

Kapitel 10

Relativistische Form der Elektrodynamik

Die Lorentz-Kovarianz der Feldgleichungen wurde von LORENTZ und POINCARÉ schon vor der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie durch EINSTEIN gezeigt.¹ Die Kovarianz tritt am deutlichsten zu Tage, wenn man die so genannte Vierer-Notation benutzt. Diese wird im nächsten Abschnitt eingeführt und damit die Kovarianz der Maxwell-Gleichungen im Vakuum bewiesen. Die physikalische Bedeutung der Kovarianz werden wir weiter unten ausführlich diskutieren.

10.1 Poincare-Transformationen

Im Folgenden sei M die 4-dimensionale Minkowski-Raumzeit (MUNDIS, MINKOWSKI). Die Punkte im affinen Raum M sind *Ereignisse*. Unser Bezugssystem sei ein Inertialsystem I (durch Fixsterne gegeben). Ereignisse werden durch ihre Zeit, gemessen mit Uhren, welche relativ zum System ruhen und durch Lichtsignale synchronisiert sind, und ihre kartesischen Koordinaten charakterisiert.

In einem gewählten Koordinatensystem wird jedes Ereignis durch seine Zeit und seinen Ort, also durch die 4-Koordinaten

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

eindeutig charakterisiert. Hier haben wir die Zeitkoordinate mit der Lichtgeschwindigkeit multipliziert, damit alle Komponenten von x die Dimension einer Länge haben. Oft schreiben wir auch $x = (x^\mu)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$. Die Differenzen von Ereignissen definieren einen 4-dimensionalen

¹Aufgabe der absoluten Zeit (W. Voigt 1887), Lorentz-Fitzgerald-Kontraktion (1892), richtige Transformationen der Raumkoordinaten (Lorentz 1899), Synchronisation der Uhren (Poincaré 1904), Invarianz der Maxwell-Gleichungen (Lorentz 1904, Einstein 1905 und Poincaré 1906) und Spezielle Relativitätstheorie (Einstein 1905).

Vektorraum V . In einem Inertialsystem haben Elemente aus V die Form

$$\xi^T = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad \text{bzw.} \quad \xi = (\xi^\mu).$$

Wir führen eine Bilinearform ein,

$$(\xi, \chi) = \xi^0 \chi^0 - \xi^1 \chi^1 - \xi^2 \chi^2 - \xi^3 \chi^3, \quad (10.2)$$

welche mit Hilfe des *metrischen Tensors*

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta_{\mu\nu}) \quad \text{bzw.} \quad \eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu})$$

folgendermaßen geschrieben werden kann

$$(\xi, \chi) = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \xi^\mu \chi^\nu = \xi^T \eta \chi. \quad (10.3)$$

Der *lorentzinvariante Abstand* zweier Ereignisse mit Raumzeit-Koordinaten x und y ist

$$d(x, y) = (\xi, \xi), \quad \text{wobei} \quad \xi = y - x \quad (10.4)$$

der Differenzvektor zwischen den Ereignissen ist. Indizes werden mit $\eta_{\mu\nu}$ und $\eta^{\mu\nu}$ hinunter- oder hinaufgezogen, zum Beispiel gelten

$$\xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu \quad \text{bzw.} \quad \xi^\mu = \eta^{\mu\nu} \xi_\nu, \quad \text{so dass} \quad (\xi, \chi) = \xi^\mu \chi_\mu = \xi_\mu \chi^\mu.$$

Wir haben die *Einsteinsche Summenkonvention* benutzt, wonach über doppelt auftretende Indizes (wovon einer kovariant und einer kontravariant sein muss) summiert wird.

Wir betrachten nun ein zweites Inertialsystem I' (das gestrichene System), welches relativ zum ursprünglichen ungestrichenen System in konstanter gleichförmiger Bewegung ist. Das *Äquivalenzprinzip der speziellen Relativitätstheorie* besagt nun, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich aussehen. Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich (Michelson-Morley-Experiment).

Ein Punktereignis werde nun im Inertialsystem I durch die Koordinaten x und im Inertialsystem I' durch die Koordinaten x' beschrieben. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten hat die Form

$$x'^\mu = a^\mu + f^\mu(x), \quad \text{wobei} \quad f^\mu(0) = 0 \quad \text{und} \quad a^\mu = \text{konstant}$$

angenommen werden kann. Wegen der Homogenität des Raumes sind

$$x''^\mu = x'^\mu - a^\mu$$

ebenfalls Koordinaten in einem Inertialsystem I'' . Es gilt dann

$$x''^\mu = f^\mu(x) \quad \text{mit} \quad f^\mu(x=0) = 0.$$

Dies bedeutet, dass die vier Funktionen f^μ den Ursprung in I nach Null abbilden. Wir wollen nun einsehen, dass es lineare Funktionen sein müssen. Dazu betrachten wir ein Teilchen im Inertialsystem I , auf das keine Kraft einwirkt. Seine Weltlinie ist eine Gerade innerhalb des Lichtkegels in I . Vom Inertialsystem I'' aus betrachtet, ist die Weltlinie des kräftefreien Teilchens ebenfalls eine Gerade innerhalb des Lichtkegels. Dies gilt für alle Weltlinien von kräftefreien Teilchen. Die Abbildung $f : x^\mu \rightarrow f^\mu(x)$ bildet deshalb den Ursprung in den Ursprung und Geraden (innerhalb des Lichtkegels) in Geraden ab. Dies bedeutet, dass die die Koordinaten in einem Inertialsystem lineare Funktionen der Koordinaten im anderen Inertialsystem sind: $x''^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, beziehungsweise

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \longleftrightarrow x' = \Lambda x + a. \quad (10.5)$$

Seien nun x die Koordinaten einer zur Zeit y^0 am Orte \mathbf{r}_0 ausgesandten Lichtwelle in I . Bezüglich I' wird dieselbe Lichtwelle zur Zeit y'^0 am Orte \mathbf{r}'_0 ausgesandt und hat die Koordinaten x' . In beiden Inertialsystemen ist die Lichtgeschwindigkeit gleich, so dass gilt

$$0 = (x - y)^T \eta (x - y) = (x' - y')^T \eta (x' - y') = (x - y)^T \Lambda^T \eta \Lambda (x - y).$$

Eine hinreichende Bedingung dafür ist

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \kappa(\Lambda) \eta \quad \text{mit} \quad \kappa(\mathbb{1}) = 1 \quad \text{und} \quad \kappa(\Lambda) > 0.$$

Ist $\kappa \neq 1$, dann können wir durch eine Maßstabsänderung

$$x' \longrightarrow \sqrt{\kappa} x'$$

stets $\kappa = 1$ erreichen. Wir wollen also nur Matrizen Λ betrachten, welche die Bedingung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \iff \Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (10.6)$$

erfüllen. Für solche Transformationen ist das relativistische Abstandsquadrat zweier Ereignisse x, y im Minkowski-Raum unabhängig vom Inertialsystem,

$$(x' - y')^2 = (x' - y')^T \eta (x' - y') = (x - y)^T \eta (x - y) = (x - y)^2. \quad (10.7)$$

Die Menge der Transformationen (10.5)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (10.8)$$

bilden die *Poincare-Gruppe* oder inhomogene Lorentz-Gruppe, die mit iL bezeichnet wird,

$$iL = \left\{ (\Lambda, a) \mid a \in V, \Lambda \in \mathcal{L}(V), \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \right\}. \quad (10.9)$$

Die Gruppenmultiplikation ist durch die Komposition zweier Transformationen gegeben,

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \quad (10.10)$$

Das Inertialsystem I' bewege sich relativ zum Inertialsystem I mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = c \cdot \boldsymbol{\beta}$. Wir führen die Projektoren P_{\parallel} und P_{\perp} in Richtung der Relativgeschwindigkeit und senkrecht dazu ein,

$$P_{\parallel} = \frac{1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^t \quad \text{und} \quad P_{\perp} = \mathbb{1} - P_{\parallel} \quad \text{mit} \quad \beta = |\boldsymbol{\beta}|. \quad (10.11)$$

Dann lautet der Lorentz-Boost

$$x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda = (\Lambda^{\mu}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^t \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & P_{\perp} + \gamma P_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (10.12)$$

mit dem relativistischen γ -Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \in [1, \infty). \quad (10.13)$$

Ein in I' ruhendes Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} im Inertialsystem I . Fallen die Koordinatenursprünge zur Zeit $t = 0$ zusammen und bewegt sich I' längs der ersten Koordinatenachse, dann gilt

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma (x^0 - \beta x^1) & , & \quad x'^2 = x^2 \\ x'^1 &= \gamma (x^1 - \beta x^0) & , & \quad x'^3 = x^3. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Wegen (10.6) haben die Matrizen Λ die Determinante ± 1 ,

$$\det \Lambda^T \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \det \Lambda = \pm 1.$$

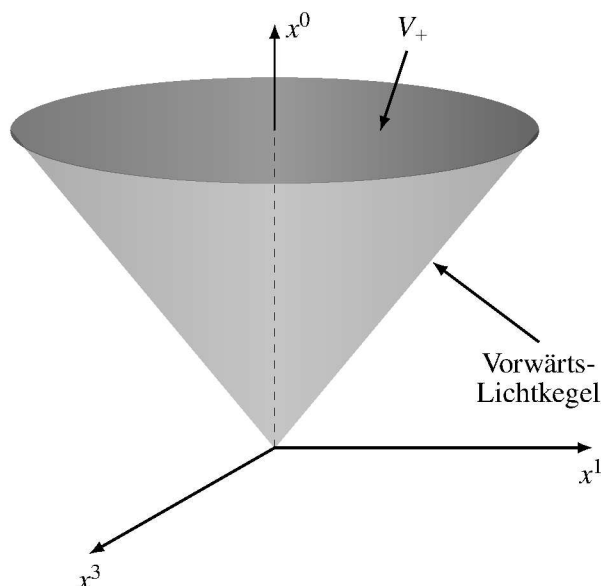
Ist ein Vektor ξ in einem Inertialsystem zeitartig, d.h. ist $(\xi, \xi) > 0$, dann ist er es auch in jedem anderen Inertialsystem. Deshalb bildet eine Lorentz-Transformation Λ das Innere des *Vorwärtslichtkegels*

$$V_+ = \left\{ \xi^0 > 0, (\xi, \xi) > 0 \right\} \quad (10.15)$$

entweder in sich, oder in das Innere des *Rückwärtslichtkegels*

$$V_- = \left\{ \xi^0 < 0, (\xi, \xi) > 0 \right\} \quad (10.16)$$

ab. Im zweiten Fall wird die Zeitrichtung umgekehrt.



In der Tat, das 00-Komponente der Matrixgleichung (10.6) lautet ausgeschrieben

$$\Lambda_0^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda_0^\beta = 1 = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2,$$

und impliziert $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$. Für $\Lambda_0^0 \geq 1$ wird der Vorwärtslichtkegel in sich abgebildet und für $\Lambda_0^0 \leq -1$ in den Rückwärtslichtkegel.

10.2 Ströme, Potentiale und Feldstärke

Einsteins Weg bei der Entdeckung der *speziellen Relativitätstheorie* führte über eine sorgfältige Analyse des Zeit- und Raumbegriffes und einige geistreiche Gedankenexperimente. Wir gehen hier den bequemeren und formaleren Weg über die Invarianz der Maxwell-Gleichungen bezüglich Lorentz-Transformationen. Dabei werden das 4-er Potential A^μ und der 4-er Strom j^μ auftreten.

Eine ruhende Ladung hat eine Ladungsdichte, aber keine Stromdichte. Bewegen wir uns aber relativ zu ihr (oder diese relativ zu uns), dann ordnen wir der jetzt bewegten Ladung neben einer Ladungs- auch eine Stromdichte zu. Beim Übergang zwischen Inertialsystemen transformieren Ladungsdichte und Stromdichte also ineinander. Die Dichten $c\rho$ und \mathbf{j} sind nicht so verschieden, wie sie auf den ersten Blick scheinen. Sie haben die gleiche Einheit und wir können sie zu einer 4-er Stromdichte kombinieren,

$$j = (j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (10.17)$$

Die Notation zeigt an, dass j^μ ein Vektorfeld ist. Dies bedeutet, dass j bei einem Wechsel des Inertialsystems wie ein Vektor transformiert. Sind x und x' Koordinaten in den Inertialsystemen I und I' sowie j^μ und j'^μ die Komponenten der 4-er Stromdichte in den beiden Systemen, dann gilt

$$j'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x) \quad \text{bzw.} \quad j'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu j_\nu(x), \quad \Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta. \quad (10.18)$$

Damit ist festgelegt, wie die Komponenten von j^μ bei einem Wechsel des Inertialsystems transformieren. Die *Kontinuitätsgleichung* (7.46) hat nun die elegante Form

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (10.19)$$

Gilt sie in einem Inertialsystem, dann gilt sie auch in jedem anderen Inertialsystem. Man sagt, die Gleichung ist *kovariant*. Wäre eine Gleichung der Elektrodynamik nicht kovariant, dann würde diese bestimmte Inertialsysteme auszeichnen, im Widerspruch zum Einsteinschen Äquivalenzprinzip.

Nach Einführung der 4-er Notation ist der Beweis der Kovarianz einfach. Aus (10.8) folgt, dass der 4-er Gradient ein Vektoroperator ist,

$$\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu. \quad (10.20)$$

Deshalb gilt

$$\partial'_\mu j'^\mu(x') = (\Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu) (\Lambda^\mu{}_\alpha j^\alpha(x)) \stackrel{(10.6)}{=} \partial_\nu j^\nu(x) = 0$$

und die Koninuitätsgleichung (10.19) gilt in allen Inertialsystemen. Der *Wellenoperator*

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \Delta = \partial_0^2 - \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu \quad (10.21)$$

ist ein invarianter Differentialoperator,

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial'^\mu \partial'_\mu = \square'. \quad (10.22)$$

Eine ruhende Ladung ohne Magnetfeld wird nach (7.47) durch ein skalares Potential beschrieben, während eine bewegte Ladung ein nichtverschwindendes Vektorpotential hat. Die verschiedenen Potentiale gehen bei einem Wechsel des Inertialsystems ineinander über. Diese Tatsache und die Wellengleichungen (7.47) legen nahe, das skalare Potential Φ und Vektorpotential \mathbf{A} , ähnlich wie die Ladungs- und Stromdichte, zu einem 4-er Potential zusammenzufassen,

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \implies A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x). \quad (10.23)$$

Dann nimmt die Lorenz-Eichbedingung (7.42) folgende einfache Form an,

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (10.24)$$

Wie die Kontinuitätsgleichung ist dies eine kovariante Bedingung. Ist sie in einem Inertialsystem erfüllt, dann gilt sie in allen anderen Inertialsystemen. Für Potentiale, die die Lorenz-Eichbedingung erfüllen, lauten die Wellengleichungen (7.47) für isolierte Ladungen und Ströme

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad (\text{Lorenz-Eichung}). \quad (10.25)$$

Wie erwartet, ist dies eine *kovariante* Wellengleichung, wie es sofort aus (10.22) folgt. Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Wellengleichung ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist eine Überlagerung von ebenen Wellen und wird im nächsten Kapitel vorgestellt.

10.3 Relativistische Form der Maxwell-Gleichungen

Wie lauten nun die Maxwell-Gleichungen für die elektromagnetischen Felder (\mathbf{E} , \mathbf{B}) in kovarianter Form? Wir beginnen mit der Umschreibung der Beziehungen zwischen den Feldern und Potentialen, (7.31) und (7.32),

$$\partial_0 A_i - \partial_i A_0 = E_i/c \quad \text{und} \quad \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\varepsilon_{ijk} B_k. \quad (10.26)$$

Nun ist aber das in den Indizes antisymmetrische Feld

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (10.27)$$

ein Tensorfeld, wie man schnell beweist,

$$F'_{\mu\nu}(x') = \partial'_\mu A'_\nu(x') - \partial'_\nu A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta}(x). \quad (10.28)$$

Die 6 linear unabhängigen Komponenten dieses *Feldstärketensors* lauten nach (10.26)

$$F_{0i} = E_i/c \quad \text{und} \quad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k. \quad (10.29)$$

Ausgeschrieben hat der Feldstärketensor die Gestalt,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}/c, \mathbf{B}) \implies (F^{\mu\nu}) = (-\mathbf{E}/c, \mathbf{B}). \quad (10.30)$$

Zur relativistischen Formulierung der Maxwell-Gleichungen im freien Raum benutzt man die Umkehrtransformation zu (10.29),

$$E_i = cF_{0i} \quad \text{und} \quad B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}. \quad (10.31)$$

Wir werden nun zeigen, dass die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0, \quad (10.32)$$

identisch zu den kovarianten Gleichungen

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu} = 0 \quad (10.33)$$

für den Feldstärketensor sind. Dies bedeutet, dass die 4-er Rotation des Feldstärketensors verschwindet. Beachte, dass die linke Seite vollständig antisymmetrisch in den Indizes ist. Vertauschen wir zum Beispiel die Indizes μ und ν und berücksichtigen die Antisymmetrie des Feldstärketensors, so ändert die linke Seite in (10.33) das Vorzeichen:

$$\text{LS}(\nu, \mu, \rho) = F_{\nu\mu,\rho} + F_{\rho\nu,\mu} + F_{\mu\rho,\nu} = -F_{\mu\nu,\rho} - F_{\nu\rho,\mu} - F_{\rho\mu,\nu} = -\text{LS}(\mu, \nu, \rho).$$

Um zu beweisen, dass (10.33) nur eine Umschreibung der homogenen Maxwell-Gleichungen ist, betrachten wir die verschiedenen nicht-trivialen Fälle:

μ, ν, ρ	$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu}$
$i, j, 0$	$F_{ij,0} + F_{0i,j} + F_{j0,i} = 0$
i, j, k	$F_{ij,k} + F_{ki,j} + F_{jk,i} = 0$

Die erste Zeile ergibt die zweite Maxwell-Gleichung in (10.32):

$$c \cdot (1. \text{ Zeile}) = -\varepsilon_{ijk}c\partial_0 B_k + (\partial_j E_i - \partial_i E_j) = -\varepsilon_{ijk}(\partial_t B_k + \varepsilon_{kpq}\partial_p E_q) = 0,$$

wobei wir die nützliche Identität

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

gebrauchten.

Die zweite Zeile ist identisch zur ersten Maxwell-Gleichung in (10.32). In der Tat, wegen der vollständigen Antisymmetrie der letzten Zeile in i, j, k genügt es, den Fall 1, 2, 3 zu untersuchen:

$$\partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} = -(\partial_1 B_1 + \partial_3 B_3 + \partial_2 B_2) = -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Um die inhomogenen Gleichungen (vorerst im Vakuum mit isolierten Quellen)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (10.34)$$

umzuschreiben, berechnen wir die 4-er Divergenz des Feldstärketensors

$$(\partial_\mu F^{\mu\nu}) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und erinnern uns an die Definition des 4-er Stromes, $(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j})$ und die Identität $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. Damit findet man für die *inhomogenen Maxwell-Gleichungen* die an Eleganz kaum noch zu überbietende Form

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (10.35)$$

Wegen der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ ist die Kontinuitätsgleichung $\partial_\nu j^\nu = 0$ offensichtlich. Schreibt man den Feldstärketensor wie in (10.27) als 4-er Rotation des Potentials, so sind die homogenen Maxwell-Gleichungen (10.33) automatisch erfüllt. Die Umkehrung gilt (in einfach zusammenhängenden Gebieten) ebenfalls: Jeder Feldstärketensor, welcher (10.33) erfüllt, hat die Form (10.27) mit einem Vektorfeld A_μ .

Unter einer Eichtransformation (7.36,7.37) transformiert das 4-er Potential gemäß

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \lambda, \quad (10.36)$$

und der Feldstärketensor ist invariant. In der kovarianten Schreibweise ist diese Invarianz offensichtlich

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \longrightarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - (\partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu \partial_\mu \lambda) = F_{\mu\nu}.$$

10.3.1 Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

Im Einklang mit dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip führen Lorentz-Transformationen Lösungen der Maxwell-Gleichungen in Lösungen über. Es sei nun

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}' = 0 \quad (10.37)$$

das Feld einer im Ursprung des Inertialsystems I' ruhenden Punktladung. Wir wollen nun bestimmen, wie die Felder in einem relativ zu I' bewegten Inertialsystem I aussehen. Im System I bewegt sich das Punktteilchen gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit.

Es bezeichnen x und x' die Koordinaten der Inertialsysteme. Bewegt sich I' entlang der z -Achse relativ zu I , dann lautet die Lorentz-Transformation

$$x = \Lambda x', \quad \Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (10.38)$$

Wir machen nun Gebrauch von der Transformationsformel (10.28) für das elektromagnetische Feld. Darin tritt $\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta$ auf, dass man aus $(\Lambda^\mu{}_\nu)$ durch einen Vorzeichenumkehr von β erhält. Mit (10.30) ergeben sich dann die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \gamma (E'_1(x') + \beta c B_2(x')) & , & \quad c B_1(x) = \gamma (c B'_1(x') - \beta E_2(x')) \\ E_2(x) &= \gamma (E'_2(x') + \beta c B_1(x')) & , & \quad c B_2(x) = \gamma (c B'_2(x') + \beta E_1(x')) \\ E_3(x) &= E'_3(x') & , & \quad B_3(x) = B'_3(x'). \end{aligned} \quad (10.39)$$

Für eine in I' ruhende Punktladung verschwindet das Magnetfeld \mathbf{B}' und diese Formeln vereinfachen sich. Setzen wir noch

$$r'^2 = \gamma^2 (z - vt)^2 + x^2 + y^2, \quad (10.40)$$

dann hat das elektromagnetische Feld einer längs der z -Achse mit konstanter Geschwindigkeit $v = \beta c$ bewegten Punktladung die Form

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r'^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - vt \end{pmatrix}, \quad c\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\gamma v}{r'^3} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.41)$$

Das elektrische Feld steht senkrecht auf dem magnetischen Feld in Einklang mit der Tatsache, dass $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ eine lorentzinvariante Größe ist.

Für einen allgemeinen Lorentz-Boost zwischen Inertialsystemen mit Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} führen wir den Projektor P_{\parallel} auf die Relativgeschwindigkeit, siehe (10.11). Die Felder können dann in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Relativgeschwindigkeit zerlegt werden, zum Beispiel

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} = P_{\parallel} \mathbf{E} + P_{\perp} \mathbf{E}, \quad P_{\perp} = \mathbb{1} - P_{\parallel}.$$

Dann lauten die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}'_{\parallel}(x') + \gamma (\mathbf{E}'_{\perp}(x') - \mathbf{v} \times \mathbf{B}'(x')) \\ \mathbf{B}(x) &= \mathbf{B}'_{\parallel}(x') + \gamma (\mathbf{B}'_{\perp}(x') + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'(x')/c) . \end{aligned} \quad (10.42)$$

Wir betrachten nun das Feld einer in z -Richtung bewegten Ladung etwas genauer. Dazu schreiben wir das elektrische Feld in (10.41) in der Form

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{[(ct - \beta z)^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2 t^2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - vt \end{pmatrix} . \quad (10.43)$$

Es sei nun α der Winkel zwischen den Kraftlinien des elektrischen Feldes und dem Geschwindigkeitsvektor, siehe Abbildung 10.1.

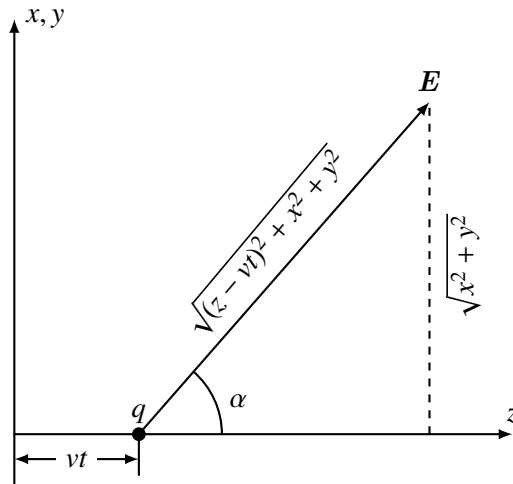


Abbildung 10.1: Zur Richtungsabhängigkeit der Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung.

Aus der Abbildung lesen wir folgende Beziehung ab:

$$\sin^2 \alpha = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (z - vt)^2} . \quad (10.44)$$

Mithilfe der daraus resultierenden Identität

$$1 - \beta^2 \sin^2 \alpha = \frac{(\beta z - ct)^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2 t^2)}{(r - vt)^2} ,$$

können das elektrische Feld in folgende Form bringen

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{vt}}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^3}. \quad (10.45)$$

Man sieht hier deutlich, dass die Feldlinien geradlinig vom Ort \mathbf{vt} der Ladung ausgehen. Der Betrag des elektrischen Feldes

$$|\mathbf{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^2} \quad (10.46)$$

ist jedoch keineswegs kugelsymmetrisch. Er hängt vom Winkel zwischen Geschwindigkeit und Richtung der Kraftlinien ab. In Richtung der Geschwindigkeit ist er am kleinsten, senkrecht dazu am größten

$$E_{\min} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^2} \quad \text{und} \quad E_{\max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^2}. \quad (10.47)$$

Also ist

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \gamma^3 = \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3. \quad (10.48)$$

In dem Maß, wie die Geschwindigkeit des Teilchens sich der Lichtgeschwindigkeit nähert, konzentriert sich also das ganze Feld auf eine flache, senkrecht zur Bahn orientierte Scheibe. Zum Beispiel für Elektronen mit 1 MeV ist $\beta \sim 0.94$ und entsprechend ist das Verhältnis etwa 10. An dem vorgeschlagenen Elektronenbeschleuniger ELFE hätten die Elektronen etwa eine Energie $E \sim 15 - 30$ GeV und es wäre

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \left(\frac{(15 - 30) \cdot 10^3}{0.5} \right)^3 \sim (27 - 216) \cdot 10^{12}.$$

Im Grenzfall $v \rightarrow c$ wird die Feldstärke in der Scheibe unendlich.

10.4 Erhaltungssätze für Energie und Impuls

Jeder erhaltene Vierer-Strom $(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j})$ definiert eine erhaltene Ladung,

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies \frac{d}{dx^0} \int d^3x j^0 = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = - \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

Die Stromdichte soll im räumlich Unendlichen so schnell abfallen, dass bei der partiellen Integration keine Oberflächenterme auftreten. Dann gilt

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies \frac{d}{dt} Q = 0, \quad Q = \int d^3x j^0. \quad (10.49)$$

Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist ein wichtiges Beispiel, wurde aber schon hinreichend oft diskutiert.

Homogene und isotrope lineare Medien

In polarisierbaren und magnetisierbaren Medien ändern sich die homogenen Maxwell-Gleichungen (10.33) nicht, die inhomogenen aber sehr wohl. Man führt neben dem Feldstärketensor die antisymmetrischen Größe

$$(\mathcal{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -cD_1 & -cD_2 & -cD_3 \\ cD_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ cD_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ cD_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.50)$$

ein. Dann schreiben sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen gemäß

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j_f^\nu. \quad (10.51)$$

Im Vakuum ist $F^{\mu\nu} = \mu_0 \mathcal{F}^{\mu\nu}$. Für Medien sind $F^{\mu\nu}$ und $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ im Allgemeinen nicht mehr proportional zueinander. Selbst in linearen und isotropen Medien hängt die gegenseitige Beziehung von den Materialkonstanten μ_r und ϵ_r ab.

Wir wenden uns deshalb der Erhaltung von Energie und Impuls zu. Folgende Umformungen sind dabei hilfreich

$$F_{\mu\nu} j_f^\nu = F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu}{}_{,\rho} = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\rho} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu}{}_{,\rho} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\rho} \mathcal{F}^{\rho\nu}.$$

Wir benutzen die homogenen Maxwell-Gleichungen (10.33) in der Form

$$F_{\mu\nu,\rho} = -F_{\rho\mu,\nu} - F_{\nu\rho,\mu},$$

um den letzten Term umzuschreiben, und erhalten

$$F_{\mu\nu} j_f^\nu = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\rho} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu}{}_{,\rho} + \frac{1}{2} F_{\rho\mu,\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu} + \frac{1}{2} F_{\nu\rho,\mu} \mathcal{F}^{\rho\nu}.$$

Mit Hilfe der Identität

$$F_{\rho\mu,\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu} = F_{\nu\mu,\rho} \mathcal{F}^{\nu\rho} = F_{\mu\nu,\rho} \mathcal{F}^{\rho\nu}$$

formen wir den zweitletzten Term um und finden

$$F_{\mu\nu} j_f^\nu = (F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\rho} - \frac{1}{2} F_{\rho\nu,\mu} \mathcal{F}^{\rho\nu}.$$

Falls nun F und \mathcal{F} *linear* und mit konstanten Koeffizienten verknüpft sind, dann kann der letzte

Term folgendermaßen geschrieben werden,

$$\frac{1}{2}F_{\rho\nu,\mu}\mathcal{F}^{\rho\nu} = \frac{1}{4}(F_{\rho\nu}\mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\mu}.$$

Damit gelten für *lineare homogene Medien* die 4 Bilanzgleichungen

$$F_{\mu\nu}j_f^\nu + T_\mu^\nu{}_{,\nu} = 0 \quad \text{mit} \quad T_\mu^\nu = -\left(F_{\mu\rho}\mathcal{F}^{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_\mu^\nu F_{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\rho\sigma}\right). \quad (10.52)$$

Diese vier Identitäten sind gerade der Erhaltungssatz für *Energie und Impuls*. Um dies einzusehen, spalten wir $F_{\mu\nu}j_f^\nu$ in Raum- und Zeitkomponenten auf,

$$\begin{aligned} F_{0\nu}j_f^\nu &= F_{0i}j_f^i = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_f/c, \\ F_{i\nu}j_f^\nu &= F_{i0}c\rho_f + F_{ij}j_f^j = -E_i\rho_f - (\mathbf{j}_f \times \mathbf{B})_i. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Die auf den rechten Seiten auftretenden Größen sind

- Die vom elektrischen Feld an der strömenden Elektrizität geleistete Arbeit pro Raumelement $\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}/c$. Sie wird im Allgemeinen in Wärme umgewandelt und heißt *Joulesche Wärme*.
- Die vom Magnetfeld \mathbf{B} auf eine Stromverteilung \mathbf{j} ausgeübte Kraftdichte $\mathbf{j}_f \times \mathbf{B}$. Man erinnere sich daran, dass die auf ein geladenes Teilchen wirkende Kraft im Magnetfeld $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ist.
- Die vom elektrischen Feld \mathbf{E} auf eine Ladungsverteilung ausgeübte Kraftdichte $\rho_f\mathbf{E}$. Dies ist die Kontinuumsversion der Kraft $q\mathbf{E}$ auf ein geladenes Teilchen.

Ohne freie Ladungsträger ist T_μ^ν kovariant erhalten, $\partial_\nu T_\mu^\nu = 0$. Mit Hilfe des Tensors $T^{\mu\nu}$ können wir im ladungsfreien Raum vier zeitlich erhaltene Ladungen definieren,

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}(x). \quad (10.54)$$

Der erhaltene 4-er Vektor P^μ enthält die Energie P^0 und den Impuls \mathbf{P} des elektromagnetischen Feldes. Deshalb heißt $T^{\mu\nu}$ Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Zur Begründung spalten wir T_μ^ν in Zeit- und Raumkomponenten auf. Dazu bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\nu\rho} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} & c^{-1}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})^t \\ c\mathbf{B} \times \mathbf{D} & \mathbf{E}\mathbf{D}^t + \mathbf{H}\mathbf{B}^t - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\nu\mu} &= 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \end{aligned}$$

ist. Es folgt, dass der Energie-Impuls-Tensor folgende Form hat

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} & 2c^{-1} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^t \\ 2c\mathbf{B} \times \mathbf{D} & (2\mathbf{E}\mathbf{D}^t - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\mathbb{1}) + (2\mathbf{H}\mathbf{B}^t - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\mathbb{1}) \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

Die Erhaltungssätze (10.52) nehmen jetzt eine verständlichere Form an:

Die zeitliche Komponente von (10.52) lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} &= -\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E}, & u &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (10.56)$$

In der Elektrostatik haben wir (für lineare Medien) gezeigt, dass $u_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/2$ die Energiedichte des elektrischen Feldes ist. In den Übungen haben Sie sich davon überzeugt, dass $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/2$ die Energiedichte des magnetischen Feldes ist. Deshalb interpretieren wir $\partial_t u$ in der obigen Formel als zeitliche Änderung der Energiedichte des Feldes. Der *Poynting'sche Satz* (10.56) ist die Energiebilanz im elektromagnetischen Feld: Die linke Seite entspricht dem Energieaustausch zwischen dem betrachteten Volumenelement und seinen Nachbarelementen und die rechte Seite den Verlusten durch die Erzeugung von Joulescher Wärme.

Die Interpretation des Quellterms auf der linken Seite wird noch deutlicher, wenn wir (10.56) räumlich integrieren; dann haben wir bei Benutzung des Gaußschen Satzes

$$\frac{d}{dt} \int d^3x u + \oint d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S} = - \int d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_f. \quad (10.57)$$

Die Bedeutung des nach POYNTING benannten Vektors \mathbf{S} als *Energieflussdichte* des elektromagnetischen Feldes ist daraus ersichtlich. \mathbf{S} zeigt in Richtung des Energieflusses und sein Betrag gibt an, wie viel Feldenergie pro Zeit durch ein Flächenelement (\perp zu \mathbf{S}) fließt.

Die räumlichen Komponenten von (10.52) lauten

$$\partial_j T_{ij} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_i - \rho_f E_i - (\mathbf{j}_f \times \mathbf{B})_i \quad (10.58)$$

$$T_{ij} = \delta_{ij} u - (E_i D_j + H_i B_j). \quad (10.59)$$

Der Tensor² T_{ij} heißt *Maxwellscher Spannungstensor*. Bezeichnet man die Summe sämtlicher Impulse der Teilchen innerhalb V mit \mathbf{P}_{mech} , so ist nach dem 2. Newtonschen Gesetz die zeitliche Änderung ihres Gesamtimpulses gleich der über V integrierten Kraftdichte,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{mech}} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) d^3r. \quad (10.60)$$

Zur Interpretation von (10.58) integrieren wir diese Bilanzgleichung über ein beliebiges Raum-

²Tensor bezüglich der räumlichen Drehungen.

gebiet V mit dem Resultat

$$\frac{d}{dt}P_{\text{mech},i} + \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_i = - \oint T_{ij} df_j. \quad (10.61)$$

Diese Gleichung legt nahe, das Volumenintegral auf der linken Seite als Gesamtimpuls \mathbf{P}_{feld} der in V vorhandenen elektromagnetischen Felder zu identifizieren,

$$\mathbf{P}_{\text{feld}} = \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) d^3r, \quad (10.62)$$

und den Integranden als *Impulsdichte des Feldes*. Damit ist die Variation des Gesamtimpulses von Materie und Feld gleich

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{\text{mech}} + \mathbf{P}_{\text{feld}}) = - \oint T_{ij} df_j. \quad (10.63)$$

Deshalb ist $\sum_j T_{ij} n_j$, wobei \mathbf{n} die nach außen gerichtete Flächennormale an ∂V ist, als die i 'te Komponente des auf die Flächeneinheit bezogenen *Impulsstromes* zu interpretieren.

In Abwesenheit von materiellen Teilchen werden die 3 Gleichungen (10.58) zu Kontinuitätsgleichungen und besagen, dass die Änderung des Feldimpulses innerhalb V gleich dem Impulsfluss aus ∂V ist. Für einen räumlich schnell abfallenden Spannungstensor ist der gesamte Feldimpuls zeitlich erhalten. Diese Bilanzgleichungen und die entsprechende Bilanzgleichung für die Energie heißen *Minkowskische Gleichungen*.

Eigenschaften von $T_{\mu\nu}$:

Der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldes in (10.55) ist spurlos,

$$T_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (10.64)$$

Die Quanten des elektromagnetischen Feldes, die *Photonen*, sind masselos. Die Spurfreiheit von $T_{\mu\nu}$ ist eng mit dieser Eigenschaft der Lichtteilchen verknüpft.

Der Energie-Impuls-Tensor mit kontravarianten Indizes

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) & c^{-1}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})^t \\ c\mathbf{D} \times \mathbf{B} & \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbb{1} - \mathbf{E}\mathbf{D}^t - \mathbf{H}\mathbf{B}^t \end{pmatrix} \quad (10.65)$$

ist im Allgemeinen nicht symmetrisch. Nur für verschwindende Polarisation und Magnetisierung wird er symmetrisch,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_0}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2 & 2c(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^t \\ 2c\mathbf{E} \times \mathbf{B} & (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2)\mathbb{1} - 2\mathbf{E}\mathbf{E}^t - 2c^2 \mathbf{B}\mathbf{B}^t \end{pmatrix}. \quad (10.66)$$

Die fehlende Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors in makroskopischen Medien hat viele Phy-

siker gestört. Für Modifikationen des Tensors in Medien verweise ich auf die Literatur³.

³siehe z.B. L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Elektrodynamik der Kontinua, Abschnitte 10,15 und 34; I. Brevik, Videns. Sels. Mat.-fys. Medd. 37 (1970) No. 11 und No. 13.