

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Physikalisch-Astronomische Fakultät

Theoretisch-Physikalisches Institut



---

Graphische Entwicklung der Zustandssumme für das  
supersymmetrische nichtlineare  $\sigma$ -Modell in  $(1+0)D$

---

## Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science (B. Sc.)

eingereicht am 26. September 2013

eingereicht von:

Maximilian Schambach

geboren am 16.02.1990

in Kassel

Gutachter:

Prof. Dr. Andreas Wipf

Dipl.-Phys. Daniel Körner



---

## Abstract

In der vorliegenden Arbeit wird eine graphische Entwicklung des fermionischen Anteils der Zustandssumme des supersymmetrischen nichtlinearen  $\sigma$ -Modells in  $(1 + 0)$  Dimensionen durchgeführt. Es zeigt sich, dass nur über den Rand geschlossene, nicht zusammenziehbare und nicht zurücklaufende, ein- bis  $(N-1)$  strangige Graphen, welche sich untereinander nicht schneiden, zur Zustandssumme beitragen. Das Gewicht eines Graphen wird mithilfe eines für jeden Flavor und Ort des Gitters definierten Punktgewichts in geschlossener Form ausgearbeitet. Die Ausintegration des mit der Hubbard-Stratonovich Transformation eingeführten  $\sigma$ -Hilfsfeldes wird für alle möglichen Fälle angegeben. Im Gegensatz dazu wird eine mögliche analytische Behandlung der Integration der bosonischen Felder, z.B. in Form einer weiteren graphischen Entwicklung, nur angedeutet und auf eine Monte-Carlo Simulation verwiesen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Feynmansche Pfadintegrale . . . . .	4
2.2	Fermionen . . . . .	7
2.3	Symmetrien in der theoretischen Physik . . . . .	9
2.3.1	Supersymmetrie . . . . .	9
2.3.2	$O(N)$ -Symmetrie . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Das Ising-Modell</b>	<b>11</b>
3.1	Graphische Entwicklung der Zustandssumme . . . . .	11
3.1.1	Graphische Entwicklung in zwei Dimensionen . . . . .	12
3.1.2	Graphische Entwicklung in $D$ Dimensionen . . . . .	15
3.2	Graphische Entwicklung der Zweipunktsfunktion . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Das supersymmetrische nichtlineare <math>\sigma</math>-Modell</b>	<b>18</b>
4.1	Das supersymmetrische nichtlineare $\sigma$ -Modell in $(1 + 1)D$ . . . . .	18
4.2	Das supersymmetrische nichtlineare $\sigma$ -Modell in $(1 + 0)D$ . . . . .	19
4.2.1	Chirale Symmetrie . . . . .	20
4.3	Graphische Entwicklung der Zustandssumme des supersymmetrischen nichtlinearen $\sigma$ -Modells in $(1 + 0)D$ . . . . .	21
4.3.1	Fermionischer Anteil . . . . .	21
4.3.2	Entwicklung für einen Freiheitsgrad . . . . .	23
4.3.3	Entwicklung für zwei Freiheitsgrade . . . . .	25
4.3.4	Entwicklung für drei und mehr Freiheitsgrade . . . . .	34
4.3.5	Vorzeichen des Gewichts . . . . .	40
4.3.6	Integration des $\sigma$ -Hilfsfeldes . . . . .	41
4.3.7	Betrachtung der Integration der bosonischen Felder . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>45</b>
<b>A</b>	<b>Konventionen</b>	<b>46</b>
<b>B</b>	<b>Grassmannzahlen</b>	<b>49</b>
<b>C</b>	<b>Hubbard-Stratonovich Transformation</b>	<b>52</b>
<b>D</b>	<b>Das <math>O(N)</math> Modell</b>	<b>53</b>
D.1	Propagator des bosonischen $O(N)$ Modells . . . . .	53
D.2	Zustandssumme des $O(N)$ Modells . . . . .	59
D.3	Zustandssumme des $O(3)$ Modells . . . . .	60
<b>E</b>	<b>Danksagung</b>	<b>62</b>
<b>F</b>	<b>Selbstständigkeitserklärung</b>	<b>62</b>



---

# 1 Einleitung und Motivation

Eine Theorie zur Beschreibung der Elementarteilchen und der starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung ist das *Standardmodell der Teilchenphysik*. Alle Elementarteilchen des Standardmodells sind experimentell bestätigt und es wurden noch keine Elementarteilchen entdeckt, die nicht durch das Modell beschrieben werden<sup>1</sup>. Allerdings ist die Theorie mit vielen Problemen konfrontiert. So ist das Standardmodell nicht in der Lage gravitative Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie zu beschreiben. Darüber hinaus gibt es Hinweise, dass das Neutrino im Gegensatz zu den Vorhersagen des Standardmodells nicht masselos ist. Insbesondere auch in der Kosmologie gibt es einige durch das Standardmodell nicht geklärte Phänomene. So stellt man bei der Untersuchung der Rotation von Galaxien fest, dass ein Großteil der für die Gravitation verantwortlichen Masse ausschließlich gravitativ wechselwirkend und somit nicht beobachtbar ist. Eine Beschreibung dieser *dunklen Materie* ist eine der großen offenen Fragen der Astrophysik und durch das Standardmodell nicht beantwortet. Es ist daher erstrebenswert eine übergeordnete, alle bekannten Wechselwirkungen vereinheitlichende Theorie zu finden. Kandidaten für vereinheitlichende Theorien sind beispielsweise die String-Theorien, von denen angenommen wird, dass sie als Grenzfall aus der M-Theorie hervorgehen<sup>2</sup>. Voraussagen dieser String-Theorien enthalten eine neuartige Symmetrie der Elementarteilchen, die sogenannte *Supersymmetrie*. Aber nicht nur im Rahmen von String-Theorien ist die Supersymmetrie ein wichtiger Teil aktueller Forschung, da sie in der Lage ist, auch ohne String-Theorien, Probleme des Standardmodells, wie beispielsweise das Hierarchieproblem, zu lösen. Dies führt unter anderem auf die kleinste supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells, das sogenannte minimale supersymmetrische Standardmodell. Das Hierarchieproblem bezeichnet dabei, vereinfacht gesagt, eine ungeklärte Diskrepanz der Größenordnungen der fundamentalen Kopplungskonstanten der Grundkräfte. Um mit dem Experiment übereinstimmende Ergebnisse aus dem Standardmodell extrahieren zu können, ist eine sogenannte Feinabstimmung der Kopplungskonstanten notwendig. Diese Feinabstimmung, und die daraus resultierenden Größenordnungen der fundamentalen Wechselwirkungen, scheint künstlich. So ist beispielsweise die schwache Wechselwirkung um 32 Größenordnungen stärker als die Gravitation. Die Supersymmetrie erweitert das Standardmodell so, dass eine Feinabstimmung, im Falle einer exakten Supersymmetrie, nicht mehr nötig ist.

---

<sup>1</sup>Auch wenn die Existenz des Higgs-Bosons noch nicht vollends gesichert ist, so ist anzunehmen, dass das Standardmodell auch hier korrekte Vorhersagen trifft (Siehe Pressemitteilung vom CERN vom 14.03.2013 <http://press.web.cern.ch/press-releases/2013/03/new-results-indicate-particle-discovered-cern-higgs-boson>, zuletzt aufgerufen am 10.09.2013).

<sup>2</sup>Die prinzipiellen Ideen der String-Theorien sind in [24] erläutert.

Die Untersuchung quantenfeldtheoretischer Modelle, ob mit oder ohne Supersymmetrie, ist mathematisch aufwendig. Im Bereichen hoher Energien und kleiner Kopplungskonstanten können störungstheoretische Berechnungen angestellt werden (Feynman Diagramme). Ist man jedoch an Systemen mit großen Kopplungskonstanten interessiert, zum Beispiel im Bereich der Quantenchromodynamik, so ist man auf alternative Methoden angewiesen. Vor allem die Computersimulation hat aufgrund des immensen technischen Fortschritts in den letzten Jahrzehnten hierfür stark an Bedeutung gewonnen. Die Simulation supersymmetrischer Modelle ist jedoch aufwendig, da supersymmetrische Modelle immer bosonische und fermionische Freiheitsgrade enthalten. Während bosonische Modelle effektiv mit Monte-Carlo basierten Verfahren untersucht werden können (z.B. Metropolis-Algorithmus), ist die Implementation fermionischer Systeme aufwendiger, bzw. ineffizient: Zum einen ist die Berechnung der Fermionendeterminante, welche man aus der Integration der fermionischen Felder erhält, prinzipiell sehr rechenaufwendig, da numerische Determinantenberechnung im Rechenaufwand proportional zur dritten Potenz der Gitterpunkte ist (vgl. [22, Kap.15]). Darüber hinaus ist die Fermionendeterminante eine nicht-lokale Größe und muss an jedem Gitterpunkt ausgewertet werden, womit der Rechenaufwand auf die vierte Potenz der Gitterpunkte steigt. Zum anderen tritt bei fermionischen Systemen das sogenannte *Vorzeichenproblem* auf: Da die Fermionendeterminante sowohl positive als auch negative Vorzeichen annehmen kann, ist der Erwartungswert von Observablen nicht mehr wohldefiniert. Eine Vergrößerung der Konfigurationen ist aufgrund des oben genannten Rechenaufwands zur Determinantenverechnung nicht effizient.

Ein Ansatz zur effizienten Simulation fermionischer Systeme ist der von PROKOF'EV und SVISTUNOV vorgestellte Wurm-Algorithmus [18]. Während einfache Monte-Carlo Verfahren Gaußverteilte Pfadkonfigurationen generieren, um die Korrelationsfunktion als Erwartungswert im Ensemble der Pfade zu berechnen, erzeugt der Wurm-Algorithmus offene Graphen, aus deren Gewichte sich durch Summation die Zustandssumme oder Korrelationsfunktionen berechnen lassen. Statt einer Pfadintegralrepräsentation ist hierzu jedoch eine graphische Entwicklung der Zustandssumme bzw. der Korrelationsfunktionen notwendig, welche gewöhnlicherweise in einer Hochtemperatur- oder Hoppingexpansion durchgeführt wird [16]. Die grundlegende Idee des Wurm-Algorithmus ist dabei die Erweiterung des Konfigurationsraums der Graphen, um eine offene Verbindung zuzulassen (vgl. Zweipunktsfunktion im Ising-Modell und Abbildung 3.1). Es ist auch die Simulation mehrerer solcher Verbindungslinien möglich, beispielsweise zur Berechnung von Korrelationsfunktionen höherer Ordnung. Durch ein Schließen der offenen Verbindung (sogenannter  $G$ -Pfad, da diese auch zur Berechnung der Greensfunktion  $G$  benutzt werden) gelangt man zu einem  $Z$ -Pfad, also einer Simulation der Zustandssumme. Dies wird im Fall für das Ising-Modell noch weiter erläutert, vgl. Kapitel 3.2. Die Generierung (*updates*) dieser Pfade erfolgt dann ausschließlich



---

durch die Endpunkte (*Defekte*) der offenen Verbindung [17]. *Lokal* betrachtet ist der Wurm-Algorithmus auch ein Metropolis Schema, allerdings leidet dieser nicht unter Verlangsamung an den thermodynamischen kritischen Punkten (*critical slowing-down*). Untersuchungen des Wurm-Algorithmus für für das Ising-Modell sind in [26] dargelegt. Eine graphische Entwicklung fermionische Systeme ist für freie Fermionen in [25] sowie für das Gross-Neveu- und das Schwinger-Modell in [21] und [14] unter Verwendung von Wilson-Fermionen durchgeführt worden. Die Effizienz des Wurm-Algorithmus wurde in diesen Anwendungen bestätigt.

Um zu einer graphischen Entwicklung des supersymmetrischen  $\sigma$ -Modells zu gelangen, wird in dieser Arbeit, nach einer kurzen Darstellung der nötigen physikalischen Grundlagen in Kapitel 2, zunächst eine graphische Entwicklung des Ising-Modells in Kapitel 3 durchgeführt. Dies dient zur Demonstration der prinzipiellen Ideen graphischer Entwicklungen. In Kapitel 4 wird dann das Wirkungsfunktional des supersymmetrischen nichtlinearen  $\sigma$ -Modells auf eine Raumzeitdimension kompaktifiziert und die Zustandssumme in einen fermionischen und bosonischen sowie Hilfsfeldanteil getrennt. Der fermionische Teil wird dann in einer graphischen Entwicklung dargestellt. Dies geschieht zunächst im Fall eines, zweier und schließlich dreier und beliebig vieler fermionischer (und bosonischer) Freiheitsgrade.

Im Anhang sind die in dieser Arbeit verwendeten Konventionen, vor allem bezüglich der Darstellung der Majorana-Spinoren und  $\gamma$ -Matrizen, sowie eine Einführung im Umgang mit Grassmannzahlen gegeben. Zusätzlich finden sich dort eine Einführung in die Hubbard-Stratonovich-Transformation und die Berechnung des Propagators und der Zustandssumme des bosonischen  $O(N)$ -Modells, um es mit dem bosonischen Anteil des  $\sigma$ -Modells vergleichen zu können.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Feynmansche Pfadintegrale

Der Pfadintegralformalismus bietet einen zur Wellen- und Matrizenmechanik alternativen Zugang zur Quantenmechanik. Die durch ERWIN SCHRÖDINGER bzw. WERNER HEISENBERG entwickelten Formalismen zur Beschreibung der Quantenmechanik basieren auf einer Verallgemeinerung des Hamilton-Formalismus der klassischen Mechanik. So wird in der Schrödinger-Gleichung die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems mit Hilfe des Hamilton-Operators  $H$ , der Verallgemeinerung der klassischen Hamilton-Funktion, beschrieben. Analog zur klassischen Mechanik, die äquivalent durch den Hamilton- oder den Lagrange-Formalismus beschrieben werden kann, suchte RICHARD P. FEYNMAN in den 1940er Jahren nach einer auf dem Lagrangeschen-Wirkungsprinzip basierenden Formulierung der Quantenmechanik. Nachdem FEYNMAN auf eine Veröffentlichung von PAUL DIRAC [6] stieß, in welcher DIRAC das Wirkungsprinzip auf den infinitesimalen Propagator überträgt, gelang FEYNMAN schließlich eine auf dem Wirkungsprinzip basierende Formulierung für die Zeitentwicklung nicht relativistischer quantenmechanischer Systeme [7].

Die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Systems, bzw. der durch die Vektoren eines Hilbertraums beschriebenen Zustände  $|\psi\rangle$ , wird durch den Zeitentwicklungsoperator  $U$  beschrieben. Der evolvierte Zustand ergibt sich dann aus der Anwendung des Zeitentwicklungsoperators auf den ursprünglichen Zustand:

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle . \quad (2.1)$$

Es gilt für zeitunabhängige Hamilton-Operatoren  $H$ :

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} . \quad (2.2)$$

Der *Propagator* (oder Integralkern des Zeitentwicklungsoperators  $U$ )

$$K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) := \langle \mathbf{x}_b | U(t_b, t_a) | \mathbf{x}_a \rangle , \quad (2.3)$$

welcher die Wahrscheinlichkeitsamplitude, ein Teilchen, welches sich zur Zeit  $t_a$  in  $\mathbf{x}_a$  befindet zur Zeit  $t_b$  in  $\mathbf{x}_b$  vorzufinden, angibt, lässt sich als Integral über *alle* möglichen Pfade zwischen  $\mathbf{x}_a$  und  $\mathbf{x}_b$  angeben. Man schreibt formal:

$$K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = \int_{\mathbf{x}(t_a)=\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}(t_b)=\mathbf{x}_b} \mathcal{D}\mathbf{x} e^{\frac{i}{\hbar}S[\mathbf{x}]} , \quad (2.4)$$

mit der zur klassischen Mechanik analogen Definition der Wirkung

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) . \quad (2.5)$$

Es bezeichnet dabei  $L$  die Lagrange-Funktion des Systems. Im Allgemeinen definiert man dieses *Pfadintegral* als Grenzwert von endlich vielen Lebesgue-Integralen. In dieser diskreten Formulierung gilt dann:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) &= \int_{\mathbf{x}(t_a)=\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}(t_b)=\mathbf{x}_b} \mathcal{D}\mathbf{x} e^{\frac{i}{\hbar}S[\mathbf{x}]} \\ &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar \epsilon / m}} \prod_{n=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{x}_n}{\sqrt{2\pi i \hbar \epsilon / m}} e^{\frac{i}{\hbar}S_N[\mathbf{x}]} \right] , \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(i\epsilon + t_a)$ ,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_a$ ,  $\mathbf{x}_{N+1} = \mathbf{x}_b$  und  $\epsilon = \frac{t_b - t_a}{N+1}$ . Die diskretisierte Wirkung schreibt sich als

$$S_N = \sum_{i=1}^{N+1} \left[ \frac{m}{2} \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1})^2}{\epsilon} - \epsilon V(\mathbf{x}_i, t_i) \right] . \quad (2.7)$$

Es tritt dabei in der Summe der Wirkung immer ein Summand mehr auf, als im Produkt der Integrale, da die für den Propagator konstant gewählten Anfangs- und Endpunkte nicht integriert werden, aber bei der Diskretisierung des Integrals berücksichtigt werden müssen. Die obige Definition gilt nur für Hamiltonians der Form  $H = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + V(\mathbf{x})$ , wobei  $V(\mathbf{x})$  nach unten beschränkt ist. Das bedeutet insbesondere, dass beispielsweise Systeme mit Coulombpotential (Wasserstoffatom etc.) nicht durch (2.6) beschrieben werden können. Die Normierungsfaktoren werden üblicherweise durch die zwei fundamentalen Eigenschaften des Propagators (es ist  $t_a < t_c < t_b$ )

$$K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = \int d\mathbf{x}_c K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_c, t_c) K(\mathbf{x}_c, t_c; \mathbf{x}_a, t_a) , \quad \text{sowie} \quad (2.8)$$

$$K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) \xrightarrow{t_b \rightarrow t_a} \delta(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) \quad (2.9)$$

bestimmt. Mathematisch gesehen handelt es sich bei  $\mathcal{D}\mathbf{x}$  nicht um ein Maß, da der Grenzwert aus unendlich vielen Lebesgue-Maßen kein Maß produziert (vgl. [22, Kap.2.3]). Man kann das Pfadintegral durch einen Übergang zu imaginären Zeiten  $\tau = it$  auf das Wiener-Maß zurückführen. Dies entspricht dem Übergang von der Minkovski-Raumzeit mit Metrik  $g_{ik} = \eta_{ik} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  zur Euklidischen Raumzeit  $g_{ik} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ . Dies wird als Wick-Rotation bezeichnet. So zeigte MARK KAC, dass die Wärmeleitungsgleichung, welche aus der Schrödingergleichung durch eine Wickrotation hervorgeht, durch ein Wiener-Maß Integral gelöst wird, welches sich

formal als ein Pfadintegral darstellen lässt (siehe [1, Kap.1]). Man gelangt so zu einer euklidischen Pfadintegralformulierung, die mit dem Wiener-Maß auf mathematisch solidem Boden steht. Man führt die Wick-Rotation durch und gelangt zum Pfadintegral

$$K(\mathbf{x}_b, t_b; \mathbf{x}_a, t_a) = \int \mathcal{D}\mathbf{x} e^{-\frac{1}{\hbar} S_E} \quad (2.10)$$

mit der euklidischen Wirkung

$$S_E = \int d\tau \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right)^2 + V(\mathbf{x}) . \quad (2.11)$$

Eine mathematische Definition der Pfadintegrale über analytische Fortsetzung zum Wiener-Maß und alternativen Definitionsmöglichkeiten werden in [1] diskutiert.

Darüber hinaus eignet sich der Pfadintegralformalismus auch zur Beschreibung der Quantenstatistik. Die Zustandssumme des kanonischen Ensembles schreibt sich, mit  $\beta = 1/k_B T$ , als

$$\mathcal{Z} = \text{tr} e^{-\beta H} \quad (2.12)$$

$$= \int d\mathbf{x} \underbrace{\langle \mathbf{x} | e^{-\beta H} | \mathbf{x} \rangle}_{=K(\mathbf{x}, -i\hbar\beta, \mathbf{x}, 0)} \quad (2.13)$$

$$= \int d\mathbf{x}' \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}(\hbar\beta)=\mathbf{x}'} \mathcal{D}\mathbf{x} e^{-\frac{1}{\hbar} S_E} \quad (2.14)$$

$$= \oint \mathcal{D}\mathbf{x} e^{-\frac{1}{\hbar} S_E} . \quad (2.15)$$

Der Schritt in (2.13) gilt dabei nur für zeitunabhängige  $H$ . Diskretisiert man die Zustandssumme, so geht man analog zur Diskretisierung des Pfadintegrals vor, berücksichtigt jedoch (anti-)periodische Randbedingungen. Es wird schließlich über jeden Gitterpunkt integriert. Für ein System mit (anti-)periodischen Randbedingungen bestimmt das Produkt

$$(N - 1)\epsilon = \hbar\beta . \quad (2.16)$$

die Temperatur des Systems. Im Kontinuumslimes

$$N \rightarrow \infty , \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.17)$$

ist das Produkt (2.16) konstant zu halten.

Weitere einführende Worte zum Pfadintegralformalismus in der Quantenmechanik können [8] entnommen werden; eine umfangreiche Darstellung der Thematik findet sich in [13], woran auch weitestgehend die obige Notation angelehnt ist.

## 2.2 Fermionen

Bei der experimentellen Untersuchung von Materie stellt man fest, dass es zwei Arten von Teilchen gibt, die sich fundamental in ihrem Verhalten in Vielteilchensystemen voneinander unterscheiden:

Es gibt Teilchen, die der Bose-Einstein-Statistik genügen und nach dem Spin-Statistik Theorem ganzzahligen Spin besitzen. Diese Teilchen, zu denen beispielsweise das Photon gehört, werden *Bosonen* genannt. Im Standardmodell sind die Vektorbosonen (Spin 1 Bosonen) die sogenannten Eichbosonen, das heißt Vermittler der Grundkräfte. Daneben gibt es Teilchen, welche der Fermi-Dirac-Statistik genügen und halbzahligen Spin tragen. Diese *Fermionen* bilden den größten Teil der beobachtbaren Materie unseres Universums. Prinzipielle Voraussetzung in der theoretischen Herleitung der Fermi-Dirac-Statistik ist, dass ein vollpräparierter quantenmechanischer Zustand zur selben Zeit an einem Ort nur einmal besetzt werden kann. Dieses *Pauli-Prinzip* äußert sich in einer anti-symmetrischen Wellenfunktion der Fermionen. Im Zuge der zweiten Quantisierung werden den durch Felder beschriebenen Teilchen *Feldoperatoren* zugeordnet. Um der Fermi-Dirac-Statistik zu genügen ist es notwendig, dass die fermionischen Feldoperatoren *anti*-Vertauschungsrelationen erfüllen, wohingegen die bosonischen Feldoperatoren kommutieren. Unter den massiven Fermionen unterscheidet man dabei noch zwischen Dirac- und Majorana-Fermionen. Majorana-Fermionen zeichnen sich dadurch aus, dass sie identisch zu ihrem Antiteilchen sind. In einer und in zwei Dimensionen kann man die Dirac-Fermionen durch einen zweikomponentigen komplexwertigen Grassmannspinor darstellen; die Majorana-Fermionen hingegen durch einen zweikomponentigen *reell*-wertigen Grassmannspinor. Da komplexwertige Grassmannzahlen durch zwei reellwertige dargestellt werden können, zeigt sich auch, dass einem Dirac-fermionischen Freiheitsgrad zwei Majorana-fermionische Freiheitsgrade zugeordnet werden können. Experimentell ist die Existenz von Majorana-Fermionen derzeit nicht bestätigt. So ist beispielweise noch unklar, ob es sich beim Neutrino um ein Majorana-Fermion handelt, also identisch zum Antineutrino ist, oder nicht. Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik wird jedes der Elementarteilchen derzeit durch ein Dirac-Feld beschrieben.

### Fermionen auf dem Gitter

Bei der Diskretisierung fermionischer Systeme treten einige Probleme auf, die im Folgenden skizziert werden und [22, Kap.15] entnommen sind. Zum einen ist es notwendig auftretende Ableitungen durch den *symmetrischen* diskreten Ableitungsoperator zu ersetzen, da sowohl der links- als auch der rechtsseitige diskrete Ableitungsoperator nicht eichinvariant ist<sup>3</sup>. Auch wenn das hier behandelte Model keine Eichfelder enthält, ist

<sup>3</sup>Die Definitionen der diskreten Ableitungsoperatoren sind in Anhang A gegeben.

es sinnvoll mit dem symmetrischen Ableitungsoperator zu arbeiten, um einerseits auf bekannte Ergebnisse zurückgreifen zu können, und weil sich andererseits eine Verallgemeinerung des Modells unter Berücksichtigung elektromagnetischer Felder einfacher gestalten lässt. Problematisch ist allerdings, dass sich bei der Diskretisierung die Anzahl der Fermionen in jeder Dimension verdoppelt. Auch im Kontinuumslimit bleiben diese Fermionen-Doppler erhalten. Dies wird als *Dopplerproblem* bezeichnet und tritt unabhängig von der Wahl der oben genannten, naiven diskreten Ableitungsoperatoren auf. Um die Fermionen-Doppler zu korrigieren gibt es verschiedene Ansätze: Bei Diskretisierung mit *Wilson-Fermionen*, wie es in dieser Arbeit verfolgt wird, wird dem Ableitungsoperator ein zusätzlicher Term  $(-\frac{r}{2}a\Delta)$  hinzugefügt, welcher sich als impulsabhängiger Massenterm interpretieren lässt. Im Kontinuumslimit werden die Massen der Fermionen-Doppler unendlich groß und sie entkoppeln. Durch Verwendung von Wilson-Fermionen wird die chirale Symmetrie allerdings explizit gebrochen<sup>4</sup>, da der Wilson-Term nicht mit  $\gamma^5$  antikommutiert: Der diskrete Laplace-Operator enthält einen konstanten Hauptdiagonalterm, ähnlich eines Massenterms, vgl. Gleichung (A.7). Neben den Wilson- und den naiven-Fermionen (das heißt ohne Korrektur der Doppler-Fermionen) gibt es noch weitere Arten fermionische Felder zu diskretisieren. Dazu gehören die Staggered-Fermionen, welche teilweise eine Brechung der chiralen Symmetrie aufweisen. Es lässt sich sogar zeigen, dass es keinen diskreten Ableitungsoperator gibt, der gleichzeitig lokal, translationsinvariant, Doppler-frei, und symmetrienerhaltend ist und darüber hinaus den Dirac-Operator im Kontinuumslimit enthält (NIELSON-NINOMIYA-Theorem [22, S.364]). Um die Symmetriebrechung bei der Implementierung diskreter fermionischer Systeme im Kontinuumslimit zu beheben ist die Einführung sogenannter Gegenterme (*counterterms*) notwendig. Den Massentermen der effektiven (makroskopischen) Wirkung hängt man diese counter-Terme an, an und verändert sie solange, bis sie die Massenterme kompensieren (*fine-tuning*). Der (verallgemeinerte, renormierte) Massenterm der effektiven Wirkung

$$\bar{\psi}M\psi \tag{2.18}$$

wird also zu

$$\bar{\psi}(M + m_{\text{counter}})\psi . \tag{2.19}$$

Dabei bezeichnet  $\psi$  einen Dirac- oder Majorana-Spinor. Da der Massenterm jedoch vor der Simulation nicht bekannt ist, muss das fine-tuning des counter-Terms,

$$m_{\text{counter}} \rightarrow -M , \tag{2.20}$$

---

<sup>4</sup>Die chirale Symmetrie wird anhand des nichtlinearen supersymmetrischen  $\sigma$ -Modells in Abschnitt 4.2.1 erläutert.

für jede Simulation erneut durchgeführt werden. Generell können über die Massenterme hinaus auch weitere, symmetriebrechende Terme auftauchen, welche im Kontinuums-  
limes durch Einführung weiterer counter-Terme wiederhergestellt werden können. Das  
fine-tuning kann deshalb sehr rechenaufwendig sein, weshalb nach alternativen Metho-  
den geforscht wird, um die Symmetrien im Kontinuums-  
limes wiederherzustellen (vgl. [10, Kap.1]).

## 2.3 Symmetrien in der theoretischen Physik

Unter einer Symmetrie versteht man in der Physik die Invarianz eines physikalischen  
Systems unter Transformationen der Konfigurationsvariablen. Mathematisch sind die  
Transformationen einer Symmetrie Elemente von Gruppen, welche oftmals der Sym-  
metrie den Namen geben. Die experimentelle Beobachtung von Symmetrien ist häufig  
Ausgangspunkt neuer theoretischer Erkenntnisse. Die Beobachtung der Invarianz der  
Maxwell-Gleichungen unter Transformationen der Poincaré- bzw. der Lorentz-Gruppe  
führte beispielsweise zur Entwicklung der Speziellen Relativitätstheorie durch ALBERT  
EINSTEIN. Darüber hinaus sind Symmetrien eng mit Erhaltungssätzen verbunden. So  
besagt das NOETHER-Theorem, dass jede (kontinuierliche) Symmetrie direkt mit einer  
Erhaltungsgröße verknüpft ist.

Im Folgenden werden die für diese Arbeit notwendigen Symmetrien kurz beschrieben.  
Weitere Details finden sich auch jeweils in den Einleitungen der Kapitel zum Ising-,  $\sigma$ -  
und  $O(N)$ -Modell.

### 2.3.1 Supersymmetrie

Es werden kurz die grundlegenden Ideen und formalen Eigenschaften der Supersymme-  
trie analog zu [12] vorgestellt. Die Supersymmetrie setzt bosonische und fermionische  
Freiheitsgrade in Relation, indem jedem Zustand ein Partnerzustand gleicher Masse  
aber unterschiedlichen Spins zugeordnet wird. Diese werden als *Superpartner* bezeich-  
net. Supersymmetrie kann daher nur in Systemen existieren, welches sowohl Bosonen  
als auch Fermionen enthält. Man konstruiert einen supersymmetrischen Operator  $Q$ ,  
sodass dieser ein Boson (Fermion) vernichtet und ein Fermion (Boson) erzeugt. Formal  
schreibt sich im Hilbertraum der Quanten-Zustände:

$$Q |\text{Boson}\rangle \sim |\text{Fermion}\rangle , \quad (2.21)$$

$$Q |\text{Fermion}\rangle \sim |\text{Boson}\rangle . \quad (2.22)$$

Bei dieser Transformation der Superpartner bleiben, bis auf den Spin, alle Quanten-  
zahlen erhalten. Der supersymmetrische Operator  $Q$  muss dann so bestimmt werden,  
dass der Hamilton-Operator des Systems invariant unter den Transformationen  $Q$  ist.

Um  $Q$  zu bestimmen nutzt man die Eigenschaften der bosonischen und fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bezüglich Nilpotenz und Kommutativität. Eine Formulierung mit Hilfe des Wirkungsfunktionalis gestaltet sich besonders elegant im Superraum  $\mathbb{R}^{4|4}$ , bzw. im Falle von zwei Raumzeitdimensionen  $\mathbb{R}^{2|2}$ , auf dem sich supersymmetrische Theorien und deren Lagrangedichten mithilfe sogenannter Superfelder, also Abbildungen aus dem Superraum, beschreiben lassen. Die Koordinaten des Superraums sind dann sowohl die gewohnten Raumzeitkoordinaten  $\boldsymbol{x}$ , sowie die Spinoren  $\boldsymbol{\psi}$ . Die konkrete Angabe der supersymmetrischen Transformation hängt dann vom jeweiligen betrachteten Modell ab.

Da bisher jedoch keine Superpartner experimentell nachgewiesen werden konnten, muss man davon ausgehen, dass die Supersymmetrie eine spontan gebrochene Symmetrie ist. Eine spontane Brechung einer Symmetrie liegt vor, wenn die Gesetze eines Systems (Bewegungsgleichungen) invariant unter den Symmetrietransformationen sind, der Vakuumzustand, bzw. System als Ganzes sich jedoch unter den Symmetrietransformationen verändert (vgl. [20, Kap.1.2]). In dieser spontan gebrochenen Phase besitzen die Superpartner eine weitaus größere Masse und liegen somit in einem experimentell (noch) nicht zugänglichen Energiebereich.

### 2.3.2 $O(N)$ -Symmetrie

Unter  $O(N)$  Symmetrie versteht man die Invarianz des Systems, also des Hamiltonians oder des Wirkungsfunktionalis, unter Transformationen aus der orthogonalen Gruppe  $O(N)$ . Diese Gruppe enthält alle orthogonalen  $N \times N$  Matrizen  $A$ , für die

$$\det A = \pm 1 \tag{2.23}$$

gilt. Die Gruppe unterteilt sich in reine Drehungen, das sind Transformationen der speziellen Orthogonalen Gruppe  $SO(N)$ , und Drehspiegelungen. Insbesondere ist das Skalarprodukt zweier Vektoren eines  $N$ -dimensionalen Hilbertraums invariant unter  $O(N)$ -Transformationen der beiden Argumente, was beispielsweise auf die  $O(N)$ -Symmetrie klassischer Spin-Modelle führt (siehe dazu auch Anhang D).



---

### 3 Das Ising-Modell

Das Ising-Modell ist eines der meist untersuchten Modelle der statistischen Physik und ist ein Spezialfall des diskreten  $O(N)$ -Modells für  $N = 1$ . Mithilfe des Modells lassen sich beispielsweise Ferromagneten vereinfacht beschreiben. Man nimmt an, dass die Atome eines Festkörpers auf einem regelmäßigen Gitter sitzen. Jedem Gitterpunkt, bzw. jedem Atom  $x$  des Systems wird dann ein Spin  $s_x \in \{-1, 1\} = \mathbb{S}^1$  zugeordnet. Der Hamiltonian ergibt sich dann als Spezialfall aus dem Heisenberg-Modell ( $O(3)$ -Modell) zu

$$H = - \sum_{\langle xy \rangle} J s_x s_y - h \sum_x s_x . \quad (3.1)$$

Es bezeichnet dabei  $J$  eine Kopplungskonstante und  $h$  ein externes Magnetfeld. Die Summe der Spins wird über alle benachbarten Paare  $\langle xy \rangle$  des Gitters ausgeführt. Aufgrund der Kenntnis der analytischen Lösung der Zustandssumme des Modells in einer und zwei Dimensionen eignet es sich hervorragend als Testmodell für neue analytische Techniken aber auch Algorithmen der computergestützten Quantentheorie und insbesondere der Quantenstatistik.

#### 3.1 Graphische Entwicklung der Zustandssumme

Wir betrachten die Zustandssumme  $\mathcal{Z} = \text{tr} e^{-\beta H}$  auf einem kubischen Gitter in  $D$  Dimensionen und  $V$  Gitterpunkten. Der Hamilton-Operator mit nächster Nachbar Wechselwirkung ergibt sich im Ising-Modell ohne äußeres Magnetfeld aus (3.1) zu

$$H = - \sum_{\langle xy \rangle} J s_x s_y . \quad (3.2)$$

Wählt man als Basis des Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$ , auf dem der Hamiltonian  $H$  operiert, die Spin-Eigenfunktionen, so lässt sich die Spur explizit berechnen und die Zustandssumme schreibt sich als

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{S\}} e^{\beta J \sum_{\langle xy \rangle} s_x s_y} \quad (3.3)$$

$$= \sum_{\{S\}} \prod_{\langle xy \rangle} e^{K s_x s_y} , \quad (3.4)$$

wobei  $K \equiv \beta J$  abkürzend eingeführt wurde. Die Summe  $\sum_{\{S\}}$  erfolgt über alle möglichen Spinkonfigurationen  $\{S\}$  des Systems.

Betrachten wir die Identität:

$$e^x = \sinh x + \cosh x . \quad (3.5)$$

Dies entspricht formal einer Entwicklung von  $e^{-\beta J s_x s_y}$  für kleine Werte  $\beta = 1/k_B T$ , also hohen Temperaturen  $T$ , welche jedoch nicht abgebrochen wird und deshalb exakt ist. Dies wird auch als *Hochtemperatur-Entwicklung* bezeichnet. Die Zustandssumme schreibt sich also weiter als:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{S\}} \prod_{\langle xy \rangle} \left[ \cosh (s_x s_y K) + \sinh (s_x s_y K) \right] \quad (3.6)$$

$$= \sum_{\{S\}} \prod_{\langle xy \rangle} \left[ \cosh (s_x s_y K) \left( 1 + \tanh (s_x s_y K) \right) \right] \quad (3.7)$$

$$= (\cosh K)^{DV} \sum_{\{S\}} \prod_{\langle xy \rangle} (1 + s_x s_y \tanh K) . \quad (3.8)$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass  $\cosh x$  eine gerade,  $\tanh x$  eine ungerade Funktion ist und dass  $s_x s_y$  nur ein Vorzeichen darstellt. Zieht man den  $\cosh K$  aus dem Produkt, so beachte man, dass der Faktor für jedes Paar  $\langle xy \rangle$  auftaucht. Bei einem kubischen Gitter mit  $V$  Gitterpunkten und  $D$  Dimensionen, unter Berücksichtigung der periodischen Randbedingungen, also genau  $DV$  mal. Es gilt nun den Ausdruck weiter zu vereinfachen. Dies wird am Beispiel von  $D = 2$  ausführlich diskutiert und im nächsten Schritt auf  $D$  Dimensionen verallgemeinert. Im Folgenden sei der Übersicht halber  $\nu \equiv \tanh K$  eingeführt.

### 3.1.1 Graphische Entwicklung in zwei Dimensionen

In  $D = 2$  Dimensionen erfolgt das Produkt  $\prod_{\langle xy \rangle}$  an einem fixen Punkt  $x$  über vier Nachbarn, welche mit  $y, z, u, v$  benannt werden. Für diesen festen Punkt  $x$  ergibt sich also ein Faktor

$$\begin{aligned} \prod_{i=y,z,u,v} (1 + s_x s_i \nu) &= \nu^0 (1) \\ &+ \nu^1 (s_x s_y + s_x s_z + s_x s_u + s_x s_v) \\ &+ \nu^2 (s_x^2 s_y s_z + s_x^2 s_y s_u + \dots + s_x^2 s_u s_v) \\ &+ \nu^3 (s_x^3 s_y s_z s_u + s_x^3 s_y s_z s_v + s_x^3 s_y s_u s_v + s_x^3 s_z s_u s_v) \\ &+ \nu^4 (s_x^4 s_y s_z s_u s_v) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Diese Struktur ist identisch für alle zum Produkt beitragenden Terme, d.h. das Produkt in (3.8) schreibt sich als Polynom in  $\nu^n, n \in \{0, 1, \dots\}$ . Betrachtet man nun die Summanden in Gleichung (3.9) genauer, so lässt sich beispielsweise  $\nu s_x s_y$  schreiben als

$$\nu s_x s_y = (\nu s_x s_y)^{k_{\langle xy \rangle}=1} \cdot (\nu s_x s_z)^{k_{\langle xz \rangle}=0} \cdot \dots \cdot (\nu s_x s_v)^{k_{\langle xv \rangle}=0} , \quad (3.10)$$

mit einer neu eingeführten Größe  $k_l, l = \langle xy \rangle$ , welche für jedes Paar entweder den Wert 0 oder 1 annimmt. Dies lässt sich für jeden Summanden fortsetzen. Das bedeutet das Produkt  $\prod_{\langle xy \rangle}$  in Gleichung (3.8) über alle benachbarten Paare lässt sich schreiben als

$$\prod_{\langle xy \rangle} (1 + s_x s_y \nu) = \sum_{\{k_l\}} \prod_{l=\langle xy \rangle} (s_x s_y \nu)^{k_l} . \quad (3.11)$$

Wir erhalten eine Summe über alle Konfigurationen  $\{k_l\}$ .

Die sogenannten *bond-Variablen*  $k_l = k_{\langle xy \rangle}$  lassen sich nun leicht graphisch interpretieren: Der Wert  $k_l = 1$  entspricht einer graphischen Verbindung zwischen den Gitterpunkten  $x$  und  $y$ . Ist der Wert null, so werden die Punkte nicht verbunden. Das heißt eine gegebene Konfiguration  $\{k_l\}$  entspricht einem Graph  $\gamma = \{k_l | k_l = 1\}$  mit Länge  $|\gamma| := \sum_l k_l$ . Die Summe über alle bond-Variablen Konfigurationen lässt sich also ausdrücken als Summe über alle Graphen  $\gamma$ . Jeder Graph  $\gamma$  trägt mit einem Gewicht  $w(\gamma) = \sum_{\{s\}} \prod_{l=\langle xy \rangle} (s_x s_y \nu)^{k_l}$  zur Zustandssumme  $\mathcal{Z}$  bei. Also gilt:

$$\mathcal{Z} = (\cosh K)^{DV} \sum_{\{\gamma\}} w(\gamma) . \quad (3.12)$$

Nun lässt sich aber zeigen, dass nicht alle möglichen Graphen zur Zustandssumme beitragen, sondern nur geschlossene. Dazu betrachten wir erneut Gleichung (3.9) für einen fixen Punkt  $x$  mit seinen Nachbarn. Die Terme lassen sich nun leicht graphischen Konstellationen zuordnen.

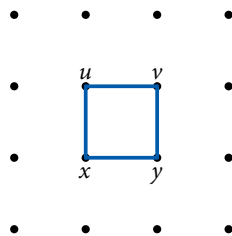
Aus Gleichung (3.10) wird deutlich, dass den Termen, die linear in  $s_x$  bzw.  $\nu$  sind, Einzelverbindungen entsprechen. Es ist also entweder  $x$  nur mit  $y, z, u$  oder  $v$  verbunden. Analog entsprechen quadratische (kubische,...) Terme Zweifach- (Dreifach,...) Verbin-

dungen. Als schematische Darstellung erhält man für Gleichung (3.9) anschaulich:

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=y,z,u,v} (1 + s_x s_i \nu) &= \nu^0 \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \quad \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\
 &+ \nu^1 \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} x \quad \cdot \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \\ | \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \text{---} \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \\ | \\ \cdot \end{array} \right) \\
 &+ \nu^2 \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} x \\ | \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \text{---} \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \\ | \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \\ | \\ \cdot \end{array} \\
 &+ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \\ | \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \text{---} \\ \cdot \end{array} \right) \\
 &+ \nu^3 \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} x \text{---} \\ | \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \\ | \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \\ | \\ \cdot \end{array} + \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \quad x \\ | \\ \cdot \end{array} \right) \\
 &+ \nu^4 \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \text{---} x \text{---} \\ | \\ \cdot \end{array} \right). \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Betrachtet man jedoch eine gegebene Spin-Konfiguration  $\{S\}$  mit Spin  $s_x$  in einem Punkt  $x$  so existiert analog eine Konfiguration  $\{S'\}$ , die mit  $\{S\}$  bis auf  $s'_x = -s_x$  übereinstimmt. Das bedeutet, dass sich beim Ausführen der Summe über alle Spinkonfigurationen alle Terme, welche linear oder kubisch in  $s_x$  sind (also graphisch gesehen die Einzel- und Dreivachverbindungen) eliminieren. In einem Punkt  $x$  kann also kein Ende des Graphen (sog. Defekt) existieren, da diese genau den linearen und kubischen Termen entsprechen. Die Summe (3.12) über alle Graphen  $\gamma$  reduziert sich auf eine Summe über alle *geschlossenen* Graphen.

Nun gilt es, dass Gewicht  $w(\gamma)$  explizit zu berechnen. Dazu betrachten wir den einfachsten aller geschlossenen Graphen, welcher aus vier aktiven bonds besteht:



Bis auf die vier gezeigten, sind alle weiteren bond-Variablen null.

Es folgt also

$$w(\gamma) = \sum_{\{S\}} \prod_{l=\langle xy \rangle} (s_x s_y \nu)^{k_l} \quad (3.14)$$

$$= \sum_{\{S\}} (s_x s_y \nu s_y s_v \nu s_v s_u \nu s_u s_x \nu) \quad (3.15)$$

$$= \sum_{\{S\}} \underbrace{s_x^2 s_y^2 s_u^2 s_v^2}_{=1} \nu^4 \quad (3.16)$$

$$= 2^V \nu^4, \quad (3.17)$$

denn das Gitter mit  $V$  Punkten besitzt  $2^V$  Spinkonfigurationen. Verallgemeinert man nun auf einen beliebigen geschlossenen Graphen  $\gamma$ , so bleibt im Wesentlichen die Struktur von (3.15) erhalten: Für jede bond-Variable  $N = 1$  des Graphen erhält man einen Faktor  $\nu$ . Da der Graph geschlossen ist, treten alle Spinvariablen quadratisch oder quartisch auf, tragen also nicht zum Produkt bei. Man erhält demnach das Gewicht eines geschlossenen Graphen  $\gamma$  in zwei Dimensionen:

$$w(\gamma) = 2^V (\tanh K)^{|\gamma|}. \quad (3.18)$$

### 3.1.2 Graphische Entwicklung in $D$ Dimensionen

Die oben durchgeführte Rechnung verallgemeinert sich leicht auf  $D$  Dimensionen. Das Produkt  $\prod_{\langle xy \rangle}$  über alle Nachbarn besteht an einem Punkt  $x$  aus  $2D$  Faktoren. Analog zu Gleichung (3.9) erweitert sich dies über die Summe in Terme mit  $\nu^n$  mit  $n \in \{0, 2, \dots, 2D\}$ . Der Übergang zur graphischen Darstellung erfolgt demnach vollkommen analog. Auch hier tragen nur Terme mit  $s_x^{2n}, n \in \{0, \dots, D\}$ , also geschlossene Graphen, zur Zustandssumme bei. Man erhält schließlich die graphische Darstellung der Zustandssumme für das Ising-Modell in  $D$  Dimensionen:

$$\mathcal{Z} = 2^V (\cosh K)^{DV} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} (\tanh K)^{|\gamma|}. \quad (3.19)$$

$\mathcal{G}$  ist dabei die Menge aller geschlossenen Graphen auf dem Gitter.

Wir können das Ergebnis mit der bekannten Zustandssumme des eindimensionalen Ising-Modells vergleichen. Mit Hilfe der Transfer-Matrix-Methode bestimmt sich die Zustandssumme des eindimensionalen Ising-Modells mit  $V$  Gitterpunkten ohne äußeres Magnetfeld zu [15, S.356]:

$$\mathcal{Z} = 2^V (\cosh K)^V [1 + \tanh(K)^V]. \quad (3.20)$$

Das selbe Ergebnis erhält man aus (3.19), wenn man berücksichtigt, dass die einzigen geschlossenen Graphen auf einem eindimensionalen Gitter mit periodischen Randbedingungen der vollkommen unbesetzte Graph mit  $|\gamma| = 0$  und der vollkommen besetzte Graph mit  $|\gamma| = V$  sind. Wir erhalten also analog für die Zustandssumme aus der graphischen Entwicklung:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= 2^V (\cosh K)^V \sum_{|\gamma|=0,V} (\tanh K)^{|\gamma|} \\ &= 2^V (\cosh K)^V [1 + (\tanh K)^V] , \end{aligned} \quad (3.21)$$

was mit dem aus der Transfer-Matrix-Methode berechnetem Ergebnis übereinstimmt.

### 3.2 Graphische Entwicklung der Zweipunktsfunktion

Wir definieren für zwei Punkte  $u$  und  $v$  des Gitters

$$Z(u, v) = \sum_{\{S\}} \prod_{\langle xy \rangle} e^{K s_x s_y s_u s_v} . \quad (3.22)$$

Damit ergibt sich die Zweipunktsfunktion als Erwartungswert der Observable  $s_u s_v$  im kanonischen Ensemble als

$$\langle s_u s_v \rangle := \frac{\sum_{\{S\}} \prod_{\langle xy \rangle} e^{K s_x s_y s_u s_v}}{\mathcal{Z}} \quad (3.23)$$

$$= \frac{Z(u, v)}{Z(x, x)} , \quad (3.24)$$

wobei die Identität  $\mathcal{Z} = Z(x, x)$  direkt aus  $s_x s_x = 1$  für alle Punkte  $x$  des Gitters folgt<sup>5</sup>. Wir erkennen in (3.22) eine analoge Struktur zu (3.8) und können deshalb  $Z(u, v)$  direkt schreiben als

$$Z(u, v) = \sum_{\{k_l\}} \sum_{\{S\}} \prod_{\langle xy \rangle} (s_x s_y \nu)^{k_l} s_u s_v . \quad (3.25)$$

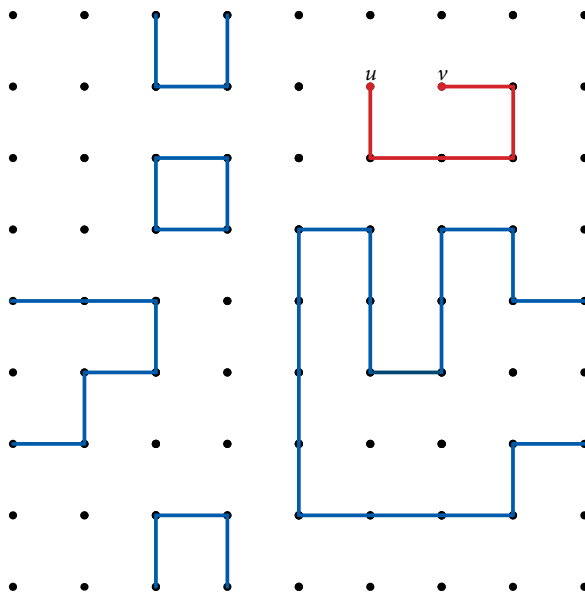
In vollkommen analoger Art und Weise zur Entwicklung der Zustandssumme reduziert sich die Summe über alle Konfigurationen  $\{k_l\}$ , bzw. alle Graphen, auf eine Teilmenge von Graphen. Erneut gelten in allen Punkten  $x$  die gleichen Bedingungen, wie für die Graphen der Zustandssumme, außer in den Punkten  $u$  und  $v$ . Aufgrund der Multiplikation mit  $s_u s_v$  bleiben in zu (3.9) analogen Termen genau die  $\nu^{2n+1}$ ,  $\{n \in 0, 1, \dots\}$  Terme stehen. Das bedeutet im Punkt  $u$  und  $v$  kann jeweils nur ein Defekt, also ein offenes Ende des Graphen  $\gamma$  sein. Da diese die einzig beiden Punkte sind, die diese Eigenschaft haben, müssen sie also durch einen offenen Graphen verbunden sein, während

---

<sup>5</sup>Diese Idee ist [26] entnommen.

alle anderen Punkte des Gitters weiterhin an Bedingungen analog zur Zustandssumme gebunden sind. Implementiert man also eine numerische Berechnung von  $Z(u, v)$  durch Simulation von Graphen, so erhält man neben den Korrelationsfunktionen auch direkt eine Berechnung der Zustandssumme. Ein zur Zweipunktsfunktion beitragender Graph ist als Beispiel in Abbildung 3.1 dargestellt. Werden die Punkte  $u$  und  $v$  gleich, so erhält man einen Graphen, welcher zur Zustandssumme beiträgt. Dies gilt für alle Graphen und wir erhalten die schon weiter oben berechnete Beziehung

$$\mathcal{Z} = Z(u, u) . \tag{3.26}$$



**Abbildung 3.1** Ein möglicher zur Zweipunktsfunktion  $Z(u, v)$  beitragender Graph mit periodischen Randbedingungen. Die Analogie zur Zustandssumme  $\mathcal{Z} = Z(u, u)$  wird in der Darstellung deutlich, wenn man die Punkte  $u$  und  $v$  zusammenführt.

## 4 Das supersymmetrische nichtlineare $\sigma$ -Modell

Das nichtlineare  $\sigma$ -Modell ist ein von GELL-MANN und LÉVY 1960 [11] vorgestelltes Modell der Quantenfeldtheorie, in dem das skalare (bosonische) Feld Werte auf einer nichtlinearen Mannigfaltigkeit annimmt. E. WITTEN stellte 1977 eine supersymmetrische Erweiterung des Modells in zwei Raumzeitdimensionen vor [23] und verweist auf Ähnlichkeiten des Modells zu vierdimensionalen Eichtheorien. Zeitgleich untersuchten auch FERRARA und DI VECCHIA eine supersymmetrische Erweiterung des Modells in euklidischer Raumzeit [5]. Neben der  $O(N)$ - und der Supersymmetrie weist das Modell eine chirale Symmetrie auf (siehe 4.2.1), welche jedoch spontan gebrochen ist [2], was zur Erzeugung fermionischer Massen führt. Neben dieser spontanen Brechung werden wir im Folgenden durch die Einführung von Wilson-Fermionen, zur Vermeidung der durch die Diskretisierung entstehenden Fermionen-Doppler, die chirale Symmetrie *explizit* brechen. Um die Symmetrie im Kontinuumslimit wiederherzustellen, ist die Einführung von sogenannten counter-Termen und ein anschließendes fine-tuning der Parameter notwendig. Im Allgemeinen muss man für jede durch die Diskretisierung gebrochene Symmetrie, die Supersymmetrie wird beispielsweise durch die Diskretisierung unweigerlich gebrochen [10], counter-Terme einführen und die Parameter fine-tunen, was aufgrund limitierter Rechenzeit praktisch unmöglich ist. In [10] wird darüber hinaus gezeigt, dass es nicht möglich ist, eine diskrete Wirkung des supersymmetrischen nichtlinearen  $O(3)$   $\sigma$ -Modells zu formulieren, ohne die  $O(N)$ - oder die Supersymmetrie explizit zu brechen.

In der folgenden Arbeit wird auf die Behandlung der Symmetriebrechung im Kontinuumslimit lediglich verwiesen; die Einführung von counter-Terme ist bei einer Implementation des Modells noch zu berücksichtigen. Die Terme zur Wiederherstellung der chiralen Symmetrie können dem in Abschnitt 4.3.1 eingeführten Parameter  $\varphi$  angehängt werden (vgl. dazu auch Abschnitt 2.2).

### 4.1 Das supersymmetrische nichtlineare $\sigma$ -Modell in $(1+1)D$

Die euklidische Wirkung des supersymmetrischen  $\sigma$ -Modells in  $(1+1)$  Dimensionen ist gegeben durch [23]

$$S_E = \frac{1}{2g^2} \int d^2x \partial^\mu \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n} - i \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{1}{4} (\bar{\psi} \psi)^2, \quad (4.1)$$

wobei die Nebenbedingungen

$$\mathbf{n}^2 = 1 \text{ und} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{n} \psi^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.3)$$



zu erfüllen sind. Dabei ist  $\mathbf{n}$  ein  $N$ -Tupel der bosonischen skalaren Felder  $n^i$  und  $\boldsymbol{\psi}$  ein  $N$ -Tupel der Majorana-fermionischen Grassmann-Felder  $\psi^i = \begin{pmatrix} \xi^i \\ \eta^i \end{pmatrix}$ , wobei  $\xi^i$  und  $\eta^i$  reelle Grassmannvariablen sind. Mit  $\boldsymbol{\psi}^1$  wird das  $N$ -Tupel der Grassmannvariablen  $\xi^i$  und mit  $\boldsymbol{\psi}^2$  das der  $\eta^i$  bezeichnet. Die Komponenten der Felder werden im Folgenden auch Flavor genannt. Die Multiplikation der  $N$ -Tupel ist als formales Skalarprodukt aufzufassen. Die Konventionen bezüglich der Gamma- und Ladungskonjugationsmatrizen sind in Anhang A erläutert. Die Raumzeitkoordinate  $\mathbf{x}$  besteht aus einer Zeitkomponente  $x_0$  und einer räumlichen  $x_1$ .

## 4.2 Das supersymmetrische nichtlineare $\sigma$ -Modell in $(1+0)D$

Ziel ist es, die Abhängigkeiten der euklidischen Wirkung in (4.1) von der räumlichen Komponente  $x_1$  zu vernachlässigen und so zu einem  $(1+0)$ -dimensionalen (und damit quantenmechanischen) Modell zu gelangen. Die Vernachlässigung der räumlichen Koordinate führt zum Verschwinden der auftretenden Ableitungen  $\partial_1$ . Der Integrand hängt somit nicht mehr von  $x_1$  ab und die räumliche Integration ergibt ein Volumen  $V_x$ . Man erhält also die reduzierte Wirkung

$$S_E = \frac{V_x}{2g^2} \int dx_0 \partial_0 \mathbf{n} \partial_0 \mathbf{n} - i \bar{\boldsymbol{\psi}} \gamma^0 \partial_0 \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{4} (\bar{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\psi})^2 . \quad (4.4)$$

Zur Vereinfachung wird im folgenden die Konstante  $K = \frac{V_x}{2g^2}$  eingeführt. Die Zustandssumme des Systems schreibt sich also als

$$\mathcal{Z} = \oint \mathcal{D}\mathbf{n} \mathcal{D}\boldsymbol{\psi} \exp \left[ -K \int dx_0 \partial_0 \mathbf{n} \partial_0 \mathbf{n} - i \bar{\boldsymbol{\psi}} \gamma^0 \partial_0 \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{4} (\bar{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\psi})^2 \right] . \quad (4.5)$$

Für die folgenden Untersuchungen ist es zweckmäßig eine Hubbard-Stratonovich Transformation durchzuführen. Diese ermöglicht es den quadratischen Term in  $\bar{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\psi}$  durch Integration über ein Hilfsfeld  $\sigma$  in einen linearen Term zu transformieren. Allgemein lautet die Integralidentität<sup>6</sup> für ein quadratisch auftretendes Feld  $\alpha^2$ :

$$\exp \left[ -\frac{a}{2} \int dx_0 \alpha^2 \right] = \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[ -\frac{a}{2} \int dx_0 \frac{\sigma^2}{a^2} + i \frac{2}{a} \alpha \sigma \right] . \quad (4.6)$$

Dabei bezeichnet  $a > 0$  eine reelle Konstante, in unserem Fall ist  $a = \frac{K}{2}$ . Wenden wir diese Transformation auf den quadratischen Term der fermionischen Felder an erhalten

<sup>6</sup>Die Hubbard-Stratonovich Transformation ist in Anhang C erläutert.

wir

$$\exp \left[ -\frac{K/2}{2} \int dx_0 (\bar{\psi}\psi)^2 \right] = \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[ -\frac{K/2}{2} \int dx_0 4 \frac{\sigma^2}{K^2} + 4i \frac{\sigma}{K} \bar{\psi}\psi \right] \quad (4.7)$$

$$= \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[ -K \int dx_0 \frac{\sigma^2}{K^2} + i \frac{\sigma}{K} \bar{\psi}\psi \right], \quad (4.8)$$

und somit die Zustandssumme des kompaktifizierten supersymmetrischen nichtlinearen  $\sigma$ -Modells:

$$\mathcal{Z} = \oint \mathcal{D}\mathbf{n} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\sigma \exp \left[ -K \int dx_0 \partial_0 \mathbf{n} \partial_0 \mathbf{n} - i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi + \frac{\sigma^2}{K^2} + \frac{\sigma}{K} \bar{\psi}\psi \right]. \quad (4.9)$$

Die Nebenbedingungen (4.2) und (4.3) sind natürlich weiterhin zu berücksichtigen.

### 4.2.1 Chirale Symmetrie

Die Wirkung des supersymmetrischen nichtlinearen  $\sigma$ -Modells ist invariant unter den chiralen Symmetrietransformationen

$$\psi \rightarrow \gamma^5 \psi, \quad (4.10)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} (\gamma^5)^T. \quad (4.11)$$

Damit gemeint ist, dass  $\gamma^5$  auf jeden zweikomponentigen Grassmann-Spinor  $\psi^i$  wirkt. Es zeigt sich, dass der kinetische Term<sup>7</sup>,

$$\bar{\psi} \not{\partial} \psi \rightarrow \bar{\psi} (\gamma^5)^T \not{\partial} \gamma^5 \psi \quad (4.12)$$

$$= \bar{\psi} (\gamma^5)^T \gamma^i \partial_i \gamma^5 \psi \quad (4.13)$$

$$= -\bar{\psi} (\gamma^5)^T \gamma^5 \gamma^i \partial_i \psi \quad (4.14)$$

$$= \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^5 \gamma^i \partial_i \psi \quad (4.15)$$

$$= \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi \quad (4.16)$$

$$= \bar{\psi} \not{\partial} \psi, \quad (4.17)$$

invariant unter chiralen Symmetrietransformationen ist. Ebenso ist auch der in den Feldern quadratische Term (Vier-Fermi-Term) invariant unter chiralen Symmetrietrans-

<sup>7</sup>Die Eigenschaften der  $\gamma$ -Matrizen sind in Anhang A gelistet.

formationen:

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \rightarrow (\bar{\psi}(\gamma^5)^T \gamma^5 \psi)^2 \quad (4.18)$$

$$= (-\bar{\psi}\gamma^5 \gamma^5 \psi)^2 \quad (4.19)$$

$$= (\bar{\psi}\psi)^2 . \quad (4.20)$$

Fermionische Massenterme sind allerdings nicht invariant, denn es gilt

$$\bar{\psi}m\psi \rightarrow \bar{\psi}(\gamma^5)^T m\gamma^5 \psi \quad (4.21)$$

$$= -\bar{\psi}m\psi . \quad (4.22)$$

Dies führt insbesondere dazu, dass durch die Einführung des Doppler-freien diskreten Ableitungsoperators mit Wilson-Term die chirale Symmetrie explizit gebrochen wird (siehe Abschnitt 2.2).

### 4.3 Graphische Entwicklung der Zustandssumme des supersymmetrischen nichtlinearen $\sigma$ -Modells in $(1+0)D$

In diesem Abschnitt wird sukzessive eine graphische Entwicklung des Modells durchgeführt. Dazu wird die Zustandssumme unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen in einen fermionischen-, bosonischen und Hilfsfeldanteil getrennt und diskretisiert. Der fermionische Teil lässt sich dann in Graphen entwickeln, welche Beiträge in den bosonischen Feldern und dem Hilfsfeld ergeben. Wir trennen nun also die Zustandssumme und schreiben die Nebenbedingungen explizit aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \oint \mathcal{D}\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) \exp \left[ -K \int dx_0 \partial_0 \mathbf{n} \partial_0 \mathbf{n} \right] \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[ -K \int dx_0 \frac{\sigma^2}{K^2} \right] \\ & \times \oint \mathcal{D}\psi \delta(\mathbf{n}\psi^1) \delta(\mathbf{n}\psi^2) \exp \left[ K \int dx_0 i\bar{\psi} \left( \gamma^0 \partial_0 - \frac{\sigma}{K} \right) \psi \right] . \quad (4.23) \end{aligned}$$

#### 4.3.1 Fermionischer Anteil

Der fermionische Teil wird unter Verwendung von Wilson Fermionen diskretisiert. Die Notation weicht fortan etwas von der bisherigen ab und ist im Wesentlichen an [25] angelehnt, ebenso wie die spätere Einführung von Projektoren. Wir führen also eine Diskretisierung der Raumzeitkoordinate  $x_0$  in ein Gitter mit Gitterabstand  $a$  und positivem Einheitsvektor  $e_0 = 1$  durch. Dies führt direkt auf den fermionischen Anteil,

welcher fortan mit  $\mathcal{Z}_F$  bezeichnet wird:

$$\mathcal{Z}_F = \int \mathcal{D}\psi \prod_x (\mathbf{n}_x \psi_x^1) (\mathbf{n}_x \psi_x^2) \exp \left[ iaK \sum_{x,y} \bar{\psi}_x \left( \gamma^0 \tilde{\partial}_{xy}^0 - \frac{\sigma_x}{K} \delta_{xy} - \frac{r}{2} a \Delta_{xy} \right) \psi_y \right]. \quad (4.24)$$

Es wurde dabei genutzt, dass die Diracsche-Delta Distribution für Grassmannzahlen lediglich eine Multiplikation darstellt; das dabei entstehende negative Vorzeichen wird vom zweiten Term kompensiert<sup>8</sup>. Bei  $\int \mathcal{D}\psi$  handelt es sich nun um eine Integration über alle Vektorkomponenten an allen Punkten  $x$ :

$$\mathcal{D}\psi = \prod_x d\psi_x = \prod_x d\xi_x d\eta_x. \quad (4.25)$$

Der Wilson-Parameter wird  $r = 1$  gewählt. Mit Hilfe der Definitionen der diskreten Ableitungsoperatoren<sup>9</sup> lässt sich die Summe über alle Gitterpunkte  $x$  und  $y$  in einen Hauptdiagonalterm und einen Nebendiagonalterm (sogenannter Hopping-Term) trennen, der Gitterabstand  $a$  kürzt sich dabei mit den Beiträgen der Ableitungsoperatoren. Wir können daher in den weiteren Betrachtungen  $a = 1$  wählen:

$$\begin{aligned} & iaK \sum_{x,y} \bar{\psi}_x \left( \gamma^0 \tilde{\partial}_{xy}^0 - \frac{\sigma_x}{K} \delta_{xy} - \frac{r}{2} a \Delta_{xy} \right) \psi_y \\ &= iK \sum_{x,y} \bar{\psi}_x \left( \frac{1}{2} \gamma^0 (\delta(x + e_0, y) - \delta(x - e_0, y)) - \frac{\sigma_x}{K} \delta_{xy} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\delta(x + e_0, y) + \delta(x - e_0, y)) + \delta_{xy} \right) \psi_y \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} &= iK \sum_x \varphi_x \bar{\psi}_x \psi_x \\ &\quad - iK \sum_{x,y} \bar{\psi}_x \left( \frac{1}{2} (1 - \gamma^0) \delta(x + e_0, y) + \frac{1}{2} (1 + \gamma^0) \delta(x - e_0, y) \right) \psi_y \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$= iK \sum_x \varphi_x \bar{\psi}_x \psi_x - 2iK \sum_{\langle xy \rangle} \bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y. \quad (4.28)$$

---

<sup>8</sup>Das Vorzeichen entsteht dabei - wenn überhaupt - nur aus der Konvention bzw. der Definition der Delta-Distribution für Grassmannzahlen über  $\int d\psi' \delta(\psi - \psi') f(\psi') = f(\psi)$  oder  $\int d\psi' \delta(\psi' - \psi) f(\psi') = f(\psi)$ . Für den hier vorliegenden Fall ist das aber nichtig, da immer zwei Delta-Distributionen von Grassmannvariablen auftreten.

<sup>9</sup>Die Definitionen sind in den Konventionen in Anhang A gegeben.

Es wurden weiterhin  $\varphi_x = 1 - \frac{\sigma_x}{K}$  und die Projektoren<sup>10</sup>

$$P_{xy} = P(\widehat{y-x}) = P(\pm e_0) := \frac{1}{2}(1 - \gamma^{\pm e_0}), \text{ mit} \quad (4.29)$$

$$\gamma^{\pm e_0} := \pm \gamma^0 \quad (4.30)$$

eingeführt. Die Summe des Hopping Terms geht über alle benachbarten Paare  $\langle xy \rangle$  des Gitters, dabei wurde im letzten Schritt  $\bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y = \bar{\psi}_y P_{yx} \psi_x$  ausgenutzt (siehe Anhang A). Wir erhalten zusammenfassend also den allgemeinen Ausdruck des diskretisierten fermionischen Anteils der Zustandssumme:

$$\mathcal{Z}_F = \int \mathcal{D}\psi \prod_x (\mathbf{n}_x \psi_x^1) (\mathbf{n}_x \psi_x^2) \exp \left[ iK \sum_x \varphi_x \bar{\psi}_x \psi_x - 2iK \sum_{\langle xy \rangle} \bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y \right]. \quad (4.31)$$

Dies lässt sich im Gegensatz zu einem Fall mit nur einem fermionischen Freiheitsgrad, wie bspw. in [25], nicht naiv graphisch entwickeln, da in den Exponenten stets noch eine Summe über alle Flavours auftaucht. Um eine Entwicklung durchzuführen, wird nun schrittweise der Fall einer, zweier, dreier und beliebiger fermionischer Anregungen untersucht.

### 4.3.2 Entwicklung für einen Freiheitsgrad

Die Entwicklung des Ausdrucks für nur einen Freiheitsgrad  $\boldsymbol{\psi} = \psi$ ,  $\mathbf{n} = n$  ist bedingt durch die Nebenbedingung trivial. Die Nebenbedingung ergibt sich an jedem Gitterpunkt zu

$$\delta(n\xi)\delta(n\eta) = n^2 \xi \eta = -\frac{1}{2} n^2 \bar{\psi} \psi. \quad (4.32)$$

Es folgt durch Einsetzen der Größen in den allgemeinen Ausdruck (4.31) und Herausziehen der Summen aus den Exponenten:

$$\mathcal{Z}_F = (-1)^V \int \mathcal{D}\psi \prod_x \frac{1}{2} n_x^2 \bar{\psi}_x \psi_x \prod_x \exp [iK \varphi_x \bar{\psi}_x \psi_x] \prod_{\langle xy \rangle} \exp [-2iK \bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y]. \quad (4.33)$$

---

<sup>10</sup>Die Projektoreigenschaft  $P^2 = P$  lässt sich leicht unter der Verwendung von  $\gamma^0 \gamma^0 = 1$  zeigen, ist aber im Falle von nur einer Raumzeitdimension trivial, da  $\frac{1}{2}(1-\gamma^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $\frac{1}{2}(1+\gamma^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  offensichtlich Projektoren sind. Zusätzlich ist leicht zu erkennen, dass  $P_{xy}$  und  $P_{yx}$  auf zueinander orthogonale Unterräume projizieren.

Da sowohl  $(\bar{\psi}\psi)^2 = 0$  als auch  $(\bar{\psi}P_{xy}\psi)^2 = 0$  gilt<sup>11</sup>, lassen sich die Exponentialfunktionen exakt in zwei Summanden entwickeln und es folgt:

$$\mathcal{Z}_F = (-1)^V \int \mathcal{D}\psi \prod_x \frac{1}{2} n_x^2 \bar{\psi}_x \psi_x \prod_x [1 + iK \varphi_x \bar{\psi}_x \psi_x] \prod_{\langle xy \rangle} [1 - 2iK \bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y] . \quad (4.34)$$

Formal gesehen lässt sich nun  $\prod_{\langle xy \rangle} [1 - 2iK \bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y]$  in kompletter Analogie zum Ising-Modell in Graphen entwickeln:

$$\prod_{\langle xy \rangle} [1 - 2iK \bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y] = \sum_{\{k_l\}} \prod_{l=\langle xy \rangle} (-2iK \bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y)^{k_l} , \quad (4.35)$$

wobei die bond-Variable  $k_l$  auf jedem link den Wert Null oder Eins annehmen kann. Für mehr Freiheitsgrade werden wir allerdings eine speziellere graphische Darstellung der Terme wählen müssen. Da nun aber die Quadrate und somit auch höhere Potenzen von  $\bar{\psi}\psi$  verschwinden und die Integration über die Grassmannzahlen nur einen Wert gibt, sofern *alle* Integranden vorkommen<sup>12</sup>, ist sofort ersichtlich dass an einem Ort  $x$  die Integration allein durch die Nebenbedingungsterme gesättigt ist:

$$\mathcal{Z}_F = (-1)^V \int \mathcal{D}\psi \prod_x \frac{1}{2} n_x^2 \bar{\psi}_x \psi_x \quad (4.36)$$

$$\left( \int \mathcal{D}\psi_x \bar{\psi}_x \psi_x = -2 \right) = \prod_x n_x^2 \quad (4.37)$$

$$\text{(Nebenbedingung)} = 1 . \quad (4.38)$$

Dabei ist zu beachten, dass  $\bar{\psi} = \psi^T C$  nicht unabhängig von  $\psi$  ist und die Integration nur über die Komponenten von  $\psi$  geht. In dieser Entwicklung trägt also nur der vollkommen unbesetzte Graph (d.h.  $k_l = 0$  für alle  $l$ ) zur Zustandssumme bei. Führt man weiterhin die  $\mathbf{n}$  Integration in (4.31) aus landet man, bis auf den  $\sigma$  Term, bei der Zustandssumme des O(1)-Modells (siehe Gleichung (D.6) und Kapitel D.2).

---

<sup>11</sup>Auch dies ist im eindimensionalen Fall trivial, da  $\bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y = -\xi_x \eta_y$  und  $(\xi_x \eta_y)^2 = 0$  gilt. Dennoch ist diese Eigenschaft nicht auf eine Raumzeitdimension begrenzt (vgl. [25]).

<sup>12</sup>Damit gemeint ist, dass an jedem Ort  $x$  ein Term  $\bar{\psi}_x \psi_x$  nötig ist, da auch Mischterme der Art  $\bar{\psi}_x \psi_y = -(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x)$  bei der Integration verschwinden (siehe Ahang B).

### 4.3.3 Entwicklung für zwei Freiheitsgrade

Wir betrachten nun Felder der Form  $\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \end{pmatrix}$ . Die Nebenbedingung schreibt sich dann als

$$\prod_x \delta(\mathbf{n}_x \boldsymbol{\psi}_x^1) \delta(\mathbf{n}_x \boldsymbol{\psi}_x^2) = \prod_x (n_x^1 \xi_x^1 + n_x^2 \xi_x^2) (n_x^1 \eta_x^1 + n_x^2 \eta_x^2) \quad (4.39)$$

$$= \prod_x \left( (n_x^1)^2 \xi_x^1 \eta_x^1 + (n_x^2)^2 \xi_x^2 \eta_x^2 + n_x^1 n_x^2 \xi_x^1 \eta_x^2 + n_x^1 n_x^2 \xi_x^2 \eta_x^1 \right) \quad (4.40)$$

$$= (-1)^V \prod_x \left( \frac{1}{2} (n_x^1)^2 \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 + \frac{1}{2} (n_x^2)^2 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 + n_x^1 n_x^2 \bar{\psi}_x^1 \psi_x^2 \right). \quad (4.41)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die diskretisierte Form ein und formen analog zum Fall mit einem Freiheitsgrad die Exponentialfunktionen um erhalten wir:

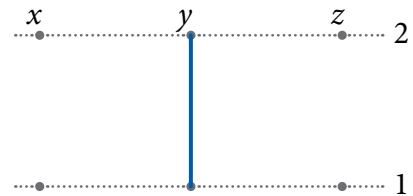
$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F &= (-1)^V \int \mathcal{D}\boldsymbol{\psi} \prod_x \left( \frac{1}{2} (n_x^1)^2 \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 + \frac{1}{2} (n_x^2)^2 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 + n_x^1 n_x^2 \bar{\psi}_x^1 \psi_x^2 \right) \\ &\quad \times \prod_x \left( 1 + iK \varphi_x \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 \right) \prod_x \left( 1 + iK \varphi_x \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \right) \\ &\quad \times \prod_{\langle xy \rangle} \left( 1 - 2iK \bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^1 \right) \prod_{\langle xy \rangle} \left( 1 - 2iK \bar{\psi}_x^2 P_{xy} \psi_y^2 \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Führt man die Produkte aus erhält man eine Summe mit unterschiedlichsten Summanden, denen im Zuge der Entwicklung jeweils ein Graph zugeordnet werden soll. Um dies in geschlossener Form angeben zu können, müssen wir die Struktur der auftauchenden Terme näher untersuchen. Wir ordnen nun zunächst jedem möglichen Term eine graphische Repräsentation zu, also sowohl den Termen der Nebenbedingung, des Diagonalterms als auch des Hopping-Terms. Wir erstellen *für jeden* Flavor ein eindimensionales Gitter, welches aus der Diskretisierung der Zeitkoordinate entspringt. Die nachfolgenden Betrachtungen sind am Beispiel des ersten Flavors durchgeführt. Die Zuordnung des zweiten, bzw. im nächsten Schritt aller weiteren Flavors folgt analog. Zunächst ordnen wir den Termen der Nebenbedingung eine graphische Repräsentation zu:

Flavor-wechselwirkender Term

$$n_y^1 n_y^2 \bar{\psi}_y^1 \psi_y^2 \text{ bzw. } n_y^1 n_y^2 \bar{\psi}_y^2 \psi_y^1$$

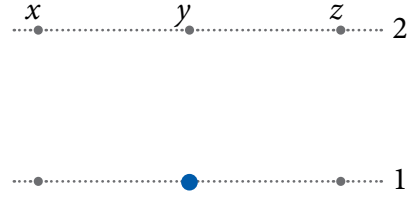
wird als Verbindung der Flavor dargestellt.



Flavor-selbstwechselwirkender Term

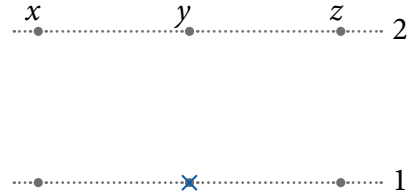
$$\frac{1}{2} (n_y^2)^2 \bar{\psi}_y^1 \psi_y^1$$

Wird als Punkt am jeweiligen Ort des Flavors dargestellt



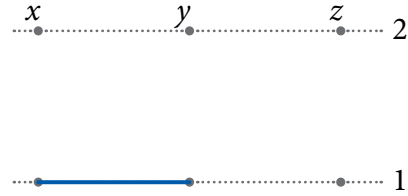
Für die Diagonalterme wählen wir am Ort  $y$  ein Kreuz zur Darstellung:

$$iK \varphi_y \bar{\psi}_y^1 \psi_y^1$$



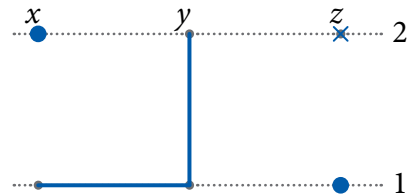
Den Hopping-Termen werden in zum Ising-Modell analoger Weise Verbindungen zwischen den Gitterpunkten zugeordnet:

$$-2iK \bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^1$$



Als Beispiel betrachten wir einen Ausschnitt eines willkürlichen Graphen ohne Berücksichtigung der konstanten Vorfaktoren:

$$\bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^1 \bar{\psi}_y^1 \psi_y^2 \bar{\psi}_z^1 \psi_z^1 \bar{\psi}_z^2 \psi_z^2 .$$



Nun gilt es, einige Regeln für die auftretenden Graphen aufzustellen. Die erste Einschränkung ergibt sich, da der Nebenbedingungsterm keine Eins enthält. Das bedeutet, dass an jedem Ort  $x$  des Gitters ein Nebenbedingungsterm auftaucht. Graphisch heißt das, dass an jedem Gitterpunkt entweder ein ausgefüllter Punkt sitzt, oder aber eine Wechselwirkung der Flavor stattfindet. Diagonal- und Hopping-Term enthalten jeweils eine Eins, womit ein Auftreten nicht zwingend ist. Aufgrund der Nilpotenz der Grassmannzahlen und Eigenschaften der Grassmannzahlen bei Integration ist sofort klar, dass an jedem Ort des Gitters *genau ein* Paar  $\bar{\psi}\psi$  pro Flavor auftauchen muss, damit es einen Beitrag zur Zustandssumme gibt. Mischterme  $\bar{\psi}_x^i \psi_x^j$  und  $\bar{\psi}_y^i \psi_x^i$  bzw.  $\bar{\psi}_x^i \psi_y^i$  ergeben, wie im Anhang B gezeigt wird, keinen Beitrag bei der Integration. Betrachten wir nun die verschiedenen Möglichkeiten, die an einem Ort  $y$  des Gitters auftreten können. Im Folgenden sind dabei die konstanten Vorfaktoren der auftretenden Terme der Übersicht halber vernachlässigt. Das führt dazu, dass die quadratischen Terme der



Nebenbedingung nicht mehr von den Diagonaltermen unterscheidbar sind. Zunächst zeigt sich leicht, dass ein Graph an einem Ort  $y$  des Gitters *kein offenes Ende* (Defekt) haben darf. Alle an einem Ort  $y$  möglichen Defekte sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Jeder dieser offenen Graphen hat am Ort  $y$  in einem Flavor entweder einen Term der Form

$$\bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y , \quad (4.43)$$

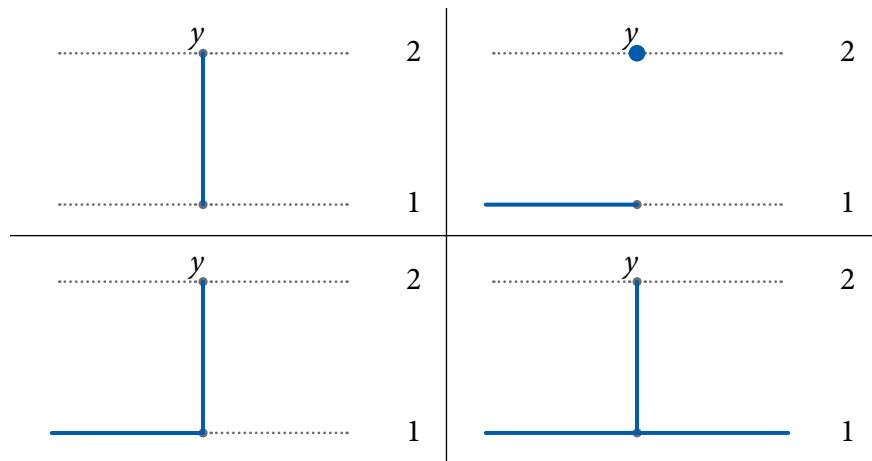
oder, falls am Ort  $y$  eine Flavor-Wechselwirkung auftritt,

$$\bar{\psi}_y^1 \psi_y^2 . \quad (4.44)$$

Es wird sofort ersichtlich, dass all diese Terme bei der Ausführung der  $\mathcal{D}\psi_y$  Integration verschwinden und somit keinen Beitrag zur Zustandssumme liefern, da die oben genannte Forderung, dass an jedem Ort genau ein Paar  $\bar{\psi}\psi$  auftreten muss, nicht erfüllt ist. Berechnen wir dazu beispielhaft den Beitrag des Ausschnittes des Graphen unten links in Abbildung 4.1. Die Integration am Ort  $y$  ergibt:

$$\int \mathcal{D}\psi_y \bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^1 \bar{\psi}_y^1 \psi_y^2 = -\frac{1}{2} \int \mathcal{D}\psi_y \bar{\psi}_y^1 \psi_y^1 \bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^2 \quad (4.45)$$

$$= 0 . \quad (4.46)$$



**Abbildung 4.1** Darstellung der möglichen offenen Enden eines Graphens am Ort  $y$  ohne Berücksichtigung der in den Flavors symmetrischen Fälle.

Wir stellen also fest, dass nur geschlossene Graphen zur Zustandssumme beitragen. Betrachten wir als nächstes also die geschlossenen Graphen. Dort gibt es im Wesentlichen zwei Topologien. Zum einen können zusammenziehbare Graphen auftreten (als Beispiel dargestellt in Abbildung 4.2), zum anderen können die Graphen über den Rand hinaus geschlossen sein, ohne zwischendurch ihre Laufrichtung zu ändern (Abbildung

4.3). Betrachten wir zunächst einen zusammenziehbaren Graphen, wie er in Abbildung 4.2 gezeigt ist. Dieser entspricht einem Term der Form

$$\bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^1 \bar{\psi}_y^1 \psi_y^2 \bar{\psi}_y^2 P_{yx} \psi_x^2 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^1 = - \left( \frac{1}{2} \right)^3 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \bar{\psi}_y^1 \psi_y^1 \bar{\psi}_y^2 \psi_y^2 \bar{\psi}_x^1 \underbrace{P_{xy} P_{yx}}_{=0} \psi_x^1 \quad (4.47)$$

$$= 0 . \quad (4.48)$$

Dabei wurde zum einen die Orthogonalität der Eigenräume der Projektoren ausgenutzt, zum andern, dass für zweikomponentige Majorana Spinoren

$$\psi \bar{\psi} = -\frac{1}{2} \bar{\psi} \psi \mathbb{1} \quad (4.49)$$

gilt<sup>13</sup>. Ein geschlossener zusammenziehbarer Graph trägt also nicht zur Zustandssumme bei. Im obigen Beispiel wurde die Konvention so gewählt, dass der Graph fortlaufend einer Richtung folgt. Alternativ könnte man den Graphen in der anderen Richtung durchlaufen, was allerdings keine Änderung mit sich bringt, da

$$\bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y = \bar{\psi}_y P_{yx} \psi_x \quad (4.50)$$

und

$$\bar{\psi}_x^1 \psi_x^2 = \bar{\psi}_x^2 \psi_x^1 \quad (4.51)$$

gilt<sup>14</sup>. Die Betrachtungen sind also vollkommen unabhängig von der Orientierung eines Graphen. Beachten muss man letztlich noch, dass wir auch eine ungeordnete Reihenfolge der Terme betrachten können. Der betrachtete Graph entspricht auch einem Term der Form

$$\bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^1 \bar{\psi}_x^2 P_{xy} \psi_y^2 \cdot \text{Flavor-WW-Term} . \quad (4.52)$$

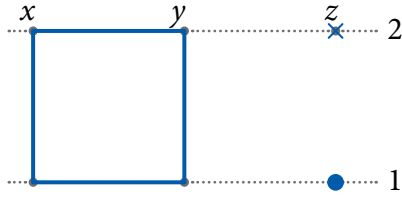
Allerdings wird dieser Ausdruck mit allen möglichen Termen der Flavor-Wechselwirkung ( $\bar{\psi}_x^1 \psi_y^2$ ,  $\bar{\psi}_x^2 \psi_y^1$ , etc.) aufgrund der Nilpotenz Null. Das bedeutet auch für alle weiteren Betrachtungen, dass

1. wir eine Orientierung des Graphen benötigen, um auftretende Wechselwirkungsterme hinzufügen zu können, und
2. die Wahl der Orientierung (mit oder gegen den Uhrzeigersinn) des Graphen keine Rolle spielt.

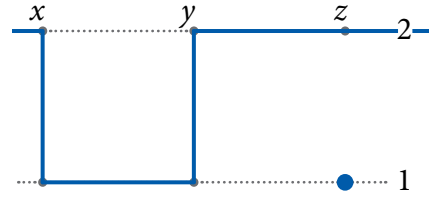
---

<sup>13</sup>Zum Beweis siehe Anhang A.

<sup>14</sup>Siehe A.36 im Anhang A.



**Abbildung 4.2** Darstellung eines Ausschnitt eines zusammenziehbaren geschlossenen Graphen.



**Abbildung 4.3** Darstellung eines Ausschnitt eines nicht zusammenziehbaren, über den Rand geschlossenen Graphen.

Wir haben die möglichen auftretenden Graphen schon deutlich eingeschränkt, es bleiben aber noch weitere Spezialfälle zu untersuchen. Die Eigenschaft, dass keine zusammenziehbaren Graphen auftreten können, führt direkt dazu, dass ein Graph nicht zurücklaufen darf (non-backtracking). Es ist schnell gezeigt, dass aufgrund der Orthogonalität der Projektor-Eigenräume

$$\bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y \bar{\psi}_y P_{yx} \psi_x = -\frac{1}{2} \bar{\psi}_y \psi_y \bar{\psi}_x P_{xy} P_{yx} \psi_x \quad (4.53)$$

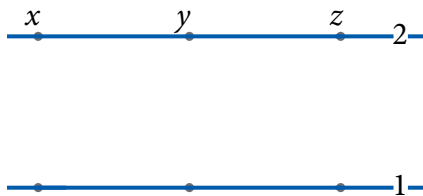
$$= 0 \quad (4.54)$$

in Analogie zum zusammenziehbaren Graphen gilt. Desweiteren führt die schon oben genannte Einschränkung durch die Nebenbedingungen dazu, dass es keine parallel laufende Graphen wie er in Abbildung 4.4 gezeigt ist, auftreten können. Denkbar wäre ein Beitrag eines Graphen der Form in Abbildung 4.5, welcher einen Nebenbedingungsterm enthält. Am Ort  $y$  erhält man jedoch

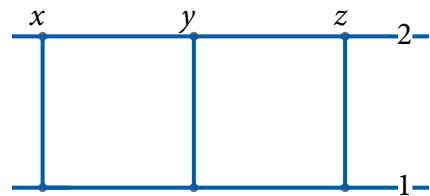
$$\bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^1 \bar{\psi}_y^1 P_{yz} \psi_z^1 \bar{\psi}_x^2 P_{xy} \psi_y^2 \bar{\psi}_y^2 P_{yz} \psi_z^2 \cdot \text{F-WW-Term} \quad (4.55)$$

$$= \bar{\psi}_x^1 P_{xy} P_{yz} \psi_z^1 \bar{\psi}_x^2 P_{xy} \psi_y^2 \bar{\psi}_y^2 P_{yz} \psi_z^2 \bar{\psi}_y^1 \psi_y^1 \bar{\psi}_y^2 \psi_y^2 \cdot \text{F-WW-Term} \quad (4.56)$$

welcher aufgrund der Nilpotenz der Grassmannzahlen mit allen Wechselwirkungstermen am Ort  $y$  Null ergibt.



**Abbildung 4.4** Ausschnitt eines parallel verlaufenden Graphen, der keine Nebenbedingungsterme enthält.



**Abbildung 4.5** Ausschnitt eines parallel verlaufenden Graphen, der Nebenbedingungsterme enthält.

Bisher gab es keinen Beitrag der Diagonalterme, da die geschlossenen Graphen und die Nebenbedingungen schon alles zur Integration Nötige geliefert haben. Der Diagonalterm trägt im Falle von zwei Freiheitsgraden nur bei, wenn wir den völlig unbesetzten

Graph betrachten. Sobald eine Verbindung gesetzt wird, d.h. sobald ein Faktor aus dem Hopping-Term auftritt, kann der Diagonalterm nicht mehr zur Zustandssumme beitragen. Die Beiträge der Diagonalterme werden zum Abschluss dieses Abschnitts berechnet, da sich diese in geschlossener Form, ähnlich zum Fall mit einem Freiheitsgrad, angeben lassen können.

Im Folgenden werden die Beiträge der Graphen berechnet und dazu wieder die konstanten Vorfaktoren der auftretenden Terme berücksichtigt. Allerdings berücksichtigen wir nur die Faktoren, die am zu betrachtenden Ort  $y$  auftreten.

### Flavor-selbstwechselwirkender Punkt

Wir betrachten einen Ausschnitt eines Graphen, bei dem am Ort  $y$  eine Selbstwechselwirkung eines Flavors stattfindet (vgl. Abbildung 4.6). Dies ergibt einen Term

$$(-2iK) \frac{1}{2} (n_y^2)^2 \bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^1 \bar{\psi}_y^1 P_{yz} \psi_z^1 \bar{\psi}_y^2 \psi_y^2 \quad (4.57)$$

$$= (-2iK) \frac{1}{2} (n_y^2)^2 \left( -\frac{1}{2} \right) \bar{\psi}_y^1 \psi_y^1 \bar{\psi}_y^2 \psi_y^2 \bar{\psi}_x^1 P_{xy} P_{yz} \psi_z^1 . \quad (4.58)$$

Es ergibt sich ein Beitrag zur Zustandssumme

$$\int \mathcal{D}\psi_y (-2iK) \frac{(n_y^2)^2}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) \bar{\psi}_y^1 \psi_y^1 \bar{\psi}_y^2 \psi_y^2 = -(-2iK) (n_y^2)^2 . \quad (4.59)$$

Wir lassen für den Moment die zwei negativen Vorzeichen explizit stehen, da sich die Struktur der Beiträge auf den  $O(N)$  Fall verallgemeinert und der Faktor  $(-2iK)$  an jedem Gitterpunkt auftritt und so aus dem Punktgewicht herausgenommen werden kann. Einen analogen Beitrag erhält man für den Fall, dass ein Graph am Ort  $y$  für den zweiten Flavor besetzt ist. Man erhält für einen am Ort  $y$  Flavor-selbstwechselwirkenden Ausschnitt eines Graphen einen Beitrag des bosonischen Feldes vom jeweils anderen Flavor:

$$-(-2iK) (n_y^{2,1})^2 . \quad (4.60)$$

### Flavor-wechselwirkender Punkt

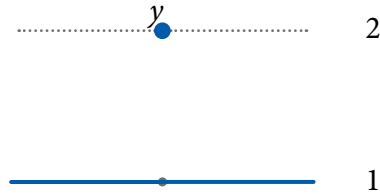
Wir betrachten nun einen Punkt  $y$ , an dem eine Wechselwirkung zwischen den beiden Flavor auftaucht (vgl. Abbildung 4.7), also einen Term

$$(-2iK) n_y^1 n_y^2 \bar{\psi}_x^1 P_{xy} \psi_y^1 \bar{\psi}_y^1 \psi_y^2 \bar{\psi}_y^2 P_{yz} \psi_z^2 \quad (4.61)$$

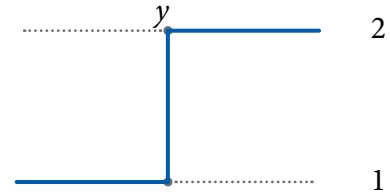
$$= (-2iK) n_y^1 n_y^2 \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \bar{\psi}_y^1 \psi_y^1 \bar{\psi}_y^2 \psi_y^2 \bar{\psi}_x^1 P_{xy} P_{yz} \psi_z^2 . \quad (4.62)$$

Man erhält also einen Beitrag

$$\int \mathcal{D}\psi_y (-2iK)(n_y^1 n_y^2) \left(-\frac{1}{2}\right) \bar{\psi}_y^1 \psi_y^1 \left(-\frac{1}{2}\right) \bar{\psi}_y^2 \psi_y^2 = (-2iK)n_y^1 n_y^2 . \quad (4.63)$$



**Abbildung 4.6** Ausschnitt eines zur Zustandssumme beitragender Graphen, welcher am Ort  $y$  eine Flavor-Selbstwechselwirkung aufweist.



**Abbildung 4.7** Ausschnitt eines zur Zustandssumme beitragender Graphen, welcher am Ort  $y$  eine Flavor-Wechselwirkung aufweist.

### Randbedingungen

Zur Berechnung der Beiträge der auftretenden Graphen sind noch die (anti-) periodischen Randbedingungen zu beachten. Betrachten wir ein Gitter, was nur aus den drei Gitterpunkten  $x, y$  und  $z$  besteht, und einen Graphen, welcher über das Gitter hinaus verbunden wird, wie er in Abbildung 4.8 gezeigt ist. Wir fügen einen virtuellen Gitterpunkt  $z+e_0$  ein, um den Graphen zu schließen. Für die fermionischen Randbedingungen kann man wählen zwischen:

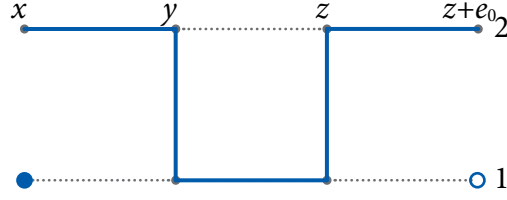
$$\text{periodisch:} \quad \psi_{z+e_0} = \psi_x , \quad (4.64)$$

$$\text{antiperiodisch:} \quad \psi_{z+e_0} = -\psi_x . \quad (4.65)$$

In den bosonischen Feldern wird dagegen stets mit periodischen Randbedingungen,

$$n_{z+e_0} = n_x , \quad (4.66)$$

gearbeitet. Wir schreiben nun allgemein  $\psi_{z+e_0} = \text{sgn} \cdot \psi_x$ , wobei  $\text{sgn}$  für antiperiodische Randbedingungen  $-1$  und für periodische Randbedingungen  $1$  ist. Die Beiträge des virtuellen Gitterpunktes ergeben jedoch lediglich einen Beitrag in den Hopping-Termen. Flavor-selbstwechselwirkende-Terme werden nicht explizit nochmal hinzugefügt, da sonst der Beitrag eines geschlossenen Graphen aufgrund der Nilpotenz Null ergäbe. Wir berechnen also nun analog zum vorigen Abschnitt den Beitrag des (linken) Randpunktes  $x$ , welcher über die Randbedingungen an den letzten Gitterpunkt  $z$  angeschlossen ist.



**Abbildung 4.8** Durch Hinzufügen eines virtuellen Gitterpunktes  $z + e_0$  wird der Graph unter Berücksichtigung der Randbedingungen geschlossen.

### Flavor-selbstwechselwirkender Randpunkt

Wir betrachten einen Randpunkt  $x$ , an dem eine Flavor-Selbstwechselwirkung stattfindet (vgl. Abbildung 4.9). Dies entspricht, wenn wir die Felder in  $y$  und  $z$  der Übersicht halber weglassen, einem Term

$$\int \mathcal{D}\psi_x (-2iK) \frac{1}{2} (n_x^2)^2 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \bar{\psi}_x^1 P_{xy}(\dots) P_{z, z+e_0} \psi_{z+e_0}^1 \quad (4.67)$$

$$= \int \mathcal{D}\psi_x \operatorname{sgn} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2} (-2iK) (n_x^2)^2 \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \cdot (\dots) \quad (4.68)$$

$$= -\operatorname{sgn} \cdot \left( -(-2iK) (n_x^2)^2 \right). \quad (4.69)$$

Da der Graph geschlossen ist, können alle Felder, welche zwischen  $x$  und  $z + e_0$  stehen, über die Beziehung  $\psi \bar{\psi} = -\frac{1}{2} \bar{\psi} \psi$  ausintegriert werden und man erhält unter Verwendung von  $\psi_{z+e_0} = \operatorname{sgn} \cdot \psi_x$  einen Term der Form  $\bar{\psi}_x P_{xy} \dots P_{z, z+e_0} \psi_{z+e_0} = \operatorname{sgn} \cdot \bar{\psi}_x P(e_0) \psi_x$ , da es sich aufgrund der gleichbleibenden Laufrichtung um identische Projektoren handelt und  $P^2 = P$  gilt. Es folgt weiterhin  $\operatorname{sgn} \cdot \bar{\psi}_x P(e_0) \psi_x = \operatorname{sgn} \cdot \frac{1}{2} \bar{\psi}_x \psi_x$ , siehe (A.41).

### Flavor-wechselwirkender Randpunkt

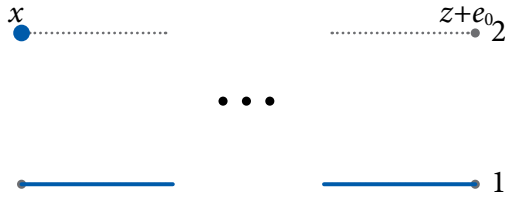
Auf analoge Art berechnen wir den Beitrag eines wechselwirkenden Randpunktes (vgl. Abbildung 4.10). Wir erhalten einen Term, den wir mit der selben Argumentation wie für nicht wechselwirkende Randpunkte umformen:

$$\int \mathcal{D}\psi_x n_x^1 n_x^2 (-2iK) \bar{\psi}_x^2 \psi_x^1 \bar{\psi}_x^1 P_{xy}(\dots) P_{z, z+e_0} \psi_{z+e_0}^2 \quad (4.70)$$

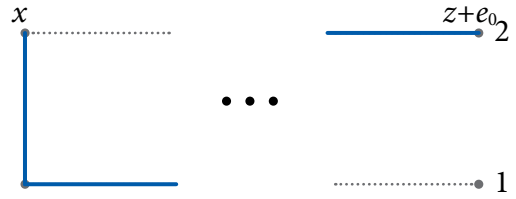
$$= \int \mathcal{D}\psi_x \operatorname{sgn} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} n_x^1 n_x^2 (-2iK) \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \cdot (\dots) \quad (4.71)$$

$$= -\operatorname{sgn} \cdot (-2iK) n_x^1 n_x^2. \quad (4.72)$$

Wir erhalten also bis auf ein Vorzeichen ( $-\operatorname{sgn}$ ) jeweils die gleichen Beiträge wie für alle weiteren Gitterpunkte. Wir können daher nun den gesamten Beitrag eines Graphs zur Zustandssumme schreiben, wobei wir den für jeden Punkt auftretenden Term  $(-2iK)$



**Abbildung 4.9** Darstellung des Randes eines zur Zustandssumme beitragender Graphen, welcher am Randpunkt  $x$  keine Wechselwirkung aufweist.



**Abbildung 4.10** Darstellung des Randes eines zur Zustandssumme beitragender Graphen, welcher am Randpunkt  $x$  eine Wechselwirkung aufweist.

aus dem Produkt ziehen und ein Punktmaß am Ort  $x$  für jeden Flavor  $i$  einführen:

$$w(x, i) = \begin{cases} -(n_x^i)^2 & \text{Flavor-selbstwechselwirkende Nebenbedingung} \\ n_x^i & \text{Flavor-wechselwirkende Nebenbedingung} \\ 1 & \text{Hopping-Term} \end{cases} \quad (4.73)$$

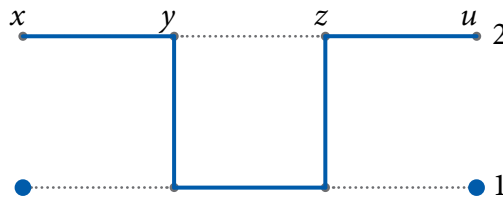
Wir können dann den Beitrag jedes Punktes als Produkt über die Beiträge der einzelnen Flavors schreiben. Dies ist vor allem für die später folgende Verallgemeinerung auf das  $O(N)$ - $\sigma$ -Modell notwendig:

$$w(\gamma) = -\text{sgn} \cdot (-1)^V (-2iK)^V \prod_{x,i} w(x, i). \quad (4.74)$$

### Beispiel

Als Beispiel berechnen wir den Beitrag des Graphens, welcher in [Abbildung 4.11](#) dargestellt ist. Am Ort  $x$  und  $u$  finden jeweils eine Flavor-Selbstwechselwirkungen des ersten Flavors statt. Flavor-Wechselwirkungen treten am Ort  $y$  und  $z$  auf und wir erhalten somit ein Gewicht des Graphen

$$w(\gamma_{\text{Bsp}}) = -\text{sgn} \cdot (-1)^4 (-2iK)^4 \cdot (-1)^2 (n_x^1)^2 (n_u^1)^2 \cdot n_y^1 n_y^2 n_z^1 n_z^2. \quad (4.75)$$



**Abbildung 4.11** Ein Beispiel-Graph, der einen Beitrag zur Zustandssumme hat. Es sind (anti-) periodische Randbedingungen zu erfüllen.

### Vollkommen unbesetzter Graph

Wie im obigen Abschnitt diskutiert trägt zum unbesetzten Graph lediglich der Hauptdiagonalterm bei. Wir berechnen nun aber nicht den Beitrag eines unbesetzten Punktes mit einem Diagonalterm, sondern fassen direkt alle Graphen zusammen, die keine Hopping-Terme enthalten, da dies zu einem geschlossenen Ergebnis führt. Man berechnet also aus Gleichung (4.42) alle Terme, die keinen Beitrag aus dem Hopping-Termen enthalten:

$$(-1)^V \int \mathcal{D}\psi \prod_x \left( \frac{1}{2}(n_x^1)^2 \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 + \frac{1}{2}(n_x^2)^2 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \right) \prod_x \left( 1 + iK\varphi_x \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 \right) \prod_x \left( 1 + iK\varphi_x \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \right) \quad (4.76)$$

$$= (-1)^V \int \mathcal{D}\psi \prod_x \left[ iK\varphi_x \left( \frac{1}{2}(n_x^1)^2 + \frac{1}{2}(n_x^2)^2 \right) \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \right] \quad (4.77)$$

$$= \prod_x \left( -\frac{1}{2} iK\varphi_x \mathbf{n}_x^2 \right) \int \mathcal{D}\psi \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 \quad (4.78)$$

$$= \prod_x (-2iK\varphi_x \mathbf{n}_x^2) \quad (4.79)$$

$$(\mathbf{n}_x^2 = 1) = \prod_x (-2iK\varphi_x) . \quad (4.80)$$

Es wurde ausgenutzt, dass alle Terme der Nebenbedingung einen Partner des ergänzenden Flavors in der Exponentialfunktion finden. Alle weiteren Terme werden aufgrund der Nilpotenz der Grassmann-Zahlen entweder direkt Null oder aber sind bei der Integration nicht vollständig und ergeben dann keinen Beitrag.

#### 4.3.4 Entwicklung für drei und mehr Freiheitsgrade

Die Durchführung der graphischen Entwicklung für drei Freiheitsgrade verläuft in den Ansätzen analog zum  $O(2)$ - $\sigma$ -Modell, wir erhalten allerdings weitere zur Zustandssumme beitragende Klassen von Graphen. Dies hat seinen Ursprung darin, dass ab drei Freiheitsgraden auch Kombinationen aus Hopping- und Diagonaltermen zur Zustandssumme beitragen können. Betrachten wir jedoch zunächst wieder den Nebenbedingungsterm:

$$\prod_x \delta(\mathbf{n}_x \psi_x^1) \delta(\mathbf{n}_x \psi_x^2) = \prod_x (n_x^1 \xi_x^1 + n_x^2 \xi_x^2 + n_x^3 \xi_x^3) (n_x^1 \eta_x^1 + n_x^2 \eta_x^2 + n_x^3 \eta_x^3) \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} &= \prod_x \left( (n_x^1)^2 \xi_x^1 \eta_x^1 + (n_x^2)^2 \xi_x^2 \eta_x^2 + (n_x^3)^2 \xi_x^3 \eta_x^3 \right. \\ &\quad + n_x^1 n_x^2 \xi_x^1 \eta_x^2 + n_x^1 n_x^2 \xi_x^2 \eta_x^1 + n_x^2 n_x^3 \xi_x^2 \eta_x^3 + n_x^2 n_x^3 \xi_x^3 \eta_x^2 \\ &\quad \left. + n_x^3 n_x^1 \xi_x^3 \eta_x^1 + n_x^3 n_x^1 \xi_x^1 \eta_x^3 \right) = \end{aligned} \quad (4.82)$$



$$\begin{aligned}
 &= (-1)^V \prod_x \left( \frac{1}{2} (n_x^1)^2 \bar{\psi}_x^1 \psi_x^1 + \frac{1}{2} (n_x^2)^2 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^2 + \frac{1}{2} (n_x^3)^2 \bar{\psi}_x^3 \psi_x^3 \right. \\
 &\quad \left. + n_x^1 n_x^2 \bar{\psi}_x^1 \psi_x^2 + n_x^2 n_x^3 \bar{\psi}_x^2 \psi_x^3 + n_x^3 n_x^1 \bar{\psi}_x^3 \psi_x^1 \right). \quad (4.83)
 \end{aligned}$$

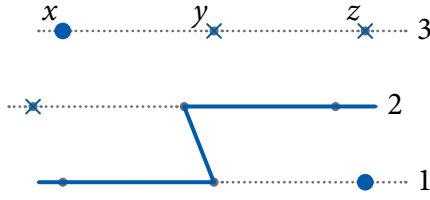
Es ist leicht zu erkennen, dass sich dies für den Fall von  $N$  Freiheitsgraden auf

$$\prod_x \delta(\mathbf{n}_x \boldsymbol{\psi}_x^1) \delta(\mathbf{n}_x \boldsymbol{\psi}_x^2) = (-1)^V \prod_x \left[ \sum_i \left( \frac{1}{2} (n_x^i)^2 \bar{\psi}_x^i \psi_x^i \right) + \sum_{i \neq j} n_x^i n_x^j \bar{\psi}_x^i \psi_x^j \right] \quad (4.84)$$

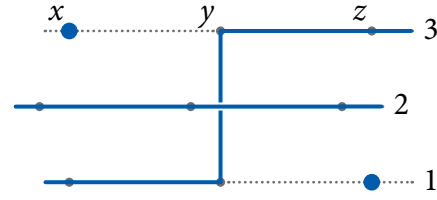
verallgemeinert, wobei die Summe über die Flavor-Wechselwirkungsterme  $\bar{\psi}_x^i \psi_x^j$  die Paare  $(i, j)$  und  $(j, i)$  nur einmal berücksichtigt. Man stellt erwartungsgemäß fest, dass die Wechselwirkung jeweils zwischen allen Flavor auftauchen kann, aber jeweils immer nur zwei Flavor an einem Ort miteinander wechselwirken. Mehrere Wechselwirkungen können nicht an einem Ort stattfinden, da an einem Ort immer nur ein Term aus den Nebenbedingungen untergebracht werden kann.

Wir können also den fermionischen Anteil der Zustandssumme ganz analog zum vorigen Abschnitt in Graphen entwickeln, wobei wir die graphische Zuordnung der Terme vom  $N = 2$  Fall übernehmen. Wir stellen nun erneut Regeln auf, welche Graphen zur Zustandssumme beitragen. Dabei wird in den meisten Fällen das schon für zwei Freiheitsgrade Berechnete verwendet. So zeigt sich, dass wieder nur geschlossene, nicht zusammenziehbare Graphen zur Zustandssumme beitragen. Die Rechnung erfolgt vollkommen analog zum vorigen Abschnitt: offenen Graphen fehlt an den Orten des Defekts ein vollständiger Satz an Grassmannvariablen und ergeben so bei der Integration Null. Zusammenziehbare und rücklaufende Graphen sind aufgrund der Projektion auf orthogonale Komplemente ( $P_{xy} P_{yx} = 0$ ) von Beginn an gleich Null.

Allerdings gibt es nun sowohl Beiträge von gemischten Hopping- und Diagonaltermen als auch von mehreren Hopping-Termen an einem Ort. Graphisch interpretiert heißt das: es gibt sowohl Graphen, die wir einstrangig nennen wollen, als auch Graphen, die wir zweistrangig nennen. Dies ist zur Veranschaulichung in Abbildung 4.12 und 4.13 dargestellt. Dieses Konzept überträgt sich direkt auf  $N$  Freiheitsgrade: hier tragen ein- bis  $(N - 1)$ -strangige Graphen zur Zustandssumme bei. Es ist leicht zu sehen, dass diese mehrstrangigen Graphen auch einen vollständigen Satz an Grassmannvariablen liefern. An den einstrangigen Graphen ist auch leicht einzusehen, dass genau die selben Regeln für die Graphen gelten, wie für das  $O(2)$ -Modell. Für zwei- und mehrstrangige Graphen gibt es leichte Ergänzungen, die Regeln für Geschlossenheit und nicht Zusammenziehbarkeit bleiben aber natürlich erhalten. Bedingung ist jedoch, dass sie sich nicht schneiden, denn dies entspricht Termen, wie sie in Gleichung (4.5) und Abbildung 4.56 behandelt wurden. Aufgrund der Nilpotenz der Grassmannvariablen werden die Beiträge sich schneidender Graphen Null.



**Abbildung 4.12** Ausschnitt eines zur Zustandssumme beitragenden *einsträngigen* Graphens im Falle von drei Freiheitsgraden.



**Abbildung 4.13** Ausschnitt eines zur Zustandssumme beitragenden *zweisträngigen* Graphens im Falle von drei Freiheitsgraden.

Die Darstellung der Graphen ist sich perspektivisch vorzustellen. Da alle Flavor mit allen Flavor wechselwirken können müssen die Liniengraphen der Flavor räumlich angeordnet werden, um die Wechselwirkungen unterscheidbar machen zu können. Dies kann für einen Fall mit vielen Freiheitsgraden unübersichtlich werden und ist deshalb hier nicht mehr dargestellt, da auch die auftretenden Strukturen sich nicht mehr ändern. Für einen Fall von  $N$  Freiheitsgraden tragen also zur Zustandssumme bei:

1. geschlossene, nicht zusammenziehbare, ein- bis  $(N - 1)$ -strängige Graphen, die sich nicht schneiden,
2. der vollkommen unbesetzte Graph, welcher keine Hopping-Terme enthält und separat berechnet wird.

### Vertex-Betrachtung

Wir berechnen nun das Gewicht eines beliebigen (besetzten) Graphen für  $N$  Freiheitsgrade. Dabei verallgemeinern wir die Betrachtungen aus dem vorigen Abschnitt und berechnen nicht direkt das Gewicht des Graphen an einem Punkt, sondern lediglich das Gewicht eines Flavors eines Graphen an einem Ort. Diese Gewichte werden schließlich multipliziert und ergeben das Gewicht des Graphen. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass sich das Gewicht letztlich in einer geschlossenen Form angeben lässt, wie es schon für  $N = 2$  durchgeführt wurde.

### Flavor-selbstwechselwirkender Term

Wir betrachten den Flavor-selbstwechselwirkenden Term der Nebenbedingung des Flavors  $i$  am Ort  $y$ . Dieser hat einen Beitrag

$$\int \mathcal{D}\psi_y^i \frac{1}{2} (n_y^i)^2 \bar{\psi}_y^i \psi_y^i = -(n_y^i)^2. \quad (4.85)$$

### Flavor-wechselwirkender Term

Der Flavor-wechselwirkende Term der Nebenbedingung tritt zwischen Flavor  $i$  und  $j$

auf. Da Wechselwirkung nur in Verbindung mit Hopping-Termen auftreten, ordnen wir einer Verbindung zusätzlich noch dem konstanten Faktor  $(-2iK)$  zu, wie es auch schon für zwei Freiheitsgrade gemacht wurde. Mit der Beziehung (4.49) lassen sich die zur Integration benötigten Felder am Ort  $y$  umformen und man erhält:

$$\int \mathcal{D}\psi_y^i \mathcal{D}\psi_y^j (-2iK) n_y^i n_y^j \bar{\psi}_x^i P_{xy} \psi_y^i \bar{\psi}_y^i \psi_y^j \bar{\psi}_y^j P_{yz} \psi_z^j \quad (4.86)$$

$$= \int \mathcal{D}\psi_y^i \mathcal{D}\psi_y^j (-2iK) n_y^i n_y^j \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \bar{\psi}_y^i \psi_y^i \bar{\psi}_y^j \psi_y^j \cdot (\dots) \quad (4.87)$$

$$= (-2iK) n_y^i n_y^j . \quad (4.88)$$

Dabei ist es für die Rechnung irrelevant in welcher Richtung die Wechselwirkung stattfindet.

### Diagonalterm

Der Diagonalterm lässt sich ohne weitere Umformungen integrieren und liefert einen Beitrag

$$\int \mathcal{D}\psi_y^i (iK \varphi_y) \bar{\psi}_y^i \psi_y^i = (-2iK) \varphi_y . \quad (4.89)$$

### Hopping-Term

Bei der Betrachtung des Hopping-Terms ordnen wir der Integration am Ort  $y$  wieder einen Vorfaktor  $(-2iK)$  zu. Durch die Fortsetzung eines weiteren Hopping Terms bzw. einer Flavor-Wechselwirkung sind so alle Faktoren der Hopping-Terme am Ende enthalten. Wir erhalten

$$\int \mathcal{D}\psi_y^i (-2iK) \bar{\psi}_x^i P_{xy} \psi_y^i \bar{\psi}_y^i P_{yz} \psi_z^i \quad (4.90)$$

$$= \int \mathcal{D}\psi_y^i (-2iK) \left(-\frac{1}{2}\right) \bar{\psi}_y^i \psi_y^i \cdot (\dots) \quad (4.91)$$

$$= (-2iK) . \quad (4.92)$$

### Das Maß eines zur Zustandssumme beitragenden Graphen

Mithilfe der oben berechneten Beiträge jedes Flavors an einem Punkt lässt sich der Beitrag eines Graphen geschlossen angeben. An jedem Ort erhalten wir einen konstanten Beitrag

$$(-2iK)^{N-1} , \quad (4.93)$$

denn alle Terme, bis auf die Nebenbedingungsterme, ergeben diesen Beitrag für einen Flavor. Bei einer Flavor-Wechselwirkung tritt für zwei Flavor jeweils einmal der gleiche Faktor auf und somit insgesamt wieder  $N - 1$  mal pro Ort. Dies wurde in analoger Weise für  $N = 2$  schon beobachtet. Wir können also den konstanten Vorfaktor aus dem Punktmaß herausziehen und ordnen den Punkten jeweils die Beiträge wie folgt zu:

$$w(x, i) = \begin{cases} -(n_x^i)^2 & , \quad \text{..... } x \text{..... } i \\ n_x^i & , \quad \text{..... } x \text{..... } i \\ \varphi_x & , \quad \text{..... } x \text{..... } i \\ 1 & , \quad \text{----- } x \text{----- } i \end{cases} . \quad (4.94)$$

Um den Beitrag angeben zu können müssen wir noch die Randbedingungen berücksichtigen. Wir haben schon gesehen, dass der Randpunkt jeweils den gleichen Beitrag hat wie ein beliebiger Gitterpunkt, lediglich mit einem von den Randbedingungen abhängigen Vorzeichen ( $-\text{sgn}$ ). Betrachten wir jedoch mehrstrangige Graphen, so wird für jeden dieser Stränge, die über das Gitter hinaus geschlossen sind, ein Vorzeichen auftreten. Für einen  $s$ -strangigen Graphen also genau ein Vorzeichen  $(-\text{sgn})^s$ . Wir können nun also in geschlossener Form das Maß eines zur Zustandssumme beitragenden Graphen angeben:

$$w(\gamma) = (-\text{sgn})^s \cdot (-1)^V (-2iK)^{V(N-1)} \prod_{x,i} w(x, i) . \quad (4.95)$$

**Beispiel**

Als Beispiel berechnen wir den Beitrag des Graphen, welcher in Abbildung 4.14 dargestellt ist.

Der Graph ist einstrangig, also gilt  $s = 1$ . Wir nehmen antiperiodische Randbedingungen an. Das Gitter besteht aus vier Punkten, also  $V = 4$ . Wir haben somit einen Beitrag des Graphen

$$w(\gamma_{\text{Bsp}}) = (-\text{sgn})^1 (-1)^4 (-2iK)^{4 \cdot 2} \cdot \varphi_x (n_x^1)^2 n_y^2 n_y^3 \varphi_y n_z^3 n_z^1 \varphi_z n_u^1 n_u^2 \varphi_u \quad (4.96)$$

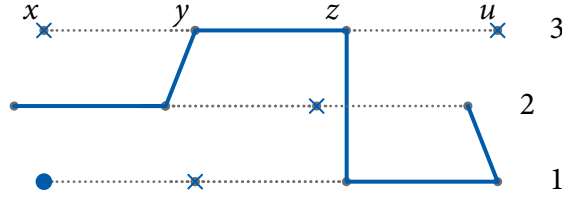
$$= (2iK)^8 (n_x^1)^2 n_y^2 n_y^3 n_z^3 n_z^1 n_u^1 n_u^2 \prod_x \varphi_x . \quad (4.97)$$

An diesem Beispiel erkennt man auch eine weitere Eigenschaft der auftretenden Graphen: ist ein Graph nicht maximal-strangig (also  $N-1$  strangig) so treten an jedem Ort Beiträge des Diagonalterms auf. Und zwar immer zur Ordnung  $(N - 1 - s)$ . Für die

Diagonalterme hat man also immer einen Beitrag

$$\prod_x \varphi_x^{N-1-s}, \quad (4.98)$$

was die Berechnung der Hilfsfeld-Integration erleichtert, da sie an jedem Ort identisch ist. Bei einer Implementation des Problems könnte man also das Punktmaß der Diagonalterme Eins setzen und aus den globalen Eigenschaften des Graphen auf den totalen Beitrag der Diagonalterme schließen.



**Abbildung 4.14** Einsträngiger Beispiel-Graph auf einem Vier-Punkte-Gitter mit drei Freiheitsgraden.

### Berechnung des unbesetzten Graphen

Erneut haben wir in den obigen Betrachtungen den unbesetzten Graphen abgegrenzt und nur besetzte Graphen untersucht. Wie für den Fall mit zwei Freiheitsgraden lässt sich der Beitrag der Diagonalterme ohne Hopping-Terme analytisch ausrechnen und muss so bei der Simulation der Graphen nicht berücksichtigt werden. Wir berechnen den unbesetzten Graphen analog zum Fall  $N = 2$ :

$$\mathcal{Z}_F = (-1)^V \int \mathcal{D}\psi \prod_x \left[ \sum_i \frac{1}{2} (n_x^i)^2 \bar{\psi}_x^i \psi_x^i \right] \times \prod_{x,i} [1 + iK \varphi_x \bar{\psi}_x^i \psi_x^i] \quad (4.99)$$

$$= (-1)^V \int \mathcal{D}\psi \prod_x \left[ (iK \varphi_x)^{N-1} \frac{1}{2} \sum_i (n_x^i)^2 \prod_j \bar{\psi}_x^j \psi_x^j \right] \quad (4.100)$$

$$= (-1)^V \left( \frac{1}{2} \right)^V (-2)^{VN} \prod_x (iK \varphi_x)^{N-1} \mathbf{n}_x^2 \quad (4.101)$$

$$= (-2iK)^{V(N-1)} \prod_x (\varphi_x)^{N-1}. \quad (4.102)$$

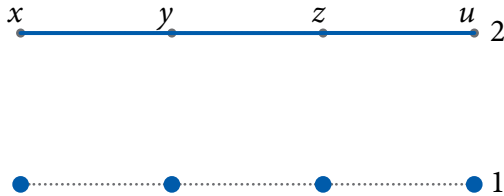
Das Ergebnis stimmt erwartungsgemäß für  $N = 2$  mit Gleichung (4.80) überein.

### 4.3.5 Vorzeichen des Gewichts

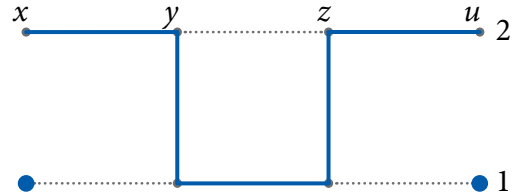
Für eine Simulation ist ein konstantes Vorzeichen der fermionischen Graphen notwendig, da es sonst, wie bei der Berechnung der Fermionendeterminante, zu einem Vorzeichenproblem führt: Bei einer Fluktuation des Vorzeichens sind Erwartungswerte bzw. die Korrelationsfunktion nicht mehr wohldefiniert. Für ein gegebenes Gitter kürzen sich alle konstanten Vorfaktoren in 4.95 bei einer Berechnung der Korrelationsfunktion. Es genügt also eine Untersuchung des Gewichts

$$\prod_{x,i} w(x,i) \tag{4.103}$$

für eine konstante Anzahl an Gitterpunkten durchzuführen. Das Vorzeichen kann dabei lediglich durch auftretende Flavor-selbstwechselwirkende Terme (Beitrag  $-(n_x^i)^2$ ) geändert werden. Im Falle von zwei Freiheitsgraden ist das globale Vorzeichen aller Graphen allerdings konstant: Um die Randbedingungen zu erfüllen, ist *immer* eine gerade Anzahl (null eingeschlossen) von Flavor-Selbstwechselwirkungen nötig. Dies hat zur Folge, dass stets nur eine gerade oder nur ungerade Anzahl von Flavor-Selbstwechselwirkungen auftaucht, abhängig von der Gitterpunktanzahl. Das Vorzeichen aller Graphen eines gegebenen Gitters bleibt also gleich. Anschaulich ist das am Beispiel zweier Graphen in Abbildung 4.15 und 4.16 dargestellt.



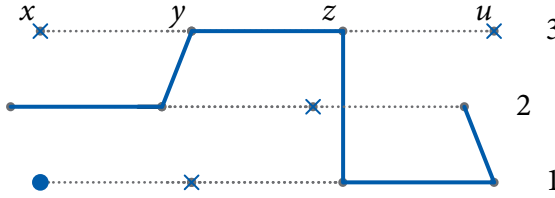
**Abbildung 4.15** Ein zur Zustandssumme beitragender Graph mit einer geraden Anzahl an Flavor-Selbstwechselwirkungen im Falle von zwei Freiheitsgraden.



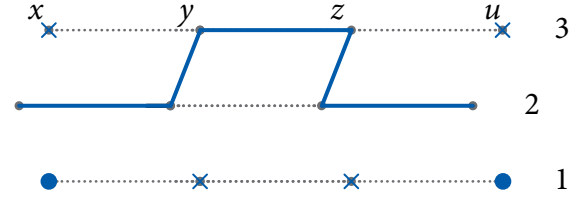
**Abbildung 4.16** Ein zur Zustandssumme beitragender Graph mit einer geraden Anzahl an Flavor-Selbstwechselwirkungen im Falle von zwei Freiheitsgraden. Trotz Flavor-Wechselwirkung bleibt das Vorzeichen im Vergleich mit Abbildung 4.15 erhalten.

Bei drei und mehr Freiheitsgraden ist die Anzahl von Flavor-Wechselwirkungen jedoch beliebig. Das Vorzeichen der beitragenden Graphen wechselt also. Dies wird bei der Betrachtung der beiden Graphen 4.17 und 4.18 deutlich. In wieweit diese Fluktuationen sich auf die Simulation auswirken muss bei einer Implementation geprüft werden. Gegebenenfalls lässt sich die Fluktuation durch geeignetes *reweighting* reduzieren. Ähnliche Vorzeichen-Probleme treten schon im Falle freier Wilson-Fermionen in 3 Dimensionen [25] auf. Dort führt allerdings ein einfaches reweighting nicht zur Lösung der Vorzei-

chenfluktuation. Ein Vergleich zu Ergebnissen, auch in Bezug auf das Vorzeichenproblem, des zweidimensionalen supersymmetrischen nichtlinearen  $\sigma$ -Modell werden im Kapitel 5 angestellt.



**Abbildung 4.17** Ein zur Zustandssumme beitragender Graph mit einer ungeraden Anzahl an Flavor-Selbstwechselwirkungen im Falle von drei Freiheitsgraden.



**Abbildung 4.18** Ein zur Zustandssumme beitragender Graph mit einer geraden Anzahl an Flavor-Selbstwechselwirkungen im Falle von drei Freiheitsgraden. Das Vorzeichen des Graphen ändert sich trotz konstanter Anzahl an Gitterpunkten gegenüber 4.17.

#### 4.3.6 Integration des $\sigma$ -Hilfsfeldes

Um die Zustandssumme letztlich auszurechnen ist noch die Ausführung der Integration der bosonischen Felder und des Hilfsfeldes  $\sigma$  nötig:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) w(\gamma) \exp \left[ -K \sum_{\langle xy \rangle} (\mathbf{n}_x - \mathbf{n}_y)^2 \right] \cdot \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[ -\frac{1}{K} \sum_x \sigma_x \right]. \quad (4.104)$$

Bevor wir uns der Integration der bosonischen Felder widmen betrachten wir die Integration des Hilfsfeldes  $\sigma$ . Dieses steckt lediglich in den Beiträgen der Diagonalterme und des unbesetzten Graphen mit

$$\prod_x \varphi_x^{N-1-s} = \prod_x \left( 1 + \frac{\sigma_x}{K} \right)^{N-1-s}. \quad (4.105)$$

Es sind also (die diskretisierten) Integrale der Form

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\sigma \prod_x (\sigma_x)^n \exp \left[ -\frac{1}{K} \sum_x \sigma_x^2 \right] &= \int \left( \prod_x \frac{d\sigma_x}{\sqrt{\pi K}} \right) \left( \prod_x (\sigma_x)^n \right) \left( \prod_x \exp \left[ -\frac{1}{K} \sigma_x^2 \right] \right) \\ &= \left( \int \frac{d\sigma}{\sqrt{\pi K}} \sigma^n \exp \left[ -\frac{1}{K} \sigma^2 \right] \right)^V \end{aligned} \quad (4.106)$$

mit  $n \in \mathbb{N}$  zu berechnen. Der konstante Faktor im Maß ergibt sich aus der Herleitung der Hubbard-Stratonovich-Transformation (siehe Anhang C, setze  $a = K/2$ ). Der Git-

terabstand ist auch hier Eins. Aufgrund der periodischen Randbedingungen wird das Feld an jedem Ort über den gesamten Wertebereich integriert und wir erhalten für jeden Ort ein identisches Gaußsches Integral. Es ist klar, dass diese Integrale für ungerade  $n$  verschwinden, da der Integrand dann eine ungerade Funktion ist. Für gerade  $n \geq 2$  existiert eine geschlossene Formel der bestimmten Integrale [4, S.1088]:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma}{\sqrt{\pi K}} \sigma^n \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{K} \right] = \sqrt{\frac{K^n}{\pi}} \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right) \quad (4.107)$$

$$= \left( \frac{K}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} (2l-1). \quad (4.108)$$

Dabei bezeichnet  $\Gamma(x)$  die Gammafunktion. Mithilfe dieser Formel sind alle benötigten Integrale bekannt und berechenbar.

### 4.3.7 Betrachtung der Integration der bosonischen Felder

Die Integration des Hilfsfeldes und der aus dem Gewicht der Graphen beitragenden Terme in  $\sigma$  wurde im vorigen Abschnitt schon untersucht. Das heißt es bleiben Integrale der Form

$$\mathcal{Z}_B = \int \mathcal{D}\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) \exp \left[ -K \sum_{\langle xy \rangle} (\mathbf{n}_x - \mathbf{n}_y)^2 \right] n(\gamma) \quad (4.109)$$

$$= \int \mathcal{D}\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) \exp \left[ -K \sum_{\langle xy \rangle} (\mathbf{n}_x^2 + \mathbf{n}_y^2 - 2\mathbf{n}_x \mathbf{n}_y) \right] n(\gamma) \quad (4.110)$$

$$= \int \mathcal{D}\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) \exp \left[ -2K \sum_{\langle xy \rangle} (1 - \mathbf{n}_x \mathbf{n}_y) \right] n(\gamma) \quad (4.111)$$

$$= e^{-2KV} \cdot \int \mathcal{D}\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) \prod_{\langle xy \rangle} \exp [-2K \mathbf{n}_x \mathbf{n}_y] n(\gamma) \quad (4.112)$$

zu berechnen.  $n(\gamma)$  steht dabei für das aus den fermionischen Graphen entsprungene Produkt aus Komponenten von  $(n_x^i)^2$  bzw.  $n_x^i n_x^j$  an den Gitterpunkten. Aufgrund dieser Beiträge lässt sich das Integral nicht wie im Fall des rein bosonischen  $O(N)$ -Modells (vgl. Anhang D) in Kugelkoordinaten allgemein berechnen. Dort konnte die Orthogonalität der auftretenden Kugelflächenfunktionen, welche sich aus dem Exponentialterm ergeben, ausgenutzt werden, um die Winkelintegration geschlossen auszuführen. In diesem Fall lässt sich die Orthogonalität an keinem Ort ausnutzen, da die hinzukommenden Terme  $n(\gamma)$  auch einen Winkelanteil besitzen. Prinzipiell ist eine analytische Berechnung eines solchen Integrals für einen gegebenen Beitrag allerdings denkbar. Ebenso wie eine stereographische Projektion wird dieser Ansatz in der vor-



liegenden Arbeit jedoch nicht untersucht.

Alternativ lässt sich die Exponentialfunktion in den Komponenten entwickeln und mit Hilfe der Beziehung

$$\int d\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) n^i n^j \sim \delta_{ij} \quad \text{beziehungsweise} \quad (4.113)$$

$$\int d\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) n^a n^b n^i n^j \sim \delta_{ab} \delta_{ij} + \delta_{ai} \delta_{bj} + \delta_{aj} \delta_{bi}, \quad (4.114)$$

welche [22, S.192] entnommen ist, vereinfachen. Dazu betrachten wir die Integration des Feldes an einem gegebenen Ort  $x$  mit Nachbarpunkten  $y$  und  $z$  :

$$\int d\mathbf{n}_x \delta(\mathbf{n}_x^2 - 1) \exp[-2K \mathbf{n}_y \mathbf{n}_x] \exp[-2K \mathbf{n}_x \mathbf{n}_z] \cdot \begin{cases} (n_x^i)^2 \\ n_x^i n_x^j \end{cases} \quad (4.115)$$

$$= \int d\mathbf{n}_x \delta(\mathbf{n}_x^2 - 1) \left(1 - 2K n_y^a n_x^a + 4K^2 (n_y^a n_x^a)^2 - \dots\right) \quad (4.116)$$

$$\times \left(1 - 2K n_x^a n_z^a + 4K^2 (n_x^a n_z^a)^2 - \dots\right) \cdot \begin{cases} (n_x^i)^2 \\ n_x^i n_x^j \end{cases} \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} &= \int d\mathbf{n}_x \delta(\mathbf{n}_x^2 - 1) \cdot \left[1 \right. \\ &\quad - 2K \left(n_y^i n_x^i + n_x^i n_z^i\right) \\ &\quad + 4K^2 \left(\left(n_y^i n_x^i\right)^2 + \left(n_x^i n_z^i\right)^2 + \left(n_y^i n_x^i\right)\left(n_x^i n_z^i\right)\right) \\ &\quad - 8K^3 \left(\left(n_y^i n_x^i\right)\left(n_x^i n_z^i\right)^2 + \left(n_x^i n_z^i\right)\left(n_y^i n_x^i\right)^2 + 2\left(n_y^i n_x^i\right)^3 + 2\left(n_x^i n_z^i\right)^3\right) \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(K^4)\right] \cdot \begin{cases} (n_x^i)^2 \\ n_x^i n_x^j \end{cases}. \quad (4.118) \end{aligned}$$

Da das Maß  $d\mu(\mathbf{n}) := d\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1)$  invariant unter Transformationen  $R$  aus der orthogonalen Gruppe  $O(N)$  ist, verschwinden Integrale über die Feldkomponenten in ungeradzahligter Ordnung:

$$\int d\mu(\mathbf{n}) n^a n^b n^c = \int d\mu(-\mathbf{n}) (-n^a)(-n^b)(-n^c) \quad (4.119)$$

$$= - \int d\mu(\mathbf{n}) n^a n^b n^c \quad (4.120)$$

$$\Rightarrow \int d\mu(\mathbf{n}) n^a n^b n^c = 0, \quad (4.121)$$

da die Matrix  $R = -\mathbb{1}_N$  Element der orthogonalen Gruppe ist. Diese Integralbeziehung gilt natürlich analog für beliebige ungerade Ordnungen der Feldkomponenten. Betracht-

ten wir als Beispiel die Integration für einen Beitrag  $n(\gamma) = (n_x^a)^2$  des fermionischen Anteils. Unter Berücksichtigung, dass ungeradzahlige Ordnungen der Komponenten bei der Integration verschwinden erhalten wir ein Integral:

$$\int d\mathbf{n}_x \delta(\mathbf{n}_x^2 - 1) (n_x^a)^2 \left[ 1 + 4K^2 \left( \sum_i (n_x^i)^2 (n_y^i)^2 + (n_x^i)^2 (n_z^i)^2 + (n_x^i)^2 n_y^i n_z^i \right) - 8K^3 \left( 4 \sum_i (n_x^i)^2 n_y^i n_z^i + (n_y^i)^2 + (n_z^i)^2 \right) + \mathcal{O}(K^4) \right], \quad (4.122)$$

welches sich problemlos mit den bekannten Relationen (4.113) und (4.114) berechnen lässt. Man sieht jedoch, dass an den Nachbarorten  $z$  und  $y$  die Felder aller Komponenten in beliebiger Ordnung auftreten, was eine geschlossene Angabe des bosonischen Beitrags für einen beliebigen fermionischen Graphen schwierig werden lässt. Möglich ist hier auch eine weitere graphische Entwicklung des bosonischen Anteils, welches aufgrund des Umfangs dieser Aufgabe in der vorliegenden Arbeit nicht verfolgt wird. Prinzipiell sind die bosonischen Pfadintegrale auch numerisch gut handhabbar und so könnte für einen konkreten Beitrag eines fermionischen Graphs die Berechnung der bosonischen Integration auch mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation realisiert werden.

---

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Es konnte eine Hopping-Erweiterung des fermionischen Anteils der Zustandssumme des nichtlinearen supersymmetrischen  $\sigma$ -Modells in  $(1+0)$  Dimensionen durchgeführt werden. Man gelangt so zu einer graphischen Repräsentation der Zustandssumme, die die Möglichkeit der Simulation des Modells mithilfe des Wurm-Algorithmus zulässt. Die Beiträge der bosonischen Felder sind in ersten Betrachtungen analytisch nicht zugänglich, es bietet sich aber die Möglichkeit einer weiteren graphischen Entwicklung oder einer Monte-Carlo Simulation der bosonischen Pfadintegrale. Einer Verallgemeinerung der graphischen Erweiterung auf  $(1+1)$  Dimensionen ist hiermit ein Fundament gesetzt. Ein Vergleich mit Ergebnissen des zweidimensionalen Modells [19] zeigt zu dieser Arbeit grundlegende Übereinstimmungen: so tragen auch in zwei Dimensionen geschlossene, nicht-zurücklaufende Graphen zur Zustandssumme bei. Aufgrund der hinzukommenden Dimension können die Graphen aber zusammenziehbar sein, d.h. sie sind nicht zwingend über den Rand geschlossen: Bedingt durch das Auftreten der Projektoren in zwei Dimensionen können die Graphen ohne Projektion auf orthogonale Komplemente geschlossen werden (vgl. den rein fermionischen Fall [25]). Auch die Betrachtung des Vorzeichens der Graphen ergibt in zwei Dimensionen analoge Ergebnisse. Während im Fall von zwei Freiheitsgraden das Vorzeichen konstant bleibt, so ist eine Fluktuation für drei und mehr Freiheitsgrade möglich. Doch auch hier gibt es noch keine konkreten Ergebnisse einer Implementation oder Lösungsvorschläge. Und auch im zweidimensionalen Fall sind die Beiträge der bosonischen Felder noch nicht bestimmt worden. Mithilfe der graphischen Darstellung lässt sich nun das System effektiv simulieren und so physikalische Eigenschaften und insbesondere auch die Wiederherstellung der Symmetrien im Kontinuumslimit untersuchen.

Die Methode, die Zustandssumme in einen fermionischen und einen bosonischen Teil zu trennen und separat zu simulieren, lässt sich auf weitere supersymmetrische Modelle anwenden. Durch eine Anwendung jeweils angepasster Algorithmen lassen sich so supersymmetrische Modelle effektiv simulieren, sofern sich der fermionische Teil in einer Hopping- oder Loopexpansion darstellen lässt. Eine generelle Untersuchung einer Hopping-Erweiterung supersymmetrischer Modelle, insbesondere des  $\mathcal{N} = 1$  Wess-Zumino Modells und supersymmetrischer  $\mathcal{N} = 2$  Quantenmechanik, durch Trennung in einen fermionischen und bosonischen Teil, ist in [3] dargelegt. Auch hier werden die Vorteile separater Behandlung bosonischer und fermionischer Freiheitsgrade bei einer Simulation diskutiert. Mithilfe des Wurm-Algorithmus lassen sich die fermionischen Anteile effektiv simulieren, während die bosonischen Freiheitsgrade weiterhin durch Monte-Carlo Simulationen zugänglich sind.

## A Konventionen

Im Allgemeinen wird in dieser Arbeit die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, das bedeutet, es wird über mehrfach auftretende Indizes summiert:

$$n^i n^i = \sum_i n^i n^i . \quad (\text{A.1})$$

Oben stehende Indizes sind im Allgemeinen Raumzeitindizes, wohingegen unten stehende Gitterindizes sind. Bei Raumzeitindizes wird von 1 bis 2 summiert (höher dimensionale Modelle werden nicht behandelt), die Feldindizes laufen in der Regel von 1 bis  $N$ . Das Kronecker-Delta wird definiert durch

$$\delta_{ij} \equiv \delta(i, j) := \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} , \quad (\text{A.2})$$

und ist von der Delta Distribution  $\delta(x)$  zu unterscheiden. Mithilfe des Kronecker-Deltas werden die diskreten Ableitungsoperatoren definiert. Es ist dabei  $\hat{\mu}$  ein Einheitsvektor des Gitters in positiver Richtung  $\mu$ . Der Gitterabstand ist  $a$ :

$$\text{rechtsseite Ableitung: } \partial_{xy}^\mu := \frac{1}{a} \left( \delta(x + a\hat{\mu}, y) - \delta(x, y) \right) , \quad (\text{A.3})$$

$$\text{linksseitige Ableitung: } \partial_{xy}^{*\mu} := \frac{1}{a} \left( \delta(x, y) - \delta(x - a\hat{\mu}, y) \right) , \quad (\text{A.4})$$

$$\text{symmetrische Ableitung: } \tilde{\partial}_{xy}^\mu := \frac{1}{2a} \left( \delta(x + a\hat{\mu}, y) - \delta(x - a\hat{\mu}, y) \right) , \quad (\text{A.5})$$

$$\text{diskreter Laplaceoperator: } \Delta_{xy} := \sum_{z, \mu} \partial_{xz}^{*\mu} \partial_{zy}^\mu . \quad (\text{A.6})$$

Der diskrete Laplaceoperator lässt sich für ein hyperkubisches Gitter mit  $D$  Dimensionen umformen zu

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} &= \sum_{z, \mu} \partial_{xz}^{*\mu} \partial_{zy}^\mu \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{z, \mu} \left( \delta(x, z) - \delta(x - \hat{\mu}, z) \right) \left( \delta(z + \hat{\mu}, y) - \delta(z, y) \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \sum_{z, \mu} \delta(x, z) \delta(z + \hat{\mu}, y) - \underbrace{\delta(x, z) \delta(z, y)}_{-D\delta_{xy}} - \underbrace{\delta(x - \hat{\mu}, z) \delta(z + \hat{\mu}, y)}_{-D\delta_{xy}} + \delta(z, y) \delta(x - \hat{\mu}, z) \\ &= \frac{1}{a^2} \left( \underbrace{-D\delta_{xy}}_{-D\delta_{xy}} - \underbrace{D\delta_{xy}}_{-D\delta_{xy}} + \sum_{z, \mu} \delta(x, z) \delta(z + \hat{\mu}, y) + \delta(z, y) \delta(x - \hat{\mu}, z) \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \left( -2D\delta_{xy} + \sum_{\mu} \delta(x + \hat{\mu}, y) + \delta(x - \hat{\mu}, y) \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Die Ladungskonjugationsmatrix  $C$  erfüllt im Allgemeinen:

$$C^2 = 1, \quad C^T = -C. \quad (\text{A.8})$$

Die (euklidischen)  $\gamma$ -Matrizen generieren eine Clifford-Algebra und erfüllen, unabhängig von ihrer Darstellung, folgende Relationen [22, Kap.15.1]:

$$(\gamma^i)^2 = 1, \quad (\gamma^5)^2 = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$[\gamma^i, \gamma^5]_+ = 0, \quad [\gamma^i, C]_+ = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$[C, \gamma^5]_- = 0. \quad (\text{A.11})$$

In dieser Arbeit wird für die  $\gamma$ -Matrizen folgende Darstellung gewählt:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

In dieser hermiteschen Darstellung erfüllen die  $\gamma$  Matrizen zusätzlich

$$(\gamma^i)^T = \gamma^i, \quad (\gamma^5)^T = -\gamma^5. \quad (\text{A.13})$$

Für die Ladungskonjugationsmatrix wird die Darstellung

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

gewählt.

Die Feynmansche Slash-Notation definiert mit Hilfe der  $\gamma$ -Matrizen:

$$\not{\partial} := \gamma^i \partial_i = \sum_i \gamma^i \partial_i. \quad (\text{A.15})$$

Mit Hilfe der Ladungskonjugationsmatrix wird für die Majorana-Spinoren  $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  in zwei bzw. einer Dimension

$$\bar{\psi}\psi := \psi^T C \psi = -2\xi\eta \quad (\text{A.16})$$

definiert.

Für zweikomponentige Majorana-Spinoren gilt darüber hinaus

$$\psi\bar{\psi} = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\mathbb{1}. \quad (\text{A.17})$$

Dazu betrachtet man die Anwendung auf einen Testvektor:

$$\psi\bar{\psi} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} (-\xi b + \eta a) \quad (\text{A.19})$$

$$(\xi^2 = 0, \eta^2 = 0) = \begin{pmatrix} \xi\eta a \\ -\eta\xi b \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$(\bar{\psi}\psi = -2\xi\eta) = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Es folgt also die obige Beziehung.

Für die in Kapitel 4 eingeführten Projektoren,

$$P_{xy} = P(\pm e_0) = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^0), \quad (\text{A.22})$$

zeigen wir die wesentlichen in der Arbeit verwendeten Relationen, welche sich in allgemeiner, darstellungs- und dimensionsunabhängiger Form berechnen lassen. Zuerst folgt aus der Invarianz der  $\gamma$ -Matrizen unter Transponieren, dass

$$P(\pm e_i)^T = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^i)^T \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{1}{2} (1^T \mp (\gamma^i)^T) \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^i) \quad (\text{A.25})$$

$$= P(\pm e_i) \quad (\text{A.26})$$

gilt. Betrachten wir nun die Vertauschung der Projektoren mit der Ladungskonjugationsmatrix und verwenden die Relationen (A.8) bis (A.11):

$$CP(+e_i) = C\frac{1}{2} (1 - \gamma^i) \quad (\text{A.27})$$

$$= C\frac{1}{2} - C\gamma^i \quad (\text{A.28})$$

$$= \frac{1}{2}C + \gamma^i C \quad (\text{A.29})$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \gamma^i\right) C \quad (\text{A.30})$$

$$= P(-e_i)C. \quad (\text{A.31})$$

Daraus folgt die wichtige Identität:

$$\bar{\psi}_x P_{xy} \psi_y = \psi_x^\alpha C^{\alpha\beta} P_{xy}^{\beta\rho} \psi_y^\rho \quad (\text{A.32})$$

$$= \psi_x^\alpha P_{yx}^{\alpha\beta} C^{\beta\rho} \psi_y^\rho \quad (\text{A.33})$$

$$= -\psi_y^\rho C^{\beta\rho} P_{yx}^{\alpha\beta} \psi_x^\alpha \quad (\text{A.34})$$

$$= \psi_y^\rho C^{\rho\beta} P_{yx}^{\beta\alpha} \psi_x^\alpha \quad (\text{A.35})$$

$$= \bar{\psi}_y P_{yx} \psi_x . \quad (\text{A.36})$$

Daraus folgt weiterhin die für geschlossene Graphen wichtige Identität

$$\bar{\psi} P(-e_0) \psi = \bar{\psi} P(e_0) \psi \quad (\text{A.37})$$

$$= \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$= \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$= \eta \xi \quad (\text{A.40})$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi . \quad (\text{A.41})$$

## B Grassmannzahlen

Die Grassmannzahlen dienen in der Physik zur Darstellung fermionischer Felder bzw. den Feldoperatoren und erlauben mittels einer geeigneten Definition eine zum Pfadintegralformalismus analogen Darstellung fermionischer Systeme. Die Elemente  $\xi, \eta$  folgen einer Anti-Vertauschungsrelation

$$\xi \eta = -\eta \xi \quad (\text{B.1})$$

und generieren eine Grassmann-Algebra. Mit beliebigen Elementen  $c \in \mathbb{C}$  kommutieren die Grassmannzahlen jedoch. Aus (B.1) folgt direkt die Nilpotenz der Grassmannzahlen

$$\xi^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi^n = 0, \quad \text{falls } \mathbb{N} \ni n \geq 2. \quad (\text{B.2})$$

Man beachte, dass ein Produkt aus zwei Grassmannzahlen zwar mit einer weiteren Grassmannzahl kommutiert,

$$\begin{aligned} (\xi \eta) \theta &= -\xi \theta \eta \\ &= \theta (\xi \eta), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

aber dennoch keine gewöhnlich  $c$ -Zahl darstellt, da die Nilpotenz,

$$\begin{aligned} (\xi\eta)^2 &= \xi\eta \xi\eta \\ &= -\xi\xi\eta\eta \\ &= 0, \end{aligned} \tag{B.4}$$

noch gewährleistet ist. Aufgrund der Nilpotenz lassen sich Funktionen von Grassmannzahlen in genau zwei Terme entwickeln:

$$f(\xi) = f_0 + f_1\xi, \tag{B.5}$$

was auf die in dieser Arbeit häufig verwendete Entwicklung der Exponentialfunktion für Majoranaspinoren führt:

$$e^{-\bar{\psi}A\psi} = 1 - \bar{\psi}A\psi, \tag{B.6}$$

wobei  $A$  eine  $c$ -Zahl ist und die Majoranaspinoren  $\psi$  ein 2-Tupel aus reellen Grassmannzahlen sind. Man führt Integrale über die Forderung der Linearität,

$$\int d\xi (cf(\xi) + g(\xi)) = c \int d\xi f(\xi) + \int d\xi g(\xi), \tag{B.7}$$

und den Bedingungen

$$\int d\xi \xi = 1, \tag{B.8}$$

$$\int d\xi 1 = 0 \tag{B.9}$$

ein. Mit dieser Definition lässt sich ein Analogon der Deltadistribution für Grassmannzahlen definieren:

$$\int d\xi' \delta(\xi - \xi')f(\xi') = f(\xi), \tag{B.10}$$

woraus sich die leicht überprüfbare Darstellung der Deltadistribution für Grassmannzahlen ergibt:

$$\delta(\xi - \xi') = \xi' - \xi. \tag{B.11}$$



---

Denn es gilt für eine  $\mathbb{C}$ -wertige Funktion  $f$ :

$$\begin{aligned}
\int d\xi' \delta(\xi - \xi') f(\xi') &= \int d\xi' (\xi' - \xi)(f_0 + f_1 \xi') \\
&= \int d\xi' \xi' (f_0 + f_1 \xi') - \int d\xi' \xi (f_0 + f_1 \xi') \\
&= f_0 - f_1 \int d\xi' (-\xi' \xi) \\
&= f_0 + f_1 \xi \\
&= f(\xi) .
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Die in dieser Arbeit nötigen Integrale sind im Wesentlichen:

$$\int \mathcal{D}\psi \bar{\psi} \psi = -2 \int d\xi d\eta \xi \eta \tag{B.13}$$

$$= -2 , \tag{B.14}$$

Desweiteren ergeben Mischterme zweier Flavor  $i$  und  $j$ ,

$$\int \mathcal{D}\psi \bar{\psi}^i \psi^j = \int d\xi^1 d\eta^1 d\xi^2 d\eta^2 (-\xi^1 \eta^2 + \eta^1 \xi^2) \tag{B.15}$$

$$= 0 , \tag{B.16}$$

ebenso wie Mischterme eines Flavors an verschiedenen Orten  $x$  und  $y$  des Gitters,

$$\int \mathcal{D}\psi_x \bar{\psi}_x \psi_y = \int d\xi_x d\eta_x (-\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) \tag{B.17}$$

$$= 0 , \tag{B.18}$$

keinen Wert bei der Integration. Dies zeigt sich analog auch für Mischterme  $\bar{\psi}_x^i P_{xy} \psi_y^j$ .

## C Hubbard-Stratonovich Transformation

Die Hubbard-Stratonovich Transformation erlaubt es die Integration über Wirkungsfunktionale, welche in den Feldern quadratisch sind, durch die Einführung einer zusätzlichen Integration über ein Hilfsfeld in ein in den Feldern lineares Wirkungsfunktional zu transformieren. Grundlage dafür ist die durch quadratische Ergänzung leicht zu zeigende Integrationsidentität für ein skalares  $x$  und ein konstantes  $a > 0$ :

$$\exp \left[ -\frac{a}{2} x^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\mathbb{R}} d\sigma \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2a} - i x \sigma \right]. \quad (\text{C.1})$$

Nun zeigt man, dass eine analoge Transformation auch für Funktionale existiert, in dem man das Pfadintegral unter periodischen Randbedingungen des Hilfsfeldes diskretisiert und anschließend den Kontinuumsliches bildet. Es ist nun  $\alpha = \alpha(x_0)$  ebenso wie  $\sigma$  ein Feld. Um den bei der Gaußschen Integration auftretenden konstanten Term zu eliminieren muss das Maß dementsprechend angepasst werden:

$$\int \mathcal{D}\sigma \exp \left[ -\frac{a}{2} \int dx_0 \left( \frac{\sigma^2}{a^2} + i \frac{2}{a} \alpha \sigma \right) \right] \xrightarrow[\text{Gitterabstand: } \Delta x_0]{\text{diskretisieren}} \int \left( \prod_x \frac{d\sigma_x}{\sqrt{2\pi a}} \right) \exp \left[ -\Delta x_0 \frac{a}{2} \sum_x \frac{\sigma_x^2}{a^2} + i \frac{2}{a} \alpha_x \sigma_x \right] \quad (\text{C.2})$$

$$= \prod_x e^{\Delta x_0} \int \frac{d\sigma_x}{\sqrt{2\pi a}} \exp \left[ -\Delta x_0 \frac{a}{2} \sum_x \frac{\sigma_x^2}{a^2} + i \frac{2}{a} \alpha_x \sigma_x \right] \quad (\text{C.3})$$

$$\text{(Integralidentität)} \quad = \prod_x e^{\Delta x_0} \exp \left[ -\frac{a}{2} \alpha_x^2 \right] \quad (\text{C.4})$$

$$= \exp \left[ -\Delta x_0 \frac{a}{2} \sum_x \alpha_x^2 \right] \quad (\text{C.5})$$

$$\xrightarrow{\text{Kontinuumsliches}} \exp \left[ -\frac{a}{2} \int dx_0 \alpha_x^2 \right]. \quad (\text{C.6})$$

Die gewünschte Transformation erhält man also aus der Anwendung der Integralidentität an jedem (diskreten) Raumzeitgitterpunkt  $x$ .

---

## D Das O(N) Modell

Das O(N)- oder N-Vektor Modell ist ein Modell aus der statistischen Physik und dient zur Beschreibung von Ferromagneten und Phasenübergängen von Vielteilchen-Systemen. Die Spins  $\mathbf{s}_x$  des System nehmen dabei Werte auf der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^N$  an und können als klassische Ausrichtung der Elementarmagnete gedeutet werden (vgl. [22, Kap. 6.2.4]). Der Hamiltonian des Systems ohne äußeres Magnetfeld,

$$H = -J \sum_{\langle xy \rangle} \mathbf{s}_x \mathbf{s}_y , \quad (\text{D.1})$$

ist invariant unter Transformationen der orthogonalen Gruppe O(N) der Spins, da das Skalarprodukt zweier Spins O(N)-invariant ist [22, S.108]:

$$R\mathbf{s}_x R\mathbf{s}_y = \mathbf{s}_x \mathbf{s}_y , \quad (\text{D.2})$$

für ein  $R \in O(N)$ . Der Name des Modells ergibt sich aus dieser Symmetrie.

Spezialfälle des Modells sind zum einen das schon behandelte Ising-Modell ( $N = 1$ ), sowie das Heisenberg-Modell ( $N = 3$ ).

Im Folgenden wird der Propagator und die Zustandssumme des Systems berechnet, indem wir die fermionischen Anteile der Wirkung des supersymmetrischen  $\sigma$ -Modells in (4.1), welches ebenfalls eine O(N)-Symmetrie aufweist, vernachlässigen und das Pfadintegral durch Einführen von Kugelkoordinaten berechnen.

### D.1 Propagator des bosonischen O(N) Modells

Zu berechnen gilt der euklidische Propagator

$$K(\mathbf{x}_b, \tau_b; \mathbf{x}_a, \tau_a) = \int_{\mathbf{x}(\tau_a)=\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}(\tau_b)=\mathbf{x}_b} \mathcal{D}\mathbf{n} e^{-S_E[\mathbf{n}]}, \quad (\text{D.3})$$

wobei

$$S_E = \frac{1}{g^2} \int d\tau \partial^\mu \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}\mathbf{n} = \prod_{i=1}^N \mathcal{D}n^i \quad (\text{D.4})$$

gilt und die Nebenbedingung

$$n^i n^i = \mathbf{n}^2 = 1 \quad (\text{D.5})$$

zu erfüllen ist. Zu berechnen ist also

$$K(\mathbf{x}_b, \tau_b; \mathbf{x}_a, \tau_a) = \int_{\mathbf{x}(\tau_a)=\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}(\tau_b)=\mathbf{x}_b} \mathcal{D}\mathbf{n} \delta(\mathbf{n}^2 - 1) \exp\left(-\frac{1}{g^2} \int \dot{\mathbf{n}}^2\right). \quad (\text{D.6})$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten die Nebenbedingung, ausgedrückt in der Delta-Distribution, zu verwenden. Man kann beispielsweise eine stereographische Projektion der Einheitskugel durchführen, oder aber man führt Kugelkoordinaten (in  $D = N$  Dimensionen) ein. Im folgenden wird letzteres durchgeführt. Die Einführung der Kugelkoordinaten und der zur Umformung benötigten Theoreme sind [13, Kap.8.5] entnommen, woran sich auch die von den vorigen Kapiteln abweichende Notation anlehnt. Zuerst diskretisiert man den Ausdruck analog zu (2.6):

$$\mathcal{D}\mathbf{n} \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \prod_{n=1}^k d\mathbf{n}_n, \quad (\text{D.7})$$

$$\dot{\mathbf{n}}^2 \longrightarrow \frac{(\mathbf{n}_n - \mathbf{n}_{n-1})^2}{\epsilon^2}, \quad (\text{D.8})$$

$$\int d\tau \longrightarrow \sum \epsilon. \quad (\text{D.9})$$

Die Normierungskonstante  $A_k$  wird am Ende der Rechnung aus den Eigenschaften (2.8) und (2.9) des Propagators bestimmt. Man erhält also das diskretisierte Integral

$$K(\mathbf{x}_b, \tau_b; \mathbf{x}_a, \tau_a) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \prod_{n=1}^k \int_{\mathbb{R}^D} d\mathbf{n}_n \delta(\mathbf{n}_n^2 - 1) \exp\left(-\frac{1}{g^2} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{(\mathbf{n}_n - \mathbf{n}_{n-1})^2}{\epsilon}\right), \quad (\text{D.10})$$

wobei

$$\tau_b - \tau_a = \Delta\tau, \quad \epsilon = \frac{\Delta\tau}{k+1}, \quad \mathbf{n}_i = \mathbf{n}(i\epsilon + \tau_a), \quad \mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_a \text{ und } \mathbf{n}_{k+1} = \mathbf{n}_b \quad (\text{D.11})$$

gilt. Führt man nun Kugelkoordinaten ein erhält man für das Linienelement  $d\mathbf{n}_n \rightarrow r_n^{D-1} dr_n d\Omega_n$  mit dem verallgemeinerten Raumwinkelelement  $d\Omega = d\varphi_{D-1} \sin^{D-2} \varphi_{D-1} \cdot \dots \cdot d\varphi_2 \sin \varphi_2 d\varphi_1$ . Weiterhin gilt

$$(\mathbf{n}_n - \mathbf{n}_{n-1})^2 \longrightarrow r_n^2 + r_{n-1}^2 - 2r_n r_{n-1} \cos \Delta\vartheta_n, \quad (\text{D.12})$$

wobei  $\Delta\vartheta_n$  den Winkel zwischen  $\mathbf{n}_n$  und  $\mathbf{n}_{n-1}$  bezeichnet. Man erhält also für den Propagator (im Folgenden nur noch  $K$  benannt) aus (D.10):

$$K = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \prod_{n=1}^k \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{D-1}} dr_n r_n^{D-1} d\Omega_n \delta(r_n^2 - 1) \times \exp \left( -\frac{1}{\epsilon g^2} \sum_{n=1}^{k+1} (r_n^2 + r_{n-1}^2 - 2r_n r_{n-1} \cos \Delta\vartheta_n) \right). \quad (\text{D.13})$$

Betrachtet man nun den Exponentialfaktor  $\exp(\frac{2}{\epsilon g^2} r_n r_{n-1} \cos \Delta\vartheta_n) \equiv \exp(h \cos \Delta\vartheta_n)$  erhält man folgende Zerlegung:

$$e^{h \cos \Delta\vartheta_n} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(h) \frac{2l + D - 2}{D - 2} \frac{1}{S^{D-1}} C_l^{(D/2-1)}(\cos \Delta\vartheta_n), \quad (\text{D.14})$$

mit

$$a_l(h) = (2\pi)^{D/2} h^{1-D/2} I_{D/2+l-1}(h) \equiv e^h \left( \frac{2\pi}{h} \right)^{\frac{D-1}{2}} \tilde{I}_{D/2+l-1}(h). \quad (\text{D.15})$$

Dabei bezeichnen:

- $S^{D-1}$  die Oberfläche der  $D-1$  dimensionalen Einheitssphäre  $\mathbb{S}^{D-1} := \{x \in \mathbb{R}^D : \|x\| = 1\}$ ,
- $C_l$  die Gegenbauer-Polynome und
- $I_m$  die modifizierten Bessel-Funktionen und  $\tilde{I}_m(z) = \sqrt{2\pi z} e^z I_m(z)$ .

Für  $D > 2$  existiert ein Additionstheorem, welches die Gegenbauer-Polynome mit den verallgemeinerten (hyper)-sphärischen Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}$  in Verbindung bringt. Der Multiindex  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{D-2}$  bezeichnet dabei die magnetischen Quantenzahlen. Mit

$$\frac{2l + D - 2}{D - 2} \frac{1}{S^{D-1}} C_l^{(D/2-1)}(\cos \Delta\vartheta_n) = \sum_{\mathbf{m}} Y_{l\mathbf{m}}(\Omega_n) Y_{l\mathbf{m}}^*(\Omega_{n-1}) \quad (\text{D.16})$$

folgt

$$e^{h \cos \Delta\vartheta_n} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(h) \sum_{\mathbf{m}} Y_{l\mathbf{m}}(\Omega_n) Y_{l\mathbf{m}}^*(\Omega_{n-1}). \quad (\text{D.17})$$

$\Omega$  stellt dabei im Folgenden immer einen auf die Einheitssphäre  $\mathbb{S}^{D-1}$  zeigenden Vektor im  $\mathbb{R}^D$  dar. Die Summe über  $n$  in (D.13) faktorisiert dabei und, wenn man zusätzlich

den Ausdruck für  $a_l$  aus (D.15) einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
K &= \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \prod_{n=1}^k \int_0^\infty dr_n r_n^{D-1} \int_{\mathbb{S}^{D-1}} d\Omega_n \delta(r_n^2 - 1) \\
&\times \prod_{n=1}^{k+1} \sum_{l_n=0}^\infty e^{\frac{2r_n r_{n-1}}{\epsilon g^2}} \left( \frac{\pi \epsilon g^2}{r_n r_{n-1}} \right)^{\frac{D-1}{2}} \tilde{\mathbb{I}}_{D/2+l_n-1} \left( \frac{2r_n r_{n-1}}{\epsilon g^2} \right) \sum_{\mathbf{m}_n} Y_{l_n \mathbf{m}_n}(\Omega_n) Y_{l_n \mathbf{m}_n}^*(\Omega_{n-1}) \\
&\times \exp \left[ -\frac{1}{\epsilon g^2} \sum_{n=0}^{k+1} (r_n^2 + r_{n-1}^2) \right]. \tag{D.18}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun vereinfachen. Zum einen kann man den Term  $\prod_{n=1}^{k+1} e^{\frac{2r_n r_{n-1}}{\epsilon g^2}}$  und  $\exp \left[ -\frac{1}{\epsilon g^2} \sum_{n=0}^{k+1} (r_n^2 + r_{n-1}^2) \right]$  zu  $\exp \left[ -\frac{1}{\epsilon g^2} \sum_{n=0}^{k+1} (r_n - r_{n-1})^2 \right]$  zusammenfassen, zum anderen kann man die Winkelintegration, unter Berücksichtigung der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen bei Integration über die Einheitskugel,

$$\int d\Omega Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \tag{D.19}$$

direkt ausführen. Das Produkt über die Summen in (D.18) führt zu einem Produkt aus Kronecker-Deltas und die bleibenden Randterme. Es folgt also

$$\begin{aligned}
K &= \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \left[ (\pi \epsilon g^2)^{\frac{D-1}{2}} \right]^{k+1} \prod_{n=1}^k \int_0^\infty dr_n \delta(r_n^2 - 1) \\
&\times \sum_{l=0}^\infty \prod_{n=1}^{k+1} \tilde{\mathbb{I}}_{D/2+l-1} \left( \frac{2r_n r_{n-1}}{\epsilon g^2} \right) \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\Omega_a) Y_{lm}^*(\Omega_b) \\
&\times \exp \left[ -\frac{1}{\epsilon g^2} \sum_{n=0}^{k+1} (r_n - r_{n-1})^2 \right]. \tag{D.20}
\end{aligned}$$

Es wurden dabei noch die auftretenden Produkte von Radialkomponenten und Konstanten unter der Berücksichtigung, dass die Nebenbedingung auch für die Randterme  $r_a$  und  $r_b$  gelten, zusammengefasst zu

$$\prod_{n=1}^k \int dr_n r_n^{D-1} \prod_{n=1}^{k+1} \left( \frac{\pi \epsilon g^2}{r_n r_{n-1}} \right)^{\frac{D-1}{2}} = \left[ (\pi \epsilon g^2)^{\frac{D-1}{2}} \right]^{k+1} \prod_{n=1}^k \int dr_n. \tag{D.21}$$

(D.20) lässt sich etwas übersichtlicher schreiben, wenn die Linearität des Integrals ausnutzt und die Summe über  $l$  und den bezüglich der Integration konstanten Terme  $Y_{lm}$  aus dem Integral herauszieht:

$$K = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^\infty K_r(k) \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\Omega_a) Y_{lm}^*(\Omega_b), \tag{D.22}$$

mit dem radialen Anteil

$$\begin{aligned}
 K_r(k) &= A_k \left[ (\pi \epsilon g^2)^{\frac{D-1}{2}} \right]^{k+1} \prod_{n=1}^k \int_0^\infty dr_n \delta(r_n^2 - 1) \\
 &\quad \times \prod_{n=1}^{k+1} \tilde{I}_{D/2+l-1} \left( \frac{2r_n r_{n-1}}{\epsilon g^2} \right) \\
 &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{\epsilon g^2} \sum_{n=0}^{k+1} (r_n - r_{n-1})^2 \right] \tag{D.23}
 \end{aligned}$$

$$= A_k \left[ (\pi \epsilon g^2)^{\frac{D-1}{2}} \right]^{k+1} \tilde{I}_{D/2+l-1} \left( \frac{2}{\epsilon g^2} \right)^k . \tag{D.24}$$

Um den Kontinuumsimes in (D.22) zu berechnen, ist es sinnvoll die asymptotische Darstellung der modifizierten Bessel-Funktionen zu benutzen. Diese lauten nach [13, Glg. (8.24)]:

$$\tilde{I}_m \left( \frac{2}{\epsilon g^2} \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left[ -\epsilon \frac{g^2}{4} (m^2 - 1/4) \right] . \tag{D.25}$$

Mit  $\epsilon = \Delta\tau/N$  folgt also das asymptotische Verhalten

$$\begin{aligned}
 K &= \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \left[ (\pi \epsilon g^2)^{\frac{D-1}{2}} \right]^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\Delta\tau g^2}{4k} ((D/2 + l - 1)^2 - 1/4) \right]^k \\
 &\quad \times \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}_a) Y_{lm}^*(\boldsymbol{\Omega}_b) \tag{D.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \left[ (\pi \epsilon g^2)^{\frac{D-1}{2}} \right]^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\Delta\tau g^2}{4} ((D/2 + l - 1)^2 - 1/4) \right] \\
 &\quad \times \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}_a) Y_{lm}^*(\boldsymbol{\Omega}_b) . \tag{D.27}
 \end{aligned}$$

Die Diskretisierungsabhängigkeit steht somit nur noch explizit im Normierungsfaktor  $A_k$ . Dieser muss so gewählt sein, dass die fundamentalen Eigenschaften des Propagators (2.8) und (2.9) erfüllt sind. Im Folgenden wird gezeigt, dass der Vorfaktor  $A_k = \left[ (\pi \epsilon g^2)^{-\frac{D-1}{2}} \right]^{k+1}$  diese Bedingungen erfüllt. Mit diesem Vorfaktor folgt:

$$K_E(\boldsymbol{\Omega}_b, \tau_b; \boldsymbol{\Omega}_a, \tau_a) = \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\Delta\tau g^2}{4} ((D/2 + l - 1)^2 - 1/4) \right] \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}_a) Y_{lm}^*(\boldsymbol{\Omega}_b) . \tag{D.28}$$

Der Übersicht halber wird nun der konstante Term  $((D/2+l-1)^2 - 1/4) \equiv \alpha_{Dl}$  ersetzt. Es folgt:

$$\int d\Omega_c K_E(\Omega_b, \tau_b; \Omega_c, \tau_c) K_E(\Omega_c, \tau_c; \Omega_a, \tau_a)$$

$$= \int d\Omega_c \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(\tau_b - \tau_c)g^2}{4} \alpha_{Dl} \right] \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\Omega_c) Y_{lm}^*(\Omega_b) \quad (\text{D.29})$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(\tau_c - \tau_a)g^2}{4} \alpha_{Dl} \right] \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\Omega_a) Y_{lm}^*(\Omega_c)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(\tau_b - \tau_c)g^2}{4} \alpha_{Dl} \right] \exp \left[ -\frac{(\tau_c - \tau_a)g^2}{4} \alpha_{Dl} \right] \quad (\text{D.30})$$

$$\times \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\Omega_a) Y_{lm}^*(\Omega_b) \quad (\text{D.31})$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(\tau_b - \tau_a)g^2}{4} \alpha_{Dl} \right] \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\Omega_a) Y_{lm}^*(\Omega_b) \quad (\text{D.32})$$

$$= K_E(\Omega_b, \tau_b; \Omega_a, \tau_a) . \quad (\text{D.33})$$

Die Integration erfolgt dabei analog zu vorhergehenden Betrachtung bei der Radialintegration von Gleichung (D.18) auf (D.20). Des Weiteren berechnet man das Verhalten für  $\tau_b \rightarrow \tau_a$ :

$$K_E(\Omega_b, \tau_b; \Omega_a, \tau_a) = \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\Delta\tau g^2}{4} ((D/2 + l - 1)^2 - 1/4) \right] \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\Omega_a) Y_{lm}^*(\Omega_b) \quad (\text{D.34})$$

$$\xrightarrow{\Delta\tau_b \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{m}} Y_{lm}(\Omega_a) Y_{lm}^*(\Omega_b) = \delta(\Omega_b - \Omega_a) . \quad (\text{D.35})$$

Die Gleichheit im letzten Schritt folgt aus der Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen als Funktionensystem auf  $\mathbb{S}^{D-1}$ . Dies lässt sich unter Verwendung der Orthonormalität und Vollständigkeit leicht zeigen<sup>15</sup>. Es sei nun  $f(\Omega)$  eine auf  $\mathbb{S}^{D-1}$  definierte Funktion. Diese lässt sich aufgrund der Vollständigkeit in den verallgemeinerten Kugelflächenfunktionen entwickeln:

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{m}} c_{lm} Y_{lm}(\Omega) . \quad (\text{D.36})$$

Multiplikation der Gleichung mit  $Y_{lm}^*(\Omega)$  und Integration über  $\mathbb{S}^{D-1}$  unter Berücksichtigung

<sup>15</sup>Die Rechnung ist an den dreidimensionalen Fall in [9, S.102] entlehnt.



sichtigung der Orthonormalität führt auf die Entwicklungskoeffizienten:

$$\int d\Omega f(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega) = \int d\Omega \left( \sum_{l=0}^{\infty} \sum_m c_{lm} Y_{lm}(\Omega) \right) Y_{lm}^*(\Omega) \quad (\text{D.37})$$

$$= c_{lm} . \quad (\text{D.38})$$

Einsetzen in Gleichung (D.36) liefert

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_m \left( \int d\Omega' f(\Omega') Y_{lm}^*(\Omega') \right) Y_{lm}(\Omega) \quad (\text{D.39})$$

$$= \int d\Omega' f(\Omega') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_m Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) , \quad (\text{D.40})$$

woraus formal die gewünschte Relation

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_m Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) = \delta(\Omega' - \Omega) \quad (\text{D.41})$$

folgt. Somit ist gezeigt, dass Gleichung (D.28) der korrekt normierte Propagator des  $O(N)$  Modells ist.

## D.2 Zustandssumme des $O(N)$ Modells

Um die Zustandssumme aus dem euklidischen Propagator zu berechnen, setzen wir analog zur Gleichung (2.15) Anfangs- und Endpunkte gleich und integrieren über diese. Dazu setzen wir in Gleichung (D.28)  $((D/2 + l - 1)^2 - 1/4) \equiv \alpha_{Dl}$ ,  $\Omega_a = \Omega_b = \Omega$  und  $\Delta\tau = \beta$ . Man erhält

$$\mathcal{Z} = \int_{\mathbb{R}} dx K_E(x, \beta, x, 0) \quad (\text{D.42})$$

$$= \int_{\mathbb{S}^2} d\Omega \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\beta g^2}{4} \alpha_{Dl} \right] \sum_m Y_{lm}(\Omega_a) Y_{lm}^*(\Omega_b) \quad (\text{D.43})$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\beta g^2}{4} \alpha_{Dl} \right] \sum_m \underbrace{\int_{\mathbb{S}^2} d\Omega Y_{lm}(\Omega_a) Y_{lm}^*(\Omega_b)}_{=1} \quad (\text{D.44})$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} e_D \exp \left[ -\frac{\beta g^2}{4} \alpha_{Dl} \right] . \quad (\text{D.45})$$

Dabei bezeichnet  $e_D$  den Entartungsgrad bezüglich der magnetischen Quantenzahlen  $m$ . Dieser ist nach [13, Glg.(8.114)]:

$$e_D = \sum_m 1 = \frac{(2l + D - 2)(l + D - 3)!}{l!(D - 2)!} \quad (\text{D.46})$$

$$= \frac{(l + 1)(l + 2) \dots (l + D - 3)(2l + D - 2)}{(D - 2)!} . \quad (\text{D.47})$$

### D.3 Zustandssumme des $O(3)$ Modells

Um die Richtigkeit des Ergebnisses aus Gleichung Abschnitt D.2 zu überprüfen, berechnen wir diese explizit für das  $O(3)$  Modell aus dem Pfadintegralformalismus und zum Vergleich aus der Schrödinger-Theorie.

#### Berechnung aus dem Pfadintegralformalismus

Für  $D = 3$  ergibt sich  $\alpha_{Dl} = l(l + 1)$  und die Entartung zu

$$e_3 = \sum_{m=-l}^l 1 = (2l + 1) . \quad (\text{D.48})$$

Es folgt also für die Zustandssumme durch Einsetzen der Werte in Gleichung (D.45)

$$\mathcal{Z} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) e^{-\frac{g^2\beta}{4}l(l+1)} . \quad (\text{D.49})$$

#### Berechnung aus der Schrödinger Theorie

Zu berechnen ist die Zustandssumme  $\mathcal{Z} = \text{tr}(e^{-\beta H})$  mit dem Hamilton-Operator  $H = -\frac{g^2}{4}\Delta$  unter der Nebenbedingung  $r^2 = \text{const.} = 1$ . Der Laplace-Operator  $\Delta$  in Kugelkoordinaten schreibt sich als

$$-\Delta = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} , \quad (\text{D.50})$$

wobei  $L$  der Drehimpulsoperator ist. Für  $r^2 = 1$  folgt also  $H = \frac{g^2}{4}L^2$ . Die Eigenfunktionen von  $L^2$  sind die Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\Omega)$ , welche ein vollständiges Funktionensystem  $\{|lm\rangle\}_i$  auf der  $\mathbb{S}^2$  Sphäre bilden. Die Zustandssumme lässt sich

somit schreiben als:

$$\mathcal{Z} = \sum_{l,m} \langle lm | e^{-\frac{g^2 \beta}{4} L^2} | lm \rangle \quad (\text{D.51})$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-\frac{g^2 \beta l(l+1)}{4}} \underbrace{\int_{\mathbb{S}^2} d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) Y_{lm}(\Omega)}_{=1} \quad (\text{D.52})$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-\frac{g^2 \beta}{4} l(l+1)} . \quad (\text{D.53})$$

Es wurde dabei die Eigenwertgleichung  $L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$ , es ist  $\hbar = 1$ , der Spektralsatz und die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen bei Integration über die Einheitskugel ausgenutzt.

Das Ergebnis stimmt dabei mit dem aus dem Pfadintegralformalismus berechneten überein.

## **E Danksagung**

Bedanken möchte ich mich bei Prof. Andreas Wipf für seine stete Hilfsbereitschaft, offene Tür und nicht zuletzt für die Möglichkeit an einem aktuellen Forschungsthema teilhaben zu dürfen. Darüber hinaus bin ich Daniel Körner besonderen Dank verpflichtet, welcher sich stets die Zeit nahm, mir Grundlagen und Problematiken der Gittertheorien zu erklären und meiner Fragen nie überdrüssig wurde.

## **F Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit versichere ich, Maximilian Schambach, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Jena, den

## Literatur

- [1] ALBEVERION, Sergio A., HØEGH-KROHN, Raphael J. und MAZZUCCHI, Sonia. *Mathematical Methods of Feynman Path Integrals*. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] ALVAREZ, Orlando. *Dynamical Symmetry Breakdown in the Supersymmetric Non-linear Sigma Model*. In: *Phys.Rev.* **D17** (1978), S. 1123. DOI: [10.1103/PhysRevD.17.1123](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.17.1123).
- [3] BAUMGARTNER, David und WENGER, Urs. *Simulation of supersymmetric models on the lattice without a sign problem*. In: (*e-print*) (2011). arXiv: [1104.0213](https://arxiv.org/abs/1104.0213) [[hep-lat](#)].
- [4] BRONSTEIN, Ilja N. und SEMENDJAJEW, Konstantin A. *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Auflage. Verlag Harri Deutsch Frankfurt am Main, 2005.
- [5] DI VECCHIA, Paolo und FERRARA, S. *Classical Solutions in Two-Dimensional Supersymmetric Field Theories*. In: *Nucl.Phys.* **B130** (1977), S. 93. DOI: [10.1016/0550-3213\(77\)90394-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(77)90394-7).
- [6] DIRAC, Paul A. M. *The Lagrangian in quantum mechanics*. In: *Phys.Z.Sowjetunion* **3** (1933), S. 64–72.
- [7] FEYNMAN, Richard P. *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*. In: *Rev. Mod. Phys.* **20** (2 1948), S. 367–387. DOI: [10.1103/RevModPhys.20.367](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367).
- [8] FEYNMAN, Richard P. und HIBBS, Albert R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. 1. durch D. Styer überarbeitete Auflage. Dover Publications, New York, 2010.
- [9] FLIESSBACH, Thorsten. *Elektrodynamik*. 5. Auflage. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 2008.
- [10] FLORE, Raphael, KÖRNER, Daniel, WIPF, Andreas und WOZAR, Christian. *Supersymmetric Nonlinear  $O(3)$  Sigma Model on the Lattice*. In: *JHEP* **1211** (2012), S. 159. DOI: [10.1007/JHEP11\(2012\)159](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2012)159). arXiv: [1207.6947](https://arxiv.org/abs/1207.6947) [[hep-lat](#)].
- [11] GELL-MANN, Murray und LÉVY, Maurice. *The axial vector current in beta decay*. In: *Il Nuovo Cimento* **16.4** (1960), S. 705–726. DOI: [10.1007/BF02859738](https://doi.org/10.1007/BF02859738).
- [12] KALKA, Harald und SOFF, Gerhard. *Supersymmetrie*. B. G. Teubner Stuttgart, 1997.
- [13] KLEINERT, Hagen. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*. 3. Auflage. World Scientific, 2004.

- [14] MAILLART, Vidushi und WENGER, Urs. *Worm algorithm for the  $O(2N)$  Gross-Neveu model*. In: *PoS LATTICE2010* (2010), S. 257. arXiv: [1104.0569 \[hep-lat\]](#).
- [15] NOLTING, Wolfgang. *Grundkurs Theoretische Physik 6: statistische Physik*. 6. Auflage. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [16] PROKOF'EV, Nikolay und SVISTUNOV, Boris. *Worm Algorithms for Classical Statistical Models*. In: *Phys. Rev. Lett.* **87** (16 Sep. 2001), S. 160601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.87.160601](#).
- [17] PROKOF'EV, Nikolay und SVISTUNOV, Boris. *Worm Algorithm for Problems of Quantum and Classical Statistics*. In: (*e-print*) (2009). arXiv: [0910.1393 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [18] PROKOF'EV, N.V, SVISTUNOV, B.V und TUPITSYN, I.S. *Worm algorithm in quantum Monte Carlo simulations*. In: *Physics Letters A* **238**.4-5 (1998), S. 253–257. DOI: [10.1016/S0375-9601\(97\)00957-2](#).
- [19] STEINHAEUER, Kyle und WENGER, Urs. *Loop formulation for the non-linear supersymmetric  $O(N)$  sigma-model*. In: *Proceedings of the 31st International Symposium on Lattice Field Theory (LATTICE 2013)*. Noch nicht veröffentlicht.
- [20] TERNING, John. *Modern Supersymmetry - Dynamics and Duality*. 1. Auflage. Clarendon Press Oxford, 2006.
- [21] WENGER, Urs. *Simulating Wilson fermions without critical slowing down*. In: *PoS LAT2009* (2009), S. 022.
- [22] WIPF, Andreas. *Statistical Approach to Quantum Field Theory*. Springer Verlag Heidelberg, 2013.
- [23] WITTEN, Edward. *Supersymmetric form of the nonlinear  $\sigma$  model in two dimensions*. In: *Phys. Rev. D* **16** (10 1977), S. 2991–2994. DOI: [10.1103/PhysRevD.16.2991](#).
- [24] WITTEN, Edward. *Magic, mystery, and matrix*. In: *Not.Amer.Math.Soc.* **45** (1998), S. 1124–1129.
- [25] WOLFF, Ulli. *Simulating the All-Order Hopping Expansion. II. Wilson Fermions*. In: *Nucl.Phys.* **B814** (2009), S. 549–572. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2009.01.018](#). arXiv: [0812.0677 \[hep-lat\]](#).
- [26] WOLFF, Ulli. *Simulating the All-Order Strong Coupling Expansion. I. Ising Model Demo*. In: *Nucl.Phys.* **B810** (2009), S. 491–502. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2008.09.033](#).