

# Kapitel 7

## Maxwell-Gleichungen

### 7.1 Induktionsgesetz

FARADAY beobachtete 1831, dass in einer Leiterschleife  $C$  ein elektrischer Strom entsteht, wenn ein in der Nähe befindlicher Magnet bewegt oder die Leiterschleife im Magnetfeld bewegt wird.<sup>1</sup> In beiden Fällen gilt das *Induktionsgesetz*

$$V_{ind} = IR = -\frac{d}{dt} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = -\frac{d}{dt} \Phi(F), \quad \partial F = C. \quad (7.1)$$

Hier ist  $V_{ind}$  die induzierte Ringspannung und  $R$  der Drahtwiderstand<sup>2</sup>. Für eine bewegte Leiterschleife  $C$  kann sich der magnetische Fluss durch die von der Schleife berandete Fläche  $F$  aufgrund der Bewegung ändern. Für eine ruhende Schleife kann sich der Fluss ändern, wenn das Magnetfeld zeitabhängig ist. Im Allgemeinen wird die Änderung des Flusses vom zeitabhängigen Magnetfeld und der Bewegung der Leiterschleife herrühren.

Die *erste Fassung des Induktionsgesetzes* für eine im Magnetfeld bewegte Leiterschleife können wir aus der Lorentz-Kraft  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  auf ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld ableiten. Bewegen wir einen Metalldraht mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in einem Magnetfeld, so machen die Leitungselektronen im Draht diese Bewegung mit und erfahren dabei eine *eingepögte Lorentz-Kraft*

$$q\mathbf{E}_{ind} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (7.2)$$

Die längs der Leiterschleife  $C$  induzierte Spannung beträgt

$$V_{ind} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}.$$

---

<sup>1</sup>Etwas gleichzeitig und unabhängig von FARADAY entdeckte auch HENRY die gleiche Erscheinung.

<sup>2</sup>Wir benutzen das Ohmsche Gesetz, nach dem die Stromstärke gleich der Spannung dividiert durch den Widerstand des Leiters ist.

Ist der Drahtwiderstand gleich  $R$ , so können wir für den induzierten Strom die Beziehung

$$IR = V_{\text{ind}} = \oint_C \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (7.3)$$

angeben. Wir wollen nun einsehen, dass der letzte Term proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch Flächen mit veränderlicher Randkurve  $C$  ist. Dazu betrachten wir

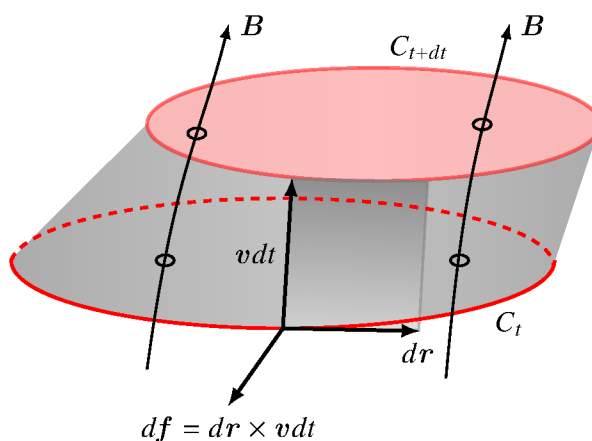


Abbildung 7.1: Änderung des magnetischen Flusses durch eine bewegte Fläche.

die Abb. 7.1, welche die Lagen des Draht rings zur Zeit  $t$  ( $C_t$ ) und zur Zeit  $t+dt$  ( $C_{t+dt}$ ) darstellt. Das Vektorprodukt  $d\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt$  hat den Betrag des von  $d\mathbf{r}$  und  $\mathbf{v} dt$  aufgespannten Flächenelements  $d\mathbf{f}$  und die Richtung der nach außen zeigenden Normalen. Es gilt also

$$dt \oint_{C_t} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \oint (d\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt) \cdot \mathbf{B} = \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = \Phi(\text{Mantelfläche}),$$

wobei das letzte Flächenintegral über die von  $C_t$  und  $C_{t+dt}$  berandete Mantelfläche zu erstrecken ist. Wegen der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion verschwindet der gesamte magnetische Fluss durch die Mantelfläche, Grundfläche und Deckfläche. Also ist

$$dt \oint \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{r} = -\Phi(\text{Deckfläche}) + \Phi(\text{Grundfläche}) = -\Phi(C_{t+dt}) + \Phi(C_t).$$

Dividieren wir durch das Zeitintervall  $dt$ , so ergibt sich das *Induktionsgesetz für bewegte Leiter*

$$\oint_{C_t} \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{d}{dt} \Phi(F_t), \quad \partial F_t = C_t. \quad (7.4)$$

Beim Induktionsgesetz sollte es nur auf die *Relativbewegung* zwischen dem das Magnetfeld erzeugenden Magneten und dem Draht ring ankommen. Für die Ladungsträger im Draht ring ruht der Draht und das Magnetfeld ändert sich mit der Zeit. In einem ruhenden Draht ring, in des-

sen Nähe sich ein Magnet bewegt, sollte also ebenfalls ein Strom entstehen. Dies wird oft als die *zweite Fassung des Induktionsgesetzes* bezeichnet. Da eine ruhende Ladung in einem Magnetfeld keine Kraft erfährt, bleibt als Deutungsmöglichkeit nur die Annahme, dass durch die zeitliche Änderung des Magnetfeldes ein elektrisches Feld mit Wirbeln (da die Ringspannung nicht verschwindet) induziert wird,

$$IR = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Der Vergleich mit dem Faraday'schen Induktionsgesetz zeigt, dass die elektrische Ringspannung proportional dem *magnetischen Schwund*<sup>3</sup> ist:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = -\int d\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (7.5)$$

Aus dieser Formel ist der materialabhängige Widerstand  $R$  verschwunden, und dies legt die

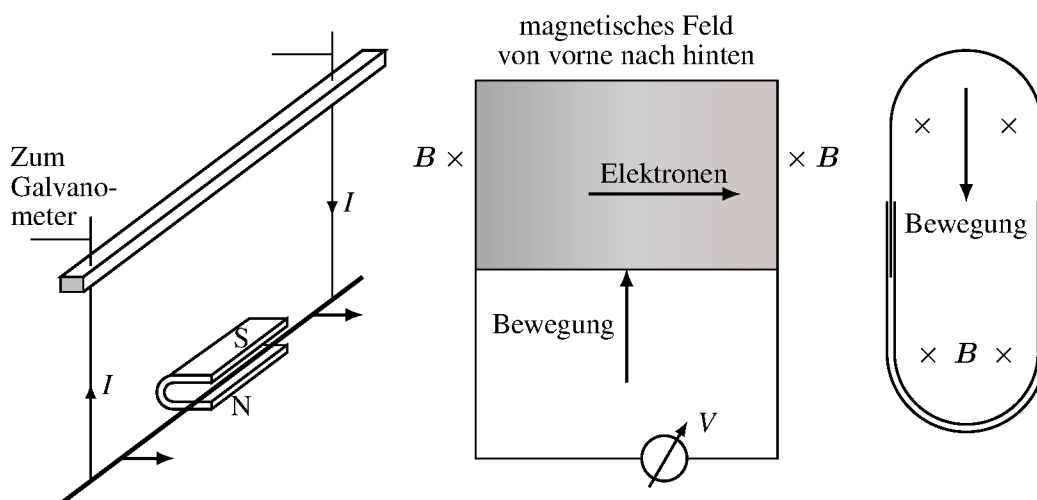


Abbildung 7.2: Induktion durch Bewegung eines Stromleiters im Magnetfeld (links), Induktionsspannung in einem Metall (mittig) und Induktionsstrom bei Änderung der Fläche (rechts).

Verallgemeinerung der zunächst nur für den Draht ring gültigen Beziehung (7.5) nahe. Wir nehmen nun an, dass das Vorhandensein des Drahtes unwesentlich ist und die Ringspannung für jede geschlossene Kurve  $C$  durch (7.5) wiedergegeben wird. Wenn diese Beziehung für jedes Flächenelement gilt, dann können wir mit  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$  auf die differentielle Form des Induktionsgesetzes schließen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (7.6)$$

Zeitlich variierende Magnetfelder induzieren also elektrische Wirbelfelder und entsprechend ist

<sup>3</sup>Die zeitliche Abnahme des magnetischen Flusses,  $-d\Phi/dt$ , heißt magnetischer Schwund.

das elektrische Feld dann kein Gradientenfeld mehr wie in der Elektrostatik.

Bewegen wir zum Beispiel eine mit einem Galvanometer verbundene Sekundärspule in der Nähe einer Primärspule (mit Eisenkern), so wird ein Strom in der Sekundärspule induziert. Sind die Windungen der Spulen parallel, so ist der Ausschlag des Galvanometers am größten. Die induzierte Spannung ist so gerichtet, dass der von ihr hervorgerufene Strom das angelegte Magnetfeld schwächt. Eine schöne Illustration dieses Effektes, der vom Minuszeichen im Induktionsgesetz (7.1) herrührt, ist der Versuch von ELIHU und THOMSON in Abb. 7.3: Fließt ein Strom im Erre-

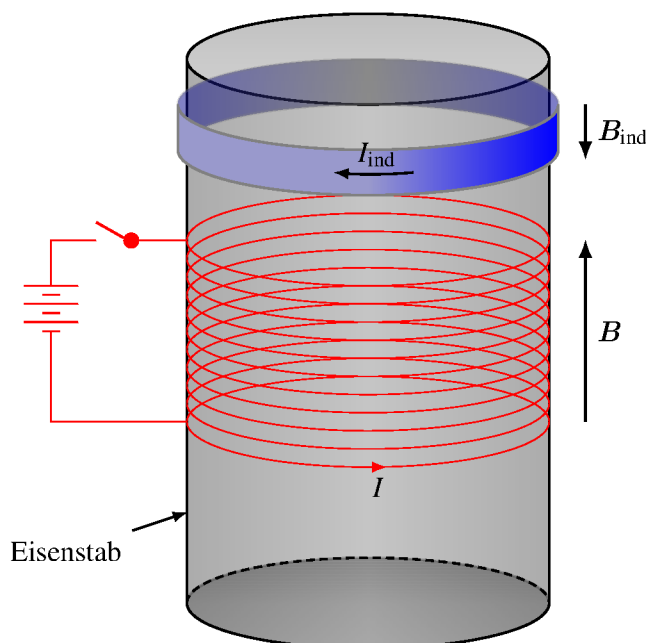


Abbildung 7.3: *Elihu-Thomson-Versuch zur Demonstration der Lenz'schen Regel.*

gerkreis, so erzeugt dieser in der Spule ein Magnetfeld  $\mathbf{B}$  und beim Einschalten eine Änderung  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  und damit einen magnetischen Schwund  $-\partial\Phi/\partial t$ . Die Flussänderung induziert im darauf gestülpten Aluminiumring eine Spannung  $V_{ind}$ , die ihrerseits einen Strom  $I_{ind}$  erzeugt. Dieser induzierte Strom hat ein solches Vorzeichen, dass das Magnetfeld  $\mathbf{B}_{ind}$ , das er erzeugt, das entgegengesetzte Vorzeichen von  $\mathbf{B}$  hat. Die Felder  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}_{ind}$  üben daher eine abstoßende Wirkung aufeinander aus, was durch das davonfliegen des Aluminiumrings beim Einschalten gezeigt wird.

Allgemeiner gilt, dass die induzierte Spannung einen Induktionsstrom erzeugt, der stets so gerichtet ist, dass er den ihn erzeugenden Vorgang zu hemmen versucht. Dies ist die *Lenz'sche Regel*. Sie führt zu einer Erklärung des Diamagnetismus. Eine bekannte Anwendung der Induktion ist die *Wirbelstrombremse*.

## 7.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Der wichtigste Schritt auf dem Weg zur Vervollständigung der Feldgleichungen der Elektro- und Magnetostatik nach dem Induktionsgesetz erfolgte 1864 durch MAXWELL. Er bemerkte, dass die inhomogene Grundgleichung der Magnetostatik, das *Oersted'sche Gesetz*,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f \quad (\text{Oersted}) \quad (7.7)$$

zur Folge hat, dass die elektrische Stromdichte quellenfrei ist,

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0.$$

Im Falle offener Stromkreise, wie z.B. beim Laden eines Kondensators, gilt aber

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}, \quad (7.8)$$

was nicht Null ist, da ein Teil der Ladung weg fließt. Die Gleichungen (7.7,7.8) sind inkonsistent, falls die Ströme in beiden Formeln die gleiche Bedeutung haben. Maxwells Ausweg aus dieser Schwierigkeit beruhte darauf, dass

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

gilt. Wenn man postuliert, dass der Term  $\sim \partial \mathbf{D} / \partial t$  einen Strom darstellt, der die gleichen Eigenschaften wie irgendein anderer Strom besitzt, dann erhält man

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_f. \quad (7.9)$$

Insbesondere erzeugt eine zeitabhängige dielektrische Verschiebung ein Magnetfeld. Die Einführung des *Verschiebungsstromes*  $\sim \partial \mathbf{D} / \partial t$  in die elektromagnetischen Grundgleichungen bildet den Kernpunkt der Maxwell'schen Theorie. Nach dem Induktionsgesetz bedingt selbst im Vakuum ein zeitlich variierendes Magnetfeld ein elektrisches Feld. Nach Maxwells Modifikation des Oersted'schen Gesetzes erzeugt aber auch ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld ein Magnetfeld. Die modifizierte Gleichung (7.9) findet ihre glänzende Bestätigung bei der *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen*. Diese wird erst durch das Maxwell'sche Zusatzglied in (7.9) möglich.

## 7.3 Die Maxwell-Gleichungen

Nehmen wir zu dem erweiterten Oersted'schen Gesetz noch das Induktionsgesetz sowie die Resultate über die Quellen von  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  hinzu, so erhalten wir die vier (binahe) symmetrisch gebauten Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j}_f & , & & (b) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f \\
 (c) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & , & & (d) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

als die in der klassischen Elektrodynamik gültigen *Maxwell-Gleichungen* für ruhende Medien.

Nach FARADAYS und MAXWELLS Arbeiten fiel es den Physikern nicht leicht, die entwickelten Konzepte auf konkrete Probleme anzuwenden, da eine im Sinne der Mechanik unmittelbar anschauliche Darstellung fehlte. Im Bestreben nach einer mechanischen Deutung der elektromagnetischen Erscheinungen wurden mit viel Scharfsinn eine Vielzahl von Modellen entwickelt. Noch zum Ende des 19. Jahrhundert hat es der bekannte Physiker LORD RAYLEIGH als notwendig erachtet, die Maxwell'schen Gleichungen mit Hilfe eines komplizierten Äthermodells zu stützen. Die Maxwell'sche Theorie hat also nicht nur eine enorme praktische Bedeutung, da durch sie eine u.a. die gesamte Nachrichtentechnik revolutionierende Entwicklung eingeleitet worden ist, sie hat auch die Naturphilosophie nachhaltig beeinflusst. Durch diese Theorie sind die Physiker gezwungen worden, den in der abstrakten Beschreibung vorkommenden Größen eine reale Existenz auch dann zuzubilligen, wenn sie nicht so ohne Weiteres anschaulich gemacht werden können. Diese Gleichungen stellen eine vereinheitlichte Theorie dar, weil sie die elektrischen, magnetischen und optischen Erscheinungen auf einer gemeinsamen Grundlage erklären. Es war und ist das bisher unerreichte Ziel der (theoretischen) Physiker, alle bekannten Wechselwirkungen<sup>4</sup> im Rahmen *einer* vereinheitlichten Theorie zu beschreiben.<sup>5</sup>

Die Maxwell-Gleichungen führen nach Elimination der dielektrischen Verschiebung aus (a) und (b) auf die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0. \tag{7.11}$$

Des Weiteren sind die vier Feldgleichungen in (7.10) nicht ganz unabhängig. Aus (a) folgt durch Divergenzbildung bei Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho_f) = 0, \tag{7.12}$$

und aus (c) durch Divergenzbildung, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0. \tag{7.13}$$

Die Gleichungen (b) und (d) enthalten keine Zeitableitungen der Felder und sind Bedingungen zu fester Zeit. Haben wir diese (Zwangs-)Bedingungen zu *einer Zeit* erfüllt, dann bleiben sie gemäß (7.12,7.13) zu jeder anderen Zeit erfüllt.

<sup>4</sup>Elektromagnetisch, schwach, stark und gravitativ.

<sup>5</sup>Die Superstringtheorien sind zur Zeit die Erfolg versprechendsten Kandidaten für eine vereinheitlichte Theorie.

Zwischen den vier Feldgrößen bestehen die Verknüpfungsgleichungen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (7.14)$$

Dabei sind die Polarisation  $\mathbf{P}$  und Magnetisierung  $\mathbf{M}$  abhängige Größen, die durch mikroskopische Betrachtungen ermittelt werden können. Möchte man die Einführung der nicht direkt bestimmbaren und abgeleiteten Hilfsfelder  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  vermeiden, dann kommen wir zu den vier *Maxwell-Gleichungen im Medium*

$$\begin{aligned} a) \quad \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \quad , \quad b) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \\ c) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad , \quad d) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Dass hier neben der im letzten Kapitel diskutierten Magnetisierungsstromdichte auch die Polarisationsstromdichte  $\mathbf{j}_P = \partial_t \mathbf{P}$  erscheint, ist eine unmittelbare Folge der Einführung des Verschiebungsstromes.

Zu den Maxwell-Gleichungen tritt noch die *Lorentz-Kraft*

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.16)$$

Die Gleichungen (7.10) und (7.16) sind die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Aus ihnen werden alle relevanten Eigenschaften abgeleitet. Für zeitunabhängige Felder entkoppeln die Maxwell-Gleichungen in die Grundgleichungen der Elektrostatik und die Grundgleichungen der Magnetostatik.

Die Einheiten der in (7.15) auftretenden Felder und Dichten im SI-System sind:

$$[\mathbf{E}] = \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad [\mathbf{B}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}, \quad [\mathbf{P}] = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}, \quad [\mathbf{M}] = \frac{\text{A}}{\text{m}}, \quad [\rho] = \frac{\text{As}}{\text{m}^3}, \quad [\mathbf{j}] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}. \quad (7.17)$$

Wir notieren nochmals die Werte der auftretenden Konstanten

$$\varepsilon_0 = 8.854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}. \quad (7.18)$$

Wir werden später sehen, dass das Produkt der Vakuumkonstanten  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum wie folgt in Verbindung steht:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (7.19)$$

### 7.3.1 Integralform der Maxwell-Gleichungen

Neben der Formulierung der Maxwell-Gleichungen als Differentialgleichungen kann man auch eine Integralform dieser Gleichungen angeben, die in vielen Fällen intuitiver ist. Dazu führen wir elektrische und/oder magnetische Spannungen, Flüsse, Ladungen und Ströme ein. Die meisten

dieser Begriffe sind uns schon begegnet.

- Die *elektrische Spannung* zwischen den Endpunkten einer Kurve ist

$$V(C) = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.20)$$

Damit ist  $\mathbf{E}$  nicht mehr wirbelfrei und die Spannung ist wegababhängig. Sie hängt nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, es können auch Ringspannungen längs geschlossener Wege auftreten.

- Der *elektrische Fluss* durch ein orientiertes Flächenstück  $F$  ist

$$\Psi(F) = \int_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}. \quad (7.21)$$

Da  $\mathbf{D}$  nicht quellenfrei zu sein braucht, hängt  $\Psi(F)$  nicht nur von der Randkurve  $\partial F$  der Fläche  $F$  ab. Der Fluss durch eine geschlossene Fläche braucht nicht Null zu sein.

- Der *magnetische Fluss* durch das orientierte Flächenstück  $F$  ist

$$\Phi(F) = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}. \quad (7.22)$$

Die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  ist quellenfrei und  $\Phi(F)$  hängt nur von der Randkurve  $\partial F$  der Fläche  $F$  ab. Der Fluss durch eine geschlossene Fläche verschwindet. Es gibt keine magnetischen Monopolladungen.

- Die *magnetische Spannung* zwischen den Endpunkten einer Kurve  $C$  ist

$$V_m(C) = \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.23)$$

Da  $\mathbf{H}$  Wirbel haben kann, ist sie im Allgemeinen wegababhängig. Es können magnetische Ringspannungen längs geschlossener Wege auftreten.

- Die *elektrische Ladung* im Gebiet  $V$  ist

$$q(V) = \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}). \quad (7.24)$$

- Der *elektrische Strom* durch ein orientiertes Flächenstück  $F$  ist

$$I(F) = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (7.25)$$

Die Stromdichte ist im Allgemeinen nicht quellenfrei und der Strom hängt von der Fläche und nicht nur deren Rand ab.



Diese Größen treten in den integralen Maxwell-Gleichungen auf. Diese gewinnt man durch Integration der Maxwell-Gleichungen (7.10) über geschlossene Kurven beziehungsweise geschlossene Flächen.

Das *Faradaysche Induktionsgesetz*:

$$c') \quad V(\partial F) \equiv \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \equiv -\frac{d}{dt} \Phi(F). \quad (7.26)$$

Die elektrische Ringspannung um den Rand eines Flächenstücks ist proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche. Sie wurde in (7.4) diskutiert.

Das *Gauß'sche Flussgesetz*:

$$b') \quad \Psi(\partial V) \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = \int_V d^3r \rho_f(\mathbf{r}) \equiv q_f(V). \quad (7.27)$$

Der elektrische Fluss durch  $\partial V$  ist gleich der Gesamtladung im Raumgebiet  $V$ . Das Gesetz ist äquivalent zu (7.8).

Das *Oersted'sche Flußgesetz*

$$d') \quad \Phi(\partial V) \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (7.28)$$

Es existieren keine magnetischen Ladungen in der Natur.

Das *Maxwell'sche Verschiebungsstromgesetz*:

$$\begin{aligned} a') \quad V_m(\partial F) &\equiv \oint_{\partial F} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} \\ &\equiv I(F) + \frac{d}{dt} \Psi(F). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Die magnetische Ringspannung um den Rand eines Flächenstückes ist gleich der Summe aus elektrischem Strom und Verschiebungsstrom durch diese Fläche. Es folgt durch Integration von (7.9) über ein Flächenstück.

Die *Kontinuitätsgleichung*

$$-\frac{d}{dt} q_f(V) \equiv -\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho_f(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} \mathbf{j}_f \cdot d\mathbf{f} \equiv I(\partial V). \quad (7.30)$$

Die Änderung der elektrischen Ladung im Gebiet  $V$  ist proportional zum Strom durch seine Oberfläche. Die Kontinuitätsgleichung kodiert die Erhaltung der elektrischen Ladung.

### 7.3.2 Elektromagnetische Potentiale

Wie in der Statik gelingt es, die homogenen Maxwell-Gleichungen durch Einführung eines skalaren Potentials und eines Vektorpotentials zu lösen. Es gibt allerdings verschiedene Potentiale zu denselben elektromagnetischen Feldern. Diese Vieldeutigkeit, auch Eichfreiheit genannt, spielt

in allen feldtheoretischen Beschreibungen der vier Wechselwirkungen eine ganz entscheidende Rolle.

Wie in der Magnetostatik ist die magnetische Induktion auch für zeitabhängige Felder quellenfrei und damit das Wirbelfeld eines Vektorpotentials  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (7.31)$$

Aus der anderen homogenen Maxwell-Gleichung (7.10c) folgt dann

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 ,$$

so dass ein skalares Potential  $\Phi$  existiert mit

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} . \quad (7.32)$$

Damit sind die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen in (7.10) bzw. (7.15) automatisch erfüllt. Aus den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen in (7.15) ergeben sich dann Wellengleichungen für die Potentiale:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \mu_0 \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \\ -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \Delta \Phi &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) . \end{aligned} \quad (7.33)$$

Dabei haben wir folgende Identität benutzt:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} . \quad (7.34)$$

Im SI-Einheitensystem haben die Potentiale die Dimension

$$[\Phi] = \text{V} \quad , \quad [\mathbf{A}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}} . \quad (7.35)$$

### 7.3.3 Eichtransformationen

Wie bereits erwähnt, sind die Potentiale durch die physikalischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  nicht eindeutig festgelegt. Die Transformation

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda \quad (7.36)$$

ändert die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  nicht. Damit auch das elektrische Feld unverändert bleibt, muss gleichzeitig das skalare Potential  $\Phi$  mit-transformiert werden

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} . \quad (7.37)$$

Die Transformation (7.36) und (7.37) der Potentiale heißt *Eichtransformation*<sup>6</sup>. Die physikalischen Felder ändern nicht unter Eichtransformationen – sie sind eichinvariant. Deshalb sind die eichäquivalenten Potentiale  $(\Phi, \mathbf{A})$  und  $(\Phi', \mathbf{A}')$  physikalisch nicht unterscheidbar, sie beschreiben identische physikalische Verhältnisse. Die Elektrodynamik in Form der Potentiale besitzt also eine Redundanz – man nennt sie *Eichsymmetrie*. Wir können die Eichsymmetrie (7.36,7.37) benutzen, um eine Eichbedingung an die Potentiale zu stellen, die durch eine geeignete Wahl von  $\lambda$  erfüllbar sein muss. Zwei nützliche Eichungen sind die *Coulomb-* und *Lorenz-Eichung*, die im Folgenden etwas näher betrachtet werden.

**Coulombbeichung:** Unter einer Eichtransformation geht die Divergenz von  $\mathbf{A}$  über in

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta\lambda. \quad (7.38)$$

Für ein beliebiges  $\mathbf{A}$  können wir immer eine Eichfunktion  $\lambda$  finden, so dass die rechte Seite verschwindet. Das bedeutet, dass wir das Potential so wählen können, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.39)$$

gilt. Dies ist die *Coulomb-Eichung*. Nach Wahl dieser Eichung vereinfachen sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.33) zu

$$-\Delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad , \quad \square\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Phi = \mu_0 \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right), \quad (7.40)$$

wobei wir den *Wellenoperator*, auch *d'Alembert Operator* genannt, einführen,

$$\square = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (7.41)$$

Die Coulomb-Eichung zeichnet bestimmte Inertialsysteme aus, sie ist nicht kovariant.

**Lorenz-Eichung:** Unter einer Eichtransformation transformiert

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{in} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \square\lambda.$$

Nun können wir die Eichfunktion  $\lambda$  so wählen, dass die transformierte Größe verschwindet. Mit dieser Wahl für  $\lambda$  erfüllen die Potentiale die kovariante *Lorenz-Eichbedingung*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (7.42)$$

In dieser Eichung lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.33)

---

<sup>6</sup>englisch: gauge transformation

$$\square\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad , \quad \square\mathbf{A} = \mu_0 \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) . \quad (7.43)$$

Zusammen mit den Verknüpfungsgleichungen (7.14) beschreiben diese Feldgleichungen (oder die dazu äquivalenten Feldgleichungen in der Coulombbeziehung (7.40) das Verhalten von Materie und elektromagnetischem Feld in Wechselwirkung. Es sind Wellengleichungen und sie weisen unmittelbar auf die elektromagnetische Lichttheorie hin.

### 7.3.4 Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Im Vakuum verschwinden Polarisierung und Magnetisierung und wir haben es allenfalls mit isolierten mikroskopischen Ladungen und Strömen zu tun. Dann ist  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , und die Feldgleichungen (7.10) vereinfachen sich zu

$$a) \quad \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \quad b) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (7.44)$$

$$c) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad d) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.45)$$

Dies ist die differentielle Form der *Maxwell-Gleichungen* im Vakuum. Hier sind  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  die mikroskopischen Ladungs- und Stromdichten.

Dies sind die wichtigen Feldgleichungen der mikroskopischen Elektrodynamik. Bei bekannten und mit den Zwangsbedingungen b) und d) verträglichen Anfangsbedingungen bestimmen sie bei gegebenen Ladungs- sowie Stromverteilungen die Erzeugung und Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen. Aus ihnen folgt sofort die Erhaltung der elektrischen Ladung,

$$\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (7.46)$$

Die homogenen Gleichungen (7.45) werden durch (7.31) und (7.32) gelöst und es bleiben (in der Lorenz-Eichung) folgende einfache Wellengleichungen für die Potentiale übrig,

$$\square\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad , \quad \square\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} . \quad (7.47)$$

Jede Komponente der zweiten Gleichung in (7.47) hat dieselbe Struktur wie die erste Gleichung. Wir können die Diskussion der Lösung daher auf die erste Gleichung beschränken. Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung hat die Darstellung

$$\Phi = \Phi_{\text{hom}} + \Phi_{\text{part}} . \quad (7.48)$$

Dabei ist  $\Phi_{\text{hom}}$  die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\square\Phi_{\text{hom}} = 0 , \quad (7.49)$$

und  $\Phi_{\text{part}}$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Wellengleichungen (7.47) sind der Ausgangspunkt bei der Behandlung der Erzeugung und Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen.

Im Vakuum nehmen auch die integralen Maxwell-Gleichungen eine einfachere Form an.

$$\text{Induktionsgesetz:} \quad \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \quad (7.50)$$

$$\text{elektrisches Flussgesetz:} \quad \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad (7.51)$$

$$\text{magnetisches Flussgesetz:} \quad \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (7.52)$$

$$\text{Verschiebungsgesetz:} \quad \oint_{\partial F} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (7.53)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = -\oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \quad (7.54)$$