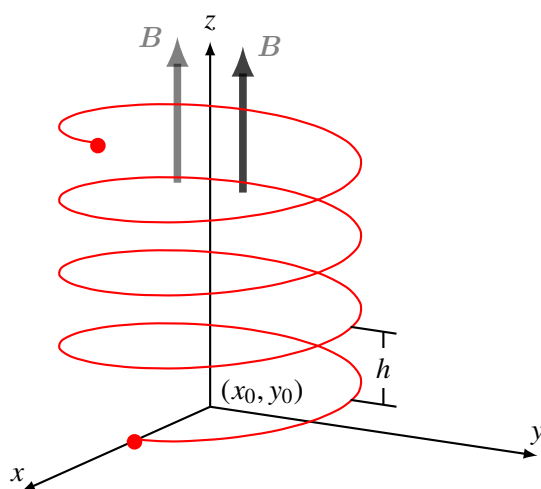


Abbildung 5.2: In einem homogenen Magnetfeld bewegt sich ein geladenes Teilchen auf einer Schraubenlinie mit Symmetrieachse parallel zum Feld.

zusammengefasst werden. Die hier auftretenden Konstante  $\mu_0$  hat die Einheit

$$[\mu_0] = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2}. \quad (5.22)$$

und sie heisst *magnetische Feldkonstante* oder Permeabilität des Vakuums. Hin und wieder findet man auch die Benennung magnetische Konstante oder Induktionskonstante. Sie kann gemessen werden und man findet den Wert

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (5.23)$$

Später werden wir sehen, dass  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  nicht unabhängig sind. Ihr Produkt ist festgelegt durch die Beziehung  $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ .

Wie oben summieren wir nun über die Beiträge aller Drahtstücke und finden

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \quad (5.24)$$

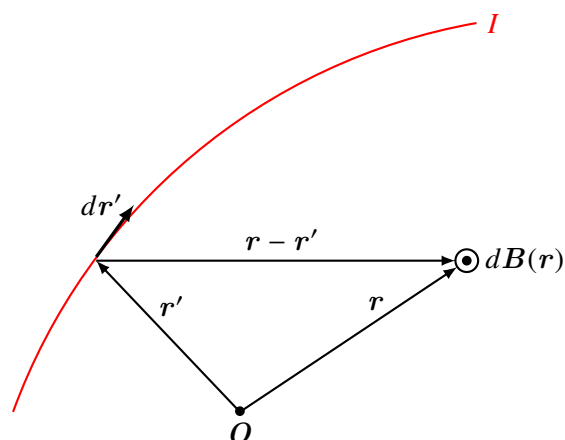
Diese Integraldarstellung für das Magnetfeld legt dieses bei bekannter Stromverteilung und bekannten Randbedingungen eindeutig fest. Sie ist das Gegenstück zur Integraldarstellung des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

und spielt eine zentrale Rolle in der Magnetostatik. Die weiter unten diskutierten Grundgleichungen der Magnetostatik folgen aus (5.24).

Speziell für eine *linienförmige Stromverteilung* müssen wir  $\mathbf{j}(\mathbf{r})dV$  in (5.24) durch  $I d\mathbf{r}$  ersetzen und das Volumenintegral wird zu einem Linienintegral entlang des Drahts,



Abbildung 5.3: Ein Drahtstück  $dr'$  am Ort  $r'$  induziert ein Magnetfeld  $dB$  bei  $r$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (5.25)$$

**Geradliniiger Draht:** Für einen *unendlich langen Draht* entlang der  $z$ -Achse<sup>3</sup> ist  $d\mathbf{r}' = \mathbf{e}_z dz'$  und  $\mathbf{r}' = z' \mathbf{e}_z$ . Entsprechend ist das vom Draht erzeugte Magnetfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} dz' \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \mathbf{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

oder nach Auswertung des Integrals ergibt sich das *Biot-Savart-Gesetz*

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho}. \quad (5.26)$$

In der Literatur wird auch die allgemeinere Formel (5.24) für die magnetische Induktion einer beliebigen Stromverteilung als Biot-Savart-Gesetz bezeichnet.

Ähnlich wie in der Elektrostatik führen wir die Feldlinien des magnetischen Feldes ein. Das  $\mathbf{B}$ -Feld ist tangential zu diesen Feldlinien und die Dichte der Linien ist proportional zur Stärke des Feldes. Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz sind die Feldlinien des durchströmten geraden Drahtes die Kreise um den Draht, siehe Abb. 5.4.

**Stromführender Kreisring:** Als zweites Beispiel betrachten wir das Feld eines von einem Strom  $I$  durchflossenen *Kreisrings* mit Radius  $R$  auf der durch den Kreismittelpunkt gehenden Symmetrieachse. Wir wählen die  $z$ -Achse als Symmetrieachse, so dass der Ring in der  $x-y$ -Ebene

<sup>3</sup>Zeige: Die Stromdichte ist  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_z \delta(\rho)$ .

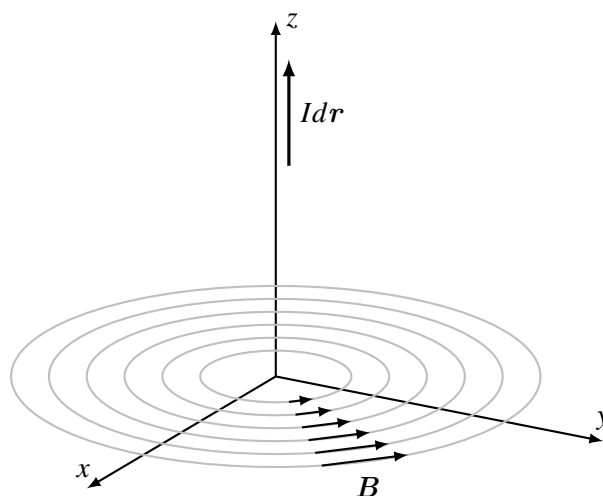


Abbildung 5.4: Die magnetischen Feldlinien sind Kreise um den stromführenden Draht.

liegt. Wegen  $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\rho = -\mathbf{e}_z$  ist das Magnetfeld *auf der Achse* gegeben durch

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int R d\varphi' \mathbf{e}_{\varphi'} \times \frac{z\mathbf{e}_z - R\mathbf{e}_{\rho'}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} IR^2 \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

Wie erwartet, hat das Feld auf der Symmetrieachse nur eine  $z$ -Komponente. Im Zentrum des Rings ist das Magnetfeld maximal,

$$B_z(z=0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}. \quad (5.27)$$

Die Berechnung des Magnetfeldes weg von der Symmetrieachse ist aufwendiger und geschieht am einfachsten mit dem weiter unten eingeführten magnetischen Potential.

**Kräfte zwischen zwei Strömen:** Mit Hilfe von (5.11) und (5.25) findet man für die Kraft zwischen zwei von den Strömen  $I_1$  und  $I_2$  durchflossenen Leitern  $C$  und  $C'$  die explizite Formel,

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_C \int_{C'} d\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (5.28)$$

wobei über die beiden Leiterkurven zu integrieren ist. Als Anwendungsbeispiel berechnen wir die Kräfte zwischen zwei geraden und parallelen Strömen der Länge  $\ell$  im Abstand  $r$ . Das Resultat wird benötigt, um die Ladungseinheit Coulomb=As über eine Kraftmessung zu bestimmen. Der Leiter  $C$  liege in der  $z$ -Achse und der Leiter  $C'$  parallel dazu,

$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = z'\mathbf{e}_z + r\mathbf{e}_x.$$

Es ergibt sich das Integral

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int dz dz' \frac{r}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{\ell}{r}, \quad (5.29)$$

wobei wir  $\ell \gg r$  bei den Integrationen annehmen. Es ergibt sich eine Anziehung bei gleicher Stromrichtung und eine Abstoßung bei einander entgegengesetzter Stromrichtung.

### 5.3 Die Grundgleichungen der Magnetostatik

Wir wollen hier die differentielle Form der wichtigen Gleichung (5.24) ableiten. Wie in der Elektrostatik müssen wir dazu die Quellen und Wirbel des magnetischen Feldes berechnen. Zuerst werden wir sehen, dass das Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (5.30)$$

keine Quellen hat. Wegen

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

ist nämlich

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla \lambda(\mathbf{r}). \quad (5.31)$$

Berücksichtigen wir die Identität  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ , so folgt sofort, dass das magnetische Feld in der Tat quellenfrei ist,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.32)$$

Da die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet, ist das *Vektorpotential*  $\mathbf{A}$  nur bis auf die Addition eines Gradientenfeldes bestimmt. Das Gradientenfeld  $\nabla \lambda$  in (5.31) tritt als „Integrationskonstante“ auf. Wählen wir  $\lambda = 0$ , dann ist das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.33)$$

selbst quellenfrei,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' (\nabla \cdot \mathbf{j})(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0, \end{aligned}$$

da die Stromdichte in der Magnetostatik quellenfrei ist. Das magnetische Feld ist von der *Eichfunktion*  $\lambda$  unabhängig. Die Wahl für  $\lambda$ , für die das Vektorpotential quellenfrei ist, heißt die *Coulomb-Eichung*. Wir werden weiter unten auf die möglichen Eichungen für das elektromagnetische Potential zurückkommen.

Nun müssen wir noch die Wirbel des magnetischen Feldes bestimmen. Wir wählen die Darstellung (5.31) mit dem quellenfreien Vektorpotential (5.33):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Der Wirbel des Magnetfeldes ist also proportional zur elektrischen Stromdichte  $\mathbf{j}$ . Mit (5.32) finden wir die folgenden differentiellen *Grundgleichungen der Magnetostatik*

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (5.34)$$

Die erste Gleichung ist eine homogene, die zweite eine inhomogene Feldgleichung. Die erste Gleichung besagt, dass es in der Natur keine magnetischen Monopolladungen gibt.<sup>4</sup> Für eine lokalisierte Stromverteilung ist die Lösung dieser beiden Grundgleichungen durch (5.24) gegeben. Wir diskutieren nun einige einfache Konsequenzen dieser Gleichungen.

### 5.3.1 Integrale Form der Grundgleichungen

Wir definieren den *magnetischen Fluss* durch eine Fläche  $F$ ,

$$\Phi(F) = \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}. \quad (5.35)$$

Für das quellenfreie  $\mathbf{B}$  verschwindet der Fluss durch jede geschlossene Fläche,

$$\Phi(\partial V) = 0. \quad (5.36)$$

Dieses Gesetz ist die integrale Form der homogenen Grundgleichung der Magnetostatik. In einem beliebig herausgegriffenen Volumen  $V$  verschwinden oder entstehen keine magnetischen Feldlinien – sie sind immer geschlossen.

Da das magnetische Feld Wirbel hat, verschwindet das Linienintegral von  $\mathbf{B}$  längs Schleifen im Allgemeinen nicht. Sei  $F$  eine beliebige Fläche mit Randkurve  $\partial F$ . Wegen

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \int_F d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j} = \mu_0 I(F) \quad (5.37)$$

ist das Linienintegral von  $\mathbf{B}$  längs  $\partial F$  proportional zu dem durch die Fläche  $F$  fließenden Strom. Dieses *Ampere-Gesetz* ist die integrale Form der inhomogenen Grundgleichung der Magnetostatik.

<sup>4</sup>Uns Theoretikern wären magnetische Monopole aus mehreren Gründen sehr willkommen. Gäbe es z.B. im ganzen Universum nur einen einzigen magnetischen Monopol, so wäre die elektrische Ladung automatisch quantisiert.

### 5.3.2 Das Magnetostatische Potential

Es sei  $V$  ein stromfreies Raumgebiet. Dann ist in  $V$  die magnetische Induktion wirbelfrei,  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ , und damit ein Gradientenfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla\Psi(\mathbf{r}). \quad (5.38)$$

Da  $\mathbf{B}$  immer quellenfrei ist, ist das magnetostatische Potential  $\Psi$  harmonisch,

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{in } V. \quad (5.39)$$

Die Funktion  $\Psi$  besitzt gegenüber dem elektrostatischen Potential  $\Phi$  eine Besonderheit. Für das Magnetfeld (5.26) eines stromführenden Drahtes ist wegen  $\nabla = \mathbf{e}_\rho\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi\partial_\varphi + \mathbf{e}_z\partial_z$  das Potential

$$\Psi = -\frac{\mu_0}{2\pi} I\varphi, \quad \rho > 0, \quad (5.40)$$

und damit nicht eindeutig. Bei jedem vollen Umlauf um den Draht ändert es sich um  $\mu_0 I$ . Allgemeiner ist diese *Zirkulation* beim Umlaufen einer Schleife  $C$  proportional zum elektrischen Strom durch  $F$ , wobei  $F$  irgendeine Fläche mit Rand  $\partial F = C$  ist. Gemäß (5.37) ist der Strom für alle Flächen mit derselben Randkurve gleich. Die Zirkulation verschwindet nur, wenn man die Schleife in einem stromfreien Gebiet auf einen Punkt zusammenziehen kann.

Um das Potential im stromfreien Raum zu bestimmen, braucht man die Anschlussbedingungen an Gebiete, wo Strom fließt, typisch sind dies Leiter oder magnetische Materialien. Weiter unten werden wir die makroskopische Magnetostatik diskutieren und physikalische Randbedingungen aufstellen.

### 5.3.3 Das magnetische Feld einer langen Spule

Wir betrachten eine lange Spule mit  $n$  Windungen pro Längeneinheit. Ihre Achse zeige in die  $z$ -Richtung. In guter Näherung sind die einzelnen Drahtwindungen Kreise mit konstantem Radius  $R$  und  $z = \text{const}$ . Der Strom durch das in Abb. 5.5 gezeigte Rechteck ist

$$I(F) = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = nI \cdot \Delta z.$$

Bei einer sehr langen und geraden Spule weiß man, dass das Magnetfeld im Wesentlichen nur im Inneren vorhanden ist und dass es dort parallel zur Spulenachse orientiert ist. Wir wählen die integrale Form der inhomogenen Grundgleichung, um das Feld in der Spule zu berechnen. Als Integrationsweg wählen wir den Rand des Rechtecks in Abb. 5.5. Speziell sollen von den zur Spulenachse parallelen Seiten des Rechtecks der Länge  $\Delta z$  eine innerhalb, die andere außerhalb der Spule liegen. Für das Rechteck gilt

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = B_z \Delta z = \mu_0(F) = \mu_0 nI \Delta z, \quad \text{so dass } B_z = \mu_0 nI. \quad (5.41)$$

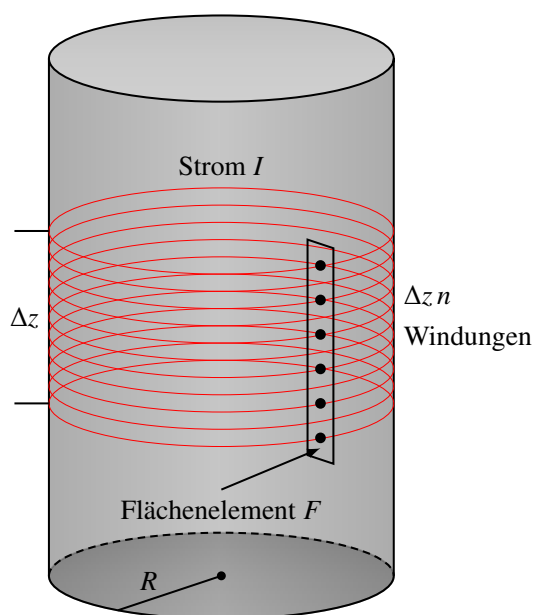


Abbildung 5.5: Zur Berechnung des Magnetfeldes einer Spule.

In den Übungen werden Sie das gleiche Resultat aus Symmetrieüberlegungen und den Grundgleichungen der Magnetostatik ableiten.

## 5.4 Induktionskoeffizienten

Wir betrachten ein System von  $N$  Stromschleifen, in denen die Ströme  $I_1, \dots, I_N$  fließen. Wir beschränken uns auf quasistationäre Ströme, so dass wir die bisher gewonnenen Gesetze anwenden dürfen. Das Magnetfeld ist eindeutig durch die Ströme in den Schleifen bestimmt. Die Beiträge der einzelnen Ströme zum resultierenden Magnetfeld sind den betreffenden Stromstärken direkt proportional und überlagern sich linear. Daher wird auch der Induktionsfluss

$$\Phi(F_i) = \int_{F_i} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}, \quad \partial F_i = C_i, \quad (5.42)$$

durch den  $i$ 'ten Stromkreis<sup>5</sup> eine lineare Funktion der individuellen Stromstärken sein,

$$\Phi(F_i) = \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j. \quad (5.43)$$

Die Faktoren  $L_{ij}$  sind die *Induktivitätskoeffizienten*: Bei  $L_{ii}$  spricht man von *Selbstinduktivität* des  $i$ 'ten Stromkreises und bei  $L_{i \neq j}$  von *wechselseitiger Induktivität*. Bei einem einzelnen Stromkreis

<sup>5</sup>Man erinnere sich daran, dass der Fluss für alle Flächen mit demselben Rand  $\partial F_i$  gleich ist.

vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\Phi = LI \quad (5.44)$$

mit Selbstinduktivität  $L$ . Relativ einfach ist die Berechnung der Selbstinduktivität für eine lange, gerade Spule vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$ . Im Innern der Spule besteht das Feld  $B_z = \mu_0 n I = \mu_0 N I / l$  und daher ist der Induktionsfluss durch  $N$  Spulenschleifen

$$\Phi = \mu_0 N^2 \frac{F}{l} I.$$

Damit wird die Selbstinduktivität der Spule

$$L = \mu_0 N^2 \frac{F}{l}. \quad (5.45)$$

In SI-Einheitensystem wird sie in Vs/A=Henry gemessen.

Auch die Koeffizienten der Wechselinduktion können leicht bestimmt werden.  $L_{ij} I_j$  ist der Anteil des Induktionsflusses, der von dem im Leiter  $j$  fließenden Strom induzierten Magnetfeld  $B_j$  herrührt,

$$L_{ij} I_j = \int_{F_i} d\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{B}_j(\mathbf{r}_i) = \oint_{C_i} \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i.$$

Das vom Leiter  $C_j$  am Orte  $\mathbf{r}$  erzeugte Vektorpotential  $\mathbf{A}_j$  hat nach (5.33) die Darstellung

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_j \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|},$$

und deshalb sind die Koeffizienten der wechselseitigen Induktivität

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad i \neq j. \quad (5.46)$$

Als Anwendung betrachten wir zwei parallele Kreisströme mit Radien  $R_1$  und  $R_2$  im senkrechten Abstand  $h$ , siehe Abb. 5.6. In Zylinderkoordinaten sind

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} R_1 \cos \varphi_1 \\ R_1 \sin \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} R_2 \cos \varphi_2 \\ R_2 \sin \varphi_2 \\ h \end{pmatrix},$$

so dass die im Integral (5.46) auftretenden Größen folgende Form haben,

$$d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = R_1 R_2 \cos(\Delta\varphi) d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos \Delta\varphi,$$

wobei wir den Differenzwinkel  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  einführen. Nach (5.46) ist die gegenseitige Induk-

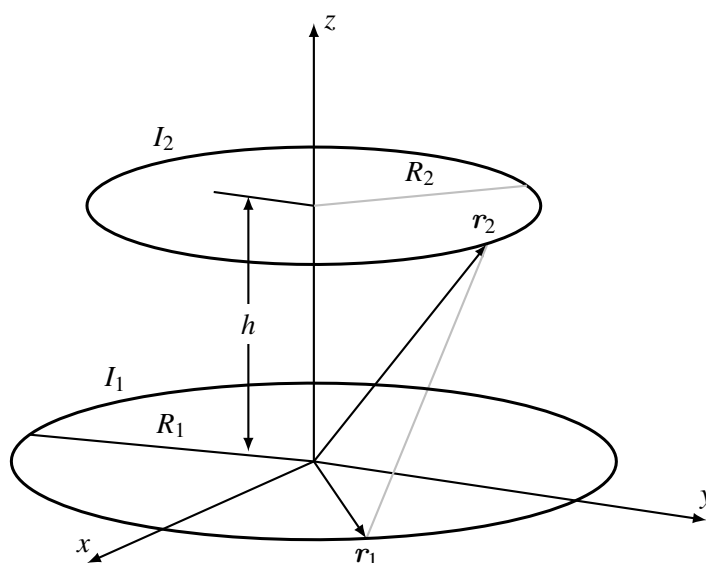


Abbildung 5.6: Zur Berechnung der wechselseitigen Induktion zweier Kreisströme.

tion

$$\begin{aligned}
 L_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\varphi_1 d\varphi_2 \frac{R_1 R_2 \cos \Delta\varphi}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos \Delta\varphi}} \\
 &= \frac{\mu_0}{2} \int d\varphi \frac{R_1 R_2 \cos \varphi}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos \varphi}} .
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Wir verbleiben mit einem elliptischen Integral. Statt die Tabellen (oder ein algebraisches Computerprogramm) zu bemühen, untersuchen wir die extremen Situationen zweier weit voneinander getrennten oder nahe beieinander liegenden Ringe. Im ersten Fall ist  $h \gg R_1, R_2$  und wir können den Nenner in (5.47) nach fallenden Potenzen von  $h$  entwickeln. Der führende Term ist

$$L_{12} \approx \frac{\pi\mu_0}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{h^3}, \quad h \gg R_1, R_2. \tag{5.48}$$

Im zweiten Fall ist  $h \ll R_1, R_2$  und der Nenner kann nach wachsenden Potenzen von  $h$  entwickelt werden. Eine nicht ganz so einfache Rechnung<sup>6</sup> liefert,

$$L_{12} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{R_1 R_2} \left( \log \frac{8\sqrt{R_1 R_2}}{b} - 2 \right), \quad b^2 = h^2 + (R_2 - R_1)^2, \quad h \ll R_1, R_2. \tag{5.49}$$

<sup>6</sup>Siehe z.B. Becker und Sauter, Seite 128.



## 5.5 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine innerhalb einer Kugel vom Radius  $R$  lokalisierten Stromdichte. Ausserhalb der Kugel können wir das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  in (5.33), ähnlich wie das elektrische Potential, in inversen Potenzen von  $r/R < 1$  entwickeln,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{r^3} \int d^3r' x'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \dots \end{aligned} \quad (5.50)$$

Wir erwarten, dass der Monopolbeitrag, d.h. der erste Term auf der rechten Seite, verschwindet, da es in der Elektrodynamik keine magnetischen Monopole gibt. Da durch die Kugeloberfläche kein Strom fließt, folgt für jede Funktion  $g$

$$\begin{aligned} 0 &= \oint d\mathbf{f} \cdot g(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d^3r \nabla \cdot [g(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r})] \\ &= \int d^3r \nabla g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int d^3r g(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.51)$$

In der Magnetostatik ist  $\mathbf{j}$  quellenfrei und es gilt

$$\int d^3r \nabla g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.52)$$

Dieses Resultat verwenden wir, um die Integrale in der Entwicklung (5.50) zu vereinfachen. Mit  $g(\mathbf{r}) = x_i$  folgt

$$\int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.53)$$

und der erste Term in der Entwicklung ist wie erwartet Null. Mit  $g(\mathbf{r}) = x_i x_j$  folgt

$$\int d^3r (x_i j_j(\mathbf{r}) + x_j j_i(\mathbf{r})) = 0.$$

Damit ist

$$\int d^3r x_i j_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r (x_i j_j(\mathbf{r}) - x_j j_i(\mathbf{r}))$$

antisymmetrisch in  $i, j$  und hat die Form

$$\int d^3r x_i j_j(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ijk} m_k. \quad (5.54)$$

Wir lösen nach  $m_k$  auf und finden das *magnetische Dipolmoment*

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (5.55)$$

Ein magnetisches Dipolmoment hat die Einheit Strom  $\times$  Fläche, also  $A \text{ m}^2$ . Eingesetzt in obige Reihenentwicklung für das Potential ergibt sich

$$A_j(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{r^3} \varepsilon_{ijk} m_k + \dots \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (5.56)$$

Mit  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  hat die magnetische Induktion die Entwicklung

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}}{r^5} + \dots \quad (5.57)$$

Dies ist das magnetische Feld eines *magnetischen Dipols*. Es hat die gleiche Form wie das elektrische Feld des elektrischen Dipols,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{p}}{r^5}.$$

Das magnetische Dipolmoment einer Stromschleife ist

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \quad (5.58)$$

Zum Beispiel ist die dritte Komponente

$$m_3 = \frac{I}{2} \oint (x dy - y dx) = I \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi = I f_3,$$

wobei  $f_3$  die Projektion der vom Leiter eingeschlossenen Fläche auf die  $(x, y)$ -Ebene ist. Entsprechendes gilt für die restlichen Komponenten von  $\mathbf{m}$  und damit ist

$$\mathbf{m} = I \mathbf{f}. \quad (5.59)$$

Zur Berechnung des *Dipolmoments von Punktteilchen* setzen wir  $\mathbf{j} = \sum q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  in (5.55) ein mit dem Resultat

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i} \mathbf{L}_i, \quad (5.60)$$

wobei  $m_i$  für die Masse und  $\mathbf{L}_i$  für den Drehimpuls des  $i$ 'ten Teilchens steht. Haben die Teilchen gleiche Masse und Ladung, dann gilt

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} \mathbf{L}, \quad (5.61)$$

wobei  $\mathbf{L}$  der Gesamtdrehimpuls der Teilchen ist. Dieses Resultat gilt für Orbitalströme. Für einen Spin  $\mathbf{s}$  hat man dagegen

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} g \mathbf{s}. \quad (5.62)$$

Für Elektronen ist der gyromagnetische Faktor  $g \sim 2$  und die Komponenten des Spins nehmen nur die Werte  $\pm \hbar/2$  an.

### 5.5.1 Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im Magnetfeld

Ein äußeres Magnetfeld übt auf eine in der Umgebung des Koordinatenursprungs lokalisierte Stromverteilung folgende Lorentz-Kraft aus:

$$\mathbf{F} = \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (5.63)$$

Wir entwickeln das äußere Feld um den Ursprung und finden mit Hilfe von (5.53,5.54) die Entwicklung

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \times \int d^3r x_i \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \times \varepsilon_{ijk} m_k \mathbf{e}_j + \dots,$$

wobei die ersten Ableitungen des Magnetfelds am Ursprung auftreten. Benutzen wir noch  $\varepsilon_{ijk} m_k \mathbf{e}_j = m_k \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_i$ , dann erhalten wir folgenden Ausdruck für die Kraft

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_i) = \left( \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i - \left( \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \right) \mathbf{m}.$$

Der letzte Term verschwindet wegen  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}) = \left( \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i = m_j \frac{\partial B_{\text{ext},j}}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = m_j \frac{\partial B_{\text{ext},i}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext}},$$

wobei wir  $\nabla \times \mathbf{B}_{\text{ext}} = 0$  verwendet haben. Damit ergibt sich für die Kraft auf den magnetischen Dipol die einfache Formel

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad (5.64)$$

ähnlich zur Kraft  $(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}$  auf einen elektrischen Dipol im elektrischen Feld. Diese von einem inhomogenen Magnetfeld auf magnetische Dipole ausgeübte Kraft wird für die Bestimmung der Permeabilität von magnetischen Stoffen ausgenutzt.

Für das *mechanische Drehmoment* auf den magnetischen Dipol findet man

$$\mathbf{M}_{\text{mech}} = \frac{1}{c} \int d^3r \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}) = -\frac{1}{c} \mathbf{B}_{\text{ext}} \int d^3r \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c} \int d^3r (\mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}.$$

Das erste Integral verschwindet<sup>7</sup> und das zweite Integral ergibt

$$\mathbf{M}_{\text{mech}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad (5.65)$$

analog zum Drehmoment  $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$  auf einen elektrischen Dipol. Im mechanischen Gleichgewicht stellt sich ein magnetisches Moment  $\mathbf{m}$  parallel zu  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ . Das von einem Magnetfeld auf eine kleine Kompassnadel ausgeübte Drehmoment kann man mit einer Schneckenfederwaage messen und auf diese Weise das Magnetfeld am Ort der Magnetnadel bestimmen (siehe z.B. Pohls „Einführung in die Physik“, Band 2).

<sup>7</sup>Man wähle  $g = r^2/2$  in (5.52).

## 5.6 Magnetismus in Materie

Wir berechnen das makroskopische Feld eines magnetisierbaren Körpers durch Mittelbildung. Die Mittelung soll, wie im letzten Kapitel ausführlich dargelegt wurde, mit den Ableitungen vertauschen.

### 5.6.1 Makroskopische Grundgleichungen

Das mikroskopische Feld  $\mathbf{B}_m$  ist quellenfrei und sein Wirbelfeld ist proportional zur mikroskopischen Stromdichte  $\mathbf{j}_m$ . Durch Mittelung gewinnen wir die Feldgleichungen für das *gemittelte Feld*  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_m \rangle$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (5.66)$$

Wie sieht die gemittelte Stromdichte  $\mathbf{j} = \langle \mathbf{j}_m \rangle$  aus? Sie enthält drei Bestandteile: Die Stromdichte  $\mathbf{j}_f$  der frei beweglichen Ladungsträger, die Stromdichte  $\mathbf{j}_P$  der sich zeitlich ändernden Polarisationsladungen und die Magnetisierungsstromdichte  $\mathbf{j}_{\text{mag}}$ , die aus der Bewegung der Atomelektronen um ihre Kerne resultiert:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_{\text{mag}}. \quad (5.67)$$

Die Stromdichte  $\mathbf{j}_P$  und Ladungsdichte  $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  der Polarisationsladungen genügen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_P + \nabla \cdot \mathbf{j}_P = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} + \mathbf{j}_P \right) = 0. \quad (5.68)$$

Die *Polarisationsstromdichte*

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}$$

spielt in der Magnetostatik keine Rolle. Bei zeitabhängigen Phänomenen in der Elektrodynamik werden wir aber auf diese Relation zurückkommen müssen.

Wir veranschaulichen nun die Magnetisierungsstromdichte anhand eines vereinfachten Materiemodells: Die magnetischen Dipolmomente der Atome seien ebene Ringströme mit Flächenvektor  $\mathbf{f}$  und Stromstärke  $i$ , vgl. (5.59). Die Atomdichte sei  $n$ . Wir wollen nun die Stromdichte  $I$  berechnen, die durch ein Rechteck  $F$  der Seitenlängen  $L_y$  und  $L_z$  hindurch tritt, siehe Abb. 5.7. Natürlich gibt der Strom der freien Ladungsträger einen Beitrag  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_f$ . Aber auch die atomaren Kreisströme  $i$  können einen Beitrag liefern, allerdings nur von denjenigen Atomen, deren Fläche  $f$  von einer der vier Rechteckseiten von  $F$  durchbohrt wird; denn nur bei diesen Atomen tritt der atomare Ringstrom  $i$  gerade einmal durch die Fläche  $F$  hindurch. Es sei nun  $V$  ein mikroskopisch großes und makroskopisch kleines Mittelungsvolumen und  $N$  die Anzahl der darin enthaltenen atomaren Kreisströme. Dann sind

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} \mathbf{m}_n \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} \mathbf{m}_n = n \bar{\mathbf{m}} \quad (5.69)$$

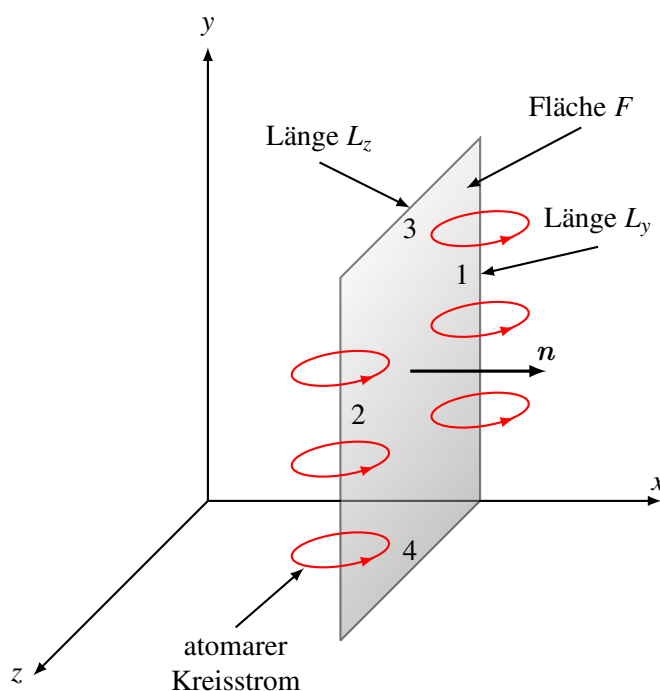


Abbildung 5.7: Ampèresche Molekularströme.

das mittlere Dipolmoment und die *Magnetisierung*. Die Magnetisierung ist das mittlere magnetische Moment pro Volumen.

Der Beitrag zur  $x$ -Komponente des Stromes von allen Atomen, deren Fläche von der Rechteckseite 1 in Abb. 5.7 durchbohrt wird, ist

$$I_{\text{mag},x} = \bar{i} n \bar{f}_y L_y = \bar{m}_y n L_y = M_y L_y,$$

wobei wir (5.59) benutzten. In gleicher Weise finden wir als Beitrag der gegenüberliegenden Rechteckseite 2 in Abb. 5.7 den Wert  $-M_y L_y$ , wobei aber der Wert von  $M_y$  an der Stelle  $z = L_z$  einzusetzen ist. Damit liefern die beiden parallel zur  $y$ -Achse laufenden Rechteckseiten den Beitrag

$$L_y M_y(z=0) - L_y M_y(z=L_z) \sim -L_y L_z \frac{\partial M_y}{\partial z}.$$

Ganz analog erhalten wir von den beiden anderen Rechteckseiten den Beitrag

$$-L_z M_z(y=0) + L_z M_z(y=L_y) \sim L_y L_z \frac{\partial M_z}{\partial y}.$$

Somit ergibt sich für den von atomaren Kreisströmen herrührenden Magnetisierungsstrom in die

$x$ -Richtung

$$I_{\text{mag},x} = L_y L_z (\mathbf{j}_{\text{mag}})_x = L_y L_z \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) = L_y L_z (\nabla \times \mathbf{M})_x.$$

Mit den entsprechenden Ausdrücken für die  $y$  und  $z$ -Richtung findet man schlussendlich die von den Magnetisierungsströmen herrührende Stromdichte

$$\mathbf{j}_{\text{mag}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (5.70)$$

Dieses Resultat für  $\mathbf{j}_{\text{mag}}$  kann auch aus der Mittelung der Grundgleichungen in der Dipolnäherung abgeleitet werden. Die entsprechende Vorgehensweise ist ähnlich wie in der Elektrostatik in polarisierbaren Medien. Wir können uns also etwas kürzer fassen: Das mikroskopische magnetische Potential eines Mediums erhalten wir in der Dipolnäherung durch Aufsummieren der Ausdrücke (5.56) über alle Elementarmagnete des Mediums,

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \mathbf{m}_n \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{M}_m(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

wobei wir die mikroskopische Magnetisierung

$$\mathbf{M}_m(\mathbf{r}) = \sum \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$$

eingeführt. Wir mitteln wieder mit einer Glättungsfunktion  $f$  über mikroskopisch große, aber makroskopisch kleine Gebiete, um ein mittleres, geglättetes Potential zu gewinnen,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 u \int d^3 r' f(\mathbf{u}) \mathbf{M}_m(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Hier setzen wir  $\mathbf{r}' + \mathbf{u} = \mathbf{r}''$  mit dem Resultat

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r'' \int d^3 u f(\mathbf{u}) \mathbf{M}_m(\mathbf{r}'' - \mathbf{u}) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Bei der letzten Umformung haben wir  $\mathbf{r}''$  in  $\mathbf{r}'$  umbenannt und die *Magnetisierung*

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \int d^3 u f(\mathbf{u}) \mathbf{M}_m(\mathbf{r} - \mathbf{u}) \quad (5.72)$$

eingeführt. Für die erste Glättungsfunktion in (4.2) ist die Magnetisierung in (5.69) gegeben. Mit den magnetischen Momenten  $\mathbf{m}_n$  wird auch  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  durch innere und äußere Felder beeinflusst. Ähnlich der Polarisation muss  $\mathbf{M}$  mit Hilfe von Materiemodellen berechnet werden.

Schreiben wir den letzten Faktor unter dem Integral in (5.71) als Gradient des Coulombpoten-

tials (bezüglich der gestrichenen Koordinaten) und integrieren partiell, dann erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.73)$$

Mithilfe der Identität

$$\int_V \nabla \times \mathbf{M} d^3r = - \oint_{\partial V} \mathbf{M} \times d\mathbf{f} \quad (5.74)$$

wird der Term nach dem Gleichheitszeichen in (5.73) zu einem Oberflächenintegral und

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{f}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.75)$$

mit dem nach außen gerichteten Oberflächenelement  $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$ . Wie ein Vergleich mit (5.33) zeigt, liefert das letzte Integral genau den Feldbeitrag der Stromdichte  $\mathbf{j}_{\text{mag}}$  in (5.70). Das erste Glied liefert einen Beitrag der Dichte des Oberflächenstromes, nämlich

$$\mathbf{j}_{\text{mag}_O}(\mathbf{r}) = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \quad (5.76)$$

Vernachlässigen wir diesen Oberflächenbetrag, so gelangen wir zu folgender gemittelten Gleichung in magnetisierbaren Medien,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{mag}} = \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}. \quad (5.77)$$

Das Auftreten der Rotation von  $\mathbf{M}$  auf der rechten Seite legt nahe, diesen Term auf die linke Seite zu bringen und

$$\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (5.78)$$

einzuführen. Das somit definierte Feld  $\mathbf{H}$  heißt *magnetische Feldstärke* und hat die Einheit A/m.

Die *gemittelten Grundgleichungen* der Magnetostatik enthalten dann die Stromdichte der freien Ladungsträger sowie das  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  Feld:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f. \quad (5.79)$$

Das magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  wird nur durch Ströme der freien Ladungsträger erzeugt, bei der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  tragen auch die Felder von magnetisierbaren Substanzen bei.

Für paramagnetische und diamagnetische Substanzen besteht für nicht zu große Feldstärken ein linearer Zusammenhang zwischen Magnetisierung und magnetischer Feldstärke:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \implies \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0 \mu_r, \quad \mu_r = 1 + \chi_m, \quad (5.80)$$

wobei  $\chi_m$  als *magnetische Suszeptibilität* und  $\mu_r$  als *relative Permeabilität* bezeichnet werden.

**Diamagnetische Stoffe:** Bei ihnen ist  $\mu_r$  kleiner als 1 und im Allgemeinen unabhängig von der Temperatur. Wasser hat zum Beispiel  $\chi_m \approx -9.04 \cdot 10^{-6}$ . Die Magnetisierung als auch das magnetische Moment der einzelnen Atome und Moleküle ist also dem magnetischen Feld entgegen

gerichtet. Beim Einschalten des äußeren Feldes werden in den Teilchen Ringströme induziert, deren magnetische Momente der Richtung von  $\mathbf{B}$  entgegengesetzt sind.<sup>8</sup> Wegen (5.64) werden diamagnetische Stoffe stets aus dem Gebiet hoher Feldstärke heraus gedrängt. Ein vollständiger Diamagnetismus liegt beim *Supraleiter erster Art* vor. Dort wird durch Oberflächenströme die magnetische Induktion vollständig aus dem Material verdrängt, d.h.  $\mathbf{B} = 0$  im Supraleiter.

**Paramagnetische Stoffe:** Bei ihnen ist  $\mu$  größer als 1 und in der Regel umgekehrt proportional der absoluten Temperatur  $T$ . Zum Beispiel ist  $\chi_m$  für Aluminium bei 20°C etwa  $\chi_m \approx 2.1 \cdot 10^{-5}$ . In paramagnetischen Stoffen besitzen die Teilchen schon unabhängig vom angelegten Feld ein permanentes magnetisches Moment. Die zugehörigen Elementarmagnete werden durch das äußere Feld teilweise ausgerichtet. Je tiefer die Temperatur, desto leichter ist es, die Magnete gegen die thermische Unordnung auszurichten. Wegen (5.64) werden paramagnetische Stoffe im Gegensatz zu den diamagnetischen in das Gebiet hoher Feldstärke hineingezogen.

**Ferromagnetische Stoffe:** Bei ihnen wird unterhalb einer kritischen Temperatur, der so genannten Curie-Temperatur,  $\mu_r$  wesentlich größer als 1 und vor allem sehr stark feld- und temperaturabhängig. Die Magnetisierung ändert sich nicht mehr linear mit  $\mathbf{B}$  bzw. mit  $\mathbf{H}$ , sondern erreicht bei relativ niedrigen Feldstärken eine *Sättigung*. Für weiches Eisen ist der Sättigungswert für  $\mathbf{B}$  bei etwa 2,1 Tesla. Im Gegensatz zur Sättigungsmagnetisierung ist die Magnetisierungskurve von der Vorgeschichte der Materialprobe abhängig (Hysterese).

### 5.6.2 Grenzflächen

Aus der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion folgt die Stetigkeit der Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \quad (5.81)$$

Bei unterschiedlichen Permeabilitäten gilt das aber nicht mehr für die magnetische Feldstärke,

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0. \quad (5.82)$$

Fließen an der Grenzfläche keine Oberflächenströme, so ist die Tangentialkomponente der Feldstärke stetig,

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0. \quad (5.83)$$

An der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen magnetischen Substanzen ist daher die Tangentialkomponente der magnetischen Induktion unstetig,

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_1. \quad (5.84)$$

<sup>8</sup>Die Induktion eines elektrischen Feldes durch ein zeitabhängiges magnetisches Feld wird allerdings erst im nächsten Kapitel besprochen und wir können vorerst nur qualitative Aussagen machen.



Das Brechungsgesetz (4.10) der elektrischen Kraftlinien überträgt sich auf die magnetischen Erregungslinien; es lautet bei gleicher Bedeutung der Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  wie dort

$$\frac{\tan \alpha_1}{\mu_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\mu_2}. \quad (5.85)$$

Jede  $\mathbf{B}$ -Linie wird beim Eintritt in das permeablere Medium<sup>9</sup> vom Einfallslot fortgebrochen.

### 5.6.3 Kugel im homogenen Magnetfeld

Die in der Elektrostatik entwickelten Lösungsmethoden können unmittelbar in die Magneto- statik übertragen werden. Als Beispiel betrachten wir eine magnetische Kugel im homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B}_\infty$ . Außerhalb der Kugel sei  $\mu_r = 1$ . Im Inneren derselben entsteht ein homogenes Feld und das äußere Feld wird inhomogen, weil zum ursprünglichen Feld das Feld eines im Kugelmittelpunkt zu denkenden virtuellen magnetischen Moments  $\mathbf{m}$  hinzukommt, dessen Achse in der Feldrichtung liegt. Für die explizite Rechnung benutzen wir, dass wir in der Abwesenheit von freien Ladungsträgern

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi \quad (5.86)$$

setzen dürfen. Für lineare isotrope Medien ist dann  $\mathbf{B} = -\mu\nabla\Psi$  und für homogene Materialien mit ortsunabhängigem  $\mu$  gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu\Delta\Psi = 0, \quad \text{d.h.} \quad \Delta\Psi = 0. \quad (5.87)$$

Wir machen den Ansatz

$$\Psi(r > R) = \left( \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m}}{r^3} - \mathbf{H}_\infty \right) \cdot \mathbf{r}, \quad \Psi(r < R) = -\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{r}.$$

Die Stetigkeit des magnetostatischen Potentials verlangt

$$\lim_{r \rightarrow R} \Psi(r > R) = \lim_{r \rightarrow R} \Psi(r < R) \implies \frac{\mathbf{m}}{4\pi R^3} - \mathbf{H}_\infty = -\tilde{\mathbf{H}}. \quad (5.88)$$

Sie impliziert gleichzeitig die Stetigkeit der Tangentialkomponente der Feldstärke  $\mathbf{H}$ . Die Stetigkeit von  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$  an der Kugeloberfläche bedeutet

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi|_{\text{außen}} = \mu_r \frac{\partial}{\partial r} \psi|_{\text{innen}} \implies \frac{\mathbf{m}}{2\pi R^3} + \mathbf{H}_\infty = \mu_r \tilde{\mathbf{H}}. \quad (5.89)$$

Diese beiden Anschlussbedingungen am Kugelrand bestimmen das virtuelle magnetische Moment  $\mathbf{m}$  am Ursprung. Für die Polarisierung, d.h. die mittlere Dipoldichte in der Kugel, erhalten wir dann

$$\mathbf{M} = \frac{3}{4\pi R^3} \mathbf{m} = 3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \mathbf{H}_\infty.$$

<sup>9</sup>Je größer  $\mu_r$  in einem Material, desto permeabler ist es.

Damit finden wir die magnetische Induktion außerhalb und innerhalb der Kugel

$$\mathbf{H}(r > R) = \mathbf{H}_\infty + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{R^3}{r^3} (3(\mathbf{H}_\infty \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{H}_\infty) \quad (5.90)$$

$$\mathbf{H}(r < R) = \frac{3}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_\infty, \quad (5.91)$$

wobei  $\hat{\mathbf{r}}$  das nach außen gerichtete Normalenvektorfeld an der Kugeloberfläche ist. Ausserhalb der Kugel ist der Ausdruck für die magnetische Induktion identisch zu demjenigen für  $\mathbf{H}$  in (5.90), wenn wir rechts  $\mathbf{H}_\infty$  durch  $\mathbf{B}_\infty$  ersetzen. Innerhalb der Kugel ist die magnetische Induktion

$$\mathbf{B}(r < R) = \frac{3\mu_r}{2 + \mu_r} \mathbf{B}_\infty, \quad (5.92)$$

für diamagnetische Medien mit  $\mu_r < 1$  schwächer als außerhalb. Für paramagnetische Medien wird sie in der Kugel verstärkt.

Nun werde ein magnetisierbares Rotationsellipsoid ( $\mu_r > 1$ ) so in ein homogenes Feld  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$  gebracht, dass seine Achse mit der Richtung von  $\mathbf{H}_0$  zusammenfällt. Dann ist die Magnetisierung im Innern ebenfalls homogen und es gilt analog zur Gleichung (4.48)

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_\infty - N \mathbf{M}. \quad (5.93)$$

Der *Entmagnetisierungsfaktor* der Kugel ist  $1/3$ . Bis auf den Fall  $N = 0$  ist das Magnetfeld im Inneren von magnetisierbaren Stoffen gegenüber dem von außen angelegten Feld abgeschwächt. Mit  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_i$  findet man für die Magnetisierung des Stoffes die Formel

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{1 + N\chi_m} \mathbf{H}_\infty. \quad (5.94)$$

Der Faktor  $N$  hängt von der Form des Rotationsellipsoiden ab und diese Abhängigkeit ist in (4.49) gegeben. Für die magnetische Feldstärke und Induktion im Innern des Ellipsoiden findet man

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{1 + N\chi_m} \mathbf{H}_\infty \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_i = \frac{\mu_r}{1 + N\chi_m} \mathbf{B}_\infty. \quad (5.95)$$

Für einen langen, dünnen Stab ist  $N = 0$  und daher  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_\infty$ . Wie bei einer mit Material voll ausgefüllten Spule tritt keine Entmagnetisierung auf und  $\mathbf{B}_i = \mu_r \mathbf{B}_0$ . Für eine Kugel ist  $N = 1/3$  und man findet die magnetische Induktion (5.92) im Innern der Kugel. Für eine flache Scheibe ist  $N = 1$  und entsprechend  $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_\infty$ .

# Kapitel 6

## Maxwell-Gleichungen

### 6.1 Induktionsgesetz

FARADAY beobachtete 1831, dass in einer Leiterschleife  $C$  ein elektrischer Strom entsteht, wenn ein in der Nähe befindlicher Magnet bewegt oder die Leiterschleife im Magnetfeld bewegt wird.<sup>1</sup> In beiden Fällen gilt das *Induktionsgesetz*

$$V_{ind} = IR = -\frac{d}{dt} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = -\frac{d}{dt} \Phi(F), \quad \partial F = C. \quad (6.1)$$

Hier ist  $V_{ind}$  die induzierte Ringspannung und  $R$  der Drahtwiderstand<sup>2</sup>. Für eine bewegte Leiterschleife  $C$  kann sich der magnetische Fluss durch die von der Schleife berandete Fläche  $F$  aufgrund der Bewegung ändern. Für eine ruhende Schleife kann sich der Fluss ändern, wenn das Magnetfeld zeitabhängig ist. Im Allgemeinen wird die Änderung des Flusses vom zeitabhängigen Magnetfeld und der Bewegung der Leiterschleife herrühren.

Die *erste Fassung des Induktionsgesetzes* für eine im Magnetfeld bewegte Leiterschleife können wir aus der Lorentz-Kraft  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  auf ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld ableiten. Bewegen wir einen Metalldraht mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in einem Magnetfeld, so machen die Leitungselektronen im Draht diese Bewegung mit und erfahren dabei eine *eingeprägte Lorentz-Kraft*

$$q\mathbf{E}_{ind} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (6.2)$$

Die längs der Leiterschleife  $C$  induzierte Spannung beträgt

$$V_{ind} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}.$$

---

<sup>1</sup>Etwas gleichzeitig und unabhängig von FARADAY entdeckte auch HENRY die gleiche Erscheinung.

<sup>2</sup>Wir benutzen das Ohmsche Gesetz, nach dem die Stromstärke gleich der Spannung dividiert durch den Widerstand des Leiters ist.

Ist der Drahtwiderstand gleich  $R$ , so können wir für den induzierten Strom die Beziehung

$$IR = V_{ind} = \oint_C \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (6.3)$$

angeben. Wir wollen nun einsehen, dass der letzte Term proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch Flächen mit veränderlicher Randkurve  $C$  ist. Dazu betrachten wir

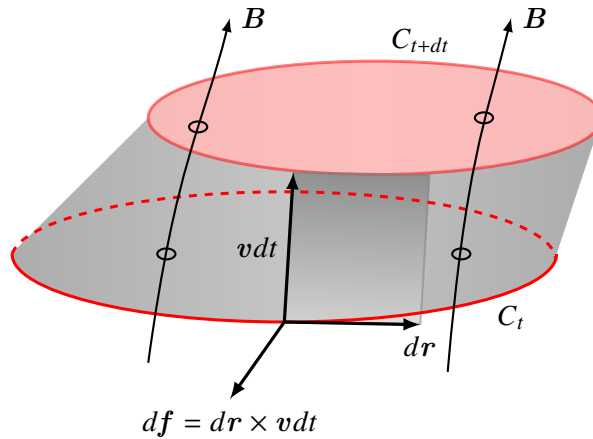


Abbildung 6.1: Änderung des magnetischen Flusses durch eine bewegte Fläche.

die Abb. 6.1, welche die Lagen des Drahttrings zur Zeit  $t$  ( $C_t$ ) und zur Zeit  $t+dt$  ( $C_{t+dt}$ ) darstellt. Das Vektorprodukt  $d\mathbf{r} \times vdt$  hat den Betrag des von  $d\mathbf{r}$  und  $vdt$  aufgespannten Flächenelements  $d\mathbf{f}$  und die Richtung der nach außen zeigenden Normalen. Es gilt also

$$dt \oint_{C_t} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \oint (d\mathbf{r} \times vdt) \cdot \mathbf{B} = \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = \Phi(\text{Mantelfläche}),$$

wobei das letzte Flächenintegral über die von  $C_t$  und  $C_{t+dt}$  berandete Mantelfläche zu erstrecken ist. Wegen der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion verschwindet der gesamte magnetische Fluss durch die Mantelfläche, Grundfläche und Deckfläche. Also ist

$$dt \oint \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{r} = -\Phi(\text{Deckfläche}) + \Phi(\text{Grundfläche}) = -\Phi(C_{t+dt}) + \Phi(C_t).$$

Dividieren wir durch das Zeitintervall  $dt$ , so ergibt sich das *Induktionsgesetz für bewegte Leiter*

$$\oint_{C_t} \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{d}{dt} \Phi(F_t), \quad \partial F_t = C_t. \quad (6.4)$$

Beim Induktionsgesetz sollte es nur auf die *Relativbewegung* zwischen dem das Magnetfeld erzeugenden Magneten und dem Drahtring ankommen. Für die Ladungsträger im Drahtring ruht der Draht und das Magnetfeld ändert sich mit der Zeit. In einem ruhenden Drahtring, in des-

sen Nähe sich ein Magnet bewegt, sollte also ebenfalls ein Strom entstehen. Dies wird oft als die *zweite Fassung des Induktionsgesetzes* bezeichnet. Da eine ruhende Ladung in einem Magnetfeld keine Kraft erfährt, bleibt als Deutungsmöglichkeit nur die Annahme, dass durch die zeitliche Änderung des Magnetfeldes ein elektrisches Feld mit Wirbeln (da die Ringspannung nicht verschwindet) induziert wird,

$$IR = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Der Vergleich mit dem Faraday'schen Induktionsgesetz zeigt, dass die elektrische Ringspannung proportional dem *magnetischen Schwund*<sup>3</sup> ist:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = -\int d\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.5)$$

Aus dieser Formel ist der materialabhängige Widerstand  $R$  verschwunden, und dies legt die

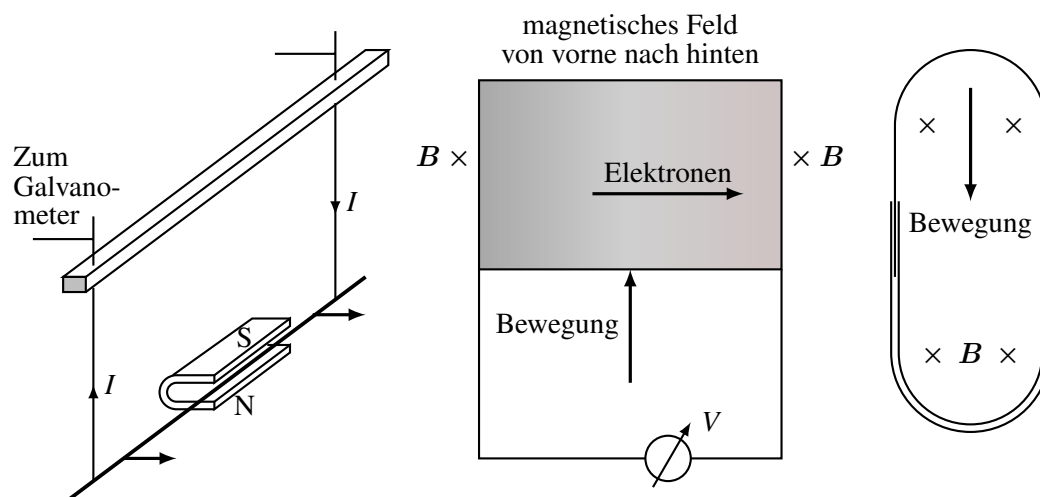


Abbildung 6.2: Induktion durch Bewegung eines Stromleiters im Magnetfeld (links), Induktionsspannung in einem Metall (mittig) und Induktionsstrom bei Änderung der Fläche (rechts).

Verallgemeinerung der zunächst nur für den Drahring gültigen Beziehung (6.5) nahe. Wir nehmen nun an, dass das Vorhandensein des Drahtes unwesentlich ist und die Ringspannung für jede geschlossene Kurve  $C$  durch (6.5) wiedergegeben wird. Wenn diese Beziehung für jedes Flächenelement gilt, dann können wir mit  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$  auf die differentielle Form des Induktionsgesetzes schließen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (6.6)$$

Zeitlich variierende Magnetfelder induzieren also elektrische Wirbelfelder und entsprechend ist

<sup>3</sup>Die zeitliche Abnahme des magnetischen Flusses,  $-d\Phi/dt$ , heißt magnetischer Schwund.

das elektrische Feld dann kein Gradientenfeld mehr wie in der Elektrostatik.

Bewegen wir zum Beispiel eine mit einem Galvanometer verbundene Sekundärspule in der Nähe einer Primärspule (mit Eisenkern), so wird ein Strom in der Sekundärspule induziert. Sind die Windungen der Spulen parallel, so ist der Ausschlag des Galvanometers am größten. Die induzierte Spannung ist so gerichtet, dass der von ihr hervorgerufene Strom das angelegte Magnetfeld schwächt. Eine schöne Illustration dieses Effektes, der vom Minuszeichen im Induktionsgesetz (6.1) herrührt, ist der Versuch von ELIHU und THOMSON in Abb. 6.3: Fließt ein Strom im Erre-

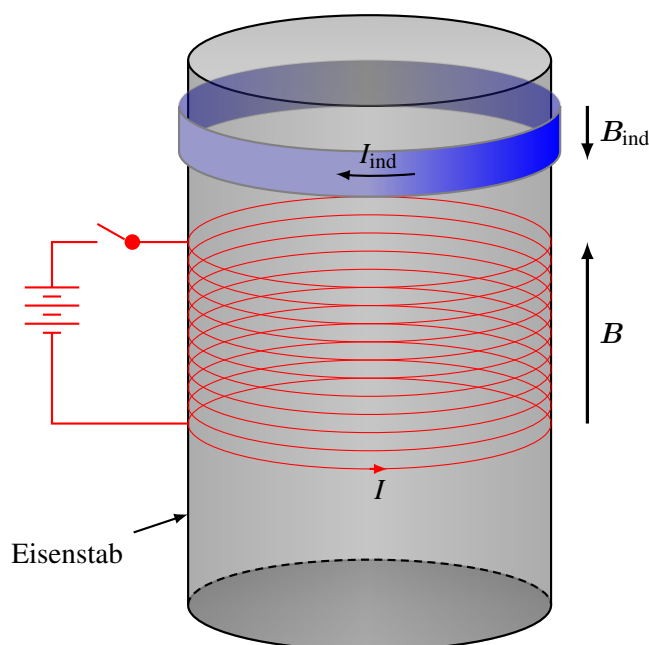


Abbildung 6.3: *Elihu-Thomson-Versuch zur Demonstration der Lenz'schen Regel.*

gerkreis, so erzeugt dieser in der Spule ein Magnetfeld  $\mathbf{B}$  und beim Einschalten eine Änderung  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  und damit einen magnetischen Schwund  $-\partial\Phi/\partial t$ . Die Flussänderung induziert im darauf gestülpten Aluminiumring eine Spannung  $V_{ind}$ , die ihrerseits einen Strom  $I_{ind}$  erzeugt. Dieser induzierte Strom hat ein solches Vorzeichen, dass das Magnetfeld  $\mathbf{B}_{ind}$ , das er erzeugt, das entgegengesetzte Vorzeichen von  $\mathbf{B}$  hat. Die Felder  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}_{ind}$  üben daher eine abstoßende Wirkung aufeinander aus, was durch das davonfliegen des Aluminiumrings beim Einschalten gezeigt wird.

Allgemeiner gilt, dass die induzierte Spannung einen Induktionsstrom erzeugt, der stets so gerichtet ist, dass er den ihn erzeugenden Vorgang zu hemmen versucht. Dies ist die *Lenz'sche Regel*. Sie führt zu einer Erklärung des Diamagnetismus. Eine bekannte Anwendung der Induktion ist die *Wirbelstrombremse*.

## 6.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Der wichtigste Schritt auf dem Weg zur Vervollständigung der Feldgleichungen der Elektro- und Magnetostatik nach dem Induktionsgesetz erfolgte 1864 durch MAXWELL. Er bemerkte, dass die inhomogene Grundgleichung der Magnetostatik, das *Oersted'sche Gesetz*,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f \quad (\text{Oersted}) \quad (6.7)$$

zur Folge hat, dass die elektrische Stromdichte quellenfrei ist,

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0.$$

Im Falle offener Stromkreise, wie z.B. beim Laden eines Kondensators, gilt aber

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}, \quad (6.8)$$

was nicht Null ist, da ein Teil der Ladung weg fließt. Die Gleichungen (6.7,6.8) sind inkonsistent, falls die Ströme in beiden Formeln die gleiche Bedeutung haben. Maxwells Ausweg aus dieser Schwierigkeit beruhte darauf, dass

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

gilt. Wenn man postuliert, dass der Term  $\sim \partial \mathbf{D} / \partial t$  einen Strom darstellt, der die gleichen Eigenschaften wie irgendein anderer Strom besitzt, dann erhält man

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_f. \quad (6.9)$$

Insbesondere erzeugt eine zeitabhängige dielektrische Verschiebung ein Magnetfeld. Die Einführung des *Verschiebungsstromes*  $\sim \partial \mathbf{D} / \partial t$  in die elektromagnetischen Grundgleichungen bildet den Kernpunkt der Maxwell'schen Theorie. Nach dem Induktionsgesetz bedingt selbst im Vakuum ein zeitlich variierendes Magnetfeld ein elektrisches Feld. Nach Maxwells Modifikation des Oersted'schen Gesetzes erzeugt aber auch ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld ein Magnetfeld. Die modifizierte Gleichung (6.9) findet ihre glänzende Bestätigung bei der *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen*. Diese wird erst durch das Maxwell'sche Zusatzglied in (6.9) möglich.

## 6.3 Die Maxwell-Gleichungen

Nehmen wir zu dem erweiterten Oersted'schen Gesetz noch das Induktionsgesetz sowie die Resultate über die Quellen von  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  hinzu, so erhalten wir die vier (beinahe) symmetrisch gebauten Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j}_f & , & & (b) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\
 (c) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & , & & (d) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

als die in der klassischen Elektrodynamik gültigen *Maxwell-Gleichungen* für ruhende Medien.

Nach FARADAYS und MAXWELLS Arbeiten fiel es den Physikern nicht leicht, die entwickelten Konzepte auf konkrete Probleme anzuwenden, da eine im Sinne der Mechanik unmittelbar anschauliche Darstellung fehlte. Im Bestreben nach einer mechanischen Deutung der elektromagnetischen Erscheinungen wurden mit viel Scharfsinn eine Vielzahl von Modellen entwickelt. Noch zum Ende des 19. Jahrhundert hat es der bekannte Physiker LORD RAYLEIGH als notwendig erachtet, die Maxwell'schen Gleichungen mit Hilfe eines komplizierten Äthermodells zu stützen. Die Maxwell'sche Theorie hat also nicht nur eine enorme praktische Bedeutung, da durch sie eine u.a. die gesamte Nachrichtentechnik revolutionierende Entwicklung eingeleitet worden ist, sie hat auch die Naturphilosophie nachhaltig beeinflusst. Durch diese Theorie sind die Physiker gezwungen worden, den in der abstrakten Beschreibung vorkommenden Größen eine reale Existenz auch dann zuzubilligen, wenn sie nicht so ohne Weiteres anschaulich gemacht werden können. Diese Gleichungen stellen eine vereinheitlichte Theorie dar, weil sie die elektrischen, magnetischen und optischen Erscheinungen auf einer gemeinsamen Grundlage erklären. Es war und ist das bisher unerreichte Ziel der (theoretischen) Physiker, alle bekannten Wechselwirkungen<sup>4</sup> im Rahmen *einer* vereinheitlichten Theorie zu beschreiben.<sup>5</sup>

Die Maxwell-Gleichungen führen nach Elimination der dielektrischen Verschiebung aus (a) und (b) auf die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0. \tag{6.11}$$

Des Weiteren sind die vier Feldgleichungen in (6.10) nicht ganz unabhängig. Aus (a) folgt durch Divergenzbildung bei Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_f) = 0, \tag{6.12}$$

und aus (c) durch Divergenzbildung, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0. \tag{6.13}$$

Die Gleichungen (b) und (d) enthalten keine Zeitableitungen der Felder und sind Bedingungen zu fester Zeit. Haben wir diese (Zwangs-)Bedingungen zu *einer* Zeit erfüllt, dann bleiben sie gemäß (6.12,6.13) zu jeder anderen Zeit erfüllt.

<sup>4</sup>Elektromagnetisch, schwach, stark und gravitativ.

<sup>5</sup>Die Superstringtheorien sind zur Zeit die Erfolg versprechendsten Kandidaten für eine vereinheitlichte Theorie.



Zwischen den vier Feldgrößen bestehen die Verknüpfungsgleichungen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (6.14)$$

Dabei sind die Polarisation  $\mathbf{P}$  und Magnetisierung  $\mathbf{M}$  abhängige Größen, die durch mikroskopische Betrachtungen ermittelt werden können. Möchte man die Einführung der nicht direkt bestimmbar und abgeleiteten Hilfsfelder  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  vermeiden, dann kommen wir zu den vier *Maxwell-Gleichungen im Medium*

$$\begin{aligned} a) \quad \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \quad , \quad b) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \\ c) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad , \quad d) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Dass hier neben der im letzten Kapitel diskutierten Magnetisierungsstromdichte auch die Polarisationsstromdichte  $\mathbf{j}_P = \partial_t \mathbf{P}$  erscheint, ist eine unmittelbare Folge der Einführung des Verschiebungsstromes.

Zu den Maxwell-Gleichungen tritt noch die *Lorentz-Kraft*

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.16)$$

Die Gleichungen (6.10) und (6.16) sind die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Aus ihnen werden alle relevanten Eigenschaften abgeleitet. Für zeitunabhängige Felder entkoppeln die Maxwell-Gleichungen in die Grundgleichungen der Elektrostatik und die Grundgleichungen der Magnetostatik.

Die Einheiten der in (6.15) auftretenden Felder und Dichten im SI-System sind:

$$[\mathbf{E}] = \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad [\mathbf{B}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}, \quad [\mathbf{P}] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}, \quad [\mathbf{M}] = \frac{\text{A}}{\text{m}}, \quad [\rho] = \frac{\text{As}}{\text{m}^3}, \quad [\mathbf{j}] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}. \quad (6.17)$$

Wir notieren nochmals die Werte der auftretenden Konstanten

$$\varepsilon_0 = 8.854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}. \quad (6.18)$$

Wir werden später sehen, dass das Produkt der Vakuumkonstanten  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum wie folgt in Verbindung steht:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (6.19)$$

### 6.3.1 Integralform der Maxwell-Gleichungen

Neben der Formulierung der Maxwell-Gleichungen als Differentialgleichungen kann man auch eine Integralform dieser Gleichungen angeben, die in vielen Fällen intuitiver ist. Dazu führen wir elektrische und/oder magnetische Spannungen, Flüsse, Ladungen und Ströme ein. Die meisten

dieser Begriffe sind uns schon begegnet.

- Die *elektrische Spannung* zwischen den Endpunkten einer Kurve ist

$$V(C) = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.20)$$

Damit ist  $\mathbf{E}$  nicht mehr wirbelfrei und die Spannung ist wegababhängig. Sie hängt nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, es können auch Ringspannungen längs geschlossener Wege auftreten.

- Der *elektrische Fluss* durch ein orientiertes Flächenstück  $F$  ist

$$\Psi(F) = \int_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}. \quad (6.21)$$

Da  $\mathbf{D}$  nicht quellenfrei zu sein braucht, hängt  $\Psi(F)$  nicht nur von der Randkurve  $\partial F$  der Fläche  $F$  ab. Der Fluss durch eine geschlossene Fläche braucht nicht Null zu sein.

- Der *magnetische Fluss* durch das orientierte Flächenstück  $F$  ist

$$\Phi(F) = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}. \quad (6.22)$$

Die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  ist quellenfrei und  $\Phi(F)$  hängt nur von der Randkurve  $\partial F$  der Fläche  $F$  ab. Der Fluss durch eine geschlossene Fläche verschwindet. Es gibt keine magnetischen Monopolladungen.

- Die *magnetische Spannung* zwischen den Endpunkten einer Kurve  $C$  ist

$$V_m(C) = \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.23)$$

Da  $\mathbf{H}$  Wirbel haben kann, ist sie im Allgemeinen wegababhängig. Es können magnetische Ringspannungen längs geschlossener Wege auftreten.

- Die *elektrische Ladung* im Gebiet  $V$  ist

$$q(V) = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}). \quad (6.24)$$

- Der *elektrische Strom* durch ein orientiertes Flächenstück  $F$  ist

$$I(F) = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (6.25)$$

Die Stromdichte ist im Allgemeinen nicht quellenfrei und der Strom hängt von der Fläche und nicht nur deren Rand ab.

Diese Größen treten in den integralen Maxwell-Gleichungen auf. Diese gewinnt man durch Integration der Maxwell-Gleichungen (6.10) über geschlossene Kurven beziehungsweise geschlossene Flächen.

Das *Faradaysche Induktionsgesetz*:

$$c') \quad V(\partial F) \equiv \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \equiv -\frac{d}{dt} \Phi(F). \quad (6.26)$$

Die elektrische Ringspannung um den Rand eines Flächenstücks ist proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche. Sie wurde in (6.4) diskutiert.

Das *Gauß'sche Flussgesetz*:

$$b') \quad \Psi(\partial V) \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = \int_V d^3r \rho_f(\mathbf{r}) \equiv q_f(V). \quad (6.27)$$

Der elektrische Fluss durch  $\partial V$  ist gleich der Gesamtladung im Raumgebiet  $V$ . Das Gesetz ist äquivalent zu (6.8).

Das *Oersted'sche Flußgesetz*

$$d') \quad \Phi(\partial V) \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (6.28)$$

Es existieren keine magnetischen Ladungen in der Natur.

Das *Maxwell'sche Verschiebungsstromgesetz*:

$$\begin{aligned} a') \quad V_m(\partial F) &\equiv \oint_{\partial F} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} \\ &\equiv I(F) + \frac{d}{dt} \Psi(F). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Die magnetische Ringspannung um den Rand eines Flächenstückes ist gleich der Summe aus elektrischem Strom und Verschiebungsstrom durch diese Fläche. Es folgt durch Integration von (6.9) über ein Flächenstück.

Die *Kontinuitätsgleichung*

$$-\frac{d}{dt} q_f(V) \equiv -\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho_f(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} \mathbf{j}_f \cdot d\mathbf{f} \equiv I(\partial V). \quad (6.30)$$

Die Änderung der elektrischen Ladung im Gebiet  $V$  ist proportional zum Strom durch seine Oberfläche. Die Kontinuitätsgleichung kodiert die Erhaltung der elektrischen Ladung.

### 6.3.2 Elektromagnetische Potentiale

Wie in der Statik gelingt es, die homogenen Maxwell-Gleichungen durch Einführung eines skalaren Potentials und eines Vektorpotentials zu lösen. Es gibt allerdings verschiedene Potentiale zu denselben elektromagnetischen Feldern. Diese Vieldeutigkeit, auch Eichfreiheit genannt, spielt

in allen feldtheoretischen Beschreibungen der vier Wechselwirkungen eine ganz entscheidende Rolle.

Wie in der Magnetostatik ist die magnetische Induktion auch für zeitabhängige Felder quellenfrei und damit das Wirbelfeld eines Vektorpotentials  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (6.31)$$

Aus der anderen homogenen Maxwell-Gleichung (6.10c) folgt dann

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 ,$$

so dass ein skalares Potential  $\Phi$  existiert mit

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} . \quad (6.32)$$

Damit sind die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen in (6.10) bzw. (6.15) automatisch erfüllt. Aus den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen in (6.15) ergeben sich dann Wellengleichungen für die Potentiale:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \mu_0 \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \\ -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \Delta \Phi &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Dabei haben wir folgende Identität benutzt:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} . \quad (6.34)$$

Im SI-Einheitensystem haben die Potentiale die Dimension

$$[\Phi] = \text{V} \quad , \quad [\mathbf{A}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}} . \quad (6.35)$$

### 6.3.3 Eichtransformationen

Wie bereits erwähnt, sind die Potentiale durch die physikalischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  nicht eindeutig festgelegt. Die Transformation

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda \quad (6.36)$$

ändert die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  nicht. Damit auch das elektrische Feld unverändert bleibt, muss gleichzeitig das skalare Potential  $\Phi$  mit-transformiert werden

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} . \quad (6.37)$$

Die Transformation (6.36) und (6.37) der Potentiale heißt *Eichtransformation*<sup>6</sup>. Die physikalischen Felder ändern nicht unter Eichtransformationen – sie sind eichinvariant. Deshalb sind die eichäquivalenten Potentiale  $(\Phi, \mathbf{A})$  und  $(\Phi', \mathbf{A}')$  physikalisch nicht unterscheidbar, sie beschreiben identische physikalische Verhältnisse. Die Elektrodynamik in Form der Potentiale besitzt also eine Redundanz – man nennt sie *Eichsymmetrie*. Wir können die Eichsymmetrie (6.36,6.37) benutzen, um eine Eichbedingung an die Potentiale zu stellen, die durch eine geeignete Wahl von  $\lambda$  erfüllbar sein muss. Zwei nützliche Eichungen sind die *Coulomb-* und *Lorenz-Eichung*, die im Folgenden etwas näher betrachtet werden.

**Coulombeichung:** Unter einer Eichtransformation geht die Divergenz von  $\mathbf{A}$  über in

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta\lambda. \quad (6.38)$$

Für ein beliebiges  $\mathbf{A}$  können wir immer eine Eichfunktion  $\lambda$  finden, so dass die rechte Seite verschwindet. Das bedeutet, dass wir das Potential so wählen können, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (6.39)$$

gilt. Dies ist die *Coulomb-Eichung*. Nach Wahl dieser Eichung vereinfachen sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (6.33) zu

$$-\Delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad , \quad \square\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi = \mu_0 \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right), \quad (6.40)$$

wobei wir den *Wellenoperator*, auch *d'Alembert Operator* genannt, einführen,

$$\square = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (6.41)$$

Die Coulomb-Eichung zeichnet bestimmte Inertialsysteme aus, sie ist nicht kovariant.

**Lorenz-Eichung:** Unter einer Eichtransformation transformiert

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{in} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \square\lambda.$$

Nun können wir die Eichfunktion  $\lambda$  so wählen, dass die transformierte Größe verschwindet. Mit dieser Wahl für  $\lambda$  erfüllen die Potentiale die kovariante *Lorenz-Eichbedingung*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (6.42)$$

In dieser Eichung lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (6.33)

---

<sup>6</sup>englisch: gauge transformation

$$\square\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad , \quad \square\mathbf{A} = \mu_0 \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) . \quad (6.43)$$

Zusammen mit den Verknüpfungsgleichungen (6.14) beschreiben diese Feldgleichungen (oder die dazu äquivalenten Feldgleichungen in der Coulombbeziehung (6.40) das Verhalten von Materie und elektromagnetischem Feld in Wechselwirkung. Es sind Wellengleichungen und sie weisen unmittelbar auf die elektromagnetische Lichttheorie hin.

### 6.3.4 Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Im Vakuum verschwinden Polarisierung und Magnetisierung und wir haben es allenfalls mit isolierten mikroskopischen Ladungen und Strömen zu tun. Dann ist  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , und die Feldgleichungen (6.10) vereinfachen sich zu

$$a) \quad \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \quad b) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (6.44)$$

$$c) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad d) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.45)$$

Dies ist die differentielle Form der *Maxwell-Gleichungen* im Vakuum. Hier sind  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  die mikroskopischen Ladungs- und Stromdichten.

Dies sind die wichtigen Feldgleichungen der mikroskopischen Elektrodynamik. Bei bekannten und mit den Zwangsbedingungen b) und d) verträglichen Anfangsbedingungen bestimmen sie bei gegebenen Ladungs- sowie Stromverteilungen die Erzeugung und Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen. Aus ihnen folgt sofort die Erhaltung der elektrischen Ladung,

$$\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (6.46)$$

Die homogenen Gleichungen (6.45) werden durch (6.31) und (6.32) gelöst und es bleiben (in der Lorenz-Eichung) folgende einfache Wellengleichungen für die Potentiale übrig,

$$\square\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad , \quad \square\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} . \quad (6.47)$$

Jede Komponente der zweiten Gleichung in (6.47) hat dieselbe Struktur wie die erste Gleichung. Wir können die Diskussion der Lösung daher auf die erste Gleichung beschränken. Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung hat die Darstellung

$$\Phi = \Phi_{\text{hom}} + \Phi_{\text{part}} . \quad (6.48)$$

Dabei ist  $\Phi_{\text{hom}}$  die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\square\Phi_{\text{hom}} = 0 , \quad (6.49)$$

und  $\Phi_{\text{part}}$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Wellengleichungen (6.47) sind der Ausgangspunkt bei der Behandlung der Erzeugung und Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen.

Im Vakuum nehmen auch die integralen Maxwell-Gleichungen eine einfachere Form an.

$$\text{Induktionsgesetz:} \quad \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \quad (6.50)$$

$$\text{elektrisches Flussgesetz:} \quad \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad (6.51)$$

$$\text{magnetisches Flussgesetz:} \quad \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (6.52)$$

$$\text{Verschiebungsgesetz:} \quad \oint_{\partial F} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (6.53)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = -\oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \quad (6.54)$$

## Kapitel 7

# Elektromagnetische Wellen

In diesem Kapitel werden wir zeitlich und räumlich veränderliche Felder – diese sind elektromagnetische Wellen – behandeln. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall der Wellenausbreitung in *homogenen und linearen* Medien ohne freie Ladungsträger. Dann müssen wir die Maxwell-Gleichungen in der Form

$$\nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.1)$$

lösen, wobei die Materialgrößen  $\varepsilon_r$  und  $\mu_r$  konstante Skalare sind. Lösungen dieser Gleichungen im Vakuum mit  $\varepsilon = \varepsilon_0$  und  $\mu = \mu_0$  werden zu Lösungen mit beliebigen konstanten  $\varepsilon$  und  $\mu$ , wenn man folgende Reskalierungen vornimmt:

$$t \longrightarrow \frac{t}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \quad \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} \longrightarrow \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}. \quad (7.2)$$

Aus den Vakuumlösungen können wir also leicht die Lösungen in homogenen und linearen Medien ohne freie Ladungsträger gewinnen. Deshalb dürfen wir im Folgenden  $\mu_r = \varepsilon_r = 1$  setzen und uns auf Vakuumlösungen beschränken.

### 7.1 Vakuumlösungen

Die gekoppelten Gleichungen für das elektrische und magnetische Feld (7.1) können durch eine weitere Differentiation entkoppelt werden. Dazu nehmen wir von den beiden Gleichungen mit der Rotation selbst die Rotation und benutzen z.B.  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$  ist. Berücksichtigt man noch, dass im Vakuum die  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  ist, so gewinnt man die Wellengleichungen für die elektromagnetischen Felder im Vakuum

$$\square \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \square \mathbf{B} = 0, \quad \square = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (7.3)$$



Die Größe  $1/\varepsilon_0\mu_0$  hat die Einheit einer quadrierten Geschwindigkeit. Später werden wir sehen, dass diese Geschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (7.4)$$

Alle Komponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  erfüllen somit dieselbe Wellengleichung. Im Vakuum genügen auch die Potentiale dieser Gleichung, sofern die *Lorenz-Eichung* (6.42) gewählt wird,

$$\square\Phi = 0, \quad \square\mathbf{A} = 0, \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (7.5)$$

Die Gleichungen (7.1) implizieren die Wellengleichungen (7.3) aber nicht umgekehrt. Im Folgenden werden wir zuerst die Wellengleichungen lösen und dann im zweiten Schritt Zusatzbedingungen finden, damit diese die Maxwellgleichungen erster Ordnung in (7.1) erfüllen.

Wegen der Transformation (7.2) ist

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \quad (7.6)$$

die Geschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen in linearen homogenen Medien, wenn  $c$  die Geschwindigkeit im Vakuum ist. In der Optik war seit etwa 1850 auf Grund der Messungen von FIZEAU der Zusammenhang

$$u = \frac{c}{n} \quad (7.7)$$

bekannt, wobei  $n$  der *Brechungsindex* des Mediums ist. Die Maxwell'sche Theorie gibt also die Lichtgeschwindigkeit im Medium richtig wieder, wenn zwischen den elektromagnetischen Stoffkonstanten  $\varepsilon_r, \mu_r$  und dem optischen Brechungsindex die *Maxwell-Beziehung* erfüllt ist:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}. \quad (7.8)$$

Für Wasser ist  $n = 1.33$ ,  $\mu_r \approx 1$  und  $\varepsilon_r \approx 80$  und die Beziehung scheint nicht erfüllt zu sein. Diese Schlussfolgerung ist aber nicht statthaft, weil wir die Frequenzabhängigkeit der Materialkonstanten außer Acht ließen. Wir müssen für  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  und  $n$  Werte einsetzen, die sich auf dieselbe Frequenz beziehen. Der Brechungsindex wird bei der Lichtfrequenz von etwa  $10^{15} \text{ s}^{-1}$  gemessen, die elektromagnetischen Stoffkonstanten aber im Gleichfeld, d.h. bei einer verschwindenden Frequenz. Die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für frequenzabhängige Konstanten und die Theorie der Dispersion, welche die Frequenzabhängigkeit dieser Konstanten liefert, werden wir später behandeln. Wir werden sehen, dass die Maxwell'sche Beziehung gültig ist. Diese und weitere Resultate zeigen, dass die Theorie des Lichts in der Maxwell'schen Theorie enthalten ist. Licht ist elektromagnetische Strahlung in einem speziellen Frequenzband.

## 7.2 Ebene Wellen

Wir beginnen wir mit den einfachsten Lösungen der Maxwellgleichungen im Vakuum, den ebenen Wellen. Diese haben zu jedem Zeitpunkt auf jeder Ebene aus einer Schar von parallelen Ebenen

einen konstanten Wert. Die Punkte auf der Ebene senkrecht zu einem konstanten Einheitsvektor erfüllen  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = u$ . Deshalb hängen ebene Wellen nur von  $ct$  und  $u$  ab,  $\Phi = \Phi(ct, u)$ . Für ebene

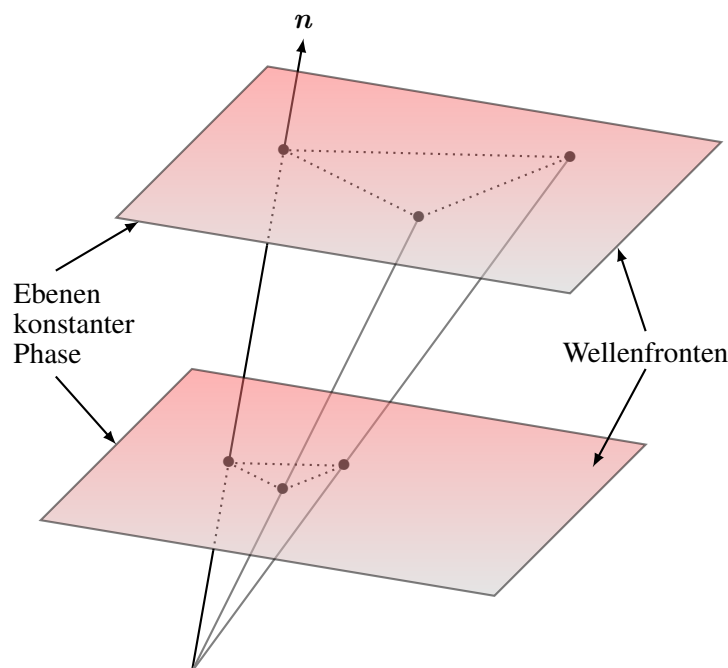


Abbildung 7.1: Ebene Wellen haben auf den Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  einen konstanten Wert.

Wellen ist  $\nabla\Phi = \mathbf{n} \partial\Phi/\partial u$  und  $\Delta\phi = \partial^2\Phi/\partial u^2$  und die Wellengleichung vereinfacht sich zu

$$\square\Phi = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) \Phi = \left( \frac{\partial}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial}{\partial(ct)} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \Phi = 0. \quad (7.9)$$

Aus der zweiten Schreibweise erkennt man sofort, dass

$$\Phi = \Phi(ct - u) = \Phi(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \Phi = \Phi(ct + u) = \Phi(ct + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad (7.10)$$

Lösungen der Wellengleichung sind. Die erste (zweite) beschreibt eine in  $\mathbf{n}$  ( $-\mathbf{n}$ )-Richtung fortschreitende Welle. Die Ebenen, auf denen  $\Phi$  denselben konstanten Wert annimmt, bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  in die Richtung von  $\pm\mathbf{n}$ .

Wegen der Linearität der Wellengleichung ist mit  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  auch  $a\Phi_1 + b\Phi_2$  eine Lösung. Dieses *Superpositionsprinzip* gilt allgemein für lineare Differentialgleichungen, und insbesondere für die Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum.<sup>1</sup> Das Superpositionsprinzip erlaubt die Zusammensetzung beliebiger Wellenformen aus einfachen Grundtypen.

<sup>1</sup>In nichtlinearen Medien gilt das Superpositionsprinzip in dieser einfachen Form nicht mehr.

Im Vakuum müssen die Potentiale  $\Phi$ ,  $\mathbf{A}$  und Felder  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  alle die Wellengleichung lösen und haben, falls sie in  $\mathbf{n}$ -Richtung propagierende ebene Wellen beschreiben, die Form (7.10). Insbesondere

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}). \quad (7.11)$$

Wegen  $\partial_i \mathbf{E} = -n_i \mathbf{E}'$ , wobei Strich die Ableitung nach dem Argument bedeutet, und der gleichen Formel für das magnetische Feld, folgt aus der Quellenfreiheit der beiden Felder

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})' = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})' = 0.$$

. Damit sind die Projektionen der Felder in Ausbreitungsrichtung konstant. Konstante Feldanteile haben aber auf die Wellenausbreitung keinen Einfluss und deshalb gilt für ebene Wellen

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7.12)$$

Dies bedeutet, dass die Richtung beider Felder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle sind. Die restlichen Komponenten der Rotationsgleichungen lauten

$$c \mathbf{n} \times \mathbf{B}' + \mathbf{E}' = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}' - c \mathbf{B}' = 0, \quad (7.13)$$

wobei wir wieder von  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  Gebrauch machten. Für Wellenlösungen dürfen wir die konstanten Anteile wieder weglassen. Deshalb haben ebene Wellen die Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad c \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad (7.14)$$

wobei nach (7.12) die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  der Welle sind. Das elektrische und magnetische Feld haben bis auf den Faktor  $c$  denselben Betrag,  $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ . Die ist in Abbildung 7.2 skizziert.

Wir fassen die Eigenschaften von ebenen Wellen zusammen:

- *Transversalität und Phasengleichheit:*

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{n}, \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \quad \text{und} \quad |\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}| \quad (7.15)$$

Die ersten zwei Eigenschaften bedeuten, dass ebene elektromagnetische Wellen *transversal* sind. Die letzte Gleichung besagt, dass die zueinander senkrechten Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  zu jeder Zeit und an jedem Ort bis auf den Faktor  $c$  denselben Betrag haben. Sie haben an jeweils denselben Stellen Maxima und Nullstellen; sie sind in Phase oder *phasengleich*.

- *Phasengeschwindigkeit:* Eine in die  $z$ -Richtung fortschreitende Welle hat eine feste Phase, falls  $z = ct + a$  gilt mit einer beliebigen Konstante  $a$ . Die Maxima (Nullstellen, Minima) verschieben sich mit der Lichtgeschwindigkeit, d.h. die Phasengeschwindigkeit der Wellen ist die *Lichtgeschwindigkeit*.

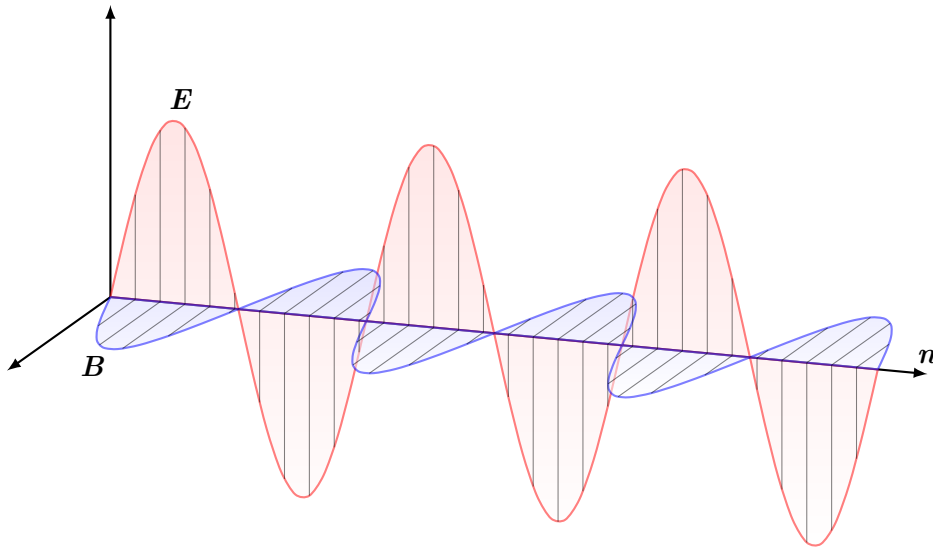


Abbildung 7.2: Für eine ebene Welle bilden  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{n}$  ein Orthogonalsystem.

### 7.2.1 Monochromatische ebene Wellen

Wir betrachten zunächst harmonisch schwingende ebene Wellen, so genannte *monochromatische ebene Wellen*, für welche

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) &= \Re \left( \mathbf{E}_0 e^{ik(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} \right) = \Re \left( \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right), & \omega &= c|\mathbf{k}| \\ \mathbf{B}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) &= \Re \left( \mathbf{B}_0 e^{ik(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})} \right) = \Re \left( \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right), & \mathbf{k} &= |\mathbf{k}| \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

mit konstanten Amplitudenvektoren  $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ . Aus unseren vorherigen Überlegungen über ebene Wellen oder durch Einsetzen in die Wellengleichungen findet man folgende algebraischen Gleichungen für die reelle *Kreisfrequenz*  $\omega = 2\pi\nu$ , den reellen *Wellenzahlvektor*  $\mathbf{k}$  und die konstanten Amplitudenvektoren:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0. \quad (7.17)$$

Wie erwartet, sind  $\mathbf{E}_0$  und  $\mathbf{B}_0$  orthogonal, haben bis auf einen konstanten Faktor dieselbe Länge und sind senkrecht zum Wellenzahlvektor. Zur vollständigen Festlegung einer monochromatischen ebenen Welle braucht es einen Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  und einen im Allgemeinen komplexen Amplitudenvektor  $\mathbf{E}_0$ , senkrecht zu  $\mathbf{k}$ .

Bei der Untersuchung der Lösungen dürfen wir annehmen, dass der Wellenzahlvektor in die  $z$ -Richtung zeigt,  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$ . Monochromatische und in die  $z$ -Richtung propagierende ebene Wellen haben die Form

$$\mathbf{E} = \Re \left( (E_{0x} \mathbf{e}_x + E_{0y} \mathbf{e}_y) e^{i(\omega t - kz)} \right), \quad c\mathbf{B} = \Re \left( (-E_{0y} \mathbf{e}_x + E_{0x} \mathbf{e}_y) e^{i(\omega t - kz)} \right). \quad (7.18)$$

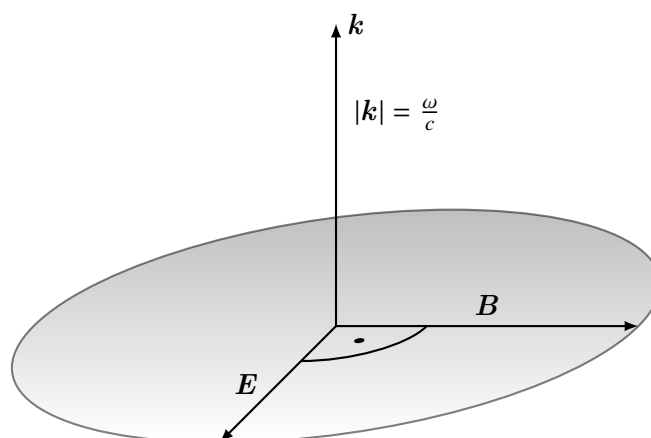


Abbildung 7.3: Das elektrische und magnetische Feld sind transversal und haben dieselbe Amplitude.

Zu einer festen Zeit gilt für den Abstand zweier benachbarter Maxima die Beziehung  $k\Delta z = 2\pi$ . Der entsprechende räumliche Abstand ist die *Wellenlänge*

$$\lambda = \Delta z = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}. \quad (7.19)$$

Da die Welle allein durch das  $\mathbf{E}$ -Feld (oder allein durch das  $\mathbf{B}$ -Feld) bestimmt ist, bezieht sich die folgende Diskussion auf das elektrische Feld. Wir schreiben die komplexen Koeffizienten gemäß

$$E_{0x} = |E_{0x}|e^{i\phi} \quad \text{und} \quad E_{0y} = |E_{0y}|e^{i(\phi+\delta)}.$$

Dann wird das elektrische Feld zu

$$\mathbf{E} = |E_{0x}| \cos(\omega t - kz + \phi) \mathbf{e}_x + |E_{0y}| \cos(\omega t - kz + \phi + \delta) \mathbf{e}_y. \quad (7.20)$$

Je nach relativer Phase  $\delta$  unterscheidet man nun drei Fälle (vgl. Abbildung 7.4):

- *Linear polarisierte Wellen:* Für  $\delta = 0$  oder  $\delta = \pm\pi$  ist

$$\mathbf{E} = (|E_{0x}| \mathbf{e}_x \pm |E_{0y}| \mathbf{e}_y) \cos(\omega t - kz + \phi). \quad (7.21)$$

Der Koeffizient ist ein orts- und zeitunabhängiger Vektor und damit liegt das elektrische Feld in einer *festen Schwingungsebene*. Eine linear polarisierte Welle lässt sich als Überlagerung von zwei linear unabhängigen, linear polarisierten Wellen schreiben. Die obige Welle ist eine Überlagerung von

$$\mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz + \phi) \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_y \cos(\omega t - kz + \phi).$$

- *Zirkular polarisierte Wellen:* Für  $\delta = \pm\pi/2$  und  $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E$  ist

$$\mathbf{E} = E (\cos(\omega t - kz + \phi) \mathbf{e}_x \mp \sin(\omega t - kz + \phi) \mathbf{e}_y). \quad (7.22)$$

An einem festen Ort durchläuft der Vektor zwischen den Klammern mit fortschreitender Zeit den Einheitskreis. Das elektrische Feld dreht einen Kreis vom Radius  $E$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Für  $\delta = \pi/2$  gilt das obere Vorzeichen in (7.22). Blickt man in die Ausbreitungsrichtung, dreht der  $\mathbf{E}$ -Vektor nach links. Betrachten wir die Bewegung von  $\mathbf{E}$  in Raum und Zeit, dann beschreibt  $\mathbf{E}$  eine Kreisspirale. In diesem Sinn spricht man von einer *linkszirkular polarisierten* Welle. Für  $\delta = -\pi/2$  ist die Welle rechtszirkular polarisiert.

- *Elliptisch polarisierte Wellen:* Für  $\delta = \pm\pi/2$  und  $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$  ist

$$E_x = |E_{0x}| \cos(\omega t - kz + \phi) \quad \text{und} \quad E_y = \mp |E_{0y}| \sin(\omega t - kz + \phi).$$

Die Komponenten des Feldes erfüllen die Ellipsengleichung mit den Halbachsen  $|E_{0x}|$  und  $|E_{0y}|$ :

$$\left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 = 1.$$

An einem festen Ort durchläuft der  $\mathbf{E}$ -Vektor eine Ellipse und seine Amplitude ist nicht mehr konstant.

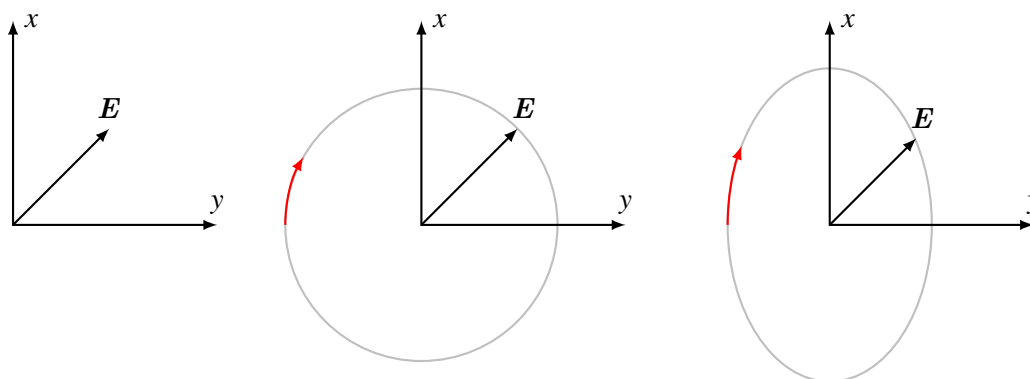


Abbildung 7.4: *Lineare Polarisation (links), rechts-zirkulare Polarisation (mittig) und rechts-elliptische Polarisation (rechts). Der  $\mathbf{k}$ -Vektor steht senkrecht zur Blattebene und in die Richtung, in die Sie schauen.*

Die Abbildung 7.5 zeigt, wie sich bei stetiger Veränderung von  $\delta$  die Schwingungsellipse ändert. Für  $\delta = 0$  entartet sie in eine Gerade und es liegt lineare Polarisation vor. Für  $0 < \delta < \pi$  findet man linksläufige Ellipsen unter denen für  $\delta = \pi/2$  ein Kreis ist. Für  $\delta = \pi$  haben wir wieder lineare Polarisation und den Übergang von links- zu rechtspolarisierten ebenen Wellen.

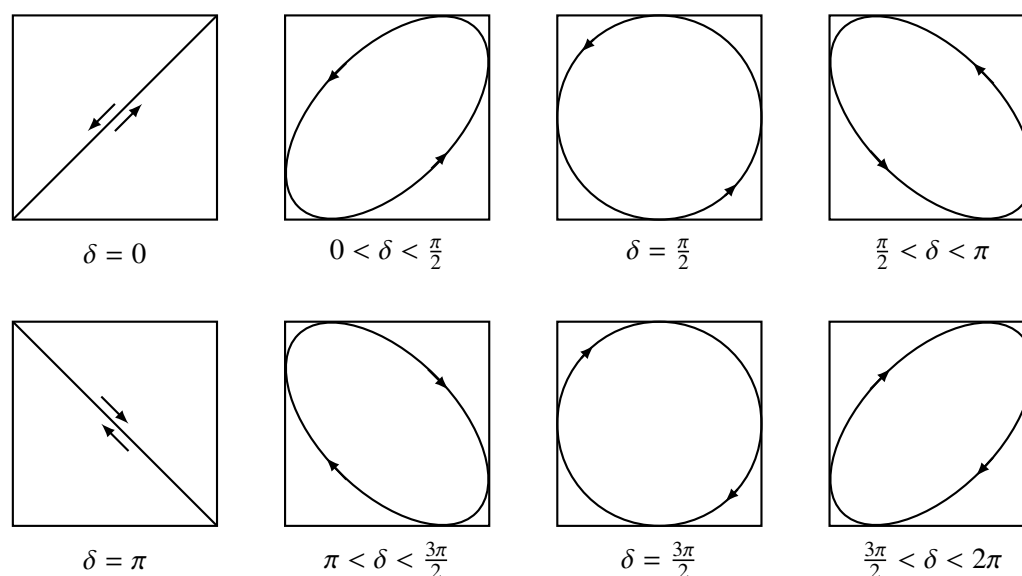


Abbildung 7.5: *Elliptisches Licht verschiedener Phasendifferenz der rechtwinkligen Komponenten. Der  $\mathbf{k}$ -Vektor steht senkrecht zur Blattebene und in die Richtung, in die Sie schauen.*

Für  $\pi < \delta < 2\pi$  sind die Ellipsen rechtsläufig. Insbesondere für  $\delta = 3\pi/2$  handelt es sich um rechtshändig polarisierte Wellen.

### 7.3 Kugelwellen

Eine bei der Erzeugung von Wellen oft gebrauchte Wellenform ist die Kugelwelle. Um zu einer Darstellung von Kugelwellen zu kommen, schreibt man die Wellengleichung zweckmäßig in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  um:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) - \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \Phi = 0. \quad (7.23)$$

In der Elektrostatik haben wir gezeigt, dass jede Funktion der Winkelvariablen eine Linearkombination der Kugelfunktionen ist. Daher ist es angezeigt, Lösungen der Form

$$\Phi = \frac{1}{r} F(t, r) \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (7.24)$$

zu suchen. Setzen wir diesen Ansatz ein und benutzen  $\Delta_{\Omega} \mathcal{Y}_{\ell m} = -\ell(\ell + 1) \mathcal{Y}_{\ell m}$ , dann reduziert sich (7.23) auf folgende 2-dimensionale Wellengleichung für  $F$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} F = 0. \quad (7.25)$$

Während ebene Wellen auf parallelen Ebenen konstant sind, sind Kugelwellen auf konzentrischen Kugelflächen konstant. Sie hängen deshalb nicht von den Winkelvariablen ab und haben  $\ell = 0$ . Dann vereinfacht sich die Wellengleichung (7.25) zu

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0. \quad (7.26)$$

Damit haben die Wellengleichungen (7.3) für die elektromagnetischen Felder die Lösungen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{r} [\mathbf{E}_+(ct - r) + \mathbf{E}_-(ct + r)] \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{r} [\mathbf{B}_+(ct - r) + \mathbf{B}_-(ct + r)]. \end{aligned} \quad (7.27)$$

$E_+$  ist eine auslaufende Kugelwelle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit vom Ursprung ausgehend nach außen ausbreitet, und  $E_-$  eine einlaufende Welle, da sie sich auf den Ursprung zusammenzieht. Die Quellenfreiheit der Felder ist äquivalent zu

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) = 0,$$

und deshalb sind  $r^2 E_r$  und  $r^2 B_r$  konstant. Für am Ursprung reguläre Lösungen verschwinden die Konstanten und

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (7.28)$$

Es handelt sich also wieder um *transversale elektromagnetische (TEM) Wellen*, deren Amplitude mit wachsendem Abstand vom Ursprung gemäß  $1/r$  abnimmt. Für die Polarisation dieser Wellen gilt dasselbe wie bei den ebenen Wellen.

## 7.4 Bessel-Wellen

Die Wellengleichung  $\square \mathbf{E} = 0$  besitzt interessante Lösungen, die erst 1987 gefunden wurden, die Klasse der *beugungsfreien Wellen*<sup>2</sup>. Beugungsfrei bedeutet, dass die Welle bei der Ausbreitung im freien Raum in  $z$ -Richtung ihre Intensitätsverteilung in der  $(x, y)$ -Ebene unabhängig von  $z$  beibehält (zur Definition der Intensität siehe später). Normalerweise würde man erwarten, dass ein im Querschnitt stark lokalisierter Lichtbündel bei der Ausbreitung seine Form nicht beibehalten kann. Genau solche Lösungen gibt es jedoch, und sie konnten auch annähernd realisiert werden<sup>3</sup>. Das einfachste Beispiel ist die *fundamentale Bessel-Welle*. Wir machen den Ansatz

$$\Phi = \Phi_0 J(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (7.29)$$

<sup>2</sup>J. Durnin, J.J. Miceli Jr. und J.H. Eberly, Diffraction-free beams, Phys. Rev. Lett. 58, 1987, 1499.

<sup>3</sup>A. Vasara, J. Turunen und A.T. Friberg, Realisation of general nondiffracting beams with computer-generated holograms, J. Opt. Soc. Am. A6, 1989, 1748.



In Zylinderkoordinaten ist

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (7.30)$$

so dass die Wellengleichung  $\square\Phi = 0$  äquivalent zu folgender gewöhnlichen Differentialgleichung für  $J$  in (7.29) ist,

$$v^2 J'' + vJ' + \left( \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\alpha^2 c^2} \right) v^2 J = 0, \quad v = \alpha \rho, \quad ' = \frac{d}{dv}.$$

Wählen wir den freien Parameter  $\alpha$  so, dass

$$\omega^2 = (\alpha^2 + k^2) c^2, \quad 0 < \alpha < \frac{\omega}{c} \quad (7.31)$$

gilt, dann erhalten wir die einfache Besselsche Differentialgleichung

$$v^2 J'' + vJ' + v^2 J = 0, \quad (7.32)$$

deren am Ursprung reguläre Lösung die nullte Bessel-Funktion  $J_0$  ist. Also löst

$$\Phi = \Phi_0 J_0(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, \quad (7.33)$$

die Wellengleichung. Die Lösung ist axialsymmetrisch und der Parameter  $\alpha$  charakterisiert die Breite des zentralen Lichtbündels. Es erfolgt keine Ausweitung in den freien Raum.

In der Lorenz-Eichung haben die Potentiale die Form

$$\Phi = \Phi_0 J_0(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 J_0(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (7.34)$$

Die Lorenz-Bedingung lautet

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = e^{i(\omega t - kz)} \left( i \left( \frac{\omega}{c^2} \Phi_0 - k A_{0z} \right) J_0 + \frac{\alpha}{\rho} (x A_{0x} + y A_{0y}) J_0' \right) = 0.$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, falls

$$A_{0z} = \frac{\omega}{kc^2} \Phi_0 \quad \text{und} \quad A_{0x} = A_{0y} = 0$$

gelten. Die nicht verschwindenden Potentiale der fundamentalen Bessel-Welle lauten deshalb

$$\Phi = \Phi_0 J_0(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{und} \quad A_z = \frac{\omega}{kc^2} \Phi_0 J_0(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (7.35)$$

Aus diesen Potentialen in der Lorenz-Eichung kann man nun das elektromagnetische Feld ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ )

gewinnen.<sup>4</sup>

## 7.5 TE- und TM-Wellen

Ebene Wellen sind transversalelektromagnetische Wellen oder TEM-Wellen, bei denen sowohl der elektrische als auch der magnetische Anteil in Ausbreitungsrichtung verschwindet. Neben TEM-Wellen gibt es transversal-elektrische Wellen (TE-Wellen) und transversal-magnetische Wellen (TM-Wellen). Bei TE-Wellen verschwindet nur die elektrische Komponente in Ausbreitungsrichtung während die magnetische Komponente Werte ungleich 0 annehmen kann, bei TM-Wellen verschwindet nur die magnetische Komponente in Ausbreitungsrichtung während die elektrische Komponente Werte ungleich 0 annehmen kann. Solche Wellen findet man zum Beispiel in Hohlleitern.

Für ihre Konstruktion überlagern wir zwei monochromatische ebene Wellen mit *gleicher Frequenz* und gleichem elektrischen *oder* magnetischen Amplitudenvektor, aber *unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung*. Bei TE-Wellen haben die beiden elektrischen Wellen gleiche Amplitude, und man überlagert die ebenen Wellen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - (\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}), & \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \times \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - (\mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}), & \mathbf{B}_2 &= \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}) \times \mathbf{E}_2. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Die erste Welle propagiert in Richtung von  $\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}$  und die zweite in Richtung von  $\mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}$ . Damit diese Wellen die Maxwell-Gleichungen erfüllen, muss  $\omega = c|\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}| = c|\mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}|$  gelten. Daraus folgen die Relationen

$$\mathbf{k} \perp \Delta\mathbf{k} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{E}_0 \perp \Delta\mathbf{k}, \quad \omega = c\sqrt{\mathbf{k}^2 + (\Delta\mathbf{k})^2}. \quad (7.37)$$

Die Überlagerung ergibt das *transversale* elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 2\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cos(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (7.38)$$

wobei wir  $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$  benutzten. Diese Lösung beschreibt eine in  $\mathbf{k}$ -Richtung fortschreitende *transversale* nichtebene Welle mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{c}{|\mathbf{k}|} \sqrt{\mathbf{k}^2 + (\Delta\mathbf{k})^2} > c. \quad (7.39)$$

Die Phasengeschwindigkeit liegt über der Lichtgeschwindigkeit. Das ist möglich und nicht im Widerspruch zur Relativitätstheorie, nach der keine Signalgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit übertreffen darf. Als Signalgeschwindigkeit kommt die Gruppengeschwindigkeit, und nicht die Phasengeschwindigkeit, in Frage. Und diese ist kleiner als  $c$ .

<sup>4</sup>Übung: Berechne und diskutiere  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  für die fundamentale Bessel-Welle.

Die Überlagerung der magnetischen Felder führt auf

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) + \frac{1}{\omega} \Delta \mathbf{k} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \\ &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} + 2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{\omega} \Delta \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0.\end{aligned}\quad (7.40)$$

Auch das  $\mathbf{B}$ -Feld breitet sich in  $\mathbf{k}$ -Richtung aus. Im Gegensatz zum elektrischen Feld ist  $\mathbf{B}$  *nicht transversal*,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \frac{2}{\omega} \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \Delta \mathbf{k}) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \neq 0.$$

Das Magnetfeld hat eine longitudinale Komponente, d.h. eine Komponente parallel zur Ausbreitungsrichtung. Die konstruierte Lösung heißt *transversale elektrische Welle*, abgekürzt TE-Welle. Die Amplituden hängen von  $\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  ab.

Ganz ähnlich kann man zwei harmonische, ebene Wellen mit gleicher Frequenz, gleichem *magnetischen* Amplitudenvektor aber verschiedenen Ausbreitungsrichtungen überlagern,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$  mit

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - (\mathbf{k} + \Delta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}), & \mathbf{E}_1 &= -\frac{1}{\omega} (\mathbf{k} + \Delta \mathbf{k}) \times \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 &= \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - (\mathbf{k} - \Delta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}), & \mathbf{E}_2 &= -\frac{1}{\omega} (\mathbf{k} - \Delta \mathbf{k}) \times \mathbf{B}_2.\end{aligned}\quad (7.41)$$

Damit diese ebenen Wellen die Maxwell-Gleichungen lösen, müssen die Wellenzahlvektoren und Amplituden wieder die Relationen (7.37) erfüllen, wobei  $\mathbf{E}_0$  durch  $\mathbf{B}_0$  zu ersetzen ist. Die Überlagerung ergibt das *transversale* magnetische Feld

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = 2\mathbf{B}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cos(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (7.42)$$

Dies ist eine in  $\mathbf{k}$ -Richtung fortschreitende *transversale* nichtebene Welle. Die Überlagerung der elektrischen Felder führt auf

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B} - 2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{\omega} \Delta \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0.$$

Nun ist das in  $\mathbf{k}$ -Richtung propagierende elektrische Feld *nicht transversal*,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = -\frac{2}{\omega} (\mathbf{B}_0, \mathbf{k} \times \Delta \mathbf{k}) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \neq 0.$$

Man nennt eine derartige Welle deshalb *transversal magnetisch*, abgekürzt TM-Welle.

## 7.6 Überlagerung von ebenen Wellen

Die Wellengleichung ist linear und deshalb kann jede Lösung der Wellengleichung, zum Beispiel das elektrische oder magnetische Feld im ladungsfreien Raum, als Fourier-Integral geschrieben

werden, zum Beispiel

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega d^3k \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (7.43)$$

Eine Welle ist eine lineare Überlagerung von ebenen Wellen. Jede Komponente des Feldes ist also ein *Fourier-Integral*. Fourier-Reihen und Fourier-Integrale treten deshalb in der Wellentheorie immer wieder auf. Im Anhang zu diesem Kapitel habe ich die wesentlichen Tatsachen über Fourier-Integrale zusammengetragen. Sie werden diese in der Quantenmechanik wieder brauchen.

Die Fourier-Koeffizienten des elektrischen Feldes in (7.43) sind durch die inverse Fourier-Transformation bestimmt,

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dt d^3x \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (7.44)$$

Nun können wir die allgemeinste Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum (bzw. in linearen homogenen Medien) angeben. Dazu transformieren wir die entsprechenden Maxwell-Gleichungen in den  $(\omega, \mathbf{k})$ -Raum. Mit (7.58) finden wir die Maxwell-Gleichungen im  $(\omega, \mathbf{k})$ -Raum,

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}} + \omega \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad , \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (7.45)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} - \omega \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad , \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0. \quad (7.46)$$

Nicht unerwartet sind dies die Bedingungen (7.17) für monochromatische ebene Wellen. Benutzen wir die Resultate über derartige Lösungen, dann finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \Re \int d^3k \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= \frac{c}{(2\pi)^2} \Re \int d^3k \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \end{aligned} \quad (7.47)$$

wobei  $\omega = |\mathbf{k}|c$  ist und  $\tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k})$  senkrecht auf dem Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  steht.

## 7.7 Anhang: Fourier-Reihen und Integrale

Die Fourier-Reihe einer Funktion mit Periode  $L$ ,  $f(x + L) = f(x)$ , lautet

$$f(x) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{2\pi i n x / L} \Leftrightarrow f = \mathcal{F}(\{f_n\}), \quad (7.48)$$

wobei  $a$  eine reelle Konstante ungleich Null ist. Die  $f_n$  sind die Fourier-Koeffizienten der periodischen Funktion  $f$ . Die Darstellung ist möglich für quadratintegrierbare Funktionen,  $f \in L_2[-L/2, L/2]$ . Die Decktransformationen, das heißt die Berechnung der Fourier-Koeffizienten, gewinnt man aus

$$f_n = \frac{1}{aL} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-2\pi i n x / L} f(x) \Leftrightarrow \{f_n\} = \mathcal{F}^{-1}(f) \quad (7.49)$$

wie man leicht durch Einsetzen von (7.48) und Vertauschen von Summation und Integration sehen kann:

$$\frac{1}{L} \int dx e^{-2\pi i n x / L} \sum_m f_m e^{2\pi i m x / L} = \frac{1}{L} \sum_m L \delta_{mn} f_m = f_n.$$

Für  $a^2 = 1/L$  ist die invertierbare Abbildung  $L_2 \ni f(x) \rightarrow \{f_n\} \in l_2$  vom Raum der quadratintegrierbaren Funktionen in den Raum der quadratsummierbaren Folgen längenerhaltend:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2}^2 &= \int dx f^*(x) f(x) = a^2 \int dx \sum_{m,n} f_m^* e^{-2\pi i(m-n)x} f_n \\ &= a^2 L \sum_n |f_n|^2 = a^2 L \|\{f_n\}\|_{l_2}^2. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Seien nun  $f = \mathcal{F}(\{f_n\})$  und  $g = \mathcal{F}(\{g_n\})$ . Wir wollen berechnen, welche Funktion die Koeffizienten  $\{f_n g_n\}$  hat:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\{f_n g_n\}) &= a \sum_n f_n g_n e^{2\pi i n x / L} = \frac{a}{L} \sum_{n,m} f_n g_m e^{2\pi i n x / L} \int dy e^{2\pi i y(m-n)/L} \\ &= \frac{1}{aL} \int dy f(x-y) g(y). \end{aligned}$$

Damit geht das Produkt in die Faltung über:

$$f = \mathcal{F}(\{f_n\}), g = \mathcal{F}(\{g_n\}) \implies \mathcal{F}(\{f_n g_n\}) = \frac{1}{aL} \int dy f(x-y) g(y). \quad (7.51)$$

Die Fourier-Transformation für eine von  $-\infty$  bis  $+\infty$  definierte, nicht notwendig periodische Funktion  $f(x)$  gewinnt man, indem man den Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  macht und

$$k := \frac{2\pi n}{L}, \quad f_n = \tilde{f}(k), \quad \Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad \text{und} \quad a = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \quad (7.52)$$

definiert. Dann geht (7.48) über in die Riemann-Summe

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \Delta k \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

das für  $L \rightarrow \infty$  in das Riemannsches Integral von  $-\infty$  bis  $\infty$  übergeht. Deshalb ist die Fourier-Transformation auf der reellen Achse

$$\mathcal{F}(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}, \quad (7.53)$$

und die Umkehrtransformation lautet

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (7.54)$$

Aus (7.50) und mit unserer Wahl für die Konstante  $a$  ergibt sich unmittelbar die *Parseval-Beziehung*, nach der  $f$  und  $\tilde{f}$  die gleiche  $L_2$ -Norm haben,

$$\|f\|^2 = \int dx |f(x)|^2 = \int dk |\tilde{f}(k)|^2 = \|\tilde{f}\|^2. \quad (7.55)$$

Die Fourier-Transformation ist eine lineare und längenerhaltende Abbildung. Lassen wir in (7.51) die Intervalllänge gegen Unendlich streben, dann schließen wir unmittelbar

$$f = \mathcal{F}(\tilde{f}), \quad g = \mathcal{F}(\tilde{g}) \implies \mathcal{F}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dy f(x-y)g(y). \quad (7.56)$$

Dies bedeutet, dass die Fourier-Transformation des Produktes zweier Funktionen gleich der Faltung der Fourier-Transformierten der Funktionen ist. Als Beispiel wählen wir die konstante Funktion  $\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}$  und bestimmen ihre Fourier-Transformierte  $f$ . Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dy f(x-y)g(y) = \mathcal{F}(\sqrt{2\pi}\tilde{g}) = \int dk \tilde{g}(k)e^{ikx} = \sqrt{2\pi}g(x)$$

für eine Testfunktion  $g(x)$ . Daraus folgt die Relation

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-y)} dk = \delta(x-y). \quad (7.57)$$

Wir werden diese wichtige Formel in der Vorlesung oft brauchen. Ist  $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(f)$ , dann gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ik\tilde{f}. \quad (7.58)$$

Ableitungen gehen bei der Fourier-Transformation bis auf einen Faktor in die Multiplikation mit der dualen Variablen über.

# Kapitel 8

## Wellen in Medien

In diesem Kapitel untersuchen wir die Fortpflanzung und Dämpfung von elektromagnetischen Wellen in Leitern und Isolatoren. Insbesondere interessiert uns die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante und der Leitfähigkeit. Als Anwendung wird die frequenzabhängige Eindringtiefe von Wellen in Metalle berechnet. Aus wenigen allgemeinen Prinzipien wie Lokalität und Linearität wird ein Zusammenhang zwischen dem absorptiven Imaginärteil von  $\varepsilon$  und dem dispersiven Realteil hergeleitet.

### 8.1 Wellen in homogenen Leitern

Ein elektromagnetisches Wechselfeld beschleunigt die freien Ladungsträger in einem Leiter und verliert dabei Feldenergie. Es wird gedämpft und seine Energie in *Joulesche Wärme* umgewandelt. Dies ist der Grund dafür dass Metalle undurchsichtig sind. Wir wollen annehmen, das Material habe lineare Verknüpfungsgleichungen und sei ein *homogener Ohmscher Leiter*,

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{und} \quad \mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}, \quad (8.1)$$

mit räumlich konstanter Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$ , magnetischer Permeabilität  $\mu$  und *elektrischer Leitfähigkeit*  $\sigma$ . Im SI-System hat  $\sigma$  die Dimension A/Vm. Die frequenzabhängigen Materialgrößen  $\varepsilon$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  seien als gegeben vorausgesetzt.

#### 8.1.1 Transversal-Schwingungen und Skin-Effekt

Die einfachen Verknüpfungsgleichungen (8.1) gelten nur für feste Frequenzen. Deshalb betrachten wir zeitperiodische Felder mit Kreisfrequenz  $\omega$ , zum Beispiel  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\omega, \mathbf{r})e^{i\omega t}$ , und entsprechend auch für die Dichten  $\rho_f$  und  $\mathbf{j}_f$ . Nach Elimination von  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{j}_f$  vereinfachen sich für feste

Frequenzen die Maxwell-Gleichungen zu

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \rho_{f,0} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 - i\varepsilon\mu\omega \mathbf{E}_0 = \mu\sigma \mathbf{E}_0 \quad (8.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 + i\omega \mathbf{B}_0 = 0. \quad (8.3)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung  $\dot{\rho}_f + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0$  folgt

$$i\omega\rho_{f,0} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{f,0} = 0, \quad (8.4)$$

und damit können wir die erste Gleichung in (8.2) wie folgt schreiben

$$0 = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 - \rho_{f,0} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 - \frac{i}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{j}_{f,0} = \left( \varepsilon + \frac{\sigma}{i\omega} \right) \nabla \cdot \mathbf{E}_0, \quad (8.5)$$

wobei die räumliche Konstanz der Materialkonstanten  $\varepsilon$  und  $\sigma$  vorausgesetzt wurde.

Im Gegensatz zu den Verhältnissen im Vakuum gibt es jetzt *zwei Lösungstypen*, entsprechend den Lösungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon\omega = i\sigma. \quad (8.6)$$

**Lösungen mit  $\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ :** Bei diesem Lösungstyp ist neben dem magnetischen auch das elektrische Feld quellenfrei. Nehmen wir die Rotation der Gleichungen mit einer Rotation in (8.2,8.3), wobei wir die Quellenfreiheit der Felder benutzen, dann ergeben sich die *Helmholtz-Gleichungen* für das elektromagnetische Feld

$$\Delta \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0 \quad , \quad \Delta \mathbf{B}_0 + k^2 \mathbf{B}_0 = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \left( 1 + \frac{\sigma}{i\varepsilon\omega} \right). \quad (8.7)$$

Für *Isolatoren* mit verschwindender Leitfähigkeit ist  $k = \sqrt{\varepsilon\mu}\omega$  reell<sup>1</sup>, und die transversale Welle propagiert mit der Phasengeschwindigkeit

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}, \quad \text{wobei} \quad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

der Brechungsindex ist, durch den Isolator. Dies sind die früher diskutierten monochromatischen transversalen Wellen in Isolatoren. Wir werden später sehen, dass außerhalb von Resonanzstellen  $dn/d\omega$  positiv ist und *normale Dispersion* vorliegt.

Für *Metalle* ist  $\sigma > 0$  und der Ausbreitungsvektor wird komplex. Es ist angebracht, mit einem komplexen Brechungsindex  $\tilde{n}$  zu rechnen, indem wir

$$\tilde{n} = \frac{c}{\omega} k = n - i\kappa = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \left( 1 + \frac{\sigma}{i\varepsilon\omega} \right)} = c \sqrt{\varepsilon\mu \left( 1 + \frac{\sigma}{i\varepsilon\omega} \right)}. \quad (8.8)$$

eingeführen. Wir benutzen wieder den Zusammenhang zwischen dem Produkt  $\varepsilon_0\mu_0$  und der Lichtgeschwindigkeit.  $\kappa$  heißt *Absorptionsindex*. Für eine in  $z$ -Richtung fortschreitende transversale

<sup>1</sup>Wir sehen von Resonanzstellen, wo  $\varepsilon(\omega) = 0$  ist, ab.



ebene Welle finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \Re \left( \mathbf{E}_0 e^{i\omega(t-nz/c)} \right) e^{-\omega\kappa z/c}, \quad \mathbf{E}_0 = \text{konstant}, \\ c\mathbf{B} &= \Re \left( (n - i\kappa) \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{i\omega(t-nz/c)} \right) e^{-\omega\kappa z/c}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Die Amplitude der exponentiell gedämpften Welle fällt auf der Strecke  $d = c/\kappa\omega$  auf ein  $1/e$ -tel ab. Wellen können nur bis zu dieser *Eindringtiefe* in den Leiter eindringen.

Für kleine Frequenzen  $\varepsilon\omega \ll \sigma$  dürfen wir folgendermaßen nähern:

$$\tilde{n} \approx c \sqrt{\frac{\mu\sigma}{i\omega}} = (1 - i)c \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}} \quad \text{d.h.} \quad \kappa \approx c \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}$$

Die entsprechende Eindringtiefe ist dann

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (\sigma/\omega \gg \varepsilon). \quad (8.10)$$

Unsere Resultate gelten dann für gute Leiter im Gebiet der Wechselströme und technischen Hochfrequenzen. Für Kupfer ist

$$\mu \approx \mu_0 \quad \text{und} \quad \sigma \sim 58 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$$

und eine Welle mit 50 Hertz hat die Eindringtiefe  $d = 9$  mm. Ist  $d$  viel kleiner als die repräsentativen Längen, dann findet die Stromleitung in einer Haut(skin) statt. Man spricht vom *Skin-Effekt*. Der Wechselstrom fällt im Leiter nach innen exponentiell ab, wobei der Abfall für höhere Frequenzen schneller ist. Man findet zum Beispiel die folgenden Eindringtiefen,

Material	50 Hz	1 MHz	3 GHz
Aluminium	$d = 1.1$ cm	$d = 0.085$ mm	$d = 1.6$ $\mu\text{m}$
Kupfer	$d = 0.9$ cm	$d = 0.066$ mm	$d = 1.2$ $\mu\text{m}$
Meereswasser	$d = 30$ m	$d = 20$ cm	schlechter Leiter

Diese  $d$ -Werte geben die zur Abschirmung der betreffenden Wellenlänge etwa erforderliche Blechstärke an.

**Lösungen mit  $\varepsilon\omega = i\sigma$ :** Für diesen Lösungstyp braucht das elektrische Feld nicht quellenfrei zu sein. Wegen der zweiten Gleichung in (8.2) ist die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  nicht nur quellen- sondern auch wirbelfrei und verschwindet damit. Wir haben es mit *rein elektrischen Schwingungen* zu tun. Wegen der letzten Gleichung in (8.3) sind die Schwingungen des elektrischen Feldes *longitudinal*,  $\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0$ , und führen daher wegen  $\mathbf{j}_{t,0} = \sigma \mathbf{E}_0$  und wegen der Kontinuitätsgleichung zu Schwingungen der Ladungsdichte. Die Frequenz der Schwingungen ist

durch  $\varepsilon \cdot \omega = i\sigma$  gegeben. Später werden wir sehen, dass diese Wellen schwach gedämpft sind und mit der Plasmafrequenz schwingen.

### 8.1.2 Anwendung: Der Skin-Effekt im zylindrischen Leiter

Der Leiter sei ein Zylinder mit der  $z$ -Achse als Symmetrieachse. Entsprechend zeigt der Stromdichtevektor in die  $z$ -Richtung. Wegen  $\mathbf{j} \propto \mathbf{E}$  erfüllt die Stromdichte die gleiche Differentialgleichung wie das elektrische Feld, (8.7). Im Niederfrequenzbereich ist  $\sigma/\omega \gg \varepsilon$  und wir dürfen für  $\kappa$  die Näherung (8.10) machen. Für die Komponente  $j$  in  $\mathbf{j}_{f,0} = j\mathbf{e}_z$  finden wir dann die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta j + k^2 j = 0, \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c} \tilde{n}, \quad \tilde{n} \approx (1-i)c \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}. \quad (8.11)$$

Wir verwenden Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$  und nehmen an, dass  $j$  weder von  $\phi$  noch von  $z$  abhängt. Dann wird aus (8.11) die Besselsche Differentialgleichung,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} j + k^2 j = 0, \quad (8.12)$$

die von der *Bessel-Funktion* nullter Ordnung gelöst wird,

$$j(\rho) = A J_0(k\rho), \quad A = \text{konst.} \quad (8.13)$$

Man kann diese Resultate anwenden und den Widerstand eines zylindrischen Leiters mit Radius  $a$  berechnen. Für den Strom findet man

$$I = 2\pi A \int_0^a \rho J_0(k\rho) d\rho = \frac{2\pi a A}{k} J_1(ka) \implies j(\rho) = \frac{kI}{2\pi a} \frac{J_0(k\rho)}{J_1(ka)}, \quad (8.14)$$

wobei wir folgende Integrationsformel benutzten,

$$\int_0^y x J_0(x) dx = y J_1(y).$$

Die Spannung pro Längeneinheit ist gerade die  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes an der Leiteroberfläche  $\rho = a$ , also

$$\Delta U / \Delta L = E_z(a) = \frac{j(a)}{\sigma}. \quad (8.15)$$

Damit ist der Widerstand (pro Längeneinheit)

$$R = \frac{E_z(a)}{I} = \frac{k}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}. \quad (8.16)$$

Allgemein ist

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k!(k+n)!} \implies \frac{J_0(x)}{J_1(x)} \sim \frac{2}{x} \left(1 - \frac{x^2}{8} + O(x^4)\right), \quad (8.17)$$

woraus sich folgende Entwicklung des Widerstandes nach Potenzen von  $ka$  ergibt:

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi\sigma a^2} \left(1 + i \frac{\pi\omega\mu\sigma}{2c^2} a^2 + \dots\right). \quad (8.18)$$

Für  $\omega \rightarrow 0$  liefert dies den richtigen *Gleichstromwiderstand*  $R(0) = 1/\pi a^2 \sigma_0$ .

### 8.1.3 Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen

Die Maxwellsche Beziehung

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \quad (8.19)$$

kann mit den statischen Werten für  $\varepsilon_r$  und  $\mu_r$  wegen der bekannten Dispersion für Licht nicht gelten. Wir wollen das Frequenz-Verhalten der Leitfähigkeit und des Brechungsindex modellmäßig betrachten und gehen von der Bewegungsgleichung eines Ladungsträgers aus,

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = e_0 \mathbf{E} - \frac{m_0}{\tau} \dot{\mathbf{r}}. \quad (8.20)$$

Hier sind  $m_0$  und  $e_0$  die Masse und Ladung des Teilchens. Der letzte Term ist ein phänomenologischer Reibungsterm, der die Stöße mit den umgebenden Teilchen beschreibt. Dabei ist  $\tau$  die *Relaxationszeit*, die angibt, wie rasch die Bewegung ohne elektrisches Feld abklingt. Mit

$$\mathbf{j}_f = \rho_f \dot{\mathbf{r}} = n_f e_0 \dot{\mathbf{r}}, \quad (8.21)$$

wobei  $n_f$  die Dichte der freibeweglichen Ladungsträger ist, folgt dann

$$\frac{m_0}{n_f e_0} \frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} = e_0 \mathbf{E} - \frac{m_0}{n_f e_0 \tau} \mathbf{j}_f. \quad (8.22)$$

Im stationären Fall ist  $\mathbf{j}_f$  zeitunabhängig und wir finden das Ohmsche Gesetz  $\mathbf{j}_f = \sigma_0 \mathbf{E}$  mit der *statischen* Leitfähigkeit

$$\sigma_0 = \frac{n_f e_0^2 \tau}{m_0} \quad (\text{Drude-Formel, statischer Fall}). \quad (8.23)$$

Mit der harmonischen Zeitabhängigkeit  $\mathbf{j}_f = e^{i\omega t} \mathbf{j}_{f,0}$ ,  $\mathbf{E} = e^{i\omega t} \mathbf{E}_0$  wird (8.22) zu

$$\mathbf{j}_{f,0} = \sigma(\omega) \mathbf{E}_0, \quad \text{mit} \quad \sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad (\text{Drude}). \quad (8.24)$$

Wegen (8.8) ist das Quadrat des frequenzabhängigen komplexen Brechungsindex gegeben durch

$$\tilde{n}^2(\omega) = \varepsilon_r \mu_r \left( 1 + \frac{\sigma_0}{i\omega\varepsilon(1+i\omega\tau)} \right). \quad (8.25)$$

Für hohe Frequenzen,  $\omega\tau \gg 1$ , folgt daraus

$$\tilde{n}^2(\omega) = \varepsilon_r \mu_r \left( 1 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon\tau\omega^2} \right) = \varepsilon_r \mu_r \left( 1 - \frac{n_f e_0^2}{\varepsilon m_0 \omega^2} \right) = \varepsilon_r \mu_r \left( 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right),$$

wobei wir die *Plasmafrequenz* einführen,

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n_f e_0^2}{\varepsilon m_0}}. \quad (8.26)$$

Sie beträgt beispielsweise für Kupfer  $1.65 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ , wenn mit  $\varepsilon_r = 1$  gerechnet wird. Man beachte, dass die Relaxationszeit in diesem Resultat nicht mehr auftaucht. Für hohe Frequenzen ist der im Allgemeinen komplexe Brechungsindex

$$\tilde{n} = n - i\kappa = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \left( 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right)} \quad (\omega\tau \gg 1). \quad (8.27)$$

Unterhalb der Plasmafrequenz verschwindet  $n$  und der Index ist imaginär mit

$$\kappa = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \left( \frac{\omega_P^2}{\omega^2} - 1 \right)} \approx \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \frac{\omega_P}{\omega}. \quad (8.28)$$

Die Wellen sind exponentiell gedämpft und die *Eindringtiefe*

$$d = \frac{c}{\kappa\omega} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \frac{c}{\omega_P}, \quad \omega \ll \omega_P \quad (8.29)$$

ist frequenzunabhängig, bei Kupfer etwa  $0.02 \mu\text{m}$ . Übersteigt die Frequenz aber die Plasmafrequenz, so wird  $\tilde{n}$  reell und

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \left( 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right)}, \quad \kappa = 0, \quad \omega \gg \omega_P. \quad (8.30)$$

Für derart hohe Frequenzen ist der Verschiebungsstrom erheblich stärker als der Leitungsstrom und Leiter verhalten sich optisch ähnlich wie Isolatoren. Für Kupfer ist

$$\frac{1}{\tau} \sim 3.7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}, \quad \sigma_0 \sim 5.8 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \quad \omega_P \sim 1.6 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}.$$

Licht hat Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz von Kupfer,  $\omega = (2.4 - 5.2) \cdot 10^{15} \text{s}^{-1} < \omega_P$ , somit ist Kupfer für Licht undurchlässig. Die Plasmafrequenz nimmt aber mit der Ladungsträgerdichte ab oder der Masse der Teilchen zu. Daher sind Elektrolyte in der Regel durchsichtig.

### Ohmsches Gesetz in der Zeitvariablen

Was folgt aus der Frequenzabhängigkeit (8.24) der Leitfähigkeit für den Zusammenhang zwischen  $\mathbf{j}_f(t)$  und  $\mathbf{E}(t)$ ? Wir wollen von der  $\mathbf{k}$ -Abhängigkeit der Leitfähigkeit absehen. Für eine feste Frequenz ist

$$\mathbf{j}_{f,0}(\omega)e^{i\omega t} = \sigma(\omega)\mathbf{E}_0(\omega)e^{i\omega t}. \quad (8.31)$$

Um zum entsprechenden Zusammenhang in der Zeitvariablen zu gelangen, müssen wir eine Fourier-Transformation vornehmen. Mit (8.24) finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{i\omega t} \sigma(\omega) \mathbf{E}_0(\omega) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau} \mathbf{E}_0(\omega) \\ &= \frac{\sigma_0}{2\pi i\tau} \int dt' \mathbf{E}(t') \int d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i/\tau}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Alle auftretenden Integrale sind von  $-\infty$  bis  $\infty$  zu berechnen. Das Integral über  $\omega$  kann mit den Methoden der komplexen Analysis leicht berechnet werden:

Für  $t < t'$  ist die Exponentialfunktion in der Halbebene  $\Im(\omega) < 0$  exponentiell unterdrückt. Der Nenner hat keine Nullstelle in dieser Halbebene. Damit verschwindet das Schleifenintegral längs

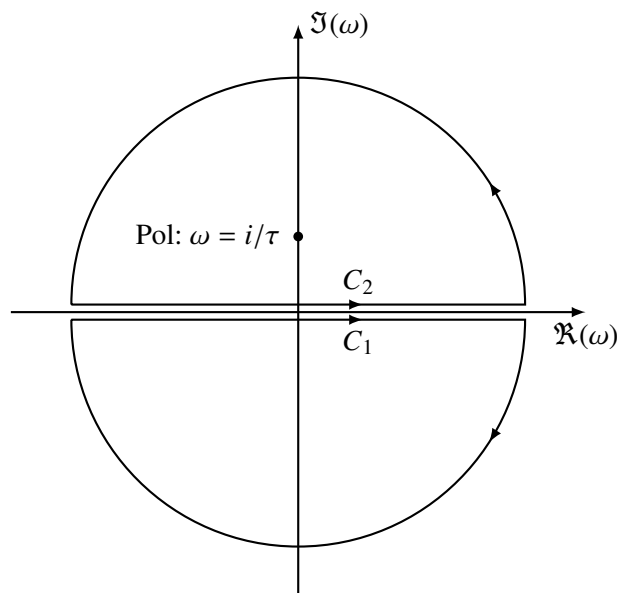


Abbildung 8.1: Zur Berechnung der Leitfähigkeit als Funktion der Zeit.

$C_1$  in der Abb. 8.1. Da der Halbkreis in der unteren Halbebene nicht beiträgt, verschwindet das  $\omega$ -Integral in (8.32) für  $t < t'$ . Wir brauchen damit das  $t'$ -Integral nur von  $-\infty$  nach  $t$  zu erstrecken. Für  $t > t'$  ist die Exponentialfunktion für  $\Im(\omega) > 0$  unterdrückt und der Halbkreis in der oberen Halbebene trägt nicht bei. Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i/\tau} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i/\tau} = e^{-(t-t')/\tau}. \quad (8.33)$$

Damit kommen wir zu der Lösung

$$\mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_0}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt' = \frac{n_f e_0^2}{m_0} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt'. \quad (8.34)$$

Anstelle des einfachen Ohmschen Gesetzes  $\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E}$  tritt also bei einer frequenzabhängigen Leitfähigkeit ein Integralzusammenhang, bei dem die Stromdichte zur Zeit  $t$  durch die Werte der Feldstärke zu allen früheren Zeiten bedingt ist. Dies ist in Einklang mit der Kausalität: Die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus. Praktisch hängt die Stromdichte zur Zeit  $t$  aber nur vom elektrischen Feld zu früheren Zeiten  $t'$  mit  $t - t' < \tau$  ab.

## 8.2 Dispersion in Isolatoren

Jedes Atom besteht aus einem positiven Kern und einer Hülle von mehr oder wenig leicht beweglichen Elektronen. Die Trägheit der Elektronen wirkt sich im elektrischen Verhalten der Atome aus und führt zu einer Frequenzabhängigkeit der relativen Dielektrizitätskonstante. Auch wenn Atome erst mit der Quantenmechanik korrekt behandelt werden können, so lässt sich ihr optisches Verhalten doch schon in der klassischen Physik einigermaßen beschreiben. Nach J.J. THOMSON gehen wir von der Vorstellung aus, dass die Atomelektronen elastisch an den Kern gebunden sind. Wir nehmen also an, dass jedes Atomelektron der Bewegungsgleichung

$$m \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} \right) = e \mathbf{E} \quad (8.35)$$

genügt. Im Modell (8.20) für Leiter mit ungebundenen Leitungselektronen fehlte die rücktreibende Kraft proportional zu  $\omega_0^2$ . In Isolatoren dürfen wir die Bindung an die Atome aber nicht mehr vernachlässigen. Wie für die Leitungselektronen haben wir eine der Geschwindigkeit proportionale und ihr entgegen gerichtete Dämpfungskraft eingeführt. Sie tritt notwendig auf, da beschleunigte Ladungen strahlen, also Energie abgeben. Man kann streng beweisen, dass eine Dispersion ohne Absorption mit dem Kausalitätsprinzip - nachdem eine Wirkung in die Vergangenheit unmöglich ist - im Widerspruch steht.

Auf der rechten Seite in (8.35) steht die vom elektrischen Feld am Ort des Elektrons auf das geladenen Teilchen ausgeübte Kraft. Nun besitzt der atomare Dipol das Moment  $\mathbf{p} = e \mathbf{r}$  und

wir erhalten die folgende Bewegungsgleichung für den atomaren Dipol,

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}. \quad (8.36)$$

Im *statischen Grenzfall* ergibt sich daraus die *Polarisierbarkeit*  $\alpha$ , definiert durch  $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ ,

$$\alpha_0 = \frac{e^2}{m\omega_0^2}. \quad (8.37)$$

Im Wechselfeld mit der Zeitabhängigkeit  $\sim e^{i\omega t}$  erhalten wir aber

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma) \mathbf{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_0 \quad \text{bzw.} \quad \alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (8.38)$$

Aufgeteilt in Real- und Imaginärteil heißt das

$$\Re(\alpha) = \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \quad \Im(\alpha) = -\frac{e^2}{m} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \quad (8.39)$$

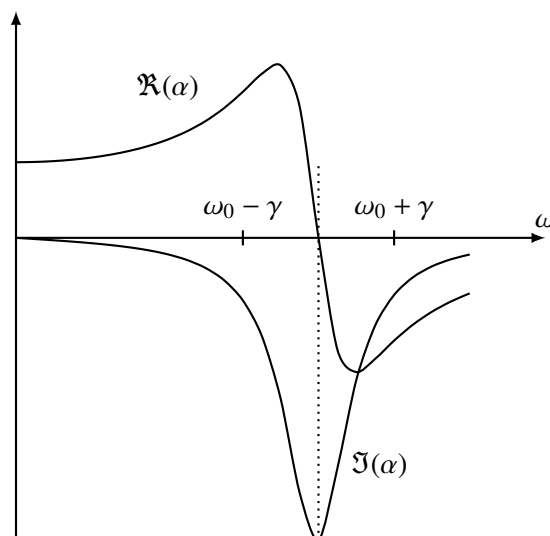


Abbildung 8.2: Qualitativer Verlauf der komplexen Polarisierbarkeit  $\alpha$  über  $\omega$  im Oszillatormodell.

Den Verlauf von Real- und Imaginärteil in Abhängigkeit von  $\omega$  zeigt Abb. 8.2.  $\alpha$  ändert sich innerhalb des schmalen Frequenzbandes  $\omega_0 - \gamma < \omega < \omega_0 + \gamma$  sehr schnell, wobei der Imaginärteil ein ausgeprägtes Extremum durchläuft. Außerhalb dieser *Resonanzstelle* ist  $\alpha$  beinahe reell. Links der Resonanz ist  $\Re(\alpha)$  positiv, rechts davon negativ. Wir erinnern uns an die *Clausius-*

*Mosotti-Formel* (4.57), welche die Dielektrizitätskonstante mit der Polarisierbarkeit  $\alpha$  verbindet,

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad \text{oder} \quad \varepsilon_r = 1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0} + O\left(\left(\frac{n\alpha}{\varepsilon_0}\right)^2\right), \quad (8.40)$$

wobei  $n$  die Teilchenzahldichte ist. Für nicht zu dichte Gase ist  $n\alpha/\varepsilon_0 \ll 1$  und wir dürfen die Terme höherer Ordnung vernachlässigen. Setzen wir hier unser obiges Resultat für  $\alpha$  ein, so finden wir

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma},$$

oder aufgelöst nach  $\varepsilon_r$

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} + O\left(\left(\frac{n\alpha}{\varepsilon_0}\right)^2\right). \quad (8.41)$$

Wobei wieder die letzte Näherung für verdünnte Gase gültig ist.

Nun verallgemeinern wir gleich auf Materialien, deren Moleküle bzw. Atome jeweils  $Z$  schwingungsfähige Systeme (Elektronen) mit verschiedenen Eigenfrequenzen  $\omega_j$  und Dämpfungskonstante  $\gamma_j$  tragen. Dann sind

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j} \\ \varepsilon_r(\omega) &\sim 1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

$f_j$  ist die „Zahl der Elektronen“ mit der Frequenz  $\omega_j$  und heißt *Oszillatorstärke*,  $\sum f_j = Z$ . Diese Gleichung (mit einer anderen Bedeutung von  $f_j$ ) kann aus der Quantenmechanik hergeleitet werden. Die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{e^2 n}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{a_j} \left( \frac{1}{\omega - i\gamma_j/2 + a_j} - \frac{1}{\omega - i\gamma_j/2 - a_j} \right) \quad (8.43)$$

mit  $2a_j = \sqrt{4\omega_j^2 - \gamma_j^2}$  hat Pole an den Stellen

$$\omega_j^\pm = \frac{i\gamma_j}{2} \pm a_j.$$

Die  $2j$  Pole liegen alle in der oberen Halbebene  $\Im(\omega) > 0$ . Dies ist eine Konsequenz der *Kramers-Kronig-Relation*, wie wir bald zeigen werden. Es lohnt sich, diese Formel in den verschiedenen Frequenzbereichen genauer zu untersuchen.

### Niederfrequenzverhalten:

Für *Isolatoren* gibt es keine freien Ladungsträger und die kleinste Eigenfrequenz  $\omega_j$  ist verschie-



den von Null. Das hat zur Folge, dass  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\omega)$  existiert:

$$\varepsilon_r(0) = 1 + \frac{e^2 n}{m \varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}. \quad (8.44)$$

In *elektrischen Leitern* gibt es dagegen quasi-freie Leitungselektronen, die nicht an Atome gebunden sind. Diese Elektronen haben eine verschwindende Eigenfrequenz und deshalb ist für Leiter die niedrigste Eigenfrequenz gleich Null. Für  $\omega \rightarrow 0$  sind also einige Glieder der Summe (8.42) divergent. Man zerlegt dann  $\varepsilon(\omega)$  in einen konvergenten Anteil  $\varepsilon_0$  und einen divergenten Rest,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{ne^2}{im\omega} \frac{f_0}{(\gamma_0 + i\omega)}. \quad (8.45)$$

Der Beitrag der gebundenen Ladungsträger wird durch die Polarisation beschrieben und derjenige der Leitungselektronen durch die Leitfähigkeit. In der Tat, setzen wir in die Maxwell-Gleichung im Frequenzraum

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{j}_0 + i\omega \mathbf{D}_0$$

die Beziehungen  $\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0$  und  $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$  ein, dann ergibt sich

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = (\sigma + i\omega\varepsilon_0) \mathbf{E}_0 = i\omega \left( \frac{\sigma}{i\omega} + \varepsilon_0 \right) \mathbf{E}_0.$$

Statt der elektrischen Stromdichte tritt im letzten Klammerausdruck eine komplexe, verallgemeinerte Dielektrizitätskonstante auf. Identifiziert man diese mit (8.45), dann findet man für die Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{f_0}{\gamma_0 + i\omega} \quad (\text{Drude-Modell}) \quad (8.46)$$

Wir finden also wieder die früher in (8.24) abgeleitete Formel, wenn wir  $\gamma_0$  mit  $1/\tau$  und  $n_f$  mit  $f_0 n$  identifizieren. Für tiefe Frequenzen  $\omega \ll \gamma_0$  ist dieser Ausdruck annähernd reell. Damit sind Strom und elektrisches Feld nahezu in Phase und die Leitfähigkeit hängt kaum von  $\omega$  ab.

### Hochfrequenzlimes:

Bei sehr hohen Frequenzen  $\omega \gg \omega_j$  dominiert in jedem Nenner in (8.42) der  $\omega^2$ -Term und

$$\varepsilon_r(\omega) \sim 1 - \frac{1}{\omega^2} \frac{e^2 n}{m \varepsilon_0} \sum f_j \equiv 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}, \quad \omega_P = \sqrt{\frac{Ze^2 n}{m \varepsilon_0}}. \quad (8.47)$$

Bei diesen Frequenzen kann man die Elektronen als quasi-frei behandeln und deshalb finden wir wieder unser früheres Resultat für die Plasmafrequenz.

## 8.3 Kausalität und Kramers-Kronig-Relationen

Allgemeine Kausalitätsbetrachtungen liefern schon interessante Beziehungen zwischen dem Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante. Wir gehen von einer frequenzabhängigen, linearen

und isotropen Relation zwischen der elektrischen Polarisation und der Feldstärke aus,

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega). \quad (8.48)$$

Diese Gleichung gilt für alle drei Feldkomponenten. Nach Fourier-Transformation geht diese Beziehung in eine Faltung für die entsprechenden zeitabhängigen Größen über

$$\mathbf{P}(t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{P}}(\omega)) = \varepsilon_0 \mathcal{F}(\tilde{\chi}(\omega) \mathbf{E}(\omega)) = \varepsilon_0 \int dt' \chi(t-t') \mathbf{E}(t'), \quad (8.49)$$

wobei wir den *Suszeptibilitätskern*

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \tilde{\chi}(\omega) \quad (8.50)$$

eingeführt. Die Beziehung (8.49) beschreibt eine Nichtlokalität in der Zeit: Die Polarisation kann nicht augenblicklich der gerade herrschenden Feldstärke folgen. Sie hängt vom  $\mathbf{E}$ -Feld zu anderen Zeiten ab. Nach dem *Kausalitätsprinzip* kann sie aber nur von den Werten des  $\mathbf{E}$ -Feldes zu früheren Zeiten abhängen. Für  $\chi$  bedeutet dies die Einschränkung

$$\chi(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0. \quad (8.51)$$

Linearität und Kausalität implizieren also

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \chi(t-t') \mathbf{E}(t') = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) \mathbf{E}(t-\tau) \quad (8.52)$$

mit einem im Allgemeinen komplexen

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (8.53)$$

Drei Tatsachen sind jetzt hier von Bedeutung:

- $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{E}$  und damit auch der Suszeptibilitätskern  $\chi(t)$  sind reell. Aus (8.53) folgt daraus die *Realitätsbedingung*

$$\tilde{\chi}(\omega) = \tilde{\chi}^*(-\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (8.54)$$

an die Fourier-Transformierte der Suszeptibilität.

- Die Funktion  $\chi(t)$  ist für alle Zeiten endlich. Aus (8.53) folgt dann, dass  $\tilde{\chi}(\omega)$  in der unteren komplexen  $\omega$ -Halbebene analytisch ist. Insbesondere fällt  $\tilde{\chi}$  für  $\Im(\omega) \rightarrow -\infty$  exponentiell schnell ab.
- Wir nehmen an, der Betrag von  $\chi(t)$  sei integrierbar,  $\chi \in L_1(\mathbb{R})$ . Dann folgt, dass  $\tilde{\chi}(\omega)$  auf der abgeschlossenen unteren Halbebene  $\Im(\omega) \leq 0$  stetig und beschränkt ist, und dass sein Betrag für  $|\omega| \rightarrow \infty$  gegen Null strebt, gleichmäßig in alle Richtungen mit  $\Im(\omega) \leq 0^2$ .

<sup>2</sup>Dies schließt man aus dem Riemann-Lebesque-Lemma.

Nun dürfen wir den Satz aus der Theorie der analytischen Funktion bemühen, nach dem das Schleifenintegral einer holomorphen Funktion verschwindet, falls die Funktion im umschlossenen Gebiet keine Pole aufweist. Also ist

$$\oint_C \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 0, \quad (8.55)$$

falls die Schleife  $C$  den Punkt  $\omega$  nicht umschließt und im umschlossenen Gebiet holomorph ist. Nun wählen wir folgende Schleife, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird: Zunächst von  $-L$

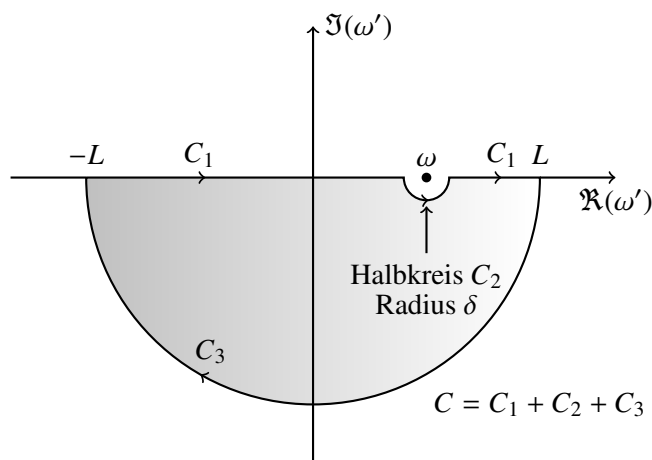


Abbildung 8.3: Zur Ableitung der Relation von Kramers und Kronig.

nach  $L$  entlang der reellen Achse und dann auf dem Halbkreis mit Radius  $L$  in der unteren Halbebene zurück nach  $-L$ . Für große  $L$  trägt das Integral längs des Halbkreises  $C_3$  nicht bei. Wir möchten gerne  $\tilde{\chi}$  für reelle  $\omega$  wissen. Dann ist der Integrationsweg durch einen kleinen Halbkreis mit infinitesimalen Radius  $\delta$  unterhalb der reellen Achse zu verbiegen, siehe Abb. 8.3. Unter Anwendung des Satzes gewinnt man die Gleichung

$$0 = \oint_C \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} + i\pi\tilde{\chi}(\omega) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0, L \rightarrow \infty,$$

wobei  $\mathcal{P}$  das Hauptwert-Integral bezeichnet. Die Auflösung nach  $\tilde{\chi}$  führt auf die Relation

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (8.56)$$

Nehmen wir davon Real- und Imaginärteile, so erhalten wir

$$\Re\tilde{\chi}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad , \quad \Im\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (8.57)$$

Wegen  $\tilde{\epsilon}_r(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega)$  folgen die analogen Relationen zwischen Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante,

$$\Re \tilde{\epsilon}_r(\omega) = 1 - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im \tilde{\epsilon}_r(\omega')}{\omega' - \omega} \quad , \quad \Im \tilde{\epsilon}_r(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re \tilde{\epsilon}_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} \quad . \quad (8.58)$$

Die große Bedeutung dieser *Kramers-Kronig Relationen* liegt in der Tatsache, dass sie  $\Re(\tilde{\epsilon}_r)$  und  $\Im(\tilde{\epsilon}_r)$  eindeutig miteinander verknüpfen. Kennt man den dispersiven Realteil, dann kann man den absorptiven Imaginärteil berechnen und umgekehrt. Vorausgesetzt wurden dabei nur die lineare Beziehung zwischen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{P}$  und das Kausalitätsprinzip. Die Gleichungen können leicht auf inhomogene und anisotrope lineare Medien verallgemeinert werden. Dann ist  $\tilde{\chi}$  eine Matrix und hängt neben der Frequenz noch von  $\mathbf{r}$  ab.

Kramers-Kronig-artige Relationen gelten nicht nur für den speziellen Fall der elektrischen Polarisation, sondern für alle physikalische Systeme mit linearer Antwort auf die Erregung (linear response).

## Kapitel 9

# Relativistische Form der Elektrodynamik

Die Lorentz-Kovarianz der Feldgleichungen wurde von LORENTZ und POINCARÉ schon vor der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie durch EINSTEIN gezeigt.<sup>1</sup> Die Kovarianz tritt am deutlichsten zu Tage, wenn man die so genannte Vierer-Notation benutzt. Diese wird im nächsten Abschnitt eingeführt und damit die Kovarianz der Maxwell-Gleichungen im Vakuum bewiesen. Die physikalische Bedeutung der Kovarianz werden wir weiter unten ausführlich diskutieren.

### 9.1 Poincare-Transformationen

Im Folgenden sei  $M$  die 4-dimensionale Minkowski-Raumzeit (MUNDIS, MINKOWSKI). Die Punkte im affinen Raum  $M$  sind *Ereignisse*. Unser Bezugssystem sei ein Inertialsystem  $I$  (durch Fixsterne gegeben). Ereignisse werden durch ihre Zeit, gemessen mit Uhren, welche relativ zum System ruhen und durch Lichtsignale synchronisiert sind, und ihre kartesischen Koordinaten charakterisiert.

In einem gewählten Koordinatensystem wird jedes Ereignis durch seine Zeit und seinen Ort, also durch die 4-Koordinaten

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

eindeutig charakterisiert. Hier haben wir die Zeitkoordinate mit der Lichtgeschwindigkeit multipliziert, damit alle Komponenten von  $x$  die Dimension einer Länge haben. Oft schreiben wir auch  $x = (x^\mu)$ ;  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Die Differenzen von Ereignissen definieren einen 4-dimensionalen

---

<sup>1</sup>Aufgabe der absoluten Zeit (W. Voigt 1887), Lorentz-Fitzgerald-Kontraktion (1892), richtige Transformationen der Raumkoordinaten (Lorentz 1899), Synchronisation der Uhren (Poincaré 1904), Invarianz der Maxwell-Gleichungen (Lorentz 1904, Einstein 1905 und Poincaré 1906) und Spezielle Relativitätstheorie (Einstein 1905).

Vektorraum  $V$ . In einem Inertialsystem haben Elemente aus  $V$  die Form

$$\xi^T = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad \text{bzw.} \quad \xi = (\xi^\mu).$$

Wir führen eine Bilinearform ein,

$$(\xi, \chi) = \xi^0 \chi^0 - \xi^1 \chi^1 - \xi^2 \chi^2 - \xi^3 \chi^3, \quad (9.2)$$

welche mit Hilfe des *metrischen Tensors*

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta_{\mu\nu}) \quad \text{bzw.} \quad \eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu})$$

folgendermaßen geschrieben werden kann

$$(\xi, \chi) = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \xi^\mu \chi^\nu = \xi^T \eta \chi. \quad (9.3)$$

Der *lorentzinvariante Abstand* zweier Ereignisse mit Raumzeit-Koordinaten  $x$  und  $y$  ist

$$d(x, y) = (\xi, \xi), \quad \text{wobei} \quad \xi = y - x \quad (9.4)$$

der Differenzvektor zwischen den Ereignissen ist. Indizes werden mit  $\eta_{\mu\nu}$  und  $\eta^{\mu\nu}$  hinunter- oder hinaufgezogen, zum Beispiel gelten

$$\xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu \quad \text{bzw.} \quad \xi^\mu = \eta^{\mu\nu} \xi_\nu, \quad \text{so dass} \quad (\xi, \chi) = \xi^\mu \chi_\mu = \xi_\mu \chi^\mu.$$

Wir haben die *Einsteinsche Summenkonvention* benutzt, wonach über doppelt auftretende Indizes (wovon einer kovariant und einer kontravariant sein muss) summiert wird.

Wir betrachten nun ein zweites Inertialsystem  $I'$  (das gestrichene System), welches relativ zum ursprünglichen ungestrichenen System in konstanter gleichförmiger Bewegung ist. Das *Äquivalenzprinzip der speziellen Relativitätstheorie* besagt nun, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich aussehen. Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich (Michelson-Morley-Experiment).

Ein Punktereignis werde nun im Inertialsystem  $I$  durch die Koordinaten  $x$  und im Inertialsystem  $I'$  durch die Koordinaten  $x'$  beschrieben. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten hat die Form

$$x'^\mu = a^\mu + f^\mu(x), \quad \text{wobei} \quad f^\mu(0) = 0 \quad \text{und} \quad a^\mu = \text{konstant}$$

angenommen werden kann. Wegen der Homogenität des Raumes sind

$$x''^\mu = x'^\mu - a^\mu$$

ebenfalls Koordinaten in einem Inertialsystem  $I''$ . Es gilt dann

$$x''^\mu = f^\mu(x) \quad \text{mit} \quad f^\mu(x=0) = 0.$$

Dies bedeutet, dass die vier Funktionen  $f^\mu$  den Ursprung in  $I$  nach Null abbilden. Wir wollen nun einsehen, dass es lineare Funktionen sein müssen. Dazu betrachten wir ein Teilchen im Inertialsystem  $I$ , auf das keine Kraft einwirkt. Seine Weltlinie ist eine Gerade innerhalb des Lichtkegels in  $I$ . Vom Inertialsystem  $I''$  aus betrachtet, ist die Weltlinie des kräftefreien Teilchens ebenfalls eine Gerade innerhalb des Lichtkegels. Dies gilt für alle Weltlinien von kräftefreien Teilchen. Die Abbildung  $f : x^\mu \rightarrow f^\mu(x)$  bildet deshalb den Ursprung in den Ursprung und Geraden (innerhalb des Lichtkegels) in Geraden ab. Dies bedeutet, dass die die Koordinaten in einem Inertialsystem lineare Funktionen der Koordinaten im anderen Inertialsystem sind:  $x''^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ , beziehungsweise

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \longleftrightarrow x' = \Lambda x + a. \quad (9.5)$$

Seien nun  $x$  die Koordinaten einer zur Zeit  $y^0$  am Orte  $\mathbf{r}_0$  ausgesandten Lichtwelle in  $I$ . Bezüglich  $I'$  wird dieselbe Lichtwelle zur Zeit  $y'^0$  am Orte  $\mathbf{r}'_0$  ausgesandt und hat die Koordinaten  $x'$ . In beiden Inertialsystemen ist die Lichtgeschwindigkeit gleich, so dass gilt

$$0 = (x - y)^T \eta (x - y) = (x' - y')^T \eta (x' - y') = (x - y)^T \Lambda^T \eta \Lambda (x - y).$$

Eine hinreichende Bedingung dafür ist

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \kappa(\Lambda) \eta \quad \text{mit} \quad \kappa(\mathbb{1}) = 1 \quad \text{und} \quad \kappa(\Lambda) > 0.$$

Ist  $\kappa \neq 1$ , dann können wir durch eine Maßstabsänderung

$$x' \longrightarrow \sqrt{\kappa} x'$$

stets  $\kappa = 1$  erreichen. Wir wollen also nur Matrizen  $\Lambda$  betrachten, welche die Bedingung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \iff \Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (9.6)$$

erfüllen. Für solche Transformationen ist das relativistische Abstandsquadrat zweier Ereignisse  $x, y$  im Minkowski-Raum unabhängig vom Inertialsystem,

$$(x' - y')^2 = (x' - y')^T \eta (x' - y') = (x - y)^T \eta (x - y) = (x - y)^2. \quad (9.7)$$

Die Menge der Transformationen (9.5)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (9.8)$$

bilden die *Poincare-Gruppe* oder inhomogene Lorentz-Gruppe, die mit  $iL$  bezeichnet wird,

$$iL = \left\{ (\Lambda, a) \mid a \in V, \Lambda \in \mathcal{L}(V), \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \right\}. \quad (9.9)$$

Die Gruppenmultiplikation ist durch die Komposition zweier Transformationen gegeben,

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \quad (9.10)$$

Das Inertialsystem  $I'$  bewege sich relativ zum Inertialsystem  $I$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = c \cdot \boldsymbol{\beta}$ . Wir führen die Projektoren  $P_{\parallel}$  und  $P_{\perp}$  in Richtung der Relativgeschwindigkeit und senkrecht dazu ein,

$$P_{\parallel} = \frac{1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^t \quad \text{und} \quad P_{\perp} = \mathbb{1} - P_{\parallel} \quad \text{mit} \quad \beta = |\boldsymbol{\beta}|. \quad (9.11)$$

Dann lautet der Lorentz-Boost

$$x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda = (\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^t \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & P_{\perp} + \gamma P_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (9.12)$$

mit dem relativistischen  $\gamma$ -Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \in [1, \infty). \quad (9.13)$$

Ein in  $I'$  ruhendes Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  im Inertialsystem  $I$ . Fallen die Koordinatenursprünge zur Zeit  $t = 0$  zusammen und bewegt sich  $I'$  längs der ersten Koordinatenachse, dann gilt

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma (x^0 - \beta x^1) & , & \quad x'^2 = x^2 \\ x'^1 &= \gamma (x^1 - \beta x^0) & , & \quad x'^3 = x^3. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Wegen (9.6) haben die Matrizen  $\Lambda$  die Determinante  $\pm 1$ ,

$$\det \Lambda^T \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \det \Lambda = \pm 1.$$

Ist ein Vektor  $\xi$  in einem Inertialsystem zeitartig, d.h. ist  $(\xi, \xi) > 0$ , dann ist er es auch in jedem anderen Inertialsystem. Deshalb bildet eine Lorentz-Transformation  $\Lambda$  das Innere des *Vorwärtslichtkegels*

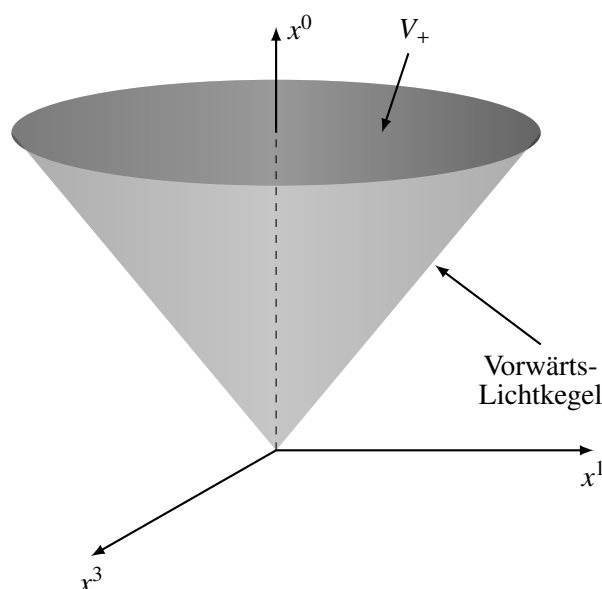
$$V_+ = \left\{ \xi^0 > 0, (\xi, \xi) > 0 \right\} \quad (9.15)$$

entweder in sich, oder in das Innere des *Rückwärtslichtkegels*

$$V_- = \left\{ \xi^0 < 0, (\xi, \xi) > 0 \right\} \quad (9.16)$$



ab. Im zweiten Fall wird die Zeitrichtung umgekehrt.



In der Tat, das 00-Komponente der Matrixgleichung (9.6) lautet ausgeschrieben

$$\Lambda_0^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda_0^\beta = 1 = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2,$$

und impliziert  $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$ . Für  $\Lambda_0^0 \geq 1$  wird der Vorwärtslichtkegel in sich abgebildet und für  $\Lambda_0^0 \leq -1$  in den Rückwärtslichtkegel.

## 9.2 Ströme, Potentiale und Feldstärke

Einsteins Weg bei der Entdeckung der *speziellen Relativitätstheorie* führte über eine sorgfältige Analyse des Zeit- und Raumbegriffes und einige geistreiche Gedankenexperimente. Wir gehen hier den bequemeren und formaleren Weg über die Invarianz der Maxwell-Gleichungen bezüglich Lorentz-Transformationen. Dabei werden das 4-er Potential  $A^\mu$  und der 4-er Strom  $j^\mu$  auftreten.

Eine ruhende Ladung hat eine Ladungsdichte, aber keine Stromdichte. Bewegen wir uns aber relativ zu ihr (oder diese relativ zu uns), dann ordnen wir der jetzt bewegten Ladung neben einer Ladungs- auch eine Stromdichte zu. Beim Übergang zwischen Inertialsystemen transformieren Ladungsdichte und Stromdichte also ineinander. Die Dichten  $c\rho$  und  $\mathbf{j}$  sind nicht so verschieden, wie sie auf den ersten Blick scheinen. Sie haben die gleiche Einheit und wir können sie zu einer 4-er Stromdichte kombinieren,

$$j = (j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (9.17)$$

Die Notation zeigt an, dass  $j^\mu$  ein Vektorfeld ist. Dies bedeutet, dass  $j$  bei einem Wechsel des Inertialsystems wie ein Vektor transformiert. Sind  $x$  und  $x'$  Koordinaten in den Inertialsystemen  $I$  und  $I'$  sowie  $j^\mu$  und  $j'^\mu$  die Komponenten der 4-er Stromdichte in den beiden Systemen, dann gilt

$$j'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x) \quad \text{bzw.} \quad j'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu j_\nu(x), \quad \Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta. \quad (9.18)$$

Damit ist festgelegt, wie die Komponenten von  $j^\mu$  bei einem Wechsel des Inertialsystems transformieren. Die *Kontinuitätsgleichung* (6.46) hat nun die elegante Form

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (9.19)$$

Gilt sie in einem Inertialsystem, dann gilt sie auch in jedem anderen Inertialsystem. Man sagt, die Gleichung ist *kovariant*. Wäre eine Gleichung der Elektrodynamik nicht kovariant, dann würde diese bestimmte Inertialsysteme auszeichnen, im Widerspruch zum Einsteinschen Äquivalenzprinzip.

Nach Einführung der 4-er Notation ist der Beweis der Kovarianz einfach. Aus (9.8) folgt, dass der 4-er Gradient ein Vektoroperator ist,

$$\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu. \quad (9.20)$$

Deshalb gilt

$$\partial'_\mu j'^\mu(x') = (\Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu) (\Lambda^\mu{}_\alpha j^\alpha(x)) \stackrel{(9.6)}{=} \partial_\nu j^\nu(x) = 0$$

und die Koninuitätsgleichung (9.19) gilt in allen Inertialsystemen. Der *Wellenoperator*

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \Delta = \partial_0^2 - \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu \quad (9.21)$$

ist ein invarianter Differentialoperator,

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial'^\mu \partial'_\mu = \square'. \quad (9.22)$$

Eine ruhende Ladung ohne Magnetfeld wird nach (6.47) durch ein skalares Potential beschrieben, während eine bewegte Ladung ein nichtverschwindendes Vektorpotential hat. Die verschiedenen Potentiale gehen bei einem Wechsel des Inertialsystems ineinander über. Diese Tatsache und die Wellengleichungen (6.47) legen nahe, das skalare Potential  $\Phi$  und Vektorpotential  $\mathbf{A}$ , ähnlich wie die Ladungs- und Stromdichte, zu einem 4-er Potential zusammenzufassen,

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \implies A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x). \quad (9.23)$$

Dann nimmt die Lorenz-Eichbedingung (6.42) folgende einfache Form an,

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (9.24)$$

Wie die Kontinuitätsgleichung ist dies eine kovariante Bedingung. Ist sie in einem Inertialsystem erfüllt, dann gilt sie in allen anderen Inertialsystemen. Für Potentiale, die die Lorenz-Eichbedingung erfüllen, lauten die Wellengleichungen (6.47) für isolierte Ladungen und Ströme

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (\text{Lorenz-Eichung}). \quad (9.25)$$

Wie erwartet, ist dies eine *kovariante* Wellengleichung, wie es sofort aus (9.22) folgt. Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Wellengleichung ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist eine Überlagerung von ebenen Wellen und wird im nächsten Kapitel vorgestellt.

### 9.3 Relativistische Form der Maxwell-Gleichungen

Wie lauten nun die Maxwell-Gleichungen für die elektromagnetischen Felder ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) in kovarianter Form? Wir beginnen mit der Umschreibung der Beziehungen zwischen den Feldern und Potentialen, (6.31) und (6.32),

$$\partial_0 A_i - \partial_i A_0 = E_i/c \quad \text{und} \quad \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\varepsilon_{ijk} B_k. \quad (9.26)$$

Nun ist aber das in den Indizes antisymmetrische Feld

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (9.27)$$

ein Tensorfeld, wie man schnell beweist,

$$F'_{\mu\nu}(x') = \partial'_\mu A'_\nu(x') - \partial'_\nu A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta}(x). \quad (9.28)$$

Die 6 linear unabhängigen Komponenten dieses *Feldstärketensors* lauten nach (9.26)

$$F_{0i} = E_i/c \quad \text{und} \quad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k. \quad (9.29)$$

Ausgeschrieben hat der Feldstärketensor die Gestalt,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}/c, \mathbf{B}) \implies (F^{\mu\nu}) = (-\mathbf{E}/c, \mathbf{B}). \quad (9.30)$$

Zur relativistischen Formulierung der Maxwell-Gleichungen im freien Raum benutzt man die Umkehrtransformation zu (9.29),

$$E_i = cF_{0i} \quad \text{und} \quad B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}. \quad (9.31)$$

Wir werden nun zeigen, dass die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0, \quad (9.32)$$

identisch zu den kovarianten Gleichungen

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu} = 0 \quad (9.33)$$

für den Feldstärketensor sind. Dies bedeutet, dass die 4-er Rotation des Feldstärketensors verschwindet. Beachte, dass die linke Seite vollständig antisymmetrisch in den Indizes ist. Vertauschen wir zum Beispiel die Indizes  $\mu$  und  $\nu$  und berücksichtigen die Antisymmetrie des Feldstärketensors, so ändert die linke Seite in (9.33) das Vorzeichen:

$$\text{LS}(\nu, \mu, \rho) = F_{\nu\mu,\rho} + F_{\rho\nu,\mu} + F_{\mu\rho,\nu} = -F_{\mu\nu,\rho} - F_{\nu\rho,\mu} - F_{\rho\mu,\nu} = -\text{LS}(\mu, \nu, \rho).$$

Um zu beweisen, dass (9.33) nur eine Umschreibung der homogenen Maxwell-Gleichungen ist, betrachten wir die verschiedenen nicht-trivialen Fälle:

$\mu, \nu, \rho$	$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu}$
$i, j, 0$	$F_{ij,0} + F_{0i,j} + F_{j0,i} = 0$
$i, j, k$	$F_{ij,k} + F_{ki,j} + F_{jk,i} = 0$

Die erste Zeile ergibt die zweite Maxwell-Gleichung in (9.32):

$$c \cdot (1. \text{ Zeile}) = -\varepsilon_{ijk}c\partial_0 B_k + (\partial_j E_i - \partial_i E_j) = -\varepsilon_{ijk}(\partial_t B_k + \varepsilon_{kpq}\partial_p E_q) = 0,$$

wobei wir die nützliche Identität

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

gebrauchten.

Die zweite Zeile ist identisch zur ersten Maxwell-Gleichung in (9.32). In der Tat, wegen der vollständigen Antisymmetrie der letzten Zeile in  $i, j, k$  genügt es, den Fall 1, 2, 3 zu untersuchen:

$$\partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} = -(\partial_1 B_1 + \partial_3 B_3 + \partial_2 B_2) = -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Um die inhomogenen Gleichungen (vorerst im Vakuum mit isolierten Quellen)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (9.34)$$

umzuschreiben, berechnen wir die 4-er Divergenz des Feldstärketensors

$$(\partial_\mu F^{\mu\nu}) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und erinnern uns an die Definition des 4-er Stromes,  $(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j})$  und die Identität  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ . Damit findet man für die *inhomogenen Maxwell-Gleichungen* die an Eleganz kaum noch zu überbietende Form

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (9.35)$$

Wegen der Antisymmetrie von  $F^{\mu\nu}$  ist die Kontinuitätsgleichung  $\partial_\nu j^\nu = 0$  offensichtlich. Schreibt man den Feldstärketensor wie in (9.27) als 4-er Rotation des Potentials, so sind die homogenen Maxwell-Gleichungen (9.33) automatisch erfüllt. Die Umkehrung gilt (in einfach zusammenhängenden Gebieten) ebenfalls: Jeder Feldstärketensor, welcher (9.33) erfüllt, hat die Form (9.27) mit einem Vektorfeld  $A_\mu$ .

Unter einer Eichtransformation (6.36,6.37) transformiert das 4-er Potential gemäß

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \lambda, \quad (9.36)$$

und der Feldstärketensor ist invariant. In der kovarianten Schreibweise ist diese Invarianz offensichtlich

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \longrightarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - (\partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu \partial_\mu \lambda) = F_{\mu\nu}.$$

### 9.3.1 Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

Im Einklang mit dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip führen Lorentz-Transformationen Lösungen der Maxwell-Gleichungen in Lösungen über. Es sei nun

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}' = 0 \quad (9.37)$$

das Feld einer im Ursprung des Inertialsystems  $I'$  ruhenden Punktladung. Wir wollen nun bestimmen, wie die Felder in einem relativ zu  $I'$  bewegten Inertialsystem  $I$  aussehen. Im System  $I$  bewegt sich das Punktteilchen gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit.

Es bezeichnen  $x$  und  $x'$  die Koordinaten der Inertialsysteme. Bewegt sich  $I'$  entlang der  $z$ -Achse relativ zu  $I$ , dann lautet die Lorentz-Transformation

$$x = \Lambda x', \quad \Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (9.38)$$

Wir machen nun Gebrauch von der Transformationsformel (9.28) für das elektromagnetische Feld. Darin tritt  $\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta$  auf, dass man aus  $(\Lambda^\mu{}_\nu)$  durch einen Vorzeichenumkehr von  $\beta$  erhält. Mit (9.30) ergeben sich dann die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \gamma (E'_1(x') + \beta c B_2(x')) & , & \quad c B_1(x) = \gamma (c B'_1(x') - \beta E_2(x')) \\ E_2(x) &= \gamma (E'_2(x') + \beta c B_1(x')) & , & \quad c B_2(x) = \gamma (c B'_2(x') + \beta E_1(x')) \\ E_3(x) &= E'_3(x') & , & \quad B_3(x) = B'_3(x'). \end{aligned} \quad (9.39)$$

Für eine in  $I'$  ruhende Punktladung verschwindet das Magnetfeld  $\mathbf{B}'$  und diese Formeln vereinfachen sich. Setzen wir noch

$$r'^2 = \gamma^2 (z - vt)^2 + x^2 + y^2, \quad (9.40)$$

dann hat das elektromagnetische Feld einer längs der  $z$ -Achse mit konstanter Geschwindigkeit  $v = \beta c$  bewegten Punktladung die Form

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r'^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - vt \end{pmatrix}, \quad c\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\gamma v}{r'^3} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.41)$$

Des elektrische Feld steht senkrecht auf dem magnetischen Feld in Einklang mit der Tatsache, dass  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  eine lorentzinvariante Größe ist.

Für einen allgemeinen Lorentz-Boost zwischen Inertialsystemen mit Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  führen wir den Projektor  $P_{\parallel}$  auf die Relativgeschwindigkeit, siehe (9.11). Die Felder können dann in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Relativgeschwindigkeit zerlegt werden, zum Beispiel

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} = P_{\parallel}\mathbf{E} + P_{\perp}\mathbf{E}, \quad P_{\perp} = \mathbb{1} - P_{\parallel}.$$

Dann lauten die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}'_{\parallel}(x') + \gamma (\mathbf{E}'_{\perp}(x') - \mathbf{v} \times \mathbf{B}'(x')) \\ \mathbf{B}(x) &= \mathbf{B}'_{\parallel}(x') + \gamma (\mathbf{B}'_{\perp}(x') + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'(x')/c) . \end{aligned} \quad (9.42)$$

Wir betrachten nun das Feld einer in  $z$ -Richtung bewegten Ladung etwas genauer. Dazu schreiben wir das elektrische Feld in (9.41) in der Form

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{[(ct - \beta z)^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2t^2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - vt \end{pmatrix} . \quad (9.43)$$

Es sei nun  $\alpha$  der Winkel zwischen den Kraftlinien des elektrischen Feldes und dem Geschwindigkeitsvektor, siehe Abbildung 9.1.

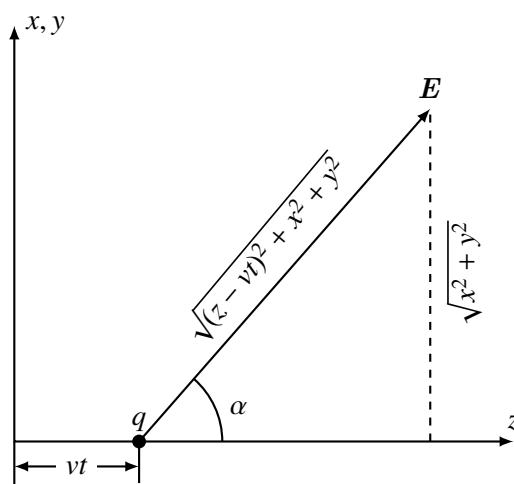


Abbildung 9.1: Zur Richtungsabhängigkeit der Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung.

Aus der Abbildung lesen wir folgende Beziehung ab:

$$\sin^2 \alpha = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (z - vt)^2} . \quad (9.44)$$

Mithilfe der daraus resultierenden Identität

$$1 - \beta^2 \sin^2 \alpha = \frac{(\beta z - ct)^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2t^2)}{(r - vt)^2} ,$$

können das elektrische Feld in folgende Form bringen

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{vt}}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^3}. \quad (9.45)$$

Man sieht hier deutlich, dass die Feldlinien geradlinig vom Ort  $\mathbf{vt}$  der Ladung ausgehen. Der Betrag des elektrischen Feldes

$$|\mathbf{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^2} \quad (9.46)$$

ist jedoch keineswegs kugelsymmetrisch. Er hängt vom Winkel zwischen Geschwindigkeit und Richtung der Kraftlinien ab. In Richtung der Geschwindigkeit ist er am kleinsten, senkrecht dazu am größten

$$E_{\min} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^2} \quad \text{und} \quad E_{\max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^2}. \quad (9.47)$$

Also ist

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \gamma^3 = \left( \frac{E}{mc^2} \right)^3. \quad (9.48)$$

In dem Maß, wie die Geschwindigkeit des Teilchens sich der Lichtgeschwindigkeit nähert, konzentriert sich also das ganze Feld auf eine flache, senkrecht zur Bahn orientierte Scheibe. Zum Beispiel für Elektronen mit 1 MeV ist  $\beta \sim 0.94$  und entsprechend ist das Verhältnis etwa 10. An dem vorgeschlagenen Elektronenbeschleuniger ELFE hätten die Elektronen etwa eine Energie  $E \sim 15 - 30$  GeV und es wäre

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \left( \frac{(15 - 30) \cdot 10^3}{0.5} \right)^3 \sim (27 - 216) \cdot 10^{12}.$$

Im Grenzfall  $v \rightarrow c$  wird die Feldstärke in der Scheibe unendlich.

## 9.4 Erhaltungssätze für Energie und Impuls

Jeder erhaltene Vierer-Strom  $(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j})$  definiert eine erhaltene Ladung,

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies \frac{d}{dx^0} \int d^3x j^0 = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = - \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

Die Stromdichte soll im räumlich Unendlichen so schnell abfallen, dass bei der partiellen Integration keine Oberflächenterme auftreten. Dann gilt

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies \frac{d}{dt} Q = 0, \quad Q = \int d^3x j^0. \quad (9.49)$$



Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist ein wichtiges Beispiel, wurde aber schon hinreichend oft diskutiert.

### Homogene und isotrope lineare Medien

In polarisierbaren und magnetisierbaren Medien ändern sich die homogenen Maxwell-Gleichungen (9.33) nicht, die inhomogenen aber sehr wohl. Man führt neben dem Feldstärketensor die antisymmetrischen Größe

$$(\mathcal{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -cD_1 & -cD_2 & -cD_3 \\ cD_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ cD_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ cD_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.50)$$

ein. Dann schreiben sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen gemäß

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j_{\text{f}}^\nu. \quad (9.51)$$

Im Vakuum ist  $F^{\mu\nu} = \mu_0 \mathcal{F}^{\mu\nu}$ . Für Medien sind  $F^{\mu\nu}$  und  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  im Allgemeinen nicht mehr proportional zueinander. Selbst in linearen und isotropen Medien hängt die gegenseitige Beziehung von den Materialkonstanten  $\mu_r$  und  $\epsilon_r$  ab.

Wir wenden uns deshalb der Erhaltung von Energie und Impuls zu. Folgende Umformungen sind dabei hilfreich

$$F_{\mu\nu} j_{\text{f}}^\nu = F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu}{}_{,\rho} = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\rho} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu}{}_{,\rho} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\rho} \mathcal{F}^{\rho\nu}.$$

Wir benutzen die homogenen Maxwell-Gleichungen (9.33) in der Form

$$F_{\mu\nu,\rho} = -F_{\rho\mu,\nu} - F_{\nu\rho,\mu},$$

um den letzten Term umzuschreiben, und erhalten

$$F_{\mu\nu} j_{\text{f}}^\nu = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\rho} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu}{}_{,\rho} + \frac{1}{2} F_{\rho\mu,\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu} + \frac{1}{2} F_{\nu\rho,\mu} \mathcal{F}^{\rho\nu}.$$

Mit Hilfe der Identität

$$F_{\rho\mu,\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu} = F_{\nu\mu,\rho} \mathcal{F}^{\nu\rho} = F_{\mu\nu,\rho} \mathcal{F}^{\rho\nu}$$

formen wir den zweitletzten Term um und finden

$$F_{\mu\nu} j_{\text{f}}^\nu = (F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\rho} - \frac{1}{2} F_{\rho\nu,\mu} \mathcal{F}^{\rho\nu}.$$

Falls nun  $F$  und  $\mathcal{F}$  *linear* und mit konstanten Koeffizienten verknüpft sind, dann kann der letzte

Term folgendermaßen geschrieben werden,

$$\frac{1}{2}F_{\rho\nu,\mu}\mathcal{F}^{\rho\nu} = \frac{1}{4}(F_{\rho\nu}\mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\mu}.$$

Damit gelten für *lineare homogene Medien* die 4 Bilanzgleichungen

$$F_{\mu\nu}j_{\text{f}}^{\nu} + T_{\mu}^{\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad \text{mit} \quad T_{\mu}^{\nu} = -\left(F_{\mu\rho}\mathcal{F}^{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\nu}F_{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\rho\sigma}\right). \quad (9.52)$$

Diese vier Identitäten sind gerade der Erhaltungssatz für *Energie und Impuls*. Um dies einzusehen, spalten wir  $F_{\mu\nu}j_{\text{f}}^{\nu}$  in Raum- und Zeitkomponenten auf,

$$\begin{aligned} F_{0\nu}j_{\text{f}}^{\nu} &= F_{0i}j_{\text{f}}^i = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\text{f}}/c, \\ F_{i\nu}j_{\text{f}}^{\nu} &= F_{i0}c\rho_{\text{f}} + F_{ij}j_{\text{f}}^j = -E_i\rho_{\text{f}} - (\mathbf{j}_{\text{f}} \times \mathbf{B})_i. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Die auf den rechten Seiten auftretenden Größen sind

- Die vom elektrischen Feld an der strömenden Elektrizität geleistete Arbeit pro Raumelement  $\mathbf{j}_{\text{f}} \cdot \mathbf{E}/c$ . Sie wird im Allgemeinen in Wärme umgewandelt und heißt *Joulesche Wärme*.
- Die vom Magnetfeld  $\mathbf{B}$  auf eine Stromverteilung  $\mathbf{j}$  ausgeübte Kraftdichte  $\mathbf{j}_{\text{f}} \times \mathbf{B}$ . Man erinnere sich daran, dass die auf ein geladenes Teilchen wirkende Kraft im Magnetfeld  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  ist.
- Die vom elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  auf eine Ladungsverteilung ausgeübte Kraftdichte  $\rho_{\text{f}}\mathbf{E}$ . Dies ist die Kontinuumsversion der Kraft  $q\mathbf{E}$  auf ein geladenes Teilchen.

Ohne freie Ladungsträger ist  $T_{\mu}^{\nu}$  kovariant erhalten,  $\partial_{\nu}T_{\mu}^{\nu} = 0$ . Mit Hilfe des Tensors  $T^{\mu\nu}$  können wir im ladungsfreien Raum vier zeitlich erhaltene Ladungen definieren,

$$P^{\nu} = \int d^3x T^{0\nu}(x). \quad (9.54)$$

Der erhaltene 4-er Vektor  $P^{\mu}$  enthält die Energie  $P^0$  und den Impuls  $\mathbf{P}$  des elektromagnetischen Feldes. Deshalb heißt  $T^{\mu\nu}$  Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Zur Begründung spalten wir  $T_{\mu}^{\nu}$  in Zeit- und Raumkomponenten auf. Dazu bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\nu\rho} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} & c^{-1}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})^t \\ c\mathbf{B} \times \mathbf{D} & \mathbf{E}\mathbf{D}^t + \mathbf{H}\mathbf{B}^t - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\nu\mu} &= 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \end{aligned}$$

ist. Es folgt, dass der Energie-Impuls-Tensor folgende Form hat

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} & 2c^{-1} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^t \\ 2c\mathbf{B} \times \mathbf{D} & (2\mathbf{E}\mathbf{D}^t - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\mathbb{1}) + (2\mathbf{H}\mathbf{B}^t - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\mathbb{1}) \end{pmatrix}. \quad (9.55)$$

Die Erhaltungssätze (9.52) nehmen jetzt eine verständlichere Form an:

Die zeitliche Komponente von (9.52) lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} &= -\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}, & u &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (9.56)$$

In der Elektrostatik haben wir (für lineare Medien) gezeigt, dass  $u_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$  die Energiedichte des elektrischen Feldes ist. In den Übungen haben Sie sich davon überzeugt, dass  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/2$  die Energiedichte des magnetischen Feldes ist. Deshalb interpretieren wir  $\partial_t u$  in der obigen Formel als zeitliche Änderung der Energiedichte des Feldes. Der *Poynting'sche Satz* (9.56) ist die Energiebilanz im elektromagnetischen Feld: Die linke Seite entspricht dem Energieaustausch zwischen dem betrachteten Volumenelement und seinen Nachbarelementen und die rechte Seite den Verlusten durch die Erzeugung von Joulescher Wärme.

Die Interpretation des Quellterms auf der linken Seite wird noch deutlicher, wenn wir (9.56) räumlich integrieren; dann haben wir bei Benutzung des Gaußschen Satzes

$$\frac{d}{dt} \int d^3x u + \oint d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S} = - \int d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_f. \quad (9.57)$$

Die Bedeutung des nach POYNTING benannten Vektors  $\mathbf{S}$  als *Energieflussdichte* des elektromagnetischen Feldes ist daraus ersichtlich.  $\mathbf{S}$  zeigt in Richtung des Energieflusses und sein Betrag gibt an, wie viel Feldenergie pro Zeit durch ein Flächenelement ( $\perp$  zu  $\mathbf{S}$ ) fließt.

Die räumlichen Komponenten von (9.52) lauten

$$\partial_j T_{ij} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_i - \rho_f E_i - (\mathbf{j}_f \times \mathbf{B})_i \quad (9.58)$$

$$T_{ij} = \delta_{ij} u - (E_i D_j + H_i B_j). \quad (9.59)$$

Der Tensor<sup>2</sup>  $T_{ij}$  heißt *Maxwellscher Spannungstensor*. Bezeichnet man die Summe sämtlicher Impulse der Teilchen innerhalb  $V$  mit  $\mathbf{P}_{\text{mech}}$ , so ist nach dem 2. Newtonschen Gesetz die zeitliche Änderung ihres Gesamtimpulses gleich der über  $V$  integrierten Kraftdichte,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{mech}} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) d^3r. \quad (9.60)$$

Zur Interpretation von (9.58) integrieren wir diese Bilanzgleichung über ein beliebiges Raumge-

<sup>2</sup>Tensor bezüglich der räumlichen Drehungen.

biet  $V$  mit dem Resultat

$$\frac{d}{dt} P_{\text{mech},i} + \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_i = - \oint T_{ij} df_j. \quad (9.61)$$

Diese Gleichung legt nahe, das Volumenintegral auf der linken Seite als Gesamtimpuls  $\mathbf{P}_{\text{feld}}$  der in  $V$  vorhandenen elektromagnetischen Felder zu identifizieren,

$$\mathbf{P}_{\text{feld}} = \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) d^3r, \quad (9.62)$$

und den Integranden als *Impulsdichte des Feldes*. Damit ist die Variation des Gesamtimpulses von Materie und Feld gleich

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{\text{mech}} + \mathbf{P}_{\text{feld}}) = - \oint T_{ij} df_j. \quad (9.63)$$

Deshalb ist  $\sum_j T_{ij} n_j$ , wobei  $\mathbf{n}$  die nach außen gerichtete Flächennormale an  $\partial V$  ist, als die  $i$ 'te Komponente des auf die Flächeneinheit bezogenen *Impulsstromes* zu interpretieren.

In Abwesenheit von materiellen Teilchen werden die 3 Gleichungen (9.58) zu Kontinuitätsgleichungen und besagen, dass die Änderung des Feldimpulses innerhalb  $V$  gleich dem Impulsfluss aus  $\partial V$  ist. Für einen räumlich schnell abfallenden Spannungstensor ist der gesamte Feldimpuls zeitlich erhalten. Diese Bilanzgleichungen und die entsprechende Bilanzgleichung für die Energie heißen *Minkowskische Gleichungen*.

#### Eigenschaften von $T_{\mu\nu}$ :

Der Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  des elektromagnetischen Feldes in (9.55) ist spurlos,

$$T_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (9.64)$$

Die Quanten des elektromagnetischen Feldes, die *Photonen*, sind masselos. Die Spurfreiheit von  $T_{\mu\nu}$  ist eng mit dieser Eigenschaft der Lichtteilchen verknüpft.

Der Energie-Impuls-Tensor mit kontravarianten Indizes

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) & c^{-1}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})^t \\ c\mathbf{D} \times \mathbf{B} & \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbb{1} - \mathbf{E}\mathbf{D}^t - \mathbf{H}\mathbf{B}^t \end{pmatrix} \quad (9.65)$$

ist im Allgemeinen nicht symmetrisch. Nur für verschwindende Polarisation und Magnetisierung wird er symmetrisch,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_0}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2 & 2c(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^t \\ 2c \mathbf{E} \times \mathbf{B} & (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2)\mathbb{1} - 2\mathbf{E}\mathbf{E}^t - 2c^2 \mathbf{B}\mathbf{B}^t \end{pmatrix}. \quad (9.66)$$

Die fehlende Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors in makroskopischen Medien hat viele Phy-

siker gestört. Für Modifikationen des Tensors in Medien verweise ich auf die Literatur<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>siehe z.B. L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Elektrodynamik der Kontinua, Abschnitte 10,15 und 34; I. Brevik, Videns. Sels. Mat.-fys. Medd. 37 (1970) No. 11 und No. 13.

# Kapitel 10

## Relativistische Punktteilchen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Bewegung von geladenen Punktteilchen in elektromagnetischen Feldern. Wir beginnen mit der Diskussion der Weltlinien von Teilchen und deren 4-er Impuls. Danach studieren wir geladene Teilchen in konstanten elektromagnetischen Feldern und in ebenen Wellenfeldern.

### 10.1 Eigenzeit, 4-er Geschwindigkeit und 4-er Impuls

In der klassischen Newtonschen Mechanik versteht man unter der Bahnkurve die durch die Zeit  $t$  parametrisierten drei Raumkoordinaten eines Punktteilchens. Jedem Zeitpunkt wird ein Punkt des Raumes zugeordnet. Wird die Zeit jedoch als weitere eigenständige Dimension im Minkowski-Raum aufgefasst, dann ist jeder Punkt auf einer Trajektorie ein Ereignis, und die gesamte Trajektorie ist eine kontinuierliche Kurve im 4-dimensionalen Minkowski-Raum – man spricht von der *Weltlinie* des Teilchens. Ist  $\tau$  der Kurvenparameter, dann ist eine Weltlinie also durch eine Abbildung

$$\tau \longrightarrow x(\tau) = (x^\mu(\tau)) \quad (10.1)$$

gegeben. So entspricht einem ruhenden Teilchen die Trajektorie  $(x^0(\tau), 0, 0, 0)$ . Die Weltlinie der Erde ist eine Schraube in der Raumzeit, da sie sich auf einer räumlich kreisförmigen Bahn um die Sonne und mit konstanter „Geschwindigkeit“ durch die Zeit bewegt. Dies ist in der Abbildung 10.1 gezeigt. Der Begriff der Weltlinie wurde von Hermann Minkowski (1908) zuerst im Zusammenhang mit der speziellen Relativitätstheorie benutzt.

Die Ableitung von  $x^\mu(\tau)$  nach dem Kurvenparameter  $\tau$  definiert eine 4-er Geschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) = \begin{pmatrix} u^0 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

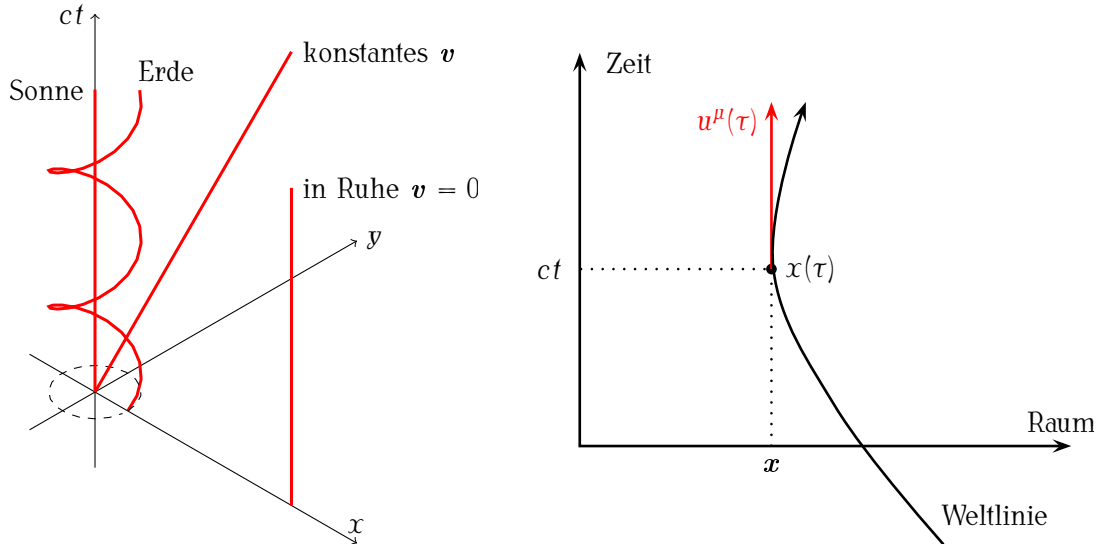


Abbildung 10.1: *Linkes Bild: Die Weltlinien eines ruhenden Teilchens, gleichförmig bewegten Teilchens und der Erde bei ihrer Rotation um die Sonne. Rechtes Bild: Die 4-er Geschwindigkeit ist tangential an der Weltlinie.*

und steht in Verbindung mit der 3-er Geschwindigkeit,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = c \frac{\mathbf{u}}{u^0}. \quad (10.3)$$

Massive Objekte bewegen sich mit  $|\mathbf{v}| < c$  oder  $|\mathbf{u}| < |u^0|$  und masselose Objekte haben Lichtgeschwindigkeit oder  $|\mathbf{u}| = |u^0|$ . Entsprechend sind die Weltlinien massiver Objekte immer zeitartig und diejenigen von masselosen Teilchen lichtartig,

$$\text{massive Teilchen: } u^\mu u_\mu > 0 \quad , \quad \text{masselose Teilchen: } u^\mu u_\mu = 0. \quad (10.4)$$

Es gibt nun einen ausgezeichneten Kurvenparameters  $\tau$  – *die Eigenzeit*. Diese ist ein fundamentaler Begriff der Relativitätstheorie. Die Eigenzeit ist die in einem (momentan) mitbewegten Bezugssystem ablaufende Zeit. Sie hängt mit dem Linienelement der Metrik,  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  über  $ds^2 = c^2 d\tau^2$  zusammen. Die Eigenzeit eines Beobachters entspricht damit der Länge der Weltlinie des Beobachters. Sie ist ein Skalar, der in der relativistischen Kinematik an die Stelle des Zeitdifferentials  $dt$  der Newtonschen Mechanik tritt. Die Eigenzeitelement eines Körpers, der sich gegen ein Inertialsystem mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, ist

$$c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu d\tau^2 = (u^0)^2 (1 - \beta^2) d\tau^2. \quad (10.5)$$

Wegen  $u^0 d\tau = c dt$  gilt dann folgende Beziehung zwischen der Koordinatenzeit im Inertialsystem

$t$  und der Eigenzeit  $\tau$ ,

$$d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad \text{bzw.} \quad u^0 = c\gamma. \quad (10.6)$$

Die Eigenzeit des bewegten Körpers verstreicht also stets langsamer als die des Inertialsystems (Zeitdilatation). Das Zwillingsparadox ist eine Beispiel, wo sich der Unterschied zwischen Eigen- und Koordinatenzeit manifestiert. Mit der Eigenzeit als Kurvenparameter gilt also

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u^\mu u_\mu = c^2. \quad (10.7)$$

Multiplizieren wir  $u^\mu$  mit der Ruhemasse des Teilchens, dann erhalten wir dessen 4-er Impuls,

$$p^\mu = m u^\mu = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad p^\mu p_\mu = m^2 c^2. \quad (10.8)$$

Insbesondere ist dessen Zeitkomponente  $p^0$  proportional zur Energie,

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (10.9)$$

Für ein ruhendes Teilchen reduziert sich die letzte Relation auf die wohl bekannteste Formel der Physik,  $E = mc^2$ . Das wichtige Konzept der invarianten Eigenzeit erlaubt uns eine bequeme kovariante Formulierung der Teilchenkinematik und -dynamik. Die kovariante Definition der kinematischen Größen 4-er Geschwindigkeit und 4-er Beschleunigung

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \implies u_\mu a^\mu = 0, \quad (10.10)$$

erfolgt in Bezug auf die Eigenzeit des Teilchens.

Kovariante Bewegungsgleichungen lassen sich aus dem Hamiltonschen Prinzip in der Lagrangeformulierung bestimmen. Für freie Teilchen hat man als einzigen Vierervektor, der maximal die erste Ableitung nach der Eigenzeit enthält, nur  $u^\mu$  zur Verfügung, um eine invariante Wirkung zu formulieren<sup>1</sup>. Der einzige Skalar, der sich aus diesem bilden lässt ist  $u^\mu u_\mu$ , so dass für ein massives Teilchen

$$S_0[x] = -mc \int ds = -mc \int d\tau \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} \quad (10.11)$$

der geeignete Ansatz für eine Wirkung darstellt. Wir haben im letzten Schritt die Wirkung bzgl. eines beliebigen Kurvenparameters  $\tau$  dargestellt, da die Eigenzeit selbst nicht unabhängig ist. Die Wirkung  $S_0$  ist unabhängig von der Parametrisierung der Weltlinie,

$$x^\mu(\tau) \longrightarrow x^\mu(\tau'(\tau)) \quad \text{mit} \quad \frac{d\tau'}{d\tau} > 0.$$

---

<sup>1</sup> $x^\mu$  ist kein Vektor!



Man kann als Weltparameter selbstverständlich auch die Koordinatenzeit  $t$  bzgl. eines beliebigen Inertialsystems wählen:

$$S_0[x] = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \beta^2} = \int dt \left( -mc^2 + \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + \dots \right). \quad (10.12)$$

Für kleine Geschwindigkeiten  $v \ll c$  ist  $S_0$  bis auf eine additive Konstante die Wirkung eines nicht-relativistischen Teilchens  $\int m \mathbf{v}^2 / 2$ . Die Euler-Lagrange Gleichung zur Wirkung (10.11) lautet

$$mc \frac{d}{d\tau} \left( \frac{u^\mu}{\sqrt{u \cdot u}} \right) = \frac{mc}{\sqrt{u \cdot u}} \left( a^\mu - \frac{u \cdot a}{u \cdot u} u^\mu \right) = 0. \quad (10.13)$$

Wählen wir die Eigenzeit als Kurvenparameter dann ist  $u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow u^\mu a_\mu = 0$  und die Bewegungsgleichungen für ein freies relativistisches Teilchen vereinfachen sich zu

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = 0 \quad (u^\mu u_\mu = 1). \quad (10.14)$$

Wir folgern, dass der 4-er Impuls  $p^\mu = m u^\mu$  des Teilchens zeitlich erhalten ist. Dies folgt auch aus dem Noethertheorem für die Invarianz der Wirkung  $S_0$  unter zeitlichen und räumlichen Verschiebungen,

$$p^\mu = \text{const.}, \quad (p^\mu) = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad E = m\gamma c^2, \quad \mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}. \quad (10.15)$$

Bisher wurde noch in keinem Experiment eine Verletzung der Energie- und Impulserhaltung gefunden. Ähnlich wie die Erhaltung der elektrischen Ladung scheinen sie immer und überall zu gelten.

### 10.1.1 Ein freies Elektron kann kein Photon absorbieren

Ein vollständig isoliertes Elektron kann keine Photon absorbieren und dabei ein Elektron bleiben. Dies würde der Erhaltung von Energie und Impuls widersprechen. Es sei

$$p^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (10.16)$$

der 4-er Impuls des Teilchens (Elektron, Photon, Positron...) Das Produkt

$$p \cdot p \equiv p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad (10.17)$$

hat denselben Wert in allen Inertialsystemen. Bezeichnen wir die 4-er Impulse des einlaufenden Elektrons, absorbierten Photons und auslaufenden Elektrons mit

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix}, \quad p_\gamma^\mu = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \mathbf{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_2^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

dann bedeutet die Erhaltung von Energie und Impuls beim Stoßprozess

$$p_1^\mu + p_\gamma^\mu = p_2^\mu. \quad (10.19)$$

Wir quadrieren diese Gleichung und finden mit  $p_\gamma \cdot p_\gamma = 0$

$$p_1 \cdot p_1 + 2p_1 \cdot p_\gamma = p_2 \cdot p_2 \iff m^2 c^2 + 2p_1 p_\gamma = m^2 c^2.$$

Damit gilt in jedem Inertialsystem

$$p_1 p_\gamma = \frac{E_1 E_\gamma}{c^2} - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_\gamma = 0.$$

Im Inertialsystem, in dem das Elektron nach Absorption des Photons ruht, gilt  $\mathbf{p}_2 = 0$  oder mit (10.19) auch  $\mathbf{p}_\gamma = -\mathbf{p}_1$ , so dass

$$\frac{E_1 E_\gamma}{c^2} + \mathbf{p}_1^2 = 0. \quad (10.20)$$

Da die Energie eines Teilchens größer oder gleich seiner Ruheenergie ist,  $E \geq mc^2$ , folgern wir, dass  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_\gamma| = 0$  gilt. Das Elektron war also auch vor dem Absorptionsprozess in Ruhe und das Photon hatte wegen  $E_\gamma = \hbar\omega = 0$  eine unendlich große Wellenlänge. Dies bedeutet, dass keine wirkliche Wechselwirkung zwischen Elektron und Photon stattfand. Ist das erste Elektron aber an ein Atom gebunden oder existieren äußere Felder, dann ist der Absorptionsprozess  $e^- + \gamma \rightarrow e^-$  durchaus möglich. Nun stellt sich die folgende interessante Frage: kann eine ebene Welle mit fester Frequenz, die als Superposition von Photonen mit fester Energie und festem Impuls angesehen werden kann, ein Elektron beschleunigen?

## 10.2 Relativistische Teilchen in elektromagnetischen Feldern

Die Berechnung von Elektronenbahnen in starken elektromagnetischen Feldern ist eines der grundlegenden Probleme der Laser-Elektron Wechselwirkung. Da nun schon mit 'tabletop'-Lasern sehr große Spitzenfelder erzeugt werden, ist ein Verständnis der *relativistischen Dynamik* von Elektronen in starken Feldern auch von praktischer Bedeutung.

### 10.2.1 Starke Felder in der Natur und im Laboratorium

Das Erd-Magnetfeld variiert zwischen 0.3 und 0.6 Gauss. Dies ist sehr gering verglichen mit den Magnetfeldern von bis zu  $10^{12}$  Gauss an den Polkappen der Neutronensterne. Magnetars,

dies sind sehr schnell (Periode  $< 10\text{ms}$ ) rotierende und junge Neutronensterne, haben sogar Magnetfelder bis zu  $10^{15}$  Gauss. In Laboratorien können wir *statische Magnetfelder* von bis zu 40 Tesla oder  $4 \cdot 10^5$  Gauss herstellen und mit gepulsten Lasern kann man im Fokus kurzzeitig Felder mit etwas

$$B \approx \left( \frac{10^{10}}{300} \right) \text{ Gauss} = 3.34 \cdot 10^7 \text{ Gauss} \quad (10.21)$$

erzeugen. Ein Elektron im Abstand von einem Angstrom  $= 10^{-8}$  cm vom Proton sieht ein elektrisches Feld der Stärke

$$|\mathbf{E}| = \frac{e}{r_a^2} \approx 1.4 \cdot 10^9 \frac{\text{V}}{\text{cm}}. \quad (10.22)$$

Dies ist geringer als die von modernen Femtosekunden-Lasern erzeugten Felder von  $10^{10}$  V/cm.

Ein Elektron werde von einem Laserfeld der Frequenz  $\nu$  beschleunigt. Während einer kurzen Zeitdauer  $\Delta t$ , die kleiner als die halbe Periode des Laserfelds sei, können wir das elektrische Feld als nahezu konstant behandeln. Die Änderung der Geschwindigkeit ist dann etwa

$$\Delta v = \frac{e}{m} \bar{E} \Delta t, \quad \bar{E} = \frac{2}{\pi} E_{\text{max}}. \quad (10.23)$$

Das Elektron wird relativistisch bei der Beschleunigung während einer halben Periode wenn

$$\Delta v \approx c \iff a_0 = \frac{eE}{m\omega c} = \frac{eE}{mc^2} \frac{\lambda}{2\pi} > 1. \quad (10.24)$$

Messen wir das Feld in Vielfachen von  $10^{10}$  V/cm und die Wellenlänge in  $\mu\text{m}$  (dies entspricht 3.36 fs) dann finden wir

$$a_0 = 0.31 \cdot E \left[ 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{cm}} \right] \lambda [\mu\text{m}]. \quad (10.25)$$

Für gepulste Hochintensitätslaser ist der *relativistische Parameter*  $a_0 \gg 1$  und die Elektronen müssen relativistisch behandelt werden.

## 10.2.2 Relativistische Form der Lorentzischen Bewegungsgleichungen

Es sei  $x^\mu(\tau)$  die Weltlinie eines geladenen Punktteilchens der Masse  $m$  mit der Eigenzeit als Kurvenparameter. Dann hat die 4-er Geschwindigkeit

$$(u^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (10.26)$$

die kovariante Länge  $u_\mu u^\mu = c^2$ . Um die kovariante Form der Bewegungsgleichungen zu finden, verjüngen wir den Feldstärketensor

$$(F^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.27)$$

mit der 4-er Geschwindigkeit und erhalten

$$F^\mu{}_\nu u^\nu = \gamma \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Die Zeitkomponente des Vektors auf der rechten Seite ist proportional zur Arbeit, die das elektrische Feld am Teilchen leistet. Dies führt zu einer zeitlichen Zunahme der Energie  $E = p^0 c = m u^0 c$  des geladenen Teilchens. Die 3 räumlichen Komponenten des Vektors auf der rechten Seite sind proportional zur wirkenden Lorentzkraft. Diese Kraft bedingt eine zeitlichen Änderung des 3-er Impulses  $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ . Zusammengefasst haben die relativistischen Bewegungsgleichungen folgende elegante Form,

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = e F^\mu{}_\nu u^\nu, \quad (10.28)$$

wobei auf der linken Seite die Ableitung nach der Eigenzeit auftritt. Man beachte, dass aufgrund von

$$\frac{d}{d\tau} (u^\mu u_\mu) = \frac{2e}{m} F_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 0$$

die Nebenbedingung  $u_\mu u^\mu = c^2$  mit den relativistischen Bewegungsgleichungen verträglich ist. Benutzen wir noch  $dt = \gamma d\tau$ , dann lauten diese Gleichungen in der 3 + 1-Zerlegung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\gamma m c^2) &= e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \\ \frac{d}{dt} (\gamma m \mathbf{v}) &= e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Die erste Gleichung gibt an, wie sich die relativistische Energie  $\gamma m c^2$  des geladenen Teilchens im elektrischen Feld ändert und die zweite Gleichung ist die relativistische Form der Lorentz-Kraft Gleichung.

### 10.3 Bewegung im konstanten Feld

Für einen konstanten Feldstärketensor können die Bewegungsgleichungen (10.28) formal leicht integriert werden: Bezeichnet  $u$  den Spaltenvektor ( $u^\mu$ ) und  $F$  die 4-dimensionale konstante

Matrix ( $F^\mu{}_\nu$ ) dann lautet die formale Lösung

$$u(\tau) = e^{\ell F \tau} u(0), \quad \ell = \frac{e}{m}. \quad (10.30)$$

Im Folgenden wählen wir angepasste Inertialsysteme in denen das (konstante) elektromagnetische Feld eine möglichst einfache Form hat. Bei Lorentztransformationen ändern sich skalare Größen nicht – sie haben in allen Inertialsystemen denselben Wert. Aus dem elektrischen und magnetischen Feld können wir nun genau zwei lorentzinvariante Größen konstruieren. Dies sind

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{E}^2}{c^2} - \mathbf{B}^2 \right) \quad \text{und} \quad -\frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (10.31)$$

Auf den linken Seiten treten hier nur vollständigen Verjüngungen von Tensoren auf und dies beweist, dass es sich dabei um lorentzinvariante Größen handelt. Diese beiden Invarianten treten im charakteristischen Polynom der Matrix  $F$  auf,

$$F^4 - \left( \frac{\mathbf{E}^2}{c^2} - \mathbf{B}^2 \right) F^2 - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}{c^2} = 0, \quad (10.32)$$

Sie haben denselben Wert in allen Inertialsystemen. Sind zum Beispiel  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  orthogonal in einem Inertialsystem, dann sind sie auch orthogonal in jedem anderen Inertialsystem. Ferner sind die Eigenschaften  $|\mathbf{E}|$  kleiner, größer oder gleich  $c|\mathbf{B}|$  unabhängig vom Bezugssystem. Deshalb haben wir folgende vier verschiedenen Fälle:

- Für  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  gibt es folgende drei Fälle:

hyperbolisch: Für  $|\mathbf{E}| > c|\mathbf{B}|$  existiert ein Inertialsystem mit  $\mathbf{B} = 0$ ;

elliptisch: Für  $|\mathbf{E}| < c|\mathbf{B}|$  existiert ein Inertialsystem mit  $\mathbf{E} = 0$ ;

parabolisch: Für  $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$  ist in allen Inertialsystemen  $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ .

- Für  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$  existiert ein Inertialsystem mit  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$  (loxodromisch).

Der letzte Fall ist die generische Situation. Nun diskutieren wir die Lösungen der Bewegungsgleichung für die 4 unterschiedlichen Fälle.

**Hyperbolischer Fall:** Hier können wir ein Inertialsystem wählen, in dem  $\mathbf{B} = 0$  und  $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_3$  ist. Dann lauten die Bewegungsgleichungen für die Komponenten der 4-er Geschwindigkeit

$$\dot{u}^0 = \omega_e u^3, \quad \dot{u}^3 = \omega_e u^0, \quad \dot{u}^1 = \dot{u}^2 = 0, \quad (10.33)$$

wobei der Punkt die Ableitung nach  $\tau$  bedeutet. Hierin erscheint die charakteristische Frequenz

$$\omega_e = \ell \frac{E}{c} = \frac{eE}{m_0 c} \iff \omega_e \left[ \frac{1}{\text{s}} \right] \approx 5.867 \cdot 10^4 \times E \left[ \frac{\text{V}}{\text{cm}} \right]. \quad (10.34)$$

Die einfache Lösung lautet

$$\begin{aligned} u^0(\tau) &= \cosh(\omega_e \tau) u^0(0) + \sinh(\omega_e \tau) u^3(0) \\ u^3(\tau) &= \sinh(\omega_e \tau) u^0(0) + \cosh(\omega_e \tau) u^3(0). \end{aligned} \quad (10.35)$$

Für ein anfänglich ruhendes Teilchen ist  $u^0 = c \cosh(\omega_e \tau)$  und  $u^3(0) = c \sinh(\omega_e \tau)$ , so dass

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{u^0}{c} = \cosh(\omega_e \tau) \quad \text{bzw.} \quad \omega_e t = \sinh(\omega_e \tau). \quad (10.36)$$

Setzen wir dies in  $\beta \equiv v/c = \mathbf{u}/u^0$  ein, dann erhalten wir

$$\beta = \frac{\ell \mathbf{E} t / c}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(\omega_e t))} = \frac{\omega_e t}{\sqrt{1 + (\omega_e t)^2}} \hat{\mathbf{E}}. \quad (10.37)$$

Für Zeiten  $t \gg 1/\omega_e$  nähert sich die Geschwindigkeit des Teilchens der Lichtgeschwindigkeit.

**Elliptischer Fall:** In dieser Situation können wir ein Inertialsystem wählen, in dem  $\mathbf{E} = 0$  und  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_3$  ist. Es tritt nun die charakteristische Zyklotronfrequenz auf,

$$\omega_c = \ell B = \frac{eB}{m_0} \iff \omega_c \left[ \frac{1}{\text{s}} \right] \approx 1.760 \cdot 10^7 \times B [\text{Gauss}]. \quad (10.38)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung beschreibt einen Kreis in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld,

$$\begin{aligned} u^1(\tau) &= \cos(\omega_c \tau) u^1(0) + \sin(\omega_c \tau) u^2(0) \\ u^2(\tau) &= -\sin(\omega_c \tau) u^1(0) + \cos(\omega_c \tau) u^2(0) \end{aligned} \quad (10.39)$$

mit konstanten  $u^0, u^3$ . Damit ist auch  $|\mathbf{u}|$  und der relativistische  $\gamma$ -Faktor konstant. Es folgt, dass die Eigen- und Koordinatenzeit proportional sind,  $\gamma \tau = t$  und deshalb wird die Kreisbahn mit *rot-verschobener Frequenz*  $\omega = \omega_c / \gamma$  durchlaufen,

$$\begin{aligned} v^1(t) &= \cos(\omega t) v^1(0) + \sin(\omega t) v^2(0) \\ v^2(t) &= -\sin(\omega t) v^1(0) + \cos(\omega t) v^2(0). \end{aligned} \quad (10.40)$$

Ein relativistisches Teilchen zirkuliert mit einer Kreisfrequenz die kleiner als die nicht-relativistische Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  ist.

**Parabolischer Fall:** In diesem Ausnahmefall können wir in ein Inertialsystem wechseln, in dem

$$\mathbf{E} = E \mathbf{e}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = cE \mathbf{e}_2 \quad (10.41)$$

gilt. Führen wir wieder die charakteristische Kreisfrequenz  $\omega_e = eE/mc$  ein, dann ist die Zunahme der 4-er Geschwindigkeit  $\Delta u^\mu(\tau) = u^\mu(\tau) - u^\mu(0)$  gleich

$$\begin{aligned}\Delta u^0(\tau) &= \Delta u^3(\tau) = \omega_e \tau u^1(0) + \frac{\omega_e^2 \tau^2}{2} (u^0(0) - u^3(0)) \\ \Delta u^1(\tau) &= \omega_e \tau (u^0(0) - u^3(0)), \quad \Delta u^2(\tau) = 0.\end{aligned}\tag{10.42}$$

Für ein anfänglich ruhendes Teilchen ist  $u(0) = (c, \mathbf{0})$  und die Differentialgleichung  $c dt/d\tau = u^0(\tau)$  führt auf folgende Beziehung zwischen Koordinaten- und Eigenzeit,

$$t = \tau + \frac{\tau}{6} (\omega_e \tau)^2.\tag{10.43}$$

Die 3-er Geschwindigkeit ist nun

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\omega_e \tau}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \omega_e \tau / 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 1 + \frac{\omega_e^2 \tau^2}{2},\tag{10.44}$$

worin  $\tau(t)$  die Lösung des kubischen Polynoms in (10.43) ist. Die Geschwindigkeit in Richtung des elektrischen Feldes nimmt zu bis zur Eigenzeit  $\tau_{\max} = \sqrt{2}/\omega_e$  – dies entspricht der Koordinatenzeit  $t_{\max} = 4\sqrt{2}/(3\omega_e)$ . Dann ist die maximale Geschwindigkeit  $v_{\parallel} = c/\sqrt{2}$  in  $\mathbf{E}$ -Richtung erreicht und nimmt danach wieder monoton ab. Die Geschwindigkeit senkrecht zu  $\mathbf{E}$  und zu  $\mathbf{B}$  nimmt während der ganzen Zeit monoton zu und nähert sich asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit.

**Loxodromischer Fall:** Für  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$  können wir weder  $\mathbf{E}$  noch  $\mathbf{B}$  auf Null transformieren. Aber wir können ein Inertialsystem finden in dem  $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_3$  und  $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_3$  ist. In diesem System lautet die Lösung der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}u^0(\tau) &= \cosh(\omega_e \tau) u^0(0) + \sinh(\omega_e \tau) u^3(0) \\ u^1(\tau) &= \cos(\omega_c \tau) u^1(0) + \sin(\omega_c \tau) u^2(0) \\ u^2(\tau) &= -\sin(\omega_c \tau) u^1(0) + \cos(\omega_c \tau) u^2(0) \\ u^3(\tau) &= \sinh(\omega_e \tau) u^0(0) + \cosh(\omega_e \tau) u^3(0).\end{aligned}\tag{10.45}$$

Für ein anfänglich ruhendes Teilchen ist dies die Lösung zum hyperbolischen Problem.

## 10.4 Relativistische Teilchen in ebenen Wellenfeldern

Das 4-er Potential einer ebenen Welle hat die Form  $A_\mu(x) = A_\mu(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = A_\mu(k \cdot x)$ , wobei

$$k = (k^\mu) = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (10.46)$$

der 4-er Wellenzahlvektor ist. In der kovarianten Lorenzzeichnung erfüllt das 4-er Potential die Bedingung  $(k^\mu A_\mu)' = 0$ , wobei Strich die Ableitung nach der Phase  $kx$  bezeichnet. Wir dürfen konstante Beträge zum Potential vernachlässigen, so dass  $k_\mu A^\mu = 0$  gesetzt werden kann. Die Richtungsableitung  $u^\nu \partial_\nu A_\mu$  des Potentials in der Bewegungsgleichung

$$\dot{u}^\mu = \frac{e}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu = \frac{e}{m} (u^\nu \partial^\mu A_\nu - u^\nu \partial_\nu A^\mu) \quad (10.47)$$

ist proportional zu dessen  $\tau$ -Ableitung. Deshalb kann der entsprechende Term auf die linke Seite der Gleichung geschlagen werden. Wir führen das *reskalierte Potential*  $a^\mu = eA^\mu/m$  mit der Einheit einer Geschwindigkeit ein, so dass

$$\frac{d}{d\tau} (u^\mu + a^\mu) = u^\nu \partial^\mu a_\nu = u^\nu k^\mu a'_\nu. \quad (10.48)$$

Überschieben wir diese Gleichung mit  $k_\mu$  und benutzen  $k \cdot a = k \cdot k = 0$ , dann ergibt sich die zeitliche Konstanz von  $ku \equiv \Omega$ . Bis auf eine irrelevante Konstante ist also  $k_\mu x^\mu = \Omega\tau$ . Sei nun  $\xi$  ein konstanter und zu  $k$  orthogonaler 4-Vektor. Die Überschiebung der letzten Gleichung mit  $\xi$  führt dann zu einer weiteren Konstanten der Bewegung,

$$\xi \cdot v = \text{const.} \quad \text{mit} \quad v^\mu = u^\mu + a^\mu. \quad (10.49)$$

Der 4-er Vektor  $mv^\mu$  ist der eichabhängige *kanonische* 4-er Impuls. Der transversale Anteil dieses Impulses ist zeitlich konstant. Er erfüllt die Bewegungsgleichung

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = u^\nu k^\mu a'_\nu = v^\nu k^\mu a'_\nu - a^\nu k^\mu a'_\nu. \quad (10.50)$$

Der letzte Term ist wieder eine  $\tau$ -Ableitung, da das Argument von  $a_\mu$  gleich  $k \cdot x = \Omega\tau$  ist:

$$k^\mu a^\nu a'_\nu = \frac{k^\mu}{2\Omega} \frac{d}{d\tau} (a^\nu a_\nu) = \frac{k^\mu}{2k \cdot u_0} \frac{d}{d\tau} (a \cdot a). \quad (10.51)$$

Beim letzten Gleichheitszeichen benutzen wir, dass wir in der Integrationskonstanten  $\Omega = k \cdot u$  die 4-er Geschwindigkeit  $u$  durch die Anfangsgeschwindigkeit  $u_0$  ersetzen dürfen. Nun bringen wir noch den letzten Term in (10.50) nach links unter die Zeitableitung und definieren dabei den 4-er Vektor

$$w^\mu = u^\mu + a^\mu + k^\mu \frac{a \cdot a}{2k \cdot u_0}. \quad (10.52)$$



In der Lorenz-Eichung gilt  $k_\mu w^\mu = k_\mu u^\mu = \Omega$ . Der Vektor  $w^\mu$  erfüllt die Bewegungsgleichung

$$\frac{dw^\mu}{d\tau} = k^\mu a'_\nu v^\nu = k^\mu a'_\nu w^\nu. \quad (10.53)$$

Die letzte Gleichung gilt in der Lorenzeichung. Diese Evolutionsgleichung ist leicht zu lösen, da die Matrix  $(k^\mu a'_\nu)$  in folgendem Sinne nilpotent ist,

$$k^\mu a'_\nu (k \cdot x) k^\nu a'_\alpha (k \cdot y) = 0.$$

Die exakte Lösung des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen (10.53) lautet nun

$$w^\mu(\tau) = w^\mu(\tau_0) + \frac{k^\mu}{k \cdot u_0} (a_\nu(\Omega\tau) - a_\nu(\Omega\tau_0)) w^\nu(\tau_0). \quad (10.54)$$

Wir bezeichnen das (reskalierte) Potential und die Geschwindigkeit zur anfänglichen Zeit mit  $a^\mu(\Omega\tau_0) \equiv a_0^\mu$  und  $u_0^\mu$ . Erinnern wir uns noch an die Definition von  $w^\mu$  dann finden wir

$$u^\mu(\tau) = u_0^\mu - \left( \Delta a^\mu - k^\mu \frac{\Delta a \cdot u_0}{k \cdot u_0} \right) - k^\mu \frac{\Delta a \cdot \Delta a}{2k \cdot u_0}, \quad \Delta a = a(\Omega\tau) - a_0. \quad (10.55)$$

Man prüft leicht nach, dass die Zwangsbedingung  $u \cdot u = c$  für alle Zeiten gilt. Der letzte Term enthält  $(\Delta a)^2 = (a - a_0)^2$  und nicht etwa  $a^2 - a_0^2$  wie man erwarten könnte. Die Lösung  $u^\mu(\tau)$  ist auch eichinvariant: transformiert man  $a^\mu \rightarrow a^\mu + k^\mu \lambda'(k \cdot x)$ , so dass das neue Potential immer noch die Lorenzeichung erfüllt, dann ist die rechte Seite unabhängig von der Eichfunktion  $\lambda$ . Verschwindet das Eichpotential zur anfänglichen Zeit, dann ergibt sich die etwas einfachere Formel

$$u^\mu = u_0^\mu - \left( a^\mu - k^\mu \frac{a \cdot u_0}{k \cdot u_0} \right) - k^\mu \frac{a \cdot a}{2k \cdot u_0}. \quad (10.56)$$

Es sein nun  $A^\mu(k \cdot x)$  eine ebene Welle, die eine gewisse Zeit auf ein geladenes Teilchen einwirke. Bevor die Welle das Teilchen erreicht ist am Teilchenort  $A^\mu = 0$ . Ist sie am Teilchen vorbeigezogen, dann ist am Teilchenort wieder  $A^\mu = 0$ . Also verschwindet für  $\tau_0 \rightarrow -\infty$  und  $\tau \rightarrow \infty$  die Differenz  $\Delta a^\mu$  in der allgemeinen Lösung (10.55). Daraus folgt sofort

$$u^\mu(\tau \rightarrow \infty) = u^\mu(\tau \rightarrow -\infty). \quad (10.57)$$

Wirkt eine ebene Welle eine endliche Zeit auf ein geladenes Teilchen dann kann sie weder Energie noch Impuls auf das Teilchen übertragen. Wenn die Welle vorbeistreicht, dann beschreibt das Teilchen eine unter Umständen komplizierte und beschleunigte Bewegung. Aber am Ende ist die Geschwindigkeit wieder gleich der Anfangsgeschwindigkeit. Dieses Lemma heißt *Satz von Lawson und Woodward*. Das Theorem ist in Einklang mit unserer Auffassung von ebenen Wellen als Strom von freien Photonen und der Tatsache, dass ein freies Elektron kein Photon absorbieren kann.

### 10.4.1 Gepulste ebene Wellen

Wir betrachten eine modulierten Puls

$$(a_\mu) = c\alpha_0 e^{-(k \cdot x)^2/\xi^2} (\sin(k \cdot x) \mathbf{e}_1 - \delta \cos(k \cdot x) \mathbf{e}_2) \quad (10.58)$$

mit dimensionloser Amplitude  $\alpha_0$ , Breite  $\xi$  und Wellenzahlvektor  $k c = \omega (1, 0, 0, 1)^T$ . Für  $\delta = 0$  handelt es sich um eine linear polarisierte und für  $\delta = 1$  um eine zirkulär polarisierte Welle. Die Beziehung zwischen dem Argument des Potentials und der Eigenzeit ist wieder  $k \cdot x = \Omega \tau$ . Die 4-er Geschwindigkeit, gemessen in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit, eines zur Anfangszeit ruhenden Teilchens (dann ist  $\Omega = \omega$ ) lautet

$$\left(\frac{u^\mu}{c}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} \mathbf{u}_\perp^2, \mathbf{u}_\perp, \frac{1}{2} \mathbf{u}_\perp^2\right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_\perp = \alpha_0 e^{-(\omega\tau/\xi)^2} (\sin(\omega\tau) \mathbf{e}_1 - \delta \cos(\omega\tau) \mathbf{e}_2). \quad (10.59)$$

Zur numerischen Berechnung der Trajektorie definieren wir den dimensionslosen Weltlinienparameter  $\eta = \omega\tau$  und bezeichnen die Ableitung nach  $\eta$  mit einem Strich. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{x'}{\lambda} &= \alpha_0 e^{-\eta^2/\xi^2} \sin \eta, & (\lambda = c/\omega) \\ \frac{y'}{\lambda} &= -\alpha_0 \delta e^{-\eta^2/\xi^2} \cos \eta \\ \frac{z'}{\lambda} &= \frac{\alpha_0^2}{2} e^{-2\eta^2/\xi^2} (\sin^2 \eta + \delta^2 \cos^2 \eta), \end{aligned} \quad (10.60)$$

Das folgende octave-Programm berechnet die Trajektorie eines anfänglich ruhenden Teilchens für  $\alpha_0 = 5$ ,  $\xi = 10\lambda$  und  $\delta = 1$ . Zuerst werden die rechten Seite der Differentialgleichungen als Funktionen definiert:

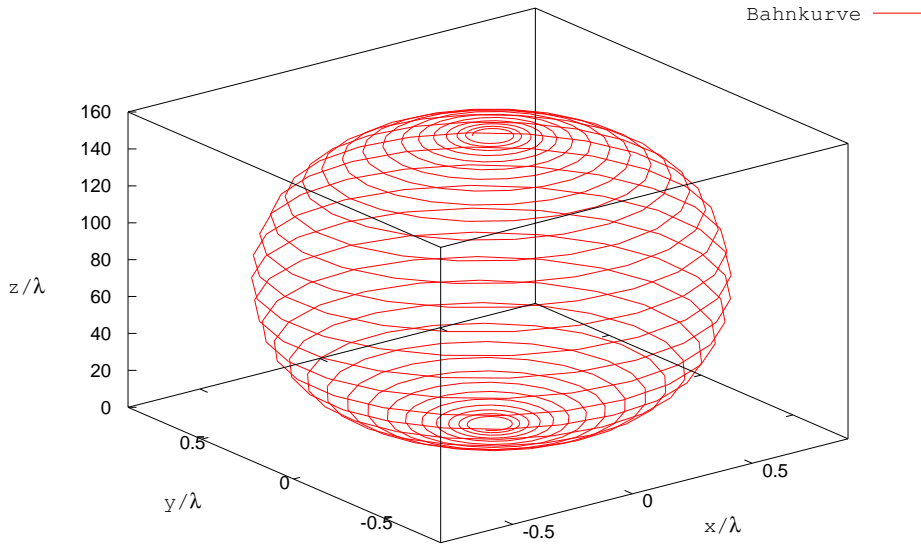
```
function xdot=f(x,t)
a0=5.0;delta=1;xi=2*pi*10;
ba=a0*exp(-(t/xi)**2);
si=sin(t);co=cos(t);
xdot(1)=ba*si;
xdot(2)=-ba*co*delta;
xdot(3)=0.5*(xdot(1)*xdot(1)+xdot(2)*xdot(2));
endfunction
```

Das folgende Programm ruft diese Funktion bei der Lösung des Differentialgleichungssystems auf:

```
x0=[0;0;0];
t=linspace(-100,100,700)';
x=lsode("f",x0,t);
plot3(x(:,1)/(2*pi),x(:,2)/(2*pi),x(:,3)/(2*pi),'r')
```

Die Bahnkurve im Raum ist in der folgenden Figur geplottet. Anfänglich ruht das Teilchen im

Ursprung des Koordinatensystems. Nachdem die gepulste Welle am Teilchen vorbeigestrichen ist kommt dieses bei  $\mathbf{r} \approx (0, 0, 150\lambda)$  wieder zur Ruhe. Für eine Diskussion von verwandten Lösungen verweise ich auf Literatur.



### 10.4.2 Teilchen in elliptisch polarisierten harmonischen Wellenfeldern

Wir wollen nun die Bewegung von Testteilchen in einer in  $z$ -Richtung propagierenden elliptisch polarisierten ebenen harmonischen Welle mit Vektorpotential

$$A_\mu = (0, A_1(k \cdot x), A_2(k \cdot x), 0), \quad (ck^\mu) = (\omega, 0, 0, \omega)^T. \quad (10.61)$$

untersuchen. Man beachte, dass mit unserer Wahl für die Minkowski Metrik die Komponenten  $A^i$  von  $\mathbf{A}$  das umgekehrte Vorzeichen der  $A_i$  haben. Das elektrische und magnetische Feld

$$\mathbf{E} = \omega \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} -A'_2 \\ A'_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.62)$$

sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und senkrecht zueinander. Das reskalierte Potential  $a_\mu = eA_\mu/m$  hat die Form

$$a_\mu(x) = (0, cf_1, cf_2, 0) \quad (10.63)$$

mit dimensionslosen Funktionen  $f_1(k \cdot x)$  und  $f_2(k \cdot x)$ . Für ein Teilchen mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit  $u_0^\mu$  lautet die allgemeine Lösung (10.55)

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0^0 + \frac{\omega c}{\Omega} \sum \Delta f_p u_0^p + \frac{\omega c}{2\Omega} \sum (\Delta f_p)^2 \\ u^1 &= u_0^1 + c \Delta f_1 \\ u^2 &= u_0^2 + c \Delta f_2 \\ u^3 &= u_0^3 + \frac{\omega c}{\Omega} \sum \Delta f_p u_0^p + \frac{\omega c}{2\Omega} \sum (\Delta f_p)^2, \end{aligned} \quad (10.64)$$

wobei das Argument der Funktionen  $f_1, f_2$  gleich  $\Omega\tau$  ist. Wir erinnern daran, dass die Anfangsgeschwindigkeit und der Wellenzahlvektor die Bewegungskonstante  $\Omega = k \cdot u_0$  bestimmen und wir die Abkürzung  $\Delta f_p = f_p(\Omega\tau) - f_p(0)$  einführen. Summiert wird jeweils von  $p = 1$  bis  $p = 2$ . Für eine elliptisch polarisierte harmonische Welle können folgende Funktionen  $f_p$  wählen,

$$f_1(x) = \alpha_0 \delta \sin x \quad \text{und} \quad f_2(x) = -\alpha_0 \tilde{\delta} \cos x \quad \text{mit} \quad \tilde{\delta} = \sqrt{1 - \delta^2}. \quad (10.65)$$

### Ein anfänglich ruhendes Teilchen

Für eine anfänglich ruhendes Teilchen ist  $u_0^\mu = (c, 0, 0, 0)^T$  und entsprechend  $\Omega = \omega$  in der Lösung (10.64) der Bewegungsgleichung. Deshalb hat die Lösung die Form

$$\frac{u^\mu}{c} = \left( 1 + \frac{1}{2}(\Delta f_1)^2 + \frac{1}{2}(\Delta f_2)^2, \Delta f_1, \Delta f_2, \frac{1}{2}(\Delta f_1)^2 + \frac{1}{2}(\Delta f_2)^2 \right) \quad (10.66)$$

mit  $\Delta f_p = f_p(\omega\tau) - f_p(0)$ . Für die harmonischen Funktionen in (10.65) können wir die 4-er Geschwindigkeit (10.66) leicht bezüglich der Eigenzeit  $\tau$  integrieren um die Weltlinien zu bestimmen. Für ein anfänglich am Ursprung ruhendes Teilchen ist  $x(0) = (0, 0, 0, 0)^T$  und wir finden

$$\begin{aligned} \frac{x^1}{\lambda} &= \alpha_0 \delta (1 - \cos \omega\tau) \\ \frac{x^2}{\lambda} &= \alpha_0 \tilde{\delta} (\omega\tau - \sin \omega\tau) \\ \frac{x^3}{\lambda} &= \frac{\alpha_0^2}{8} \left( \delta^2 (2\omega\tau - \sin 2\omega\tau) + \tilde{\delta}^2 (6\omega\tau + \sin 2\omega\tau - 8 \sin \omega\tau) \right) \\ x^0 &= c\tau + x^3. \end{aligned} \quad (10.67)$$

**Linear polarisierte Welle:** Für  $\delta = 1$  und  $\tilde{\delta} = 0$  ist die ebene Welle linear polarisiert. Die Weltlinie hat die Form

$$x^0 = c\tau + x^3, \quad \frac{x^1}{\lambda} = \alpha_0 (1 - \cos \omega\tau), \quad \frac{x^3}{\lambda} = \frac{\alpha_0^2}{8} (2\omega\tau - \sin 2\omega\tau) \quad (10.68)$$

mit  $x^2 = 0$ . Das Teilchen bewegt sich in der durch  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{E}$  definierten Ebene mit einem Drift in die Richtung von  $\mathbf{k}$ . Der relativistische Faktor  $\gamma = 1 + \alpha_0^2/2 \cdot \sin^2 \omega\tau$  ist gleich Eins für  $\omega\tau = n\pi$ . Bei diesen Zeiten kommt das Teilchen zur Ruhe. Eine typische Bahn im Raum ist in Fig. 10.2 geplottet.

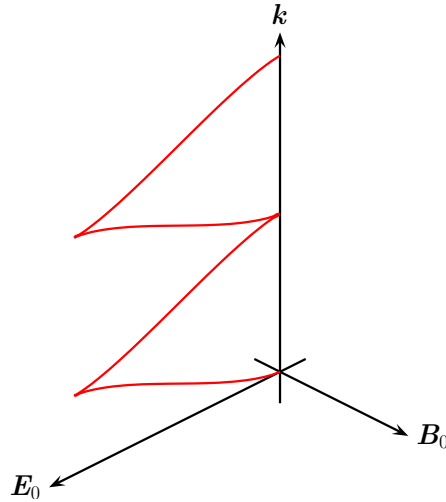


Abbildung 10.2: Bahn eines Teilchens in einer linear polarisierten Welle. Gezeigt sind zwei Zyklen eines anfänglich im Ursprung ruhenden Teilchens. An den Knicken ruht das Teilchen.

**Zirkular polarisierte Welle:** Für  $\tilde{\delta} = \delta$ , also für zirkular polarisiertes Licht, vereinfacht sich der Ausdruck (10.67) für die Weltlinie eines Teilchens zu

$$x^0 = c\tau + x^3, \quad \frac{x^1}{\lambda} = b_0(1 - \cos \omega\tau), \quad \frac{x^2}{\lambda} = b_0(\omega\tau - \sin \omega\tau), \quad x^3 = b_0 x^2. \quad (10.69)$$

wobei  $b_0 = \alpha_0/\sqrt{2}$  ist. Die Trajektorien zeigen Spitzen für  $\omega\tau = 2\pi n$ , siehe Fig. 10.3.

### Ein im zeitlichen Mittel ruhendes Teilchen

Ausgangspunkt ist die Lösung (10.64), worin wir die Anfangsgeschwindigkeit derart wählen, dass das Teilchen im zeitlichen Mittel ruht. Zuerst wählen wir  $u_0^p = -c\langle \Delta f_p \rangle$ , so dass der Drift in die 1- und 2-Richtungen verschwindet. Danach wählen wir

$$u_0^3 = \frac{\omega v}{\Omega} \sum_p \langle \Delta f_p \rangle^2 - \frac{\omega c}{2\Omega} \sum_p \langle \Delta f_p^2 \rangle, \quad (10.70)$$

damit der Drift in die 3-Richtung verschwindet. Die Bedingung  $k \cdot u_0 = \omega(u_0^0 - u_0^3)/c = \Omega$  legt dann die Anfangsbedingung für  $u^0$  fest. Führen wir noch die Funktionen

$$g_p = \Delta f_p - \langle \Delta f_p \rangle \quad (10.71)$$

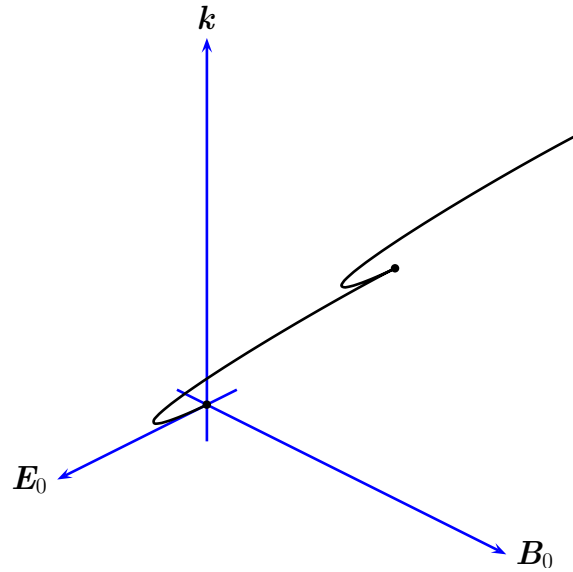


Abbildung 10.3: Die Bewegung eines zur Zeit  $t = 0$  ruhenden Teilchens in einer zirkular polarisierten Welle.

ein, dann lautet die Lösung für ein im Zeitmittel ruhendes Teilchen

$$\left(\frac{u^\mu}{c}\right) = \left(\frac{\Omega}{\omega} + \frac{\omega}{2\Omega} \sum (g_p^2 - \langle g_p^2 \rangle), g_1, g_2, \frac{\omega}{2\Omega} \sum (g_p^2 - \langle g_p^2 \rangle)\right). \quad (10.72)$$

Der zeitabhängige relativistische  $\gamma$ -Faktor ist gegeben durch  $\gamma = u^0/c$ . Interessanter ist der zeitlich gemittelte  $\bar{\gamma}$ -Faktor

$$\bar{\gamma} = \langle u^0/c \rangle = \Omega/\omega.$$

Die explizite Formel für den gemittelten Faktor  $\bar{\gamma}$  folgt dann aus  $u \cdot u = c^2$ ,

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 + \sum_p \langle g_p^2 \rangle \stackrel{(10.65)}{\longrightarrow} 1 + \frac{\alpha_0^2}{2}. \quad (10.73)$$

Setzen wir die harmonischen Funktionen  $f_p$  in (10.65) in das Resultat (10.72) ein, dann ergibt die Integration bezüglich der Eigenzeit folgende Trajektorie für ein Teilchen mit  $x(0) = 0$ ,

$$\frac{x}{\lambda} = \left( \bar{\gamma}\omega\tau + \frac{x^3}{\lambda}, \frac{\alpha_0\delta}{\bar{\gamma}}(1 - \cos \bar{\gamma}\omega\tau), -\frac{\alpha_0\tilde{\delta}}{\bar{\gamma}} \sin \bar{\gamma}\omega\tau, \frac{\alpha_0^2}{8\bar{\gamma}^2} (\tilde{\delta}^2 - \delta^2) \sin 2\bar{\gamma}\omega\tau \right). \quad (10.74)$$

**Linear polarisierte Welle:** Für eine linear polarisierte Welle mit  $\tilde{\delta} = 0$  vereinfacht sich die Weltlinie für ein im Zeitmittel ruhendes Teilchen zu

$$x^0 = \bar{\gamma}c\tau + x^3, \quad \frac{x^1}{\lambda} = \frac{\alpha_0}{\bar{\gamma}}(1 - \cos \bar{\gamma}\omega\tau), \quad \frac{x^3}{\lambda} = -\frac{\alpha_0^2}{8\bar{\gamma}^2} \sin 2\bar{\gamma}\omega\tau. \quad (10.75)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist in die entgegengesetzte Richtung zu  $\mathbf{k}$  und die Bahn beschreibt die den Laserphysikern wohlbekannt 8 in der von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{k}$  aufgespannte Ebene, siehe Fig. 10.4. Die Geschwindigkeit ist maximal für  $\sin(\bar{\gamma}\omega\tau) = \pm 1$ . Dann schneiden sich die Bahnen der Acht.

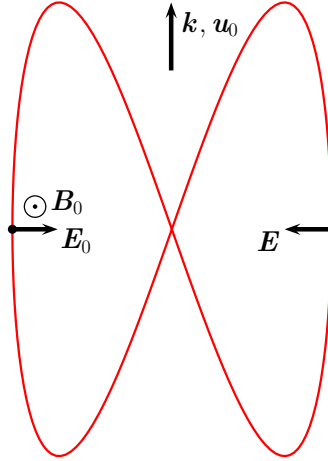


Abbildung 10.4: Bewegung eines Teilchens in einer linear polarisierten Welle wenn das Teilchen im zeitlichen Mittel ruht.

An dieser Stelle verschwindet das elektromagnetische Feld.

**Zirkular polarisierte Welle:** Für  $\delta = \tilde{\delta}$  erhalten wir ( $b_0 = \alpha_0/\sqrt{2}$ )

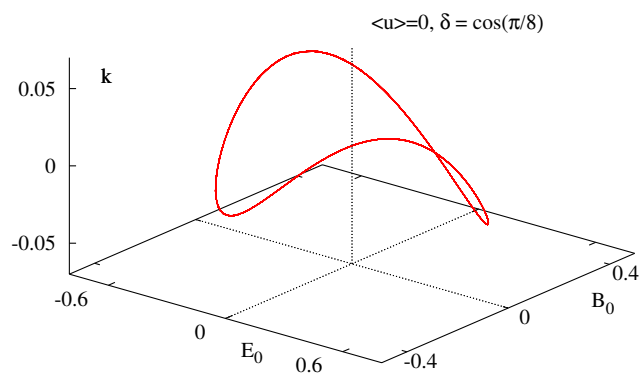
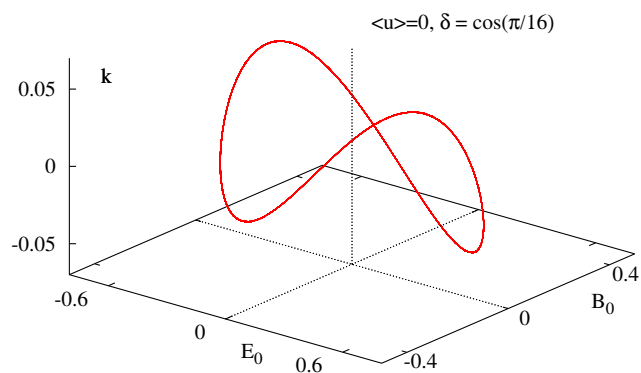
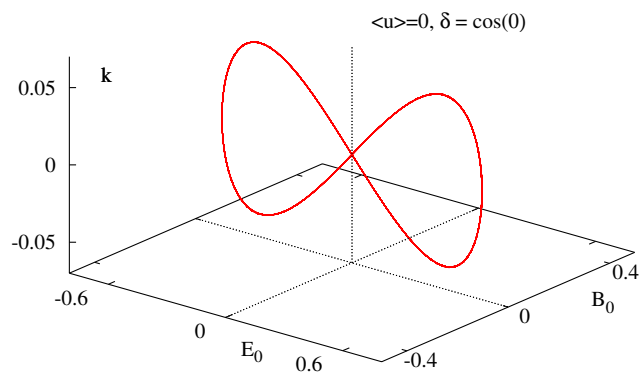
$$\frac{x^1}{\lambda} = -\frac{b_0}{\bar{\gamma}} \cos \bar{\gamma}\omega\tau, \quad \frac{x^2}{\lambda} = -\frac{b_0}{\bar{\gamma}} \sin \bar{\gamma}\omega\tau, \quad \frac{x^3}{\lambda} = 0, \quad t = \bar{\gamma}\tau. \quad (10.76)$$

mit dem relativistischen Parameter  $\bar{\gamma} = 1 + b_0^2$ . Für feste Zeit beschreibt die Weltlinie einen Kreis in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ .

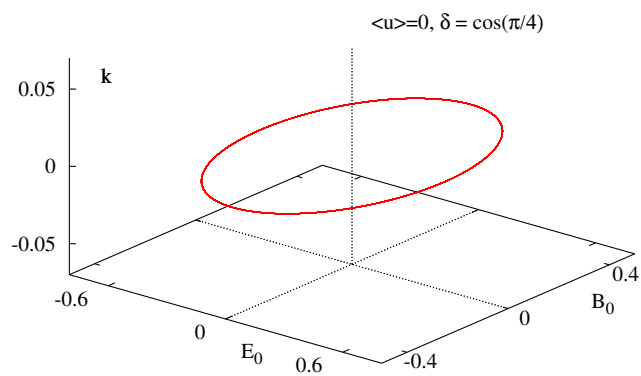
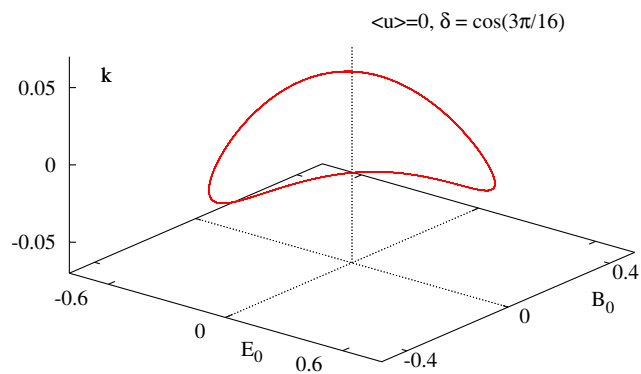
Die folgenden Figuren zeigen die Bahnkurven von relativistischen Teilchen mit mittlerer Geschwindigkeit  $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$ . In allen Plots wählten wir die dimensionslose Amplitude  $\alpha_0 = 1$ , so dass

$$\bar{\gamma} = 1 + \frac{\alpha_0^2}{2} = \frac{3}{2}. \quad (10.77)$$

Der Elliptizitätsparameter  $\delta$  hat die Werte  $0, \pi/16, \pi/8, 3\pi/16$  und  $\pi/4$ .







## Kapitel 11

# Erzeugung und Abstrahlung von Wellen

Bisher haben wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen diskutiert, ihre Erzeugung durch zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilungen dagegen noch ausgespart. Der letzte Aspekt soll im vorliegenden Kapitel untersucht werden. Dazu erinnern wir daran, dass in der Lorenz-Eichung das elektromagnetische Potential die inhomogene Wellengleichung

$$\square A^\mu(x) = \mu_0 j^\mu(x), \quad (11.1)$$

löst. Dabei werden die Ladungsdichte  $j^0 = c\rho$  und Stromdichte  $\mathbf{j}$  als gegeben vorausgesetzt. Als Anwendung werden wir die Abstrahlung einer lokalisierten Quelle sowie die Felder und Strahlung bewegter Punktladungen behandeln.

### 11.1 Inhomogene Wellengleichung

Wir wollen das Feld von beliebig bewegten Ladungen im sonst leeren Raum untersuchen. Die Ladungs- und Stromdichte sind willkürlich vorgegebene Funktionen der Raumzeit-Koordinaten und wir haben es in der Lorenz-Eichung mit der Gleichung (11.1) zu tun. Die *formale Lösung* dieser partiellen Differentialgleichung ist

$$A^\mu = \mu_0 \frac{1}{\square} j^\mu. \quad (11.2)$$

Formal deshalb, weil die homogene Wellengleichung Lösungen hat und damit der Wellenoperator  $\square$  nicht ohne Weiteres invertierbar ist. Im Folgenden wollen wir, unter Zuhilfenahme von physikalischen Bedingungen, das „Inverse des Wellenoperators“ bestimmen.

Eine partikuläre Lösung wird mit der Methode der Green'schen Funktion (Georg Green, 1799-1841) unter Berücksichtigung von „physikalischen Randbedingungen“ bestimmt. Eine *Green'sche Funktion*  $G(x, x')$  der Wellengleichung löst die Wellengleichung für eine *instantane Punktquelle*

am Raumzeit-Punkt  $x'$ :

$$\square G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (11.3)$$

Hier steht auf der rechten Seite die 4-dimensionale Delta-Distribution in der Raumzeit

$$\delta^4(x - x') = \delta(ct - ct')\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{c}\delta(t - t')\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (11.4)$$

Wegen der Homogenität der Raumzeit darf sich die Green'sche Funktion bei gleichzeitiger Verschiebung von Aufpunkt  $x$  und Quellpunkt  $x'$  in der Raumzeit nicht ändern. Sie kann daher nur vom Differenzvektor  $x - x'$  abhängen,  $G(x, x') = G(x - x')$ . Ist die Green'sche Funktion bekannt, so folgt formal sofort eine partikuläre Lösung

$$A^\mu = \mu_0 \int d^4x' G(x - x') j^\mu(x'). \quad (11.5)$$

In der Tat, wendet man auf  $A^\mu$  den d'Alembert-Operator an, so erhält man

$$\square A^\mu = \mu_0 \int d^4x' \square G(x - x') j^\mu(x') = \mu_0 \int d^4x' \delta^4(x - x') j^\mu(x') = \mu_0 j^\mu(x).$$

Die Green'sche Funktion beschreibt die Ausbreitung einer in der Raumzeit punktförmigen Störung.

Für ihre Berechnung lösen wir zuerst die Bestimmungsgleichung (11.3) im  $k$ -Raum, also für die Fourier-Transformierte  $\tilde{G}$  in der Transformationsformel

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k e^{i(k,x)} \tilde{G}(k). \quad (11.6)$$

Frequenz und Wellenzahlvektor bilden die Komponenten eines 4-er Vektors,

$$k = (k^\mu) = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

und dieser 4-er Wellenzahlvektor tritt in der Form

$$(k, x) = k^\mu x_\mu = k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (11.8)$$

in der Fourier-Transformation (11.6) auf. Im  $k$ -Raum geht der d'Alembert-Operator bis auf das Vorzeichen in die Multiplikation mit  $k^2$  über,

$$\square G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k k^2 e^{i(k,x)} \tilde{G}(k). \quad (11.9)$$

Andererseits ist die Fourier-Transformierte der Punktquelle

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikx}. \quad (11.10)$$

Setzen wir diese beiden Fourier-Darstellungen in die Bestimmungsgleichung für die Green'sche Funktion ein, so finden wir folgende Fourier-Transformierte von  $G$ ,

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_\mu k^\mu} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2}. \quad (11.11)$$

Damit ergibt sich folgende formale Lösung für die Green-Funktion in (11.6)

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i(k,x)}}{k^2} d^4k, \quad k^2 = k_\mu k^\mu. \quad (11.12)$$

Da  $\square$  nicht invertierbar ist, müssen wir bei der Auswertung der Integrale etwas vorsichtig sein. Zuerst berechnen wir das Integral über  $k^0$ . Da wir die Ladungen und Ströme als *Ursachen* für die Potentiale betrachten, sollte die Green'sche Funktion  $G(x - x')$  nur ungleich Null sein, falls das Ereignis  $x$  später als das Ereignis  $x'$  ist, d.h. falls  $x^0 \geq x'^0$  gilt. Diese Forderung ist erfüllt, falls

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{e^{i(k,x)}}{(k^0 - i\varepsilon)^2 - \mathbf{k}^2} d^4k, \quad (11.13)$$

ist. Hier bedeutet  $\varepsilon \rightarrow +0$ , dass  $\varepsilon > 0$  gegen Null strebt. Dies ist mit Hilfe des Residuensatzes einfach zu beweisen: Für  $x^0 < 0$  strebt der Integrand in der unteren Halbebene  $\Im(k^0) < 0$  exponentiell gegen Null und ist dort analytisch, da seine Pole bei

$$k^0 = i\varepsilon \pm |\mathbf{k}|,$$

also in der oberen Halbebene, liegen. Damit verschwindet das  $k^0$ -Integral längs der Schleife  $C_1 \cup C_2$  in der Abb. 11.1. Da  $C_2$  nicht beiträgt, verschwindet das  $k^0$ -Integral längs  $C_1$  für negative  $x^0$ . Für positive  $x^0$  fällt der Integrand nur in der oberen Halbebene  $\Im(k^0)$ -Ebene ab und wir müssen das Schleifenintegral längs  $C_1 \cup C_3$  nehmen. Da  $C_3$  nicht beiträgt, ist dies gleich dem Integral längs  $C_1$ . Nach dem Residuensatz ist das Schleifenintegral proportional zur Summe der Residuen innerhalb  $C_1 \cup C_3$ . Also gilt

$$\int_{C_1} dk^0 \frac{e^{ik^0 x^0}}{(k^0 - i\varepsilon)^2 - \mathbf{k}^2} = \oint_{C_1 \cup C_3} dk^0 \frac{e^{ik^0 x^0}}{(k^0 - i\varepsilon - |\mathbf{k}|)(k^0 - i\varepsilon + |\mathbf{k}|)} \rightarrow -\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \sin |\mathbf{k}| x^0$$

im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Dies setzen wir in (11.13) ein und finden

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\sin(|\mathbf{k}| x^0)}{|\mathbf{k}|} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k.$$

Zur Berechnung des Integrals legen wir die 3-Achse im  $\mathbf{k}$ -Raum in Richtung von  $\mathbf{r}$ , so dass

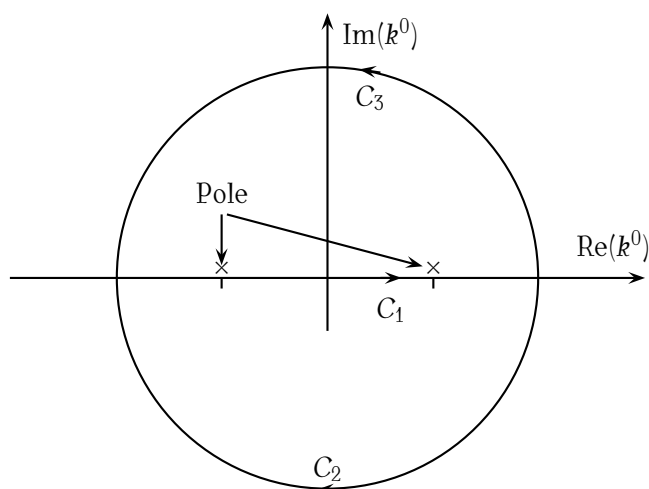


Abbildung 11.1: Zur Berechnung des retardierten Potentials.

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{k}| |\mathbf{r}| \cos \theta$  ist, und integrieren über den Azimutalwinkel. Setzen wir noch  $\cos \theta = z$ , dann finden wir

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}|x^0) e^{-izr|\mathbf{k}|} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{r}|} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}|x^0) \sin(|\mathbf{k}|r). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Der Integrand ist eine gerade Funktion von  $|\mathbf{k}|$  und das Integral von 0 nach  $\infty$  ist gleich der Hälfte des Integrals von  $-\infty$  nach  $\infty$ . Schreiben wir die beiden Sinus-Funktionen als Differenz zweier Exponentialfunktionen und benutzen die Formel (7.57), dann finden wir unter Beachtung von  $x^0 + r > 0$  die einfache Darstellung

$$G(x) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}|} \delta(x^0 - r). \quad (11.15)$$

Wie gefordert, ist  $G$  nur ungleich Null, wenn  $x$  auf dem Vorwärtslichtkegel von 0 liegt,

$$\text{Träger}(G) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 = (x^0)^2 - \mathbf{r}^2 = 0, x^0 \geq 0\}. \quad (11.16)$$

In anderen Worten: Die Green-Funktion am Raumzeitpunkt  $x$  ist ungleich Null, falls eine zur Zeit 0 am Ursprung ausgesandte Kugelwelle zur Zeit  $t = x^0/c$  den Ort  $\mathbf{r}$  erreicht. Die soeben konstruierte Green-Funktion nennt man *retardierte Green'sche Funktion*

$$G_{\text{ret}}(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta[c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]. \quad (11.17)$$

Da die Wellengleichung invariant unter einer Zeitspiegelung  $Tx = (-x^0, \mathbf{r})$  ist, ist auch

$$G_{\text{av}}(x - x') = G_{\text{ret}}(T(x - x')) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta[c(t - t') + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] \quad (11.18)$$

eine mögliche Green-Funktion. Lügen die Pole in (11.1) etwas unterhalb der reellen Achse, dann

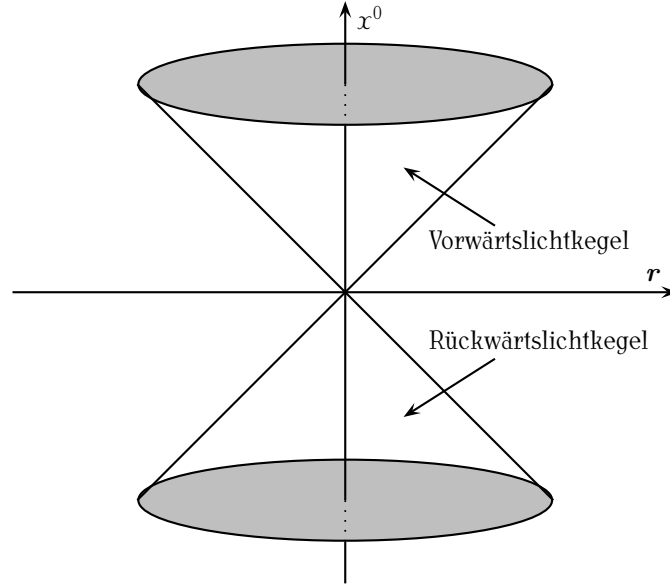


Abbildung 11.2: Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel als Träger von  $G_{\text{ret}}$  bzw.  $G_{\text{av}}$ .

hätte die Fourier-Transformation diese unphysikalische *avancierte Green'sche Funktion* geliefert. Unphysikalisch deshalb, weil ihr Träger der Rückwärtslichtkegel ist:  $G_{\text{av}}(x, x')$  ist nur für  $t \leq t'$  ungleich Null.

Nun setzen wir die retardierte Green-Funktion in (11.5) ein und finden

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^4x' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) j^\mu(ct', \mathbf{r}'). \quad (11.19)$$

Die Zeitintegration führt auf

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{j^\mu(ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{j^\mu(ct_{\text{ret}}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (11.20)$$

Die elektromagnetischen Potentiale haben formal dieselbe Struktur wie in der Statik. Aber die Potentiale zur Zeit  $t$  hängen nun von den Stromdichten zu früheren retardierten Zeiten

$$ct_{\text{ret}} = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq ct \quad (11.21)$$

ab. Etwas genauer: Sie hängen nur von den Werten der Stromdichte auf dem Rückwärtslichtkegel

von  $x$  ab. Wegen  $t' = t_{\text{ret}}$  ist

$$c^2(t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = (x - x')^2 = 0,$$

was bedeutet, dass der Quellpunkt  $x'$  und der Aufpunkt  $x$  lichtartig getrennt sind. Das entsprechende Raumzeit-Diagramm ist in der Abbildung 11.3 gezeigt.

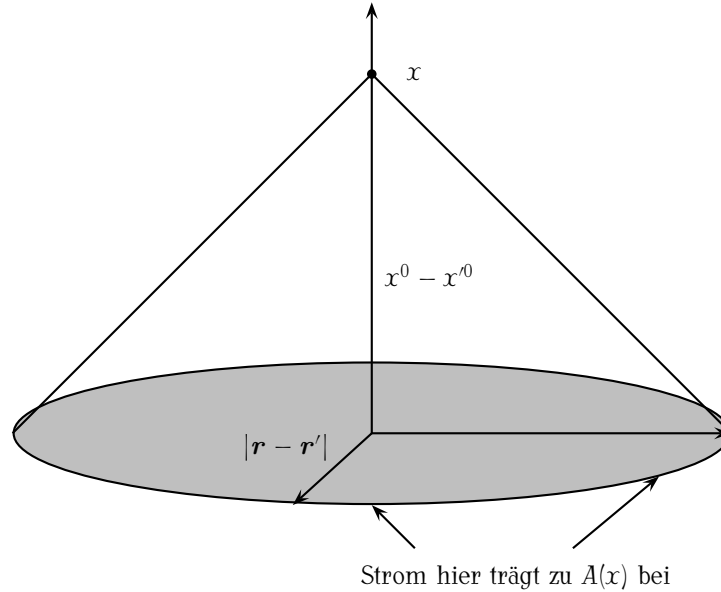


Abbildung 11.3: Die Werte des Stromes auf dem Rückwärtslichtkegel von  $x$  bestimmen das Potential am Raumzeitpunkt  $x$ .

Das Potential (11.20) erfüllt automatisch die *Lorenz-Eichung*. Zum Beweis dieser Aussage machen wir von der Darstellung (11.5) Gebrauch und benutzen die Kontinuitätsgleichung für die 4-er Stromdichte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu A^\mu &= \int d^4 x' \partial_\mu G(x - x') j^\mu(x') \\ &= - \int d^4 x' \partial'_\mu G(x - x') j^\mu(x') = \int d^4 x' G(x - x') \partial'_\mu j^\mu(x') = 0. \end{aligned}$$

Bei der partiellen Integration haben wir Oberflächenterme vernachlässigt, was für lokalisierte Stromverteilungen gerechtfertigt ist.

## 11.2 Strahlungsfeld in der Fernzone

Wir betrachten eine auf ein endliches Gebiet mit linearer Ausdehnung  $d$  eingeschränkte Ladungs- und Stromverteilung und bestimmen die Abstrahlung dieses „Senders“. Dazu benötigen wir die

elektromagnetischen Felder in großen Abständen von den Quellen. Der Koordinatenursprung liege räumlich und zeitlich innerhalb des Senders.

Für  $r \gg d$ , also weit weg vom Sender, ist  $r \gg r'$  und wir entwickeln den räumlichen Abstand nach Potenzen von  $r'/r$ ,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 + r'^2/r^2 - 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'/r} = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + O(d^2/r), \quad (11.22)$$

wobei der Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  in Richtung von  $\mathbf{r}$  zeigt,  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}}$ . Die führenden Terme der Felder weit weg vom Sender klingen also wie  $1/r$  ab. Um diese führenden Terme zu berechnen, dürfen wir den Nenner in (11.20) durch  $r$  ersetzen. Wir benutzen diese Näherung auch für die retardierte Zeit

$$ct_{\text{ret}} = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + O(d^2/r). \quad (11.23)$$

Diese Näherung ist allerdings nur zulässig, wenn die zeitliche Änderung der Quellen während des Zeitintervalls  $d^2/rc$  klein ist. Hierbei ist  $d/c$  die Zeit, die Licht zum Durchqueren der Quelle braucht. Für eine harmonische Welle  $\sim e^{i\omega t}$  bedeutet dies

$$\frac{d^2}{rc} \ll \frac{1}{\omega}. \quad (11.24)$$

In der so genannten *Wellen-* oder *Fernzone*, charakterisiert durch die Bedingungen

$$r \gg d \quad \text{und} \quad r \gg \lambda/(2\pi), \quad (11.25)$$

vereinfacht sich der Ausdruck (11.20) für das 4-er Potential dann zu

$$A^\mu = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' j^\mu(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}'), \quad (11.26)$$

das heißt für das skalare und Vektorpotential zu

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int d^3r' \rho(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}') \quad (11.27)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}'). \quad (11.28)$$

Wir bestimmen nun die entsprechenden  $1/r$ -Terme der elektromagnetischen Felder. Die Ableitung von  $1/r$  fällt wie  $1/r^2$  ab und trägt zu den führenden  $1/r$ -Termen nicht bei. Damit ist das magnetische Feld in der Wellenzone

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \mathbf{n} \times \int d^3r' \partial_t \mathbf{j}(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}').$$

Der Vergleich des Integranden mit (11.28) ergibt die Formel für das Fernfeld,



$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}, \quad (11.29)$$

wobei das Potential  $\mathbf{A}$  nach der Formel (11.28) berechnet wird. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichung  $\dot{\mathbf{E}} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}$  bestimmen wir den führenden Term von  $\dot{\mathbf{E}}$ ,

$$\dot{\mathbf{E}} = -c \nabla \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{A}}).$$

Daraus ergibt sich bis auf einen statischen Anteil das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}) = -c \mathbf{n} \times \mathbf{B}. \quad (11.30)$$

Man hat also dieselben Verhältnisse wie bei ebenen Wellen; die Strahlungsfelder  $\mathbf{E}$  und  $c\mathbf{B}$  sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$ , haben die gleiche Amplitude und stehen senkrecht aufeinander.

In den Formeln für die Felder in der Fernzone geht das (genäherte) Vektorpotential  $A^\mu$  in (11.26) ein. Zu dessen Berechnung schreiben wir die Stromdichte als Überlagerung von ebenen Wellen,

$$j^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(k,x)} j^\mu(k) d\omega d^3k, \quad k_\mu j^\mu(k) = 0. \quad (11.31)$$

Die letzte Bedingung ist die Kontinuitätsgleichung für die 4-er Stromdichte im  $k$ -Raum. Um die Stromdichte  $j^\mu$  im Minkowski-Raum von ihrer Fourier-Transformierten im  $k$ -Raum zu unterscheiden, schreiben wir im Folgenden das Argument von  $j^\mu$  explizit. Setzen wir die Fourier-Zerlegung in (11.26) ein, dann finden wir das Vektorpotential

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d\omega e^{i\omega(t-r/c)} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r' d^3k e^{i\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{q}-\mathbf{k})} j^\mu(\omega, \mathbf{k}),$$

wobei  $\mathbf{q} = \omega \mathbf{n}/c$  in Richtung von  $\mathbf{r}$  zeigt. Die  $d^3r'$ -Integration kann nun ausgeführt werden und ergibt mit  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = \omega r/c$  folgende Formel für das elektromagnetische Potential

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d\omega e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} j^\mu(\omega, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (11.32)$$

Im *monochromatischen Fall* ist

$$j^\mu(t, \mathbf{r}) = \Re \left( e^{i\omega t} j^\mu(\mathbf{r}) \right), \quad j^\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{k}) d^3k \quad (11.33)$$

und der Ausdruck für das Potential in der Fernzone vereinfacht sich zu

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \Re \left( e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} j^\mu(\mathbf{q}) \right) \quad (11.34)$$

Es ist proportional zur Fourier-Transformierten der Stromdichte für den Impuls  $\mathbf{q} = \omega \hat{\mathbf{r}}/c$ . Das

entsprechende Magnetfeld hat die Form

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi cr} \Im \left( \mathbf{B}(\mathbf{q}) e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} \right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{n} \times \mathbf{j}(\mathbf{q}), \quad (11.35)$$

und das elektrische Feld ist  $\mathbf{E} = -c \mathbf{n} \times \mathbf{B}$ . Die abgestrahlte Welle in der Wellenzone ist eine auslaufende Kugelwelle mit winkelabhängigen Koeffizienten.

### 11.3 Multipolentwicklung

Die Amplitude einer Welle ändert sich kaum über Distanzen, die viel kleiner als die Wellenlänge sind oder während Zeiten, die viel kürzer als die inverse Frequenz sind. Die Retardierung wird also vernachlässigbar sein, wenn sich die Stromdichte während der Zeitdauer  $d/c$ , die das Licht zur Durchquerung des Senders braucht, kaum ändert. Wir wollen jetzt *zusätzlich* zu (11.25) annehmen, dass dies der Fall sei, d.h. dass gelte

$$\lambda \gg d. \quad (11.36)$$

Damit dürfen wir den Integranden in (11.28) entwickeln,

$$\mathbf{j}(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}') = \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{c} \partial_t \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \dots$$

und dies führt auf folgende Multipolentwicklung für das Vektorpotential:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3 r' \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi cr} \int d^3 r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \partial_t \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \dots \\ &= \mathbf{A}_1(t, \mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(t, \mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (11.37)$$

Im Folgenden werden wir sehen, dass  $\mathbf{A}_1$  die elektrische Dipolstrahlung und  $\mathbf{A}_2$  die magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung enthält.

#### 11.3.1 Elektrisches Dipolfeld

Zur weiteren Umformung des Integrals verallgemeinern wir die Identität (5.52) in Kapitel 5 auf zeitabhängige Situationen. Für zeitabhängige Ladungsdichten ist die Stromdichte nicht mehr quellenfrei, und

$$0 = \oint d\mathbf{f} (g\mathbf{j}) = \int d^3 r \nabla \cdot (g\mathbf{j}) = \int d^3 r \nabla g \cdot \mathbf{j} + \int d^3 r g \nabla \cdot \mathbf{j},$$

wobei  $g$  eine beliebige Funktion ist und angenommen wurde, dass für ein genügend großes Integrationsgebiet  $g\mathbf{j}$  auf dem Rande des Gebietes verschwindet. Mit der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$\int d^3 r (\nabla g) \cdot \mathbf{j} = \int d^3 r g \dot{\rho}. \quad (11.38)$$

Wählen wir zunächst  $g = x_i$ , dann kann das erste Integral in (11.37) folgendermaßen umgeformt werden,

$$\int d^3r' \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') = \int d^3r' \mathbf{r}' \dot{\rho}(ct - r, \mathbf{r}') = \dot{\mathbf{p}}(ct - r),$$

wobei  $\mathbf{p}(t)$  das in (3.5) eingeführte *elektrische Dipolmoment* der Ladungsverteilung ist. Ein zeitabhängiges Dipolmoment erzeugt also in der Wellenzone ein Vektorpotential, welches wie  $1/r$  abfällt und proportional der zeitlichen Änderung des Dipols ist,

$$\mathbf{A}_1(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}}(ct - r). \quad (11.39)$$

Dabei ist die Zeitableitung von  $\mathbf{p}$  zur Zeit  $t - r/c$  zu nehmen, also zu der Zeit als (in unserer Approximation) die Welle im Sender erzeugt wurde.

### 11.3.2 Magnetisches Dipol- und elektrisches Quadrupolfeld

Die Zeitableitung im zweiten Integral in (11.37) ziehen wir vor das Integral und formen den auftretenden Term  $x'_p j_q$  folgendermaßen um

$$x'_p j_q = \frac{1}{2} (x'_p j_q + x'_q j_p) + \frac{1}{2} (x'_p j_q - x'_q j_p) = \frac{1}{2} \nabla' (x'_p x'_q) \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2} \varepsilon_{pqs} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_s.$$

Bei der Integration des zweitletzten Terms über  $d^3r'$  dürfen wir (11.38) anwenden. Dann finden wir die Zeitableitung des elektrischen Quadrupolmoments (3.6). Die Integration des letzten Terms ergibt das magnetische Dipolmoment (5.55) in Kapitel 5. Es gilt

$$\int d^3r' x'_p j_q = \frac{1}{2} \left( \dot{Q}_{pq} + \frac{1}{3} \delta_{pq} \int d^3r' r'^2 \dot{\rho} \right) + \varepsilon_{pqr} m_r,$$

woraus ein Zwischenergebnis für  $\mathbf{A}_2$  in (11.37) resultiert,

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \left( \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} + \frac{1}{6} (\nabla \log r) \int d^3r' r'^2 \ddot{\rho} - \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{m}} \right).$$

Hierbei steht  $\mathbf{Q} \mathbf{n}$  für den Vektor mit den Komponenten  $\sum_j Q_{ij} n_j$ . Der zweite Term auf der rechten Seite ist ein Gradient, der nicht zum elektromagnetischen Feld beiträgt. Wir können das Potential umeichen, so dass er verschwindet. Damit finden wir folgenden Ausdruck für den Beitrag  $\mathbf{A}_2$  zum Eichpotential in der Wellenzone:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \left( \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_{ct-r}. \quad (11.40)$$

Auch ein zeitabhängiges magnetisches Dipolmoment und zeitabhängiges elektrisches Quadrupolmoment tragen zum Vektorpotential in der Wellenzone bei.

Addieren wir die Beträge  $\mathbf{A}_1$  und  $\mathbf{A}_2$ , dann finden wir mit den allgemeinen Formeln (11.29)

und (11.30) das elektromagnetische Feld in der Wellenzone,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \mathbf{n} \times \left( \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{c} \ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{2c} \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_{ct-r} = \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{E}}{c} \quad (11.41)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \mathbf{n} \times \left( c\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{m}} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_{ct-r} = -c \mathbf{n} \times \mathbf{B}. \quad (11.42)$$

In den führenden Ordnungen tragen zeitabhängige elektrische und magnetische Dipolmomente und ein zeitabhängiges, elektrisches Quadrupolmoment bei. Wir erinnern an die gemachten Annahmen:

$$r \gg \lambda \gg d. \quad (11.43)$$

Nun werden wir die von der variablen Quelle abgestrahlte Leistung berechnen.

## 11.4 Abgestrahlte Leistung

Zur Berechnung der Dipol- und Quadrupolstrahlung eines Senders dürfen wir die elektromagnetischen Felder (11.41,11.42) verwenden. In der Wellenzone bilden  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $c\mathbf{B}$  ein orthogonales Dreibein und

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = c|\mathbf{B}|^2 \mathbf{n} = \frac{1}{c} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n}. \quad (11.44)$$

Damit finden wir für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = r^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} = c\epsilon_0 r^2 |\mathbf{E}|^2 = \frac{c}{\mu_0} r^2 |\mathbf{B}|^2. \quad (11.45)$$

Wir betrachten zuerst ein System, für das die elektrischen Dipolfelder dominieren. Dann ist

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\text{el.Dipol}} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{c} |\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{c} \dot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta, \quad (11.46)$$

wobei  $\theta$  den Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  und  $\dot{\mathbf{p}}$  bezeichnet. Der Dipol strahlt am stärksten senkrecht zum Dipolmoment. Längs der Dipolachse erfolgt keinerlei Abstrahlung. Die Abstrahlung erfolgt rotationssymmetrisch um die Dipolachse. Integrieren wir über alle Richtungen, so erhalten wir mit Hilfe von

$$\int \sin^2 \theta d\Omega = 2\pi \int \sin^3 \theta d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

für die Leistung der abgestrahlten *elektrischen Dipolstrahlung*

$$P|_{\text{el.Dipol}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \dot{\mathbf{p}}^2. \quad (11.47)$$

Analog erhält man für die *magnetische Dipolstrahlung*

$$P|_{\text{magn.Dipol}} = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2. \quad (11.48)$$

Für harmonisch schwingende Dipole,  $\mathbf{p}, \mathbf{m} \sim e^{i\omega t}$  ist die Strahlungsleistung proportional zur vierten Potenz der Frequenz und zum Quadrat des Dipolmomentes.

Nun betrachten wir die *elektrische Quadrupolstrahlung*. Für den Quadrupolanteil in (11.41,11.42) ist die abgestrahlte Intensität

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega}|_{\text{el.Quad.}} &= \frac{\mu_0}{64\pi^2 c^3} (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n})^2 \\ &= \frac{\mu_0}{64\pi^2 c^3} (\ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{km} n_l n_m - \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{mp} n_k n_l n_m n_p). \end{aligned} \quad (11.49)$$

Für eine um die  $z$ -Achse drehinvariante Ladungsverteilung hat  $\mathbf{Q}$  die Form

$$\mathbf{Q} = \frac{Q_0}{2} \text{diag}(-1, -1, 2), \quad \text{so dass} \quad \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} = \frac{3}{2} \ddot{Q}_0 n_3 \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist. Benutzen wir noch

$$|\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}|^2 = \frac{9}{4} \ddot{Q}_0^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta,$$

dann findet man folgende Winkelverteilung für die Strahlung in der Wellenzone,

$$\frac{dP}{d\Omega}|_{\text{el.Quad.}} = \frac{9\mu_0}{256\pi^2 c^3} \ddot{Q}_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad (11.50)$$

siehe Abb. 11.4. Die Strahlungsleistung ist rotationssymmetrisch zur  $z$ -Achse und *maximal* in den Richtungen  $\theta = \pi/4$  und  $3\pi/4$ . Sie verschwindet für  $\theta = 0, \pi/2$  und  $\pi$ . Um die gesamte abgestrahlte Leistung zu bestimmen, benötigen wir Integrale der Form  $I(i, j, \dots) = \int d\Omega n_i n_j \dots$  mit  $2p$  Faktoren  $n_i n_j \dots$ . Diese werden natürlich auch bei der Berechnung der höheren Multi-polbeiträge zur Strahlung benötigt. Zu ihrer Berechnung benutzen wir folgenden Trick: Die linke Seite der Identität

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r e^{-r^2/2} x_i x_j \dots &= \int_0^\infty dr r^{2+2p} e^{-r^2/2} I(i, j, \dots) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2p+1)!! I(i, j, \dots) \end{aligned} \quad (11.51)$$

kann durch mehrfaches Ableiten der *erzeugenden Funktion*

$$I(\mathbf{j}) = \int d^3 r \exp\left(-\frac{r^2}{2} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{r}\right) = (2\pi)^{3/2} \exp\left(\frac{\mathbf{j}^2}{2}\right) \quad (11.52)$$

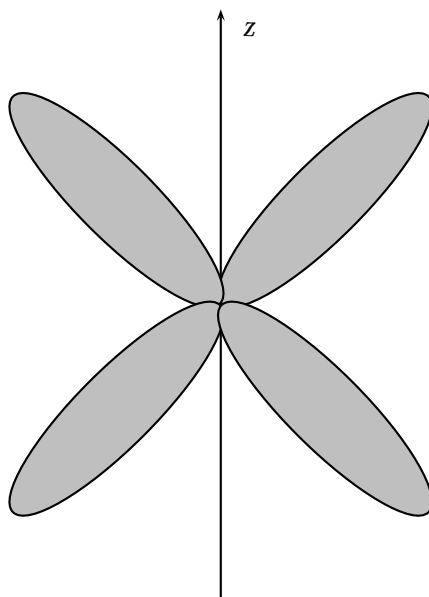


Abbildung 11.4: Winkelverteilung der elektrischen Quadrupolstrahlung.

nach den Komponenten der Quelle  $\mathbf{j}$  berechnet werden. Zum Beispiel finden wir:

$$\int d^3r e^{-r^2/2} x_l x_m = \frac{\partial^2}{\partial j_l \partial j_m} I(\mathbf{j})|_{\mathbf{j}=0} = (2\pi)^{3/2} \delta_{lm},$$

$$\int d^3r e^{-r^2/2} x_k x_l x_m x_p = \frac{\partial^4}{\partial j_k \partial j_l \partial j_m \partial j_p} I(\mathbf{j})|_{\mathbf{j}=0} = (2\pi)^{3/2} (\delta_{kl} \delta_{mp} + \delta_{km} \delta_{lp} + \delta_{kp} \delta_{lm}).$$

Benutzen wir diese Resultate in (11.51), so finden wir für die gesuchten Integrale über die Winkel

$$I(l, m) = \frac{4\pi}{3} \delta_{lm} \quad \text{und} \quad I(k, l, m, p) = \frac{4\pi}{15} (\delta_{kl} \delta_{mp} + \delta_{km} \delta_{lp} + \delta_{kp} \delta_{lm}). \quad (11.53)$$

Nun können wir (11.49) über die Winkel integrieren. Berücksichtigen wir die Symmetrie und Spurfreiheit des Quadrupoltensors, dann ergibt sich

$$P|_{\text{el. Quad.}} = \frac{\mu_0}{48\pi c^3} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl} - \frac{\mu_0}{240c^3} (\ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl} + \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{lk}) = \frac{\mu_0}{80c^3} \text{Sp } \ddot{\mathbf{Q}}^2. \quad (11.54)$$

Die Ausdrücke für die Beiträge höherer Multipole zur Abstrahlung werden immer komplizierter. Eine systematische Entwicklung mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen ist möglich, mathematisch aber nicht ganz einfach.

## 11.5 Liénard-Wiechert-Potentiale

Wir wollen eine wichtige Anwendung der retardierten Potentiale diskutieren. Eine Punktladung  $q$  bewege sich längs einer Bahn  $\mathbf{r}(t)$  mit der (momentanen) Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$ . Diese bewegte Punktladung wird ein zeitlich veränderliches, elektromagnetisches Feld erzeugen, welches wir nun bestimmen werden. Wir berechnen also die Potentiale zu den Dichten

$$\rho(t, \mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad , \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad , \quad (11.55)$$

oder in der 4-er Schreibweise

$$j^\mu(x) = qv^\mu(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad , \quad \text{wobei} \quad (v^\mu) = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (11.56)$$

ist. Wir setzen diese Stromdichte in (11.19) ein und integrieren über  $d^3r'$  mit dem Resultat

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \frac{\delta(c(t-t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} v^\mu(t') \quad . \quad (11.57)$$

Um die  $t'$ -Integration auszuführen, brauchen wir die Formel

$$\delta(f(t')) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\dot{f}(t_j)|} \delta(t' - t_j) \quad , \quad (11.58)$$

wobei  $t_1, \dots, t_n$  die einfachen Nullstellen der Funktion  $f$  sind. In unserem Fall ist

$$f(t') = ct - ct' - R(t') \quad , \quad \text{wobei} \quad R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')| \quad (11.59)$$

der räumliche Abstand zwischen dem Ort  $\mathbf{r}$  des Empfängers zur Zeit  $t$  und dem Ort  $\mathbf{r}(t')$  des Senders zur früheren Zeit  $t'$  ist.

*Beweis der Formel 11.58:* Im Integral

$$\int dt \delta(f(t)) g(t)$$

tragen nur  $t$ -Werte bei, für die das Argument der  $\delta$ -Distribution verschwindet. Sei  $t_1$  die einzige einfache Nullstelle im Intervall  $\Delta$  um  $t_1$  und sei  $\varepsilon = t - t_1$ . Dann ist  $f(t) = \dot{f}(t_1)\varepsilon + \dots$  und der Beitrag dieser Nullstelle ist

$$\int_{\Delta} \delta(\dot{f}(t_1)\varepsilon) g(t_1 + \varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{|\dot{f}(t_1)|} \int \delta(x) g\left(t_1 + \frac{x}{\dot{f}(t_1)}\right) dx = \frac{g(t_1)}{|\dot{f}(t_1)|} \quad .$$

Da dies für jede Nullstelle und für beliebige Testfunktionen  $g$  gilt, folgt sofort (11.58).

Das Argument  $f(t')$  der delta-Distribution enthält den Abstand  $R(t')$  und dessen Ableitung

nach  $t'$  ist

$$\frac{dR(t')}{dt'} = -c\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'), \quad (11.60)$$

wobei wir den vom Sender zum Empfänger zeigenden Einheitsvektor

$$\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')}{R(t')} \quad (11.61)$$

einführten. Mit (11.60) ergibt sich dann für die Ableitung des in (11.58) definierten Arguments der delta-Distribution

$$\frac{df}{dt'} = -(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t')). \quad (11.62)$$

Da die Geschwindigkeit jedes massiven Teilchens stets kleiner der Lichtgeschwindigkeit ist, ist die rechte Seite in (11.62) negativ. Deshalb kann  $f$  höchstens eine Nullstelle  $t' = t_{\text{ret}}$  haben. Diese Nullstelle ist Lösung von

$$ct_{\text{ret}} = ct - R(t_{\text{ret}}) = 0, \quad (11.63)$$

und diese wichtige Gleichung bestimmt die *retardierte Zeit* zu der das Licht vom Emittor ausgesandt wurde. Damit können wir die  $t'$ -Integration in (11.57) ausführen,

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv^\mu(t)}{R(t)[1 - \mathbf{n}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t)]} \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (11.64)$$

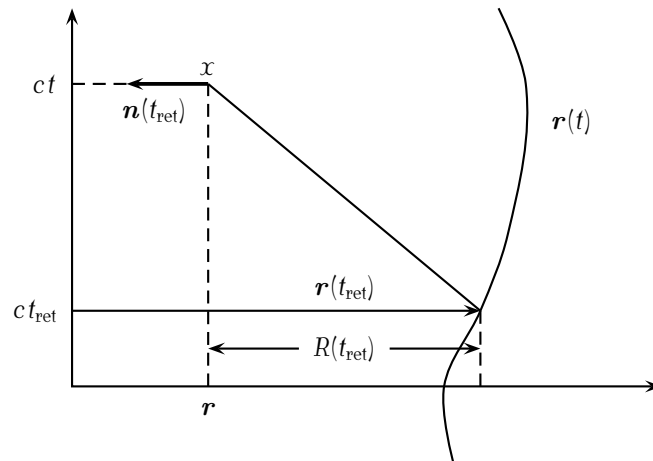


Abbildung 11.5: Zur Ableitung der Liénard-Wiechert-Potentiale.

In Komponenten geschrieben, lauten die Potentiale

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(t)[1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n}(t)]} \Big|_{t_{\text{ret}}} \quad (11.65)$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\boldsymbol{\beta}(t)}{R(t)[1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n}(t)]} \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (11.66)$$



Dies sind die nach Lienard und Wiechert benannten elektromagnetischen Potentiale einer beliebig bewegten Punktladung. Wegen der für allgemeine Teilchenbahnen komplizierten Bestimmungsgleichung für die *retardierte Zeit* (11.63) ist das Potential (11.64) in vielen Situationen nicht leicht berechenbar.

### 11.5.1 Die Feldstärken

Zur Bestimmung der Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  brauchen wir die Ableitungen der Potentiale nach der Zeit und den räumlichen Koordinaten. Dazu benötigen wir die entsprechenden Ableitungen von  $t_{\text{ret}}$ . Die Ableitung der retardierten Zeit nach  $t$  (bei festem  $\mathbf{r}$ ) folgt aus der Bestimmungsgleichung (11.63) und aus (11.60),

$$\frac{dt_{\text{ret}}}{dt} = 1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \Big|_{t_{\text{ret}}} \frac{dt_{\text{ret}}}{dt}.$$

Die Auflösung nach der Ableitung der retardierten Zeit ergibt

$$\frac{dt_{\text{ret}}}{dt} = \frac{1}{\kappa} \Big|_{t_{\text{ret}}} \quad \text{mit} \quad \kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}. \quad (11.67)$$

Damit können wir Zeitableitungen der in den Potentialen auftretenden Größen bei konstantem  $\mathbf{r}$  berechnen. Wir benötigen die Formeln

$$\frac{dR(t_{\text{ret}})}{dt} \stackrel{(11.60)}{=} -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{\kappa} \Big|_{t_{\text{ret}}} \quad \text{und} \quad \frac{d\kappa(t_{\text{ret}})}{dt} = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{c}{R} (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})^2 - \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \Big|_{t_{\text{ret}}}.$$

Nun findet man relativ leicht für die Zeitableitung des Potentials den Ausdruck

$$\dot{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa^3} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{Rc} \frac{1}{\kappa^3} (\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})). \quad (11.68)$$

Die räumlichen Ableitungen der retardierten Zeit (bei festem  $t$ ) ergeben sich durch Differentiation der Bestimmungsgleichung (11.63) worin wir

$$\nabla R(t_{\text{ret}}) = \mathbf{n}(t_{\text{ret}}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{t_{\text{ret}}} \nabla t_{\text{ret}} \quad (11.69)$$

benutzen. Dies führt auf die einfachen Formeln

$$\nabla t_{\text{ret}} = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{n}}{\kappa} \Big|_{t_{\text{ret}}} \stackrel{(11.69)}{\implies} \nabla R(t_{\text{ret}}) = \frac{\mathbf{n}}{\kappa}. \quad (11.70)$$

Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich dann noch

$$\nabla \kappa(t_{\text{ret}}) = \frac{1}{\kappa c} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \frac{1}{\kappa R} (\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \beta^2 \mathbf{n}).$$

Damit lässt sich der Gradient des skalaren Potentials berechnen. Man findet

$$\nabla \Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2 \kappa^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{Rc \kappa^3} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n}. \quad (11.71)$$

Mit unseren Formeln für die zeitliche Variation von  $\mathbf{A}$  und  $\nabla\Phi$  ergibt sich für das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\kappa^3} \left( \frac{1 - \beta^2}{R^2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right) \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (11.72)$$

Um  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  zu bestimmen, brauchen wir schlussendlich noch

$$\nabla \times \boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{\kappa c} \mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}.$$

Deshalb hat das magnetische Feld einer bewegten Punktladung die Form

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q}{\kappa^3} \left( \frac{1 - \beta^2}{R^2} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \times (\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})) \right) \Big|_{t_{\text{ret}}}, \quad (11.73)$$

wobei wir uns noch einmal an unsere Abkürzungen erinnern:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)}{R}, \quad \kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}. \quad (11.74)$$

Damit wären die elektromagnetischen Felder (beinahe) explizit bestimmt. Die ersten Terme in (11.72) und (11.73) sind das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung; sie fallen wie  $1/R^2$  ab. Die zweite Terme in diesen Formeln sind proportional zur Beschleunigung und fallen nur wie  $1/R$  ab. Sie sind verantwortlich für die elektromagnetische Strahlung von beschleunigten Teilchen.

Wir untersuchen zwei Spezialfälle. Dabei können wir uns wegen des einfachen Zusammenhangs

$$c\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (11.75)$$

zwischen dem  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ -Feld auf das elektrische Feld beschränken.

### 11.5.2 Gleichförmig bewegte Teilchen

Ruht ein Teilchen dann ist  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$  zeitunabhängig und  $\mathbf{v} = 0$ . Entsprechend verschwindet das Vektorpotential und

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (11.76)$$

Wie nicht anders erwartet, finden wir das Coulomb-Potential. Für eine Punktladung mit *konstanter* Geschwindigkeit ist  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$  linear in  $t$  und das Quadrat von  $(v^\mu) = (c, \mathbf{v})$  ist

$$v^\mu v_\mu = c^2 (1 - \beta^2) = \frac{c^2}{\gamma^2}.$$

Der im letzten Kapitel eingeführt 4-er Geschwindigkeitsvektor ist

$$u^\mu = \gamma v^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \implies (u, u) = c^2. \quad (11.77)$$

Nun bestimmen wir zuerst die retardierte Zeit. Die Bedingung (11.63) lautet

$$c^2(t - t_{\text{ret}})^2 = r^2 + v^2 t_{\text{ret}}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} t_{\text{ret}}$$

und die Elimination der retardierten Zeit führt auf

$$ct_{\text{ret}} = \frac{\gamma}{c} \left( (u, x) \pm \sqrt{(u, x)^2 - c^2 x^2} \right). \quad (11.78)$$

Da  $t > t_{\text{ret}}$  sein muss, kommt nur das negative Vorzeichen in Frage. Mit

$$\begin{aligned} R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})|_{t_{\text{ret}}} &= |\mathbf{r} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}| - (\mathbf{r} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}) \boldsymbol{\beta} \\ &= c(t - t_{\text{ret}}) - (\mathbf{r} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}) \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\gamma c} (u, x) - \frac{c}{\gamma^2} t_{\text{ret}} \end{aligned}$$

finden wir eine einfache Form für den Nenner in den Liénard-Wiechert Potentialen (11.64)

$$R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})|_{t_{\text{ret}}} = \frac{1}{\gamma c} \sqrt{(u, x)^2 - c^2 x^2}. \quad (11.79)$$

Das Potential (11.64) vereinfacht sich entsprechend zu

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q u^\mu}{\sqrt{(\tilde{u}, x)^2 - x^2}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{c}. \quad (11.80)$$

Speziell für ein längs der  $z$ -Achse bewegtes Teilchen sind die nicht-verschwindenden Komponenten des 4-er Potentials

$$A^0(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2}}, \quad A^3(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\beta\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2}}, \quad (11.81)$$

Nun können wir aus (11.80) leicht die elektromagnetischen Felder bestimmen. Mit

$$R(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})|_{t_{\text{ret}}} = \mathbf{r} - \mathbf{v} t_{\text{ret}} - (t - t_{\text{ret}}) \mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{v} t$$

findet man das folgende elektrische und magnetische Feld,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v} t}{[(\tilde{u}, x)^2 - x^2]^{3/2}} \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 q\gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{[(\tilde{u}, x)^2 - x^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (11.82)$$

## 11.6 Der Hertz'sche Dipol

Als weiteres, interessantes System werden wir nun ein um den Ursprung schwingendes Teilchen untersuchen. Ort und Geschwindigkeit der Ladung ändern sich harmonisch,

$$\mathbf{r}(t) = d \sin \omega t \mathbf{e}_3 = z(t) \mathbf{e}_3 \quad , \quad \mathbf{v}(t) = \dot{z}(t) \mathbf{e}_3 = \omega d \cos \omega t \mathbf{e}_3 . \quad (11.83)$$

Wir wollen  $d \ll r$  annehmen, so dass wir folgende Näherungen machen dürfen:

$$\begin{aligned} t_{\text{ret}} &\approx t - \frac{r}{c} \quad , \quad z_r \equiv z(t_{\text{ret}}) \approx d \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \\ R(t_{\text{ret}}) &\approx r \left( 1 - \frac{z z_r}{r^2} \right) \quad , \quad R \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\text{ret}} \approx (z - z_r) \frac{\dot{z}_r}{c} . \end{aligned}$$

Daraus folgt die folgende Entwicklung für die Nenner der Potentiale

$$\left( \frac{1}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right)_{\text{ret}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{z z_r}{r^2} + \frac{z \dot{z}_r}{c r} \right) .$$

Eingesetzt in (11.65,11.66) finden wir für die nicht verschwindenden Komponenten des elektromagnetischen Potentials

$$\begin{aligned} \Phi &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{q d}{r^2} \cos \theta \sin(\omega t - k r) + \frac{q d \omega}{r c} \cos \theta \cos(\omega t - k r) \right) \\ A_3 &\approx \frac{\dot{z}_r}{c^2} \Phi \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q d}{r} \omega \cos(\omega t - k r), \quad k = \omega/c . \end{aligned}$$

Fügt man noch eine im Ursprung ruhende Ladung  $-q$  hinzu, so findet man nach Einführung des elektrischen Dipolmomentes  $p_0 = qd$  (das Dipolmoment bei der maximalen Auslenkung des Oszillators) die einfachen Formeln

$$\begin{aligned} \Phi &\approx \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} \sin(\omega t - k r) + \frac{\omega}{r c} \cos(\omega t - k r) \right) \\ A_3 &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_0 \omega}{r} \cos(\omega t - k r) . \end{aligned} \quad (11.84)$$

Dies sind die retardierten Potentiale des *Hertz'schen Dipols* in Kugelkoordinaten. Die ruhende Ladung und die darum schwingende positive Ladung stellen einen schwingenden Dipol dar. Das ruhende Teilchen trägt nicht zur Strahlung bei.

## 11.7 Abstrahlung von bewegten Ladungen

Nachdem wir die exakten Lienard-Wiechert-Felder von bewegten Punktladungen kennen und die Felder von beliebigen Ladungs- und Stromverteilungen in der Wellenzone (für  $\lambda \gg d$ ) bestimmten, wollen wir nun die von diesen Sendern abgestrahlte Leistung berechnen. Diese ist durch den Poyntingvektor bestimmt.

Die ins Unendliche abgestrahlte Leistung  $P$  eines Senders ist durch den Poyntingvektor gegeben,

$$P = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \oint d\Omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (11.85)$$

Nur Terme, die für große Abstände vom Sender wie  $1/R^2$  abfallen, tragen zu dieser Strahlung bei. Deshalb brauchen wir bei der Berechnung der Strahlung einer beschleunigten Punktladung nur diejenigen Terme in (11.72,11.73) berücksichtigen, die  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  enthalten, da nur diese zur Strahlung im Unendlichen beitragen. Wegen  $c\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$  ist

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c} E^2 \mathbf{n} - \frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E}, \quad (11.86)$$

und für große Abstände vom Strahler steht das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\kappa^3} \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \times \left( (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right)_{t_{\text{ret}}} \quad (11.87)$$

senkrecht auf  $\mathbf{n}$  und deshalb ist

$$R^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \frac{R^2}{\mu_0 c} \mathbf{E}^2 = \frac{\mu_0 c}{16\pi^2 \kappa^6} \left| \mathbf{n} \times \left( (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2. \quad (11.88)$$

### 11.7.1 Nichtrelativistische Teilchen

Wir betrachten zunächst Teilchen mit kleinen Geschwindigkeiten,  $\beta \ll 1$ . Dann ist die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel ( $\kappa \sim 1$ )

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c}{16\pi^2} q^2 \left| \mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2.$$

Ist  $\theta$  der Winkel zwischen  $\mathbf{n}$  und dem Beschleunigungsvektor  $\dot{\boldsymbol{v}}$ , so ist

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q^2}{c} \left( \dot{v}^2 - (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})^2 \right) = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q^2}{c} \dot{v}^2 \sin^2 \theta. \quad (11.89)$$

Die *gesamte Strahlungsleistung* ist

$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \dot{v}^2. \quad (11.90)$$

Dies ist die bekannte *Larmorsche Formel* (11.47) für die Strahlungsleistung von nichtrelativistisch beschleunigten Ladungen. Diese Strahlung tritt zum Beispiel auf, wenn Elektronen in Metallen gestreut und abgebremst werden und entsprechend heißt sie *Bremsstrahlung*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Aus Kovarianzüberlegungen kann man (11.90) auf beliebige Teilchen, also nicht notwendigerweise langsame, verallgemeinern. Siehe die Diskussion in Kapitel 14 von Jackson.

### 11.7.2 Relativistische Teilchen

Wir untersuchen nun den allgemeinen Fall für beliebige Geschwindigkeiten  $v < c$ . Der allgemeine Ausdruck (11.88) gibt den Energiefluss pro Flächen- und Zeiteinheit beim Beobachtungspunkt zur Zeit  $t$ . Diese Strahlung wurde zur Zeit  $t_{\text{ret}} = t - R(t_{\text{ret}})/c$  ausgesandt. Interessanter ist die Energie, die das Teilchen auf seiner Bahn pro Zeiteinheit  $dt_{\text{ret}}$  abstrahlt. Wir wollen also die Strahlung berechnen, welche in der Zeit  $T_1 \leq t_{\text{ret}} \leq T_2$  emittiert wurde. Die zugehörige Energie, welche der Beobachter empfängt, ist

$$\int_{T_1+R(T_1)/c}^{T_2+R(T_2)/c} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dt = \int_{T_1}^{T_2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} dt_{\text{ret}}.$$

Die abgestrahlte Leistung je Raumwinkel ist demnach

$$\frac{dP}{d\Omega}(t_{\text{ret}}) = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt_{\text{ret}}}. \quad (11.91)$$

In (11.67) hatten wir bereits die hier auftretende Ableitung

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = \kappa(t_{\text{ret}})$$

definiert, so dass

$$\frac{dP}{d\Omega}(t_{\text{ret}}) = R^2 \kappa (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \quad (11.92)$$

folgt. Setzen wir hier den obigen Ausdruck für  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$  ein, dann finden wir für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c}{16\pi^2} \frac{q^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \left| \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right|^2. \quad (11.93)$$

Für kleine Geschwindigkeiten geht diese Formel in (11.89) über. Die etwas aufwändige Integration über alle Richtungen  $\mathbf{n}$  liefert die folgende abgestrahlte Leistung des geladenen Teilchens,

$$P = \frac{\mu_0 c}{6\pi} q^2 \gamma^6 \left( \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right). \quad (11.94)$$

#### Kolineare Beschleunigung

Für eine lineare Bewegung sind  $\boldsymbol{\beta}$  und  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  kollinear und

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c}{6\pi} \frac{q^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \left| (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}} \right|^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (11.95)$$

Hier tritt der Winkel  $\theta$  zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\dot{\mathbf{v}}$  auf. Der Winkel  $\theta_{\max}$  bei dem die Strahlung maximal ist, erfüllt die Bestimmungsgleichung

$$\cos^2 \theta_{\max} + \frac{2}{3\beta} \cos \theta_{\max} - \frac{5}{3} = 0 \implies \cos \theta_{\max} = \frac{1}{3\beta} \left( \sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right). \quad (11.96)$$

Für langsame Teilchen mit  $v \ll c$  ist

$$\theta_{\max} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{5\beta}{2}, \quad (11.97)$$

und für schnelle Teilchen mit  $\beta \sim 1 - 1/2\gamma^2 \rightarrow 1$  ist

$$\cos \theta \approx \left( 1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \left( 1 - \frac{5}{8\gamma^2} \right) \approx 1 - \frac{1}{8\gamma^2} \implies \theta_{\max} \approx \frac{1}{2\gamma}, \quad \beta \approx 1. \quad (11.98)$$

Für ultrarelativistische Teilchen mit  $\gamma \gg 1$  ist die Strahlung in einem engen Kegel in die Vorwärtsrichtung gebündelt. Die gesamte Abstrahlung erhält man leicht aus (11.94),

$$P = \frac{\mu_0 \gamma^6}{6\pi c} (q\dot{v})^2 \quad (\text{lineare Beschleunigung.}) \quad (11.99)$$

### Kreisbeschleunigung

Ohne Beweis zitieren wir das entsprechende Resultat für eine *Kreisbewegung* mit dem Radius  $R$  und Kreisfrequenz  $\omega$ :

$$P = \frac{\mu_0 c \gamma^4}{6\pi} (q\omega)^2 \beta^2 \quad (\text{Kreisbeschleunigung.}) \quad (11.100)$$

Diese Formel wurden erstmalig von LIENARD im Jahre 1898 hergeleitet. Der relativistische Faktor  $\gamma^4$  führt zu großen Strahlungsverlusten in Synchrotrons für hochenergetische Elektronen.

# Literaturverzeichnis

- [1] L.D. Landau and E.M Lifschitz *Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1975)
- [2] H. Feng, Y. Wei, L. Peixiang, X. Han, S. Baifei, L. Ruxin, X. Zhizhan, *The Electron Trajectory in a Relativistic Femtosecond Laser Pulse*, Plasma Science & Technology, **7** (1005) 2968



# Index

- Äquipotentialfläche, 8
- Äquivalenzprinzip der SRT, 145
- Überlagerung von Wellen, 126
- 4-er Geschwindigkeit, 161
- 4-er Impuls, 163
- elektrische Suszeptibilität, 68
- Absorptionsindex, 131
- Abstrahlung
  - von bewegten Ladungen, 199
- Ampere, 4
- Ampere-Gesetz, 87
- Bessel-Welle, 123
  - fundamentale, 123
- Besselsche Differentialgleichung, 133
- Bilanzgleichungen für Energie und Impuls, 157
- Biot-Savart-Gesetz, 80
- Brechungsindex, 76
- Bremsstrahlung, 200
- Coulomb, 4
- Coulomb-Eichung, 86, 112
- Coulombkraft, 2
- Coulombsche Gesetz, 1
- d'Alembert Operator, 112
- Deformationspolarisation, 69
- Diamagnete, 98
- dielektrische Verschiebung, 67
- Dielektrika, 69
- Dipolfeld, 38
- Dipolmoment
  - einer Stromschleife, 93
  - eines Punktteilchens, 93
- Dipolstrahlung
  - elektrische, 189, 191
  - magnetische, 190, 191
- Dipsersion
  - in Isolatoren, 137
- Dirichlet-Problem, 31
- Divergenz, 43
- Drehmoment
  - einer Ladungsverteilung, 41
- Drude-Modell, 140
- ebene Wellen, 116
- Eichtransformation, 111
- Eigenzeit, 162
- Eindringtiefe, 132, 135
- Einsteinsche Summenkonvention, 145
- elektrische Erregung, 67
- elektrische Fluss, 109
- elektrische Ladung, 109
- elektrische Multipole, 37
- elektrische Spannung, 109
- elektrische Strom, 109
- elektrischer Dipol, 38
- elektrischer Kraftfluss, 9
- elektrisches Feld, 4
- elektromagnetisches Potential, 110
- Elektronenradius
  - klassischer, 18
- Elektrostatik, 1
- elliptische Polarisation, 121
- elliptische Weltlinien, 169
- Energie
  - des elektrischen Feldes, 15
- Energie-Impuls-Tensor

- des Feldes, 157
- Energie-Impuls-Vektor
  - des Feldes, 157
- Entelektrisierung, 72
- Entmagnetisierungsfaktor, 101
- Ereignis, 144
- Erregungslinien, 73
  
- Fernzone, 187
- Ferroelektrikum, 69
- Ferromagnete, 99
- Flächenelement, 43
- Flächenladungsdichte, 20
- Flußgesetz
  - von Oersted, 110
- Flussgesetz
  - von Gaus, 110
- Formel von Clausius-Mosotti, 75
- Fourier-Integrale, 127
- Fourier-Reihen, 127
- Funktionensysteme, 59
  
- geladener Ring, 57
- Gleichstromwiderstand, 134
- Gradient, 43
- Green'sche Funktion
  - avancierte, 185
  - retardierte, 184
- Green-Funktion
  - der Wellengleichung, 181
- Greenfunktion
  - für Laplace-Operator, 13
- Greensche Funktion, 29
- Greensche Identität, 31
- grenzfektrische Verschiebung, 63
- Grenzfläche
  - zwischen Dielektrika, 70
  
- Helmholtz-Funktion, 55
- Helmholtz-Gleichung, 131
- Hertz'scher Dipol, 199
- Hilbertraum, 60
  
- hyperbolische Weltlinien, 168
  
- idealer Leiter, 19
- Induktionsgesetz, 102, 110
- Induktivitätskoeffizienten, 90
- Influenz
  - elektrische, 24
- inhomogene Wellengleichung, 181
- inneres Produkt, 60
- Isolator, 63
  
- Joule, 4
- Joulesche Wärme, 157
  
- kanonische Impuls, 171
- Kapazität, 33, 34
- Kapazitätskoeffizienten, 33
- kapmultipole, 37
- Kirchhoffsche Knotenregel, 80
- Kontinuitätsgleichung, 80
  - in 4-er Schreibweise, 149
- kovariante Gleichung, 149
- Kraft
  - auf magnetischen Dipol, 94
- Kramers-Kronig Relation, 140
- Kramers-Kronig-Relationen, 143
- Kreisfrequenz, 119
- Kugelfunktionen, 44, 50
- Kugelkondensator, 34
- Kugelkoordinaten, 41
- Kugelwelle, 122
  
- Ladung, 38
- Ladungserhaltung, 3
- Laplace-Operator, 41
- Larmorformel, 200
- Legendre'sche Differentialgleichung, 48
- Legendre-Polynome, 44, 46, 47
  - zugeordnete, 55
- Leitfähigkeit, 130
  - statische, 134
- Leitungselektronen, 19

- Lenz'sche Regel, 105
- Lienard-Wiechert-Potentiale, 194
- lineare Medien, 68
- lineare Polarisation, 120
- Lorentz-Kraft, 108
- Lorenz-Eichung, 112, 116
- loxodromische Weltlinie, 170
  
- magnetische Dipolmoment, 92
- magnetische Feldkonstante, 83
- magnetische Feldstärke, 98
- magnetische Fluss, 109
- magnetische Induktion, 80
- magnetische Spannung, 109
- magnetische Suszeptibilität, 98
- magnetischer Fluss, 87
- magnetischer Schwund, 104
- magnetisches Feld, 80
- Magnetisierung, 96, 97
- makroskopische Ladungsdichte, 66
- makroskopische Polarisation, 66
- Massysteme, 1
- Maxwell-Beziehung, 116
- Maxwell-Gleichungen
  - im Medium, 108
  - im Vakuum, 113
- Maxwellsche Beziehung, 131
- Maxwellscher Spannungstensor, 158
- Metrik, 145
- mikroskopische Ladungsdichte, 63
- mikroskopisches Feld, 63
- Minkowskiraum, 144
- MKSA-System, 4
- monochromatische Wellen, 119
- Multipol
  - elektrisches, 37
  - im äusseren Feld, 40
- Multipolentwicklung, 58
  - in Wellenzone, 189
- Multipolmoment
  - sphärische, 59
  
- Neumann-Problem, 32
- Norm, 60
  
- Oersted'sche Gesetz, 106
- Ohmscher Leiter, 130
- Operator
  - adjungierter, 61
- Orientierungspolarisation, 69
- Oszillatorstärke, 139
  
- parabolische Weltlinien, 169
- Paraelektrikum, 69
- Paramagnete, 99
- Parseval-Gleichung, 129
- Permeabilität
  - des Vakuums, 83
- Phasengeschwindigkeit, 118
- Plasmafrequenz, 133, 135
- Plattenkondensator, 35
- Poincare-Gruppe, 147
- Poincare-Transformationen, 144
- Poisson-Gleichung, 12
- Polarisation, 63
- Polarisationsladungen, 95
- Polarisationsladungsdichte, 67
- Polarisierbarkeit, 138
- Potentiale, 110
- Potentialproblem, 22
- Poyntingvektor, 158
- Punktteilchen
  - relativistisches, 161
  
- Quadrupolfeld, 39
- Quadrupolmoment, 38
- Quadrupolstrahlung
  - elektrische, 190
  
- Rückwärtslichtkegel, 147, 185
- Randbedingung
  - für Metalle, 20
- Randwertproblem, 19, 22
- relative Dielektrizitätskonstante, 68

- relative Permeabilität, 98
- relativistische Parameter, 166
- relativistische Punktteilchen, 161
- relativistische Teilchen
  - in Feldern, 165
- Relaxationszeit, 134
- retardierte Zeit, 195
- Ringspannung, 8
  
- Satz von Lawson und Woodward, 172
- Schwingungsebene, 120
- Selbstenergie, 17
- Selbstinduktion, 89
- SI-System, 4
- Skalarprodukt, 60
- Skin-Effekt, 132, 133
- Spannung, 5
- Spiegelladung, 23
- Spin, 93
- starke Felder, 165
- Strahlungsfeld
  - in Fernzone, 186
- Strom
  - elektrische, 78
- Stromdichte, 78
- Stromerhaltung, 79
- Superpositionsprinzip, 2, 117
- Synchrotronstrahlung, 202
  
- TE-Wellen, 125
- TM-Wellen, 125
  
- Verknüpfungsgleichungen, 108
- Verschiebungsstromgesetz, 110
- Versuch
  - von Elihu und Thomson, 105
- Vierernotation, 148
- Viererstrom, 148
- vollständiges Funktionensystem, 53
- Vollständigkeitsrelation, 49
- Volumenelement, 42
- Vorwärtslichtkegel, 147, 185
  
- Watt, 4
- Wellenausbreitung, 115
- Wellengleichung
  - für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ , 115
  - für Potentiale, 111
- Wellenlänge, 120
- Wellenoperator, 112, 149
- Wellenzahlvektor, 119
- Wellenzone, 187
- Weltlinie, 161
- Wirbelstrombremse, 105
  
- zirkulare Polarisation, 121