

Kapitel 4

Multipole und spezielle Funktionen

Wir betrachten eine statische und lokalisierte Ladungsverteilung. Diese sei nur innerhalb einer Kugel vom Radius R um den Ursprung ungleich Null. Für $r > R$ kann das Potential Φ nach Potenzen von R/r entwickelt werden. Diese Entwicklung wird im Folgenden abgeleitet.

Ausgangspunkt der Entwicklung ist das von der Ladungsverteilung erzeugte Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.1)$$

wobei wegen der Lokalisierung von ρ nur \mathbf{r}' mit Betrag $r' < R$ zum Integral beitragen. Für $r > R$ ist dann $r' < r$ und wir dürfen das Coulomb-Potential in eine Taylor-Reihe nach r'/r entwickeln. Mithilfe der für $0 \leq \xi < 1$ gültigen Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi}} = 1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 + \frac{5}{16}\xi^3 + \dots \quad (4.2)$$

erhalten wir, nachdem wir die Reihenglieder in Potenzen von r'/r entwickeln, folgende Reihendarstellung

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \frac{5(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^3 - 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')r^2 r'^2}{2r^7} + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Den Zähler im dritten Term können wir noch umformen:

$$3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 = (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) x_i x_j.$$

Hier und auch im Folgenden verwenden wir die Summenkonvention: Über alle Indizes, die zweimal in einem Produkt auftreten, wird summiert, in der obigen Formel also über i und j .

Wir führen nun folgende, die lokalisierte Ladungsverteilung charakterisierende Größen ein:

$$q = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad \text{Ladung} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{p} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \quad \text{Dipolmoment} \quad (4.5)$$

$$Q_{ij} = \int d^3r (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho(\mathbf{r}) \quad \text{Quadrupolmoment.} \quad (4.6)$$

Eingesetzt in (4.1) erhalten wir die gesuchte Reihenentwicklung für das Potential

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{Q}\mathbf{r})}{2r^5} + O(r^{-4}), \quad (4.7)$$

wobei $\mathbf{Q} = (Q_{ij})$ der symmetrische und spurlose Quadrupoltensor ist. Das elektrische Feld $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ hat weit weg von der Quelle die Entwicklung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} + O(r^{-4}). \quad (4.8)$$

In großer Entfernung wirkt eine in einer Umgebung des Ursprungs lokalisierte Ladungsverteilung so, als ob sie aus einer im Ursprung befindlichen Punktladung der Stärke q besteht. Verschwindet die Gesamtladung q der Verteilung, dann beschreibt der führende Term einen elektrischen Dipol mit Moment \mathbf{p} .

4.1 Dipole und Quadrupole

Das Dipolfeld: Der zweite Term auf den rechten Seiten in (4.7) beschreibt das Dipolfeld. Es fällt für große Abstände mit einer Potenz von r schneller ab als das Coulomb-Feld. Der Name rührt daher, dass man 2 Punktladungen braucht, um einen Dipol zu erzeugen. In der Tat, für die leitende Kugel im konstanten elektrischen Feld erzeugten die nahe beieinander liegenden Spiegelladungen ein Dipolfeld. Sei also

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= q(\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \\ &\rightarrow -q\mathbf{a} \cdot \nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + O(a^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

die Ladungsdichte zweier entgegengesetzt geladener Punktteilchen im Abstand $a = |\mathbf{a}|$. Nun führen wir den Limes $a \rightarrow 0$ durch, wobei wir das Produkt $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ festhalten. Dann bleibt die Ladungsverteilung eines Dipols \mathbf{p} am Ort \mathbf{r}_0 :

$$\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4.10)$$

Das Potential des Dipols ist (siehe früher) gegeben durch

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (4.11)$$

Die Abbildung 2.5 zeigt das Feld und die Äquipotentialflächen eines Dipolfeldes.

Das Quadrupolfeld: Ein reines Quadrupolfeld kann, wie in Abb. (4.1) gezeigt, mit vier Punktladungen erzeugt werden:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r})/q &= \delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_1) + \delta(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_1) - \delta(\mathbf{r} - b\mathbf{e}_2) - \delta(\mathbf{r} + b\mathbf{e}_2) \\ &= \delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_1) + \delta(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_1) - 2\delta(\mathbf{r}) - \delta(\mathbf{r} - b\mathbf{e}_2) - \delta(\mathbf{r} + b\mathbf{e}_2) + 2\delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Erinnern wir uns hier an folgende Darstellung der zweiten Ableitung,

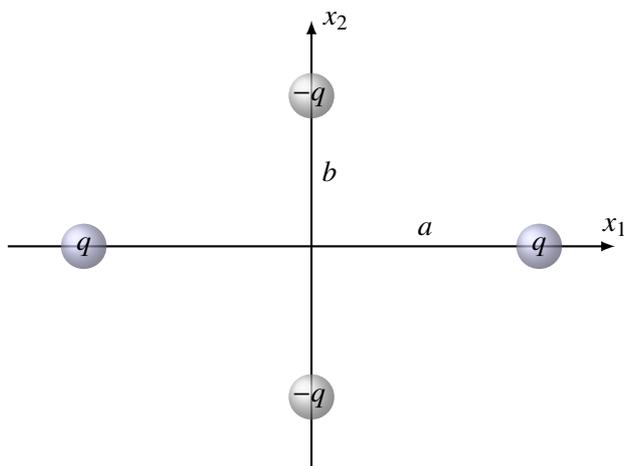


Abbildung 4.1: Vier benachbarte Punktladungen ohne Gesamtladung und Dipolmoment erzeugen ein Quadrupolfeld.

$$f''(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x - \epsilon) + f(x + \epsilon) - 2f(x)}{\epsilon^2}, \quad (4.13)$$

dann folgern wir, dass für $a, b \rightarrow 0$ der Ausdruck für die Ladungsdichte gegen

$$\rho(\mathbf{r}) = q \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta(\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

strebt. Beim Grenzübergang müssen die Größen qa^2 und qb^2 festgehalten werden, d.h. die Ladungen $\pm q$ streben (dem Betrag nach) gegen Unendlich. Entsprechend erzeugen die vier Ladungen

das elektrische Potential

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2(2x^2 - y^2 - z^2) - b^2(2y^2 - x^2 - z^2)}{r^5}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Die vier Ladungen haben weder eine Gesamtladung noch ein Dipolmoment. Deshalb verschwinden das Monopol- und Dipolfeld und man erhält ein reines Quadrupolfeld mit symmetrischem und spurlosen *Quadrupoltensor*:

$$\varphi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{Q}\mathbf{r})}{r^5}, \quad \mathbf{Q} = 2q \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 - 2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 - a^2 \end{pmatrix}.\quad (4.16)$$

Man kann sich noch kompliziertere Ladungsverteilungen ohne Gesamtladung, Dipol- und Quadrupolmoment beschaffen. Diese werden dann durch höhere Multipolmomente beschrieben.

4.2 Energie und Drehmoment von Multipolen

Die Ladungsdichte ρ sei wieder in einer Umgebung des Ursprungs lokalisiert. Ihre Energie im äußeren Feld beträgt

$$U = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}).\quad (4.17)$$

Wir entwickeln das äußere Potential für kleine Argumente und erhalten

$$\begin{aligned}U &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left(\Phi_{\text{ext}}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \Phi_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}}|_0 + \dots \right) \\ &= q \Phi_{\text{ext}}(0) + \mathbf{p} \cdot \nabla \Phi_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{6} \left(Q_{ij} + \delta_{ij} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) r^2 \right) \partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}}|_0 + \dots.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Der letzte Term proportional zum Integral über ρr^2 verschwindet, da $\Delta \Phi_{\text{ext}}$ am Ursprung, wo keine Quellen von Φ_{ext} sitzen, Null ist. Damit bleibt für das Wechselwirkungspotential

$$U = q \Phi_{\text{ext}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) - \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Big|_0 + \dots.\quad (4.19)$$

Wir können daraus zum Beispiel die potentielle Energie zweier Dipole bestimmen. Der Dipol \mathbf{p}_1 am Ort \mathbf{r}_1 erzeugt am Aufpunkt \mathbf{r}_2 das Feld

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{r}_{12} - \mathbf{p}_1(r_{12})^2}{(r_{12})^5}, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|.$$

Die Wechselwirkungsenergie dieses Dipols mit einem zweiten Dipol \mathbf{p}_2 am Ort \mathbf{r}_2 ist

$$U_{12} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{(r_{12})^3} - 3 \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{(r_{12})^5} \right). \quad (4.20)$$

Die Kraft auf eine um den Ursprung konzentrierte Ladungsverteilung ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left(\mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots \right) \\ &= q \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{6} (Q_{ij} \partial_i \partial_j) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

Insbesondere wirken auf elektrische Dipole und Quadropole in einem räumlich konstanten Feld keine Kräfte. Das auf eine Ladungsverteilung in der Umgebung des Koordinatenursprungs wirkende *Drehmoment* ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{mech}} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \wedge (\mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (x_l \partial_l) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots) \\ &= \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + \frac{1}{3} (\mathbf{Q} \nabla) \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots, \end{aligned} \quad (4.22)$$

wobei wir in der letzten Gleichung ausnutzten, dass \mathbf{E}_{ext} wirbelfrei ist. Das elektrische Feld wirkt auf den Dipol mit einem Drehmoment und stellt, sofern der Dipol nicht an einer Drehung gehindert wird, die Dipolrichtung parallel zur Feldrichtung.

4.3 Differentialoperatoren

Die bekanntesten krummlinigen Koordinaten sind die Kugelkoordinaten

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \equiv r \mathbf{e}_r, \quad (4.23)$$

für die sich die Koordinatenlinien senkrecht schneiden. Andere Beispiele von rechtwinkligen Koordinaten sind kartesische oder Zylinderkoordinaten. Die Einheitsvektoren \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϑ und \mathbf{e}_φ in

$$d\mathbf{r} = g_r \mathbf{e}_r dr + g_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta d\vartheta + g_\varphi \mathbf{e}_\varphi d\varphi \quad (4.24)$$

bilden eine orthonormierte ortsabhängige Basis des \mathbb{R}^3 und ein Vektor ist eine Linearkombination dieser Vektoren,

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad A_r = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_r) \quad \text{usw.}$$

Mit (4.23) berechnen sich die g -Koeffizienten der Kugelkoordinaten zu

$$g_r = 1, \quad g_\vartheta = r \quad \text{und} \quad g_\varphi = r \sin \vartheta. \quad (4.25)$$

Für Zylinderkoordinaten ist

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \rho \mathbf{e}_\varphi d\varphi + \mathbf{e}_z dz \quad (4.26)$$

mit der in Abbildung 4.2 skizzierten ortsabhängigen Orthonormalbasis $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$. Daraus lesen

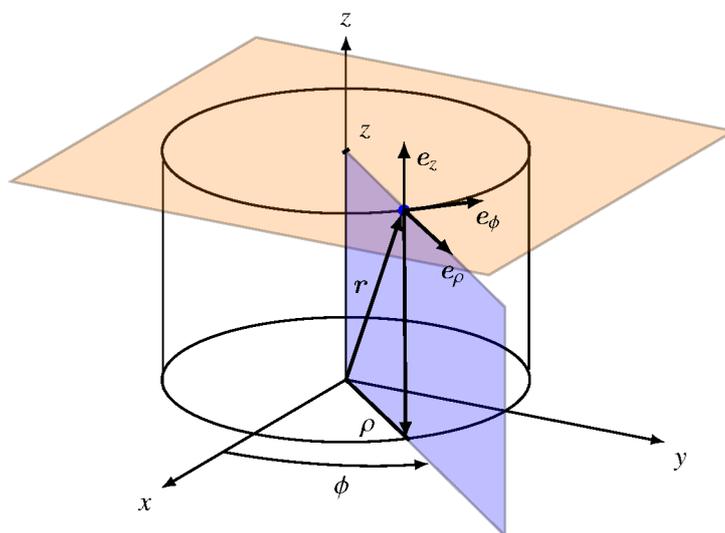


Abbildung 4.2: *Koordinatenbasis für Zylinderkoordinaten.*

wir unmittelbar die Koeffizienten $g_\rho = 1$, $g_\varphi = \rho$ und $g_z = 1$ ab.

Im Folgenden betrachten wir beliebige rechtwinklige Koordinatensysteme mit im Allgemeinen von (4.25) verschiedenen metrischen Koeffizienten. Das Quadrat des Abstands zweier infinitesimal benachbarter Punkte \mathbf{r} und $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ ist dann

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_r^2 dr^2 + g_\vartheta^2 d\vartheta^2 + g_\varphi^2 d\varphi^2. \quad (4.27)$$

Entsprechend ist ein durch $dr, d\vartheta$ und $d\varphi$ gekennzeichnetes *Volumenelement* gegeben durch das Spatprodukt der drei Summanden auf der rechten Seite von (4.24),

$$dV = g_r g_\vartheta g_\varphi dr d\vartheta d\varphi. \quad (4.28)$$

+

Die gerichteten Flächenelemente der Koordinatenflächen sind:

$$\begin{aligned} r = \text{const} &: \mathbf{e}_r g_\vartheta g_\varphi d\vartheta d\varphi \\ \vartheta = \text{const} &: \mathbf{e}_\vartheta g_r g_\varphi dr d\varphi \\ \varphi = \text{const} &: \mathbf{e}_\varphi g_r g_\vartheta dr d\vartheta. \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.3.1 Differentialoperatoren in rechtwinkligen Koordinaten

Im Folgenden werden wir die wichtigsten in der Elektrostatik auftretenden Differentialoperatoren für rechtwinklig krummlinige Koordinatensysteme bestimmen.

Der Gradient: Mit dem Ausdruck für $d\mathbf{r}$ in (4.24) schreibt man

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} d\vartheta + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} d\varphi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= (\nabla\Phi, \mathbf{e}_r) g_r dr + (\nabla\Phi, \mathbf{e}_\vartheta) g_\vartheta d\vartheta + (\nabla\Phi, \mathbf{e}_\varphi) g_\varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (4.30)$$

und findet folgende Komponenten für den Gradienten $\nabla\Phi = (\nabla\Phi)_r \mathbf{e}_r + (\nabla\Phi)_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + (\nabla\Phi)_\varphi \mathbf{e}_\varphi$:

$$(\nabla\Phi)_r = \frac{1}{g_r} \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (\nabla\Phi)_\vartheta = \frac{1}{g_\vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}, \quad (\nabla\Phi)_\varphi = \frac{1}{g_\varphi} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}. \quad (4.31)$$

Die Divergenz: Die Divergenz ist der Grenzwert eines Oberflächenintegrals

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}, \quad (4.32)$$

und mit Hilfe von (4.29) ergibt sich

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{1}{dV} \left(E_r g_\vartheta g_\varphi \Big|_r^{r+dr} d\vartheta d\varphi + E_\vartheta g_r g_\varphi \Big|_\vartheta^{\vartheta+d\vartheta} dr d\varphi + E_\varphi g_r g_\vartheta \Big|_\varphi^{\varphi+d\varphi} dr d\vartheta \right).$$

Für infinitesimale Volumen ergeben sich auf der rechten Seite die Ableitungen und wir finden folgenden Ausdruck für die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{g_r g_\vartheta g_\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (E_r g_\vartheta g_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\vartheta} (E_\vartheta g_r g_\varphi) + \frac{\partial}{\partial\varphi} (E_\varphi g_r g_\vartheta) \right). \quad (4.33)$$

Der Laplace-Operator: Mit $\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi$ erhalten wir für rechtwinklige Koordinaten den Laplace-Operator

$$\Delta\Phi = \frac{1}{g_r g_\vartheta g_\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{g_\vartheta g_\varphi}{g_r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\frac{g_r g_\varphi}{g_\vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{g_r g_\vartheta}{g_\varphi} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right) \right). \quad (4.34)$$

Diese Formeln gelten für beliebige orthogonale krummlinige Koordinaten (wenn wir diese mit r, ϑ, φ bezeichnen).

Setzen wir an dieser Stelle aber die metrischen Koeffizienten (4.29) ein, dann gewinnen wir den Laplace-Operator für Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi. \quad (4.35)$$

Dabei wirkt der Operator Δ_Ω nur auf die Winkelvariablen¹, nicht aber auf die radiale Variable,

$$\Delta_\Omega \Phi = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \quad (4.36)$$

Für im Unendlichen genügend schnell abfallende Funktionen Ψ, Φ oder falls das Gebiet V keinen Rand hat dürfen wir partiell integrieren ohne Randterme aufzusammeln und erhalten

$$\int_V dV \Psi \Delta\Phi = - \int_V dV \nabla\Psi \cdot \nabla\Phi = \int_V dV \Phi \Delta\Psi, \quad \forall \Psi, \Phi.$$

Angewandt auf $\Psi = \Phi$ finden wir, dass der Laplace-Operator im folgenden Sinne negativ ist,

$$\int_V \Phi \Delta\Phi \leq 0. \quad (4.37)$$

In Gebieten ohne elektrische Ladung erfüllt das Potential die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$, und wir wollen nun einen vollständigen Satz von Lösungen der Laplace-Gleichung konstruieren. Lösungen der Laplace-Gleichungen heißen *harmonische Funktionen* und wir werden diesen Begriff hin und wieder verwenden.

4.4 Legendre-Polynome und Kugelfunktionen

In diesem Abschnitt konstruieren wir Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ in Kugelkoordinaten. Dabei werden wir auf die wichtigen Legendre-Polynome und Kugelflächenfunktionen treffen, die in der Atomphysik eine wichtige Rolle spielen.

4.4.1 Separationsansatz

Die Laplace-Gleichung ist linear und deshalb ist jede Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung ist. Um spezielle Lösungen der Laplace-Gleichung zu gewinnen machen wir einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten

$$\Phi = f(r)Y(\vartheta, \varphi). \quad (4.38)$$

Es wird sich zeigen, dass eine beliebige Lösung eine Linearkombination derartiger Lösungen ist. Eingesetzt in $\Delta\Phi = 0$ führt der Ansatz (4.38) wegen (4.35) auf folgende partielle Differential-

¹In der Quantenmechanik wird er eine sehr wichtige Rolle spielen: Er ist proportional zum quadrierten Drehimpuls.

gleichung für die radiale Funktion $f(r)$ und die von den Winkeln abhängige Funktion $Y(\vartheta, \varphi)$:

$$\frac{1}{r}(rf)''Y + \frac{1}{r^2}f\Delta_{\Omega}Y = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{r}{f}(rf)'' + \frac{\Delta_{\Omega}Y}{Y} = 0. \quad (4.39)$$

Der Strich bezeichnet die Ableitung nach dem Radius. Die Summe einer nur von r abhängenden und einer nur von ϑ, φ abhängenden Funktion kann nur verschwinden, wenn beide Summanden konstant sind und die Konstanten zu Null addieren. Bezeichnen wir die Separationskonstante mit $\ell(\ell + 1)$ dann erhalten wir eine partielle Differentialgleichung für Y und eine gewöhnliche Differentialgleichung für f :

$$-\Delta_{\Omega}Y_{\ell}(\vartheta, \varphi) = \ell(\ell + 1)Y_{\ell}(\vartheta, \varphi) \quad \text{und} \quad r(rf_{\ell})'' = \ell(\ell + 1)f_{\ell}. \quad (4.40)$$

Da Δ_{Ω} ein negative Operator ist, siehe Ungleichung (4.37), ist die Separationskonstante $\ell(\ell + 1)$ positiv. Deshalb dürfen wir $\ell \geq 0$ annehmen. Später werden wir sehen, dass ℓ sogar eine nicht-negative ganze Zahl sein muss. Die zweite Gleichung in (4.40) hat die unabhängigen Lösungen

$$f_{\ell} = a \cdot r^{\ell} \quad \text{und} \quad f_{\ell} = a \cdot r^{-\ell-1}. \quad (4.41)$$

Die erste Lösung divergiert für große Radien und die zweite divergiert am Ursprung.

Um spezielle Lösungen der ersten Gleichung in (4.40) zu finden machen wir nochmals einen Separationsansatz $Y_{\ell}(\vartheta, \varphi) = P_{\ell}(\vartheta)Q(\varphi)$ (wir werden sehen, dass Q nicht von ℓ abhängt) mit dem Resultat

$$\Delta_{\Omega}Y_{\ell} = Q(\varphi)\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial P_{\ell}(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \frac{P_{\ell}(\vartheta)}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Q(\varphi)}{\partial\varphi^2} = -\ell(\ell + 1)Q(\varphi)P_{\ell}(\vartheta).$$

Wir dividieren durch $P_{\ell}Q$ und multiplizieren mit $\sin^2\vartheta$:

$$\sin\vartheta\frac{1}{P_{\ell}(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial P_{\ell}(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \ell(\ell + 1)\sin^2\vartheta + \frac{1}{Q(\varphi)}\frac{\partial^2 Q(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Offensichtlich müssen die Summe der ersten beiden Terme und der letzte Term jeweils konstant sein. Nennen wir die Separationskonstante m^2 , dann folgt

$$0 = Q_m''(\varphi) + m^2Q_m(\varphi) \quad (4.42)$$

$$0 = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial P_{\ell}^m(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)P_{\ell}^m(\vartheta). \quad (4.43)$$

Die erste Gleichung (4.42) hat die einfachen Lösungen

$$Q_m(\varphi) = e^{\pm im\varphi}. \quad (4.44)$$

Da die Azimutwinkel φ und $\varphi + 2k\pi$ mit ganzzahligem k denselben Punkt beschreiben muss Q_m eine periodische Funktion mit Periode 2π sein, $Q_m(\varphi + 2\pi) = Q_m(\varphi)$. Dies bedeutet, dass m in

(4.44) ganzzahlig sein muss. Damit haben die Lösungen folgende Form

$$\mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = a_{\ell m} e^{im\varphi} P_{\ell}^m(\vartheta), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{keine Summation}) \quad (4.45)$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten $a_{\ell m}$.

Zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (4.43) setzen wir

$$z = \cos \vartheta \in [-1, 1] \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dz} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta}. \quad (4.46)$$

Dann nimmt diese Gleichung folgende Form an,

$$\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{dP_{\ell}^m}{dz} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) P_{\ell}^m = 0. \quad (4.47)$$

Nach einer konventionellen Normierung heissen die P_{ℓ}^m *zugeordnete Legendre-Polynome* und die $\mathcal{Y}_{\ell m}$ *Kugelflächenfunktionen*. Eine beliebige Lösung der Laplace-Gleichung lautet nun

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell, m} \left(b_{\ell m} r^{\ell} + c_{\ell m} r^{-\ell-1} \right) \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi). \quad (4.48)$$

Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, dass diese Entwicklung immer möglich ist und wir werden auch sehen, wie man die Entwicklungskoeffizienten $b_{\ell m}$ und $c_{\ell m}$ aus den Randwerten von Φ bestimmen kann.

Legendre-Polynome

Statt die Differentialgleichung (4.43) für die P_{ℓ}^m direkt zu lösen entwickeln wir zu deren Berechnung das Coulomb-Potential

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'}},$$

das für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ ebenfalls die Laplace-Gleichung löst. Für $r < r'$ entwickeln wir es in Potenzen von r/r' und für $r > r'$ in Potenzen von r'/r . Dabei ist es nützlich

$$r_{<} = \min\{r, r'\}, \quad r_{>} = \max\{r, r'\} \quad \text{und} \quad z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' \quad (4.49)$$

einzuführen. Damit schreibt sich das Coulomb-Potential gemäss

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{>}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tz}} \quad t = \frac{r_{<}}{r_{>}}. \quad (4.50)$$

Entwickeln wir nach Potenzen von t , dann finden wir die für $r \neq r'$ *konvergente Potenzreihe*:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} P_{\ell}(z), \quad z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'. \quad (4.51)$$

Die hier auftretende Funktionen P_{ℓ} können aus diesen beiden Darstellungen für die Greenfunktion extrahiert werden:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tz}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} P_{\ell}(z). \quad (4.52)$$

Es sind offensichtlich Polynome vom Grade ℓ und sie heissen *Legendre-Polynome*.

Die linke Seite der Darstellung (4.52) ändert sich nicht, wenn t und z gleichzeitig das Vorzeichen wechseln. Daraus folgt unmittelbar die Eigenschaft

$$P_{\ell}(-z) = (-1)^{\ell} P_{\ell}(z). \quad (4.53)$$

Für $z = 1$ zeigen \mathbf{r} und \mathbf{r}' in die gleiche Richtung und wegen

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{\ell} t^{\ell},$$

erfüllen die Legendre-Polynome die Normierungsbedingung

$$P_{\ell}(z = 1) = 1. \quad (4.54)$$

Die Legendre-Polynome bis zur Ordnung 6 lauten

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= z \\ P_2(z) &= \frac{1}{2} (3z^2 - 1) \\ P_3(z) &= \frac{1}{2} (5z^3 - 3z) \\ P_4(z) &= \frac{1}{8} (35z^4 - 30z^2 + 3) \\ P_5(z) &= \frac{1}{8} (63z^5 - 70z^3 + 15) \\ P_6(z) &= \frac{1}{16} (231z^6 - 315z^4 + 105z^2 - 5). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Da die Greenfunktion für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ die Laplace-Gleichung löst, muss jeder Term in der konvergenten Entwicklung (4.51) ebenfalls die Laplace-Gleichung lösen,

$$\Delta G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0 \implies \Delta_{\Omega} P_{\ell}(z) = -\ell(\ell+1)P_{\ell}(z). \quad (4.56)$$

Wir haben hier berücksichtigt, dass der r -abhängige Faktor $t^\ell/r_>$ eine Lösung der radialen Differentialgleichung (4.40) ist. Für ein zylindersymmetrisches (axialsymmetrisches) System mit z -Achse als Symmetrieachse ist das Potential unabhängig von φ . Deshalb hängt die Greenfunktion für eine Punktladung auf der z -Achse auch nur von $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_3 = \cos \vartheta$ ab. Als Konsequenz vereinfacht sich die partielle Differentialgleichung für $P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')$ in (4.56) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für $P_\ell(\cos \vartheta)$, der sogenannten *Legendre'schen Differentialgleichung*,

$$\frac{d}{dz} \left((1 - z^2) \frac{dP_\ell}{dz} \right) + \ell(\ell + 1)P_\ell = 0, \quad z = \cos \vartheta. \quad (4.57)$$

Sie ist identisch zur Gleichung (4.47) mit $m = 0$.

Vollständigkeit der Legendre-Polynome

Zur weiteren Untersuchung der P_ℓ betrachten wir die in Abschnitt 3.2.2 mithilfe der Bildladungs-Methode bestimmte Dirichlet Green-Funktion *außerhalb* einer ideal leitenden Kugel mit Radius R , siehe (3.34),

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\hat{\mathbf{r}}'|} - \frac{R}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - r'_s \hat{\mathbf{r}}'|} \right), \quad \text{wobei} \quad r'_s = \frac{R^2}{r'} \quad (4.58)$$

der Abstand der Spiegelladung vom Ursprung ist. Dies ist auch die korrekte Greenfunktion für einen kugelförmige Hohlraum umgeben von einem idealen Leiter. Dann sind r und r' kleiner als R und die Spiegelladung liegt ausserhalb des Hohlraums. Wir entwickeln G_D nach Potenzen von r'/r beziehungsweise r/r' :

$$\begin{aligned} G_D(r > r' > R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\left(\frac{r'}{r} \right)^\ell - \frac{r'_s}{R} \left(\frac{r'_s}{r} \right)^\ell \right) P_\ell(z) \\ G_D(r < r' < R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\left(\frac{r}{r'} \right)^\ell - \frac{R}{r'_s} \left(\frac{r}{r'_s} \right)^\ell \right) P_\ell(z). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Die erste Reihendarstellung gilt ausserhalb der Kugel, die zweite innerhalb der Kugel. Wir benötigen noch die Normalenableitung von G_D ,

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'} = \mp \frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R},$$

wobei das obere Vorzeichen für $r > r'$ und das untere für $r < r'$ gilt.² Setzen wir die Reihenentwicklungen für G_D ein, so finden wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_D}{\partial n'}(r > R) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(z) \\ \frac{\partial G_D}{\partial n'}(r < R) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{1}{R^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} P_{\ell}(z).\end{aligned}\quad (4.60)$$

Wegen der Identität (3.33) hat jede Lösung der Laplace-Gleichung in einem Gebiet V bzw. *jede in V harmonische Funktion* die Darstellung

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \oint_{\partial V} df' \frac{\partial G_D}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}').$$

Hier setzen wir obige Reihenentwicklungen für die Normalenableitung von G_D ein und erhalten

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \sum (2\ell+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} \oint d\Omega' P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \Phi(R\hat{\mathbf{r}}'), \quad r > R \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum (2\ell+1) \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} \oint d\Omega' P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \Phi(R\hat{\mathbf{r}}'), \quad r < R.\end{aligned}\quad (4.61)$$

Aus der Potenzreihenentwicklung für kleine r folgt insbesondere

$$\Phi(0) = \frac{1}{4\pi} \oint d\Omega' \Phi(R\hat{\mathbf{r}}'), \quad (4.62)$$

was bedeutet, dass der Wert einer harmonischen Funktion im Kugelzentrum gleich ihrem Mittelwert auf der Kugeloberfläche ist.

Für $r = R$ fallen die beiden Entwicklungen in (4.61) zusammen und ergeben für $R = 1$

$$\Phi(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell+1) \oint d\Omega' P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \Phi(\mathbf{e}_{r'}). \quad (4.63)$$

Diese wichtige Relation heißt *Vollständigkeitsrelation*: Eine „beliebige“ Funktion Φ auf der Sphäre S^2 kann als Linearkombination der Legendre-Polynome geschrieben werden. Diese Beziehung ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell+1) P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') &= \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') \\ &= \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta').\end{aligned}\quad (4.64)$$

²Benutzt man G_D in (4.58), so findet man

$$\frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - R^2}{R} \frac{1}{(r^2 + R^2 - 2rRz)^{3/2}}$$

Abhängigkeit vom Azimutwinkel und Kugelflächenfunktionen

Wir werden die Abhängigkeit der Legendre-Polynome $P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')$ von Azimut- und Polarwinkel studieren und dabei eine Beziehung zwischen den Legendre Polynomen und den Kugelflächenfunktionen gewinnen. Das Legendre Polynom \mathcal{P}_ℓ gehorcht der Differentialgleichung (4.56). Wir haben früher mithilfe der Separation der Variablen gezeigt, dass diese Differentialgleichung Lösungen mit einer einfachen exponentiellen φ -Abhängigkeit hat. Deshalb ist es naheliegend, das Argument $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$ von P_ℓ in Potenzen von $e^{i(\varphi-\varphi')}$ zu entwickeln:

$$z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin \vartheta' e^{i(\varphi-\varphi')} + \cos \vartheta \cos \vartheta' + \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin \vartheta' e^{-i(\varphi-\varphi')}. \quad (4.65)$$

Entwickelt man nun das Polynom $P_\ell(z)$ vom Grade ℓ ebenfalls in Potenzen von $e^{i(\varphi-\varphi')}$, dann erhält man die endliche Summe

$$P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{-im\varphi'} P_\ell^m(\cos \vartheta'), \quad (4.66)$$

worin die Potenzen $m \in \{\ell, \ell-1, \dots, -\ell\}$ auftreten. Die Funktionen P_ℓ^m sind reell und der Faktor mit dem Quotienten der Fakultäten ist Konvention und legt die Normierung der Funktionen P_ℓ^m fest. Die Vorzeichen der P_ℓ^m sind noch frei wählbar. Zum Beispiel erhält man für $\ell = 0, 1$ und 2 die Entwicklungen

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= \cos \vartheta \cos \vartheta' + \frac{1}{2} \left(e^{i\varphi} \sin \vartheta e^{-i\varphi'} \sin \vartheta' + \text{h.c.} \right) \\ P_2 &= \frac{1}{4} (3 \cos^2 \vartheta - 1) (3 \cos^2 \vartheta' - 1) \\ &\quad + \frac{3}{8} \left(4 e^{i\varphi} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{-i\varphi'} \cos \vartheta' \sin \vartheta' + e^{2i\varphi} \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi'} \sin^2 \vartheta' + \text{h.c.} \right), \end{aligned} \quad (4.67)$$

woraus man bis auf ein Vorzeichen die P_ℓ^m mit $\ell \leq 2$ ablesen kann. Als Funktion der beiden Winkel erfüllt P_ℓ die partielle Differentialgleichung (4.56) und damit löst P_ℓ^m als Funktion von $z = \cos \vartheta$ die Differentialgleichung (4.47). Die (regulären) Lösungen dieser Differentialgleichung sind bis auf Multiplikation mit einer Zahl eindeutig, und wir schließen, dass die Polynome P_ℓ^m in (4.66) und (4.45) gleich gewählt werden können.

Nun führen wir schlussendlich die *Kugelflächenfunktionen*

$$\mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \vartheta) \quad (4.68)$$

ein, so dass die Reihe (4.66) folgende Form annimmt,

$$P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (4.69)$$

Damit schreibt sich die Vollständigkeitsrelation (4.64) folgendermassen:

$$\sum_{\ell=0,1,\dots} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta'). \quad (4.70)$$

Bis auf ein Vorzeichen sind $\mathcal{Y}_{\ell, -m}$ und $\mathcal{Y}_{\ell m}^*$ identisch. Konventionell wählt man dieses so, dass

$$\mathcal{Y}_{\ell, -m} = (-)^m \mathcal{Y}_{\ell m}^*. \quad (4.71)$$

Es genügt deshalb, die Funktionen mit $m = 0, 1, \dots, \ell$ anzugeben.

Wir fassen zusammen: zur expliziten Berechnung der $\mathcal{Y}_{\ell m}$ mit festem ℓ ersetzt man das Argument z des Legendre-Polynoms P_ℓ gemäß (4.65) und entwickelt nach Potenzen von $e^{im(\varphi - \varphi')}$. Als Resultat erhält man nach (4.69) (bis auf ein unbestimmtes Vorzeichen) die Kugelflächenfunktionen zu diesem ℓ . Insbesondere für $\ell = 0$ und 1 erhält man

$$\mathcal{Y}_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad \mathcal{Y}_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi}, \quad \mathcal{Y}_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta. \quad (4.72)$$

Die Kugelflächenfunktionen mit $\ell = 1$ sind in Abbildung 4.3 gezeigt. \mathcal{Y}_{10} ist zylindersymmetrisch, hängt nicht vom Azimutwinkel ab und ist der z -Achse näher als \mathcal{Y}_{11} .

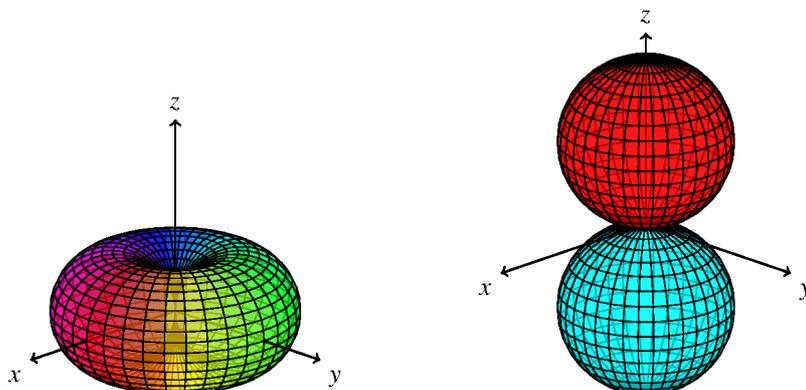


Abbildung 4.3: Kugelflächenfunktionen \mathcal{Y}_{11} (links) und \mathcal{Y}_{10} (rechts).

Für die Kugelflächenfunktionen mit $\ell = 2$ erhält man analog

$$\mathcal{Y}_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, \quad \mathcal{Y}_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{i\varphi}, \quad \mathcal{Y}_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad (4.73)$$

und diese sind in Abbildung 4.4 graphisch dargestellt. Wie für $\ell = 1$ beobachtet man auch hier,

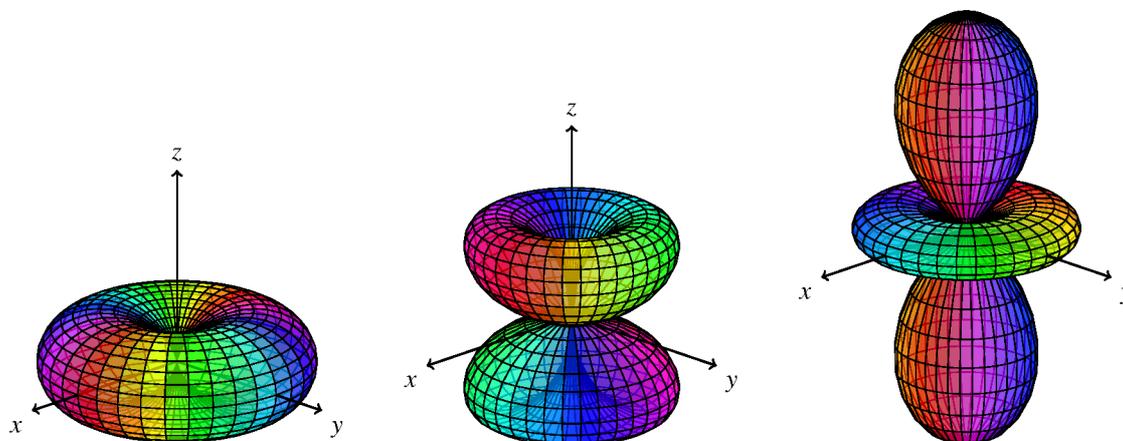


Abbildung 4.4: Kugelflächenfunktionen \mathcal{Y}_{22} (links), \mathcal{Y}_{21} (mittig) und \mathcal{Y}_{20} (rechts).

dass sich mit abnehmendem m der Träger der Kugelflächenfunktion der z -Achse nähert.

Normierung und Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen spielen nicht nur in der Elektrodynamik eine herausragende Rolle. Man begegnet ihnen in der Quantenmechanik wieder, und zwar bei der Behandlung des Bahndrehimpulses. Deshalb lohnt es sich doppelt, einige wichtige Eigenschaften dieser speziellen Funktionen zu notieren. Sie bilden die Punkte auf der Kugeloberfläche S^2 vom Radius 1, gekennzeichnet durch Azimut- und Polarwinkel, in die komplexen Zahlen ab.

Wegen der speziellen Winkelabhängigkeit des Arguments z in (4.65) ist

$$\mathcal{Y}_{\ell m} \propto \sum_{p-q=m} a_{\ell,p,q} \cdot (\sin \vartheta)^{p+q} e^{i(p-q)\varphi} \quad \text{mit } p, q \geq 0,$$

und deshalb verschwinden die Kugelfunktionen mit $m \neq 0$ an den Polen,

$$\mathcal{Y}_{\ell, m \neq 0}(\vartheta = 0, \varphi) = \mathcal{Y}_{\ell, m \neq 0}(\vartheta = \pi, \varphi) = 0. \quad (4.74)$$

Zeigen \mathbf{r} und \mathbf{r}' in die gleiche Richtung, dann ist $z = 1$ und die Normierung $P_\ell(1) = 1$ bedingt

$$1 = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi)|^2 \Rightarrow \mathcal{Y}_{\ell 0}(0) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}}, \quad (4.75)$$

wobei wir $\mathcal{Y}_{\ell 0}(0) > 0$ benutzten. Mit (4.69) ergibt sich dann für $\vartheta' = 0$

$$P_\ell(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} \mathcal{Y}_{\ell 0}(\vartheta). \quad (4.76)$$

Integrieren wir (4.70) über φ , dann erhalten wir die Vollständigkeitsrelation für die Legendre-Polynome

$$\frac{1}{2} \sum_{\ell=0,1,\dots} (2\ell+1) P_\ell(z') P_\ell(z) = \delta(z-z'). \quad (4.77)$$

Diese Relation folgt auch aus (4.63) für φ -unabhängige Potentiale. Ausgedrückt durch die Kugelfunktionen lautet die Vollständigkeitsrelation (4.63) nun folgendermaßen

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0,1,\dots} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad c_{\ell m} = (\mathcal{Y}_{\ell m}, \Phi). \quad (4.78)$$

Wir haben hier das *Skalarprodukt* von zwei komplexwertigen Funktionen $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ eingeführt,

$$(\Psi, \Phi) = \oint_{S^2} d\Omega \Psi^*(\vartheta, \varphi) \Phi(\vartheta, \varphi). \quad (4.79)$$

Also kann *jede* (quadratintegrierbare) Funktion auf S^2 als Linearkombination der linear unabhängigen Kugelfunktionen geschrieben werden. Der Koeffizient der Kugelfunktion $\mathcal{Y}_{\ell m}$ in der Entwicklung ist gleich dem Skalarprodukt von $\mathcal{Y}_{\ell m}$ mit der dargestellten Funktion. Mit (4.61) hat dann eine harmonische Funktion Φ die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{\ell,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} (\mathcal{Y}_{\ell m}, \Phi_R) \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad r > R \\ &= \sum_{\ell,m} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} (\mathcal{Y}_{\ell m}, \Phi_R) \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad r < R, \end{aligned} \quad (4.80)$$

wobei Φ_R die Restriktion von Φ auf die Kugeloberfläche mit Radius R ist. Kennt man Φ auf der Kugeloberfläche, dann kann man mit dieser Relation Φ in der Kugel oder ausserhalb der Kugel bestimmen.

Wählen wir $\Phi = \mathcal{Y}_{\ell m}$ in (4.78), dann folgt unmittelbar die Identität

$$(\mathcal{Y}_{\ell m}, \mathcal{Y}_{\ell' m'}) = \oint d\Omega \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \mathcal{Y}_{\ell' m'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (4.81)$$

Die Kugelfunktionen sind also orthogonal bezüglich des Skalarprodukts (\cdot, \cdot) und normiert. Sie bilden ein *vollständiges Orthonormalsystem* von Funktionen auf S^2 .

4.4.2 Potenzreihen und erzeugende Funktionen

Man kann auch direkt versuchen, die Legendre'sche Differentialgleichung (4.57) mithilfe eines Potenzreihen-Ansatzes zu lösen:

$$P_\ell = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_0 \neq 0. \quad (4.82)$$

Wir nehmen an, die Reihe konvergiere und kann gliedweise differenziert werden. Einsetzen von (4.82) in (4.57) führt auf eine Rekursionsrelation, die a_n mit a_{n-2} verbindet. Aus dieser Relation folgt $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$. Für $\alpha = 0$ kann man a_0 und a_1 beliebig vorgeben.³ Der Koeffizientenvergleich liefert

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.83)$$

Für große n gilt

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \rightarrow 1$$

und nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius der Reihe (4.82) gleich Eins. Sie definiert eine analytische Funktion innerhalb des Einheitskreises. Diese Funktion muss auf dem Einheitskreis eine Singularität haben, es sei denn, die Reihe bricht ab und wird zu einem Polynom. Wegen (4.83) bricht sie genau dann ab, wenn ℓ eine ganze Zahl ist. Da wir aber $\ell \geq 0$ annehmen, muss $\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$ sein. Die Rekursionsrelation (4.83) zeigt, dass für diese erlaubten Werte für ℓ der Koeffizient $a_{\ell+2}$ verschwindet und daher P_ℓ ein Polynom vom Grade ℓ sein muss.⁴ Für $a_1 = 0$ ist das Polynom gerade und für $a_0 = 0$ ungerade.

Für *gerades* ℓ erhalten wir

$$P_\ell = a_0 \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{2!} z^2 + \dots + (-1)^{\frac{\ell}{2}} \frac{\ell(\ell-2) \dots 2 \cdot (\ell+1) \dots (2\ell-1)}{\ell!} z^\ell \right), \quad (4.84)$$

und für *ungerades* ℓ

$$P_\ell = a_1 \left(z - \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{3!} z^3 + \dots + (-1)^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{(\ell-1)(\ell-3) \dots 2 \cdot (\ell+2) \dots (2\ell-1)}{\ell!} z^\ell \right). \quad (4.85)$$

Normiert man schlussendlich die Legendre-Polynome P_ℓ gemäß (4.54), dann findet man wieder die Lösungen (4.52).

Erzeugende Funktion: Die Legendre-Polynome können durch Ableiten von einfachen Polynomen erzeugt werden:

$$P_0(z) = 1, \quad P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2 - 1)^\ell. \quad (4.86)$$

Beweis: Wir differenzieren die einfache Differentialgleichung

$$(z^2 - 1)u' = 2\ell zu \quad (4.87)$$

³Für $\alpha = 0$ gewinnt man schon die allgemeine Lösung der Legendre'schen DG.

⁴ a_ℓ bestimmt $a_{\ell+2}$!

$(\ell + 1)$ -mal nach der Variablen z . Unter Benutzung von

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots$$

ergibt sich die Differentialgleichung

$$(z^2 - 1)u^{(\ell+2)} + 2z(\ell + 1)u^{(\ell+1)} + \ell(\ell + 1)u^{(\ell)} = 2\ell zu^{(\ell+1)} + 2\ell(\ell + 1)u^{(\ell)}$$

beziehungsweise die Legendre'sche Differentialgleichung für $u^{(\ell)}$:

$$(z^2 - 1)u^{(\ell+2)} + 2zu^{(\ell+1)} - \ell(\ell + 1)u^{(\ell)} = 0.$$

Nun erfüllt aber gerade $u = (z^2 - 1)^\ell$ die Gleichung (4.87). Setzen wir noch $P_\ell = u^{(\ell)}/2^\ell \ell!$, dann löst P_ℓ die Legendre'sche Differentialgleichung.

4.4.3 Helmholtz-Funktionen und zugeordnete Legendre-Polynome

Wir kehren zur allgemeinen Gleichung (4.47) mit ganzzahligen ℓ und m zurück. Löst P_ℓ die Legendre'sche Differentialgleichung (4.57), dann löst die *Helmholtz'sche Funktion*

$$P_{\ell m} = \frac{d^m}{dz^m} P_\ell \quad (4.88)$$

die Differentialgleichung

$$\left((1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2(m + 1)z \frac{d}{dz} + (\ell(\ell + 1) - m(m + 1)) \right) P_{\ell m} = 0.$$

Man braucht nur die Legendre-Differentialgleichung m -mal zu differenzieren. Wir schreiben nun

$$P_{\ell m}(z) = (-)^m (1 - z^2)^{-m/2} P_\ell^m(z)$$

und bestimmen durch Einsetzen die Differentialgleichung, der die *zugeordneten Legendre-Polynome* P_ℓ^m dann genügen. Man findet die Differentialgleichung (4.47) und damit lösen die

$$P_\ell^m(z) = (-)^m (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_\ell(z) = \frac{(-)^m}{2^\ell \ell!} (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}} (z^2 - 1)^\ell \quad (4.89)$$

die Differentialgleichung (4.47). Die Helmholtz-Funktion $P_{\ell m}$ ist ein Polynom vom Grade $\ell - m$. Das zugeordnete Legendre-Polynom P_ℓ^m ist dann vom Grade ℓ . Um zu den Kugelfunktionen zu gelangen, müssen wir die zugeordneten Legendre-Polynome mit $\exp(im\varphi)$ und einem konventionellen Normierungsfaktor multiplizieren:

$$\mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0, \quad -\ell \leq m \leq \ell. \quad (4.90)$$

4.4.4 Punktladung in einem geerdeten „Faradaykäfig“

Innerhalb einer Kugel mit Radius R befinde sich am Ort \mathbf{r}_0 eine Punktladung q . Auf der Kugeloberfläche soll das Potential verschwinden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass sich die Ladung auf der z -Achse ($\vartheta_0 = 0$) befindet. Dann ist Φ unabhängig vom Azimutwinkel φ . Das Potential in der Kugel schreiben wir als Summe des Coulomb-Potentials der Punktladung plus einer harmonischen Funktion,

$$\begin{aligned} \Phi(r < R, \vartheta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \Phi_h \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{>}} \sum_{\ell} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta) + \sum_{\ell} a_{\ell} \left(\frac{r}{R} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (4.91)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$r_{<} = \min(r, r_0) \quad \text{und} \quad r_{>} = \max(r, r_0), \quad r_0 = |z_0| \quad (4.92)$$

eingeführt. Das Potential verschwindet auf der Kugeloberfläche genau dann, wenn gilt

$$a_{\ell} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{\ell}.$$

Deshalb ist das Potential einer auf der z -Achse liegenden Punktladung im geerdeten sphärischen Faradaykäfig

$$\Phi(r \leq R, \vartheta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell} \left(\frac{1}{r_{>}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} - \frac{1}{R} \left(\frac{r_0 r}{R^2} \right)^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \vartheta). \quad (4.93)$$

Der harmonische Anteil ist identisch zum Potential der Spiegelladung außerhalb der Kugel,

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{\ell} \left(\frac{r_0 r}{R^2} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Rq/r_0}{\sqrt{|\mathbf{r} - R^2\mathbf{r}_0/r_0^2|}}. \quad (4.94)$$

4.5 Zylindersymmetrische Probleme

Wir legen die z -Achse in Richtung der Symmetrieachse. Dann hängt das Potential nicht vom Azimutwinkel ab und die allgemeine zylindersymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung lautet

$$\Phi(r, \vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_{\ell} r^{\ell} + \frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \vartheta), \quad P_{\ell}(z) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \mathcal{Y}_{\ell 0}(z). \quad (4.95)$$

Mit der Orthogonalitätsrelation ($z = \cos \vartheta$)

$$(P_\ell, P_{\ell'}) = 2\pi \int_{-1}^1 dz P_\ell(z) P_{\ell'}(z) = \frac{4\pi}{2\ell+1} (\mathcal{Y}_{\ell 0}, \mathcal{Y}_{\ell' 0}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \quad (4.96)$$

können wir den r -abhängigen Faktor leicht bestimmen:

$$(\Phi, P_\ell) = 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \vartheta \Phi(r, \vartheta) P_\ell(\cos \vartheta) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \left(a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} \right). \quad (4.97)$$

Suchen wir zylindersymmetrische Lösungen der Laplace-Gleichung in einem Gebiet, das den Koordinatenursprung enthält, dann verschwinden alle b_ℓ . Für Lösungen in einem unbeschränkten Außengebiet verschwinden dagegen alle Koeffizienten a_ℓ .

Homogen geladener Ring

Wir berechnen das Feld eines geladenen Kreisrings mit Radius R , wie in der folgenden Abbildung 4.5 gezeigt. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Kreis in der $x - y$ -Ebene liegt und

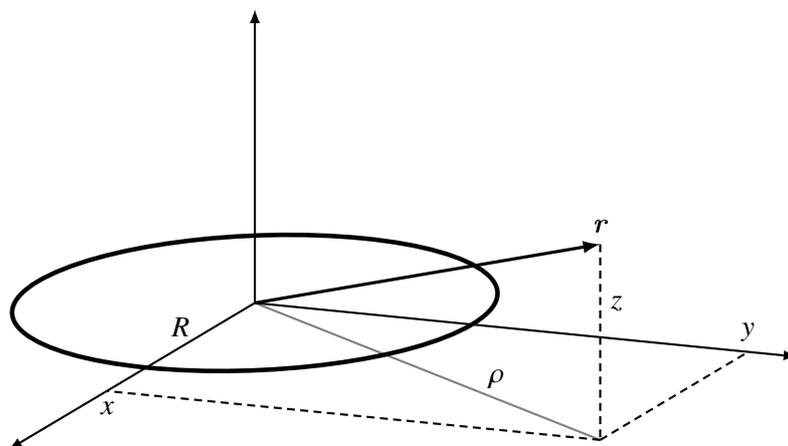


Abbildung 4.5: Zur Berechnung des Potentials eines homogen geladenen Kreisrings.

sein Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Die Ladung sei gleichmäßig auf den Kreis $2\pi R$ verteilt. Dann ist die Ladungsdichte des als unendlich dünn idealisierten geladenen Kreises gleich

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi R} \delta(\rho - R) \delta(z), \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (4.98)$$

Wir berechnen zunächst das Potential auf der z -Achse. Ein Punkt $(0, 0, z)$ auf dieser Achse hat denselben Abstand $\sqrt{z^2 + R^2}$ zu jedem Punkt auf dem Ring, und entsprechend ist

$$\Phi(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \int \frac{\delta(\rho' - R) \delta(z')}{\sqrt{\rho'^2 + (z - z')^2}} \rho' d\rho' dz' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}. \quad (4.99)$$

Auf der Symmetrieachse ist das Feld identisch mit demjenigen einer Punktladung auf der Achse im Abstand $\sqrt{z^2 + R^2}$. Das Potential ist weg vom Kreisring harmonisch und hat für $r > R$ und $r < R$ jeweils die Reihenentwicklung (4.95). Diese definieren eine am Ursprung reguläre und im Unendlichen abfallende Funktion wenn die b_ℓ für $r < R$ und die a_ℓ für $r > R$ verschwinden. Nun können wir die Entwicklungen

$$\Phi(r < R) = \sum a_\ell r^\ell P_\ell(\cos \vartheta) \quad \text{und} \quad \Phi(r > R) = \sum \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \vartheta) \quad (4.100)$$

mit dem auf der z -Achse bekannten Resultat (4.99) vergleichen. Auf der Achse ist $r = |z|$. Mit

$$\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell (2\ell)! \left(\frac{t^\ell}{2^\ell \ell!} \right)^2 \quad t = \frac{|z|}{R} = \frac{r}{R},$$

und $P_\ell(1) = 1$ finden wir so für die Innenlösung die Reihendarstellung

$$\begin{aligned} \Phi(r < R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \sum_{\ell} (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{(2^\ell \ell!)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos \vartheta) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \left(1 - \frac{r^2}{4R^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + O\left(\left(\frac{r}{R}\right)^4\right) \right). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Eine vergleichbare Rechnung führt auf die Außenlösung

$$\begin{aligned} \Phi(r > R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \sum_{\ell} (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{(2^\ell \ell!)^2} \left(\frac{R}{r} \right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos \vartheta) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(1 - \frac{R^2}{4r^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + O\left(\left(\frac{R}{r}\right)^4\right) \right). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Weit weg vom Ring ist der führende Term, wie erwartet, das Coulomb-Feld. Der Kreisring hat kein Dipolmoment und die erste Korrektur zum Monopolanteil ist das Quadrupolfeld mit diagonalem Quadrupoltenor

$$\mathbf{Q} = \frac{qR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (4.103)$$

Da die Entwicklung der Aussenlösung nur ungerade Potenzen von $1/r$ enthält verschwindet auch der Oktupolbeitrag und der nächste Beitrag stammt vom Hexadekupol.

4.6 Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Wie früher betrachten wir eine statische und lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$. Mit Hilfe der Kugelfunktionen können wir nun relativ schnell die Multipolentwicklung des Potentials Φ nach

inversen Potenzen von r ableiten. Dazu erinnern wir uns an die Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \\ &= \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi'). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Hat die Ladungsdichte ihren Träger innerhalb einer Kugel mit Radius R , dann folgt für $r > R$

$$4\pi\varepsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{q_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \mathcal{Y}_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad (4.105)$$

mit den *sphärischen Multipolmomenten*

$$q_{\ell m} = \int d^3r r^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) \rho(\mathbf{r}). \quad (4.106)$$

Für $\ell = 0$ erhalten wir das „Monopolmoment“ Ladung, für $\ell = 1$ die Komponenten des Dipol-Momentes und für $\ell = 2$ die Komponenten des symmetrischen und spurlosen Quadrupoltensors. Insbesondere für $m = 0$ findet man

$$\begin{aligned} q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \\ q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r r \cos \vartheta \rho(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_3 \\ q_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int d^3r (3r^2 \cos^2 \vartheta - r^2) \rho(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{33}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Für festes ℓ gibt es $2\ell + 1$ Komponenten $q_{\ell m}$. In kartesischen Koordinaten ist die Anzahl unabhängiger Komponenten in der Multipolentwicklung nicht so offensichtlich. Wegen der Symmetrie und Spurfreiheit hat zum Beispiel der Quadrupoltensor $9 - 3 - 1 = (2 \cdot 2 + 1) = 5$ unabhängige Komponenten. Von den $3^3 = 27$ Komponenten des Oktupoltensors Q_{ijk} sind tatsächlich nur $(2 \cdot 3 + 1) = 7$ unabhängig. Für die höheren Multipole ist die sphärische Multipolentwicklung wesentlich einfacher und eleganter als die Entwicklung in kartesischen Komponenten.

4.7 Anhang: Vollständige Funktionensysteme

Abschließend wollen wir die Eigenschaften der Legendre-Polynome und Kugelfunktionen geometrisch interpretieren. Wir werden dann besser verstehen, warum die P_{ℓ} ein vollständiges Orthogonalsystem auf dem Raum der Funktionen $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ und die $\mathcal{Y}_{\ell m}$ ein vollständiges Orthonormalsystem auf dem Raum der Funktionen $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ bilden. Diese Funktionen bilden

jeweils einen *linearen Raum*. Als inneres Produkt wählen wir

$$(f, g) = \int_M \rho(x) \bar{f}(x) g(x) d^n x, \quad \rho(x) > 0, \quad (4.108)$$

wobei in der Elektrostatik folgende Räume und Dichten ρ auftreten:

$$\begin{aligned} M = [-1, 1], \quad \rho(x) d^n x \rightarrow dz & \quad \text{für Legendre-Polynome,} \\ M = S^2, \quad \rho(x) d^n x \rightarrow \sin \vartheta d\vartheta d\varphi & \quad \text{für Kugelfunktionen.} \end{aligned}$$

Die Bilinearform (\cdot, \cdot) ist ein *Skalarprodukt*: Sie ist *linear* im zweiten Argument und *antilinear* im ersten Argument,

$$(f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 (f, g_1) + \alpha_2 (f, g_2) \quad \text{und} \quad (f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (4.109)$$

und sie ist *positiv*

$$(f, f) \geq 0 \quad \text{und} \quad (f, f) = 0 \quad \text{nur, falls} \quad f = 0. \quad (4.110)$$

Zwei Funktionen f, g (Vektoren in diesem unendlich-dimensionalen Funktionenraum) sind *orthogonal*, falls $(f, g) = 0$ ist. Die Länge oder Norm einer Funktion ist

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}. \quad (4.111)$$

Also ist der Raum der stetigen Funktionen $M \rightarrow \mathbb{C}$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, versehen mit einer Norm, ein so genannter *normierter Raum*. Der Abstand zwischen zwei Funktionen ist

$$d(f, g) = \|f - g\|. \quad (4.112)$$

Vergrößert man den Raum so lange bis man einen bezüglich der Metrik vollständigen Raum erhält, so heißt dieser *Hilbertraum*: Ein Hilbertraum ist demnach ein linearer Raum, der bezüglich der durch das innere Produkt induzierten Metrik vollständig ist. In einem Hilbertraum konvergieren zum Beispiel alle Cauchy-Folgen gegen ein Element des Raumes. Der Raum der stetigen Funktionen auf M ist bezüglich der durch (4.108) induzierten Norm nicht vollständig. Man kann ihn aber vervollständigen. Der etwas größere Raum wird mit

$$L_2(M, \rho) \quad (4.113)$$

bezeichnet. Es gilt der folgende

Satz: *In einem Hilbertraum gelten die Schwartz'sche und Dreiecksungleichung*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\| \quad \text{und} \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (4.114)$$

Weiterhin ist

$$\|g\| \leq \|\lambda f + g\| \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (4.115)$$

genau dann, wenn $(f, g) = 0$ ist.

Beweis: Sei $\alpha = (f, g)$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = |\lambda|^2 \|f\|^2 + 2\Re(\bar{\alpha}\lambda) + \|g\|^2. \quad (4.116)$$

Damit gilt die letzte Aussage im Satz für $\alpha = 0$. Für $f = 0$ sind die erste und letzte Behauptung trivial erfüllt. Sei nun $f \neq 0$. Wir setzen $\lambda = -\alpha/\|f\|^2$. Mit diesem λ wird (4.116) zu

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = \|g\|^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|f\|^2}.$$

Dies beweist die erste Ungleichung und zeigt, dass die dritte Behauptung nur für $\alpha = 0$ gelten kann. Die zweite Ungleichung im Satz folgt aus der ersten (man quadriert die zweite Ungleichung).

Die Legendre-Polynome sind orthogonal im Hilbertraum $L_2([-1, 1])$ und die Kugelfunktionen orthonormal in $L_2(S^2, \sin \vartheta d\vartheta d\varphi)$. Dies ist einfach zu beweisen. Dazu schreiben wir die entsprechenden Differentialgleichungen als Eigenwertgleichungen:

$$A f_\ell = \ell(\ell + 1) f_\ell, \quad A = -\frac{d}{dz} \left(1 - z^2\right) \frac{d}{dz} \quad \text{bzw.} \quad A = -\Delta_\Omega. \quad (4.117)$$

Der Differentialoperator A ist linear. Nach Wahl einer Basis im Funktionenraum ist er eine unendlich-dimensionale Matrix. Der zu A adjungierte Operator A^\dagger wird durch

$$(f, Ag) = (A^\dagger f, g) \quad (4.118)$$

definiert. Für einen *symmetrischen Operator* ist $A = A^\dagger$. Der Laplace-Operator Δ_Ω auf S^2 ist offensichtlich symmetrisch, siehe (4.37). Der erste Differential-Operator A in (4.117) ist es ebenfalls:

$$(f, Ag) = \int_{-1}^1 dz \bar{f} A g = -(1 - z^2) (\bar{f} g' - \bar{f}' g) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 dz \overline{A f} g = (A f, g). \quad (4.119)$$

Wir setzen hier voraus, dass f und g bei $z = \pm 1$ regulär sind, so dass keine Oberflächenterme auftreten.

Es seien nun f_ℓ und $f_{\ell'}$ Eigenfunktionen des symmetrischen Operators A mit Eigenwerten $\ell(\ell + 1)$ bzw. $\ell'(\ell' + 1)$. Dann ist

$$(A f_\ell, f_{\ell'}) = \ell(\ell + 1)(f_\ell, f_{\ell'}) = (f_\ell, A f_{\ell'}) = \ell'(\ell' + 1)(f_\ell, f_{\ell'}).$$

Für $\ell \neq \ell'$ muss also $(f_\ell, f_{\ell'}) = 0$ gelten. Deshalb sind die Legendre-Polynome bzw. Kugelfunktionen orthogonal zueinander. Die Kugelfunktionen sind normiert. Es verbleibt noch, die Norm

der Legendre-Polynome zu bestimmen. Mit

$$\int_{-1}^1 dz \left(\frac{d^\ell}{dz^\ell} (1-z^2)^\ell \right)^2 = \frac{2}{2\ell+1} 4^\ell (\ell!)^2 \quad (4.120)$$

findet man, dass

$$(P_\ell, P_\ell) = \frac{2}{2\ell+1} \quad \text{und damit} \quad (P_\ell, P_{\ell'}) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} . \quad (4.121)$$

In der Analysis beweist man, dass die Eigenfunktionen jedes selbstadjungierten Operators A ein vollständiges Funktionensystem bilden. Sie bilden immer eine Basis im Hilbertraum.