

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut



seit 1558

Quantisierung supersymmetrischer Teilchen auf Sphären und projektiven Räumen

Diplomarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Diplom-Physikers (Dipl.-Phys.)

vorgelegt von Ulrich Harst,
geboren am 14.04.1984 in Aachen

Jena, 13. Februar 2009

1. *Gutachter:* Prof. Dr. phil. habil. Andreas Wipf

2. *Gutachter:* Dr. rer. nat. Ulrich Theis

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Einführung der Modelle	9
2.1. Konventionen	9
2.2. Grundlegende Eigenschaften supersymmetrischer Theorien	10
2.2.1. Supersymmetrische Theorien in zwei Dimensionen	10
2.2.2. Supersymmetrische Quantenmechanik	11
2.3. Einführung des supersymmetrischen $O(n)$ -Modells	13
2.3.1. Das supersymmetrische $O(n)$ -Modell in zwei Dimensionen	13
2.3.2. Dimensionsreduktion des supersymmetrischen $O(n)$ -Modells	16
2.4. Einführung des supersymmetrischen $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells	17
2.4.1. Das supersymmetrische $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modell in zwei Dimensionen	17
2.4.2. Dimensionsreduktion des supersymmetrischen $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells	19
3. Dirac-Quantisierung der Modelle	21
3.1. Kanonische Quantisierung mit Nebenbedingungen	21
3.1.1. Klassischer Hamiltonscher Formalismus mit Nebenbedingungen	22
3.1.2. Quantisierung der Theorie	24
3.2. Dirac-Quantisierung des $O(n)$ -Modells	25
3.2.1. Berechnung der Dirac-Klammern und der resultierenden Kommutatoralgebra	25
3.2.2. Darstellung der Dirac-Algebra des $O(n)$ -Modells	27
3.2.3. Hamiltonoperator des $O(n)$ -Modells	28
3.3. Dirac-Quantisierung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells	30
3.3.1. Berechnung der Dirac-Klammern und der resultierenden Kommutatoralgebra	30
3.3.2. Darstellung der Dirac-Algebra des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells	33
3.3.3. Hamiltonoperator des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells	34
4. Das supersymmetrische $O(3)$-Modell	37
4.1. Hamiltonoperator und Fockraum der Theorie	37
4.2. Aussagen über das Spektrum des Hamiltonoperators	39
4.3. Darstellung der Dirac-Algebra und Lösung des Modells	41
5. Algebraische Lösung der Modelle	45
5.1. Grundlegendes zur Gruppentheorie der $SO(n)$ und $SU(n)$	45
5.1.1. Allgemeine Definitionen	45
5.1.2. Struktur der Lie-Algebren und ihrer Darstellungen	46

Inhaltsverzeichnis

5.1.3.	Ausreduktion von Produktdarstellungen	48
5.1.4.	Spezifische Eigenschaften und Darstellungen der $su(n)$ -Algebra	49
5.1.5.	Spezifische Eigenschaften und Darstellungen der $so(n)$ -Algebra	51
5.2.	Algebraische Lösung des $O(n)$ -Modells	55
5.2.1.	Lösung des Modells für gerade Dimensionen	55
5.2.2.	Lösung des Modells für ungerade Dimensionen	62
5.2.3.	Zusammenfassung der Ergebnisse für das $O(n)$ -Modell	64
5.2.4.	Vergleich der algebraischen Lösung des $O(3)$ -Modells mit früheren Ergebnissen	65
5.3.	Algebraische Lösung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells	66
5.3.1.	Bosonische Höchstgewichtszustände und deren Tensorprodukt	67
5.3.2.	Fermionische Höchstgewichtszustände und deren Tensorprodukt	68
5.3.3.	Tensorprodukt der bosonischen und fermionischen Darstellungen	69
5.3.4.	Lösung des $\mathbb{C}P^1$ -Modells	78
5.3.5.	Vergleich der Lösung des $\mathbb{C}P^1$ - mit der des $O(3)$ -Modells	81
6.	Zusammenfassung und Ausblick	85
A.	Anhang	87
A.1.	Nachweis der Darstellung der Dirac-Algebra des $O(n)$ -Modells	87
A.2.	Nachweis der Darstellung der Dirac-Algebra des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells	87

1. Einleitung

Die Aufgabe der Physik ist es, Gesetzmäßigkeiten in der uns umgebenden Natur zu finden, die es ermöglichen, die Vielzahl der beobachteten physikalischen Phänomene zu klassifizieren und miteinander in Beziehung zu setzen. In der theoretischen Physik wird dazu ein von den konkreten Messergebnissen abstrahierender Ordnungsrahmen in Form einer physikalischen Theorie vorgeschlagen, dessen Vorhersagekraft anschließend experimentell zu überprüfen ist. Ein wesentliches Konzept bei der Formulierung von physikalischen Theorien ist das der Symmetrie, da sich herausgestellt hat, dass sich viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur durch Symmetrien¹ erklären lassen. Insbesondere führt, nach einem Theorem von Emmy Noether, jede Symmetrie eines Systems zu einer erhaltenen Größe, der zu der Symmetrie gehörenden Ladung. Damit kann zum Beispiel nachgewiesen werden, dass in einem System genau dann Energie und Impuls erhalten sind, wenn die zeitlichen und räumlichen Translationen Symmetrietransformationen des Systems sind. Will man eine Theorie formulieren, die mit der speziellen Relativitätstheorie vereinbar ist, muss sie invariant unter raumzeitlichen Translationen und Lorentztransformationen sein. Diese Transformationen bilden die sogenannte Poincaré-Gruppe.

Auf der Suche nach einer fundamentalen Theorie der Elementarteilchen hat sich herausgestellt, dass relativistische Quantenfeldtheorien einen vielversprechenden Rahmen für die Beschreibung der elementaren Prozesse in der Natur bilden. Angefangen mit der Quantenelektrodynamik [17] gelang es in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts durch die Einführung von Yang-Mills-Theorien [45] mit der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung [39, 41, 21] und der Quantenchromodynamik [19], drei der vier bekannten fundamentalen Kräfte der Natur durch sogenannte Eichtheorien zu beschreiben. Diese Theorien besitzen neben der Poincaré-Invarianz lokale Symmetrietransformationen, die im Allgemeinen nicht-abelsche Gruppen bilden, die Eichtransformationen der Theorie. Auf der Grundlage dieser Theorien gelang es, das Standardmodell der Elementarteilchen zu entwickeln. Die Vorhersagen dieser Eichtheorie mit der Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ wurden bis zu den heute zugänglichen Energien von einigen hundert GeV experimentell hervorragend bestätigt. So konnten bis auf das Higgs-Boson alle vorhergesagten Teilchen nachgewiesen und ihre beobachteten Zerfalls- und Wechselwirkungsprozesse erklärt werden.

Trotz dieser großen Erfolge ist bekannt, dass das Standardmodell keine fundamentale Theorie der Elementarteilchen sein kann. Neben Phänomenen wie der Neutrinooszillation, die nicht in dem Modell enthalten sind und von einer Erweiterung des Standardmodells beschrieben werden sollten, erwartet man von einer fundamentalen Theorie, dass sie auch die vierte Kraft, die Gravitation, beinhaltet. Zwar kann man abschätzen, dass quantengravitative Effekte erst bei Energien im Bereich der Planck-Skala $\Lambda_P \approx \mathcal{O}(10^{18} \text{ GeV})$ wesentliche Beiträge liefern,

¹In der Physik spricht man von Symmetrien eines Systems, wenn es Transformationen gibt, die alle physikalischen Aussagen des Systems unverändert lassen. Diese Transformationen bilden die mathematische Struktur einer Gruppe, die Symmetriegruppe des Systems.

1. Einleitung

doch führt die Annahme, dass das Standardmodell bis zu diesen Energien Gültigkeit besitzt, auf das sogenannte Hierarchie-Problem. Hierbei gilt es zu erklären, warum die Masse des Higgs-Bosons, die aufgrund von Präzisionsmessungen der Parameter der elektroschwachen Theorie im Bereich von 10^2 GeV erwartet wird [3], einen im Vergleich zu den Quantenkorrekturen, die in der Größenordnung der Planck-Skala lägen, extrem kleinen Wert annimmt. Es müssten sich also die Beiträge sämtlicher Teilchensorten zu den Korrekturen und die „nackte Masse“ mit einer Genauigkeit von der Ordnung 10^{-16} [32] aufheben. Ein solches „*fine-tuning*“ der physikalischen Parameter erscheint unnatürlich.

Da die beiden grundlegend verschiedenen Teilchensorten, Bosonen und Fermionen, Quantenkorrekturen mit entgegengesetztem Vorzeichen liefern, liegt es stattdessen nahe, eine weitere Symmetrie in der Natur zu vermuten, die zu jedem bekannten Teilchen ein Partnerteilchen der anderen Sorte postuliert, deren Beiträge sich exakt aufheben. Um mit den experimentellen Ergebnissen vereinbar zu sein, müsste diese Symmetrie bei den derzeit zugänglichen Energien spontan gebrochen vorliegen und man würde die Masse des Higgs-Teilchens auf der Skala der Symmetriebrechung erwarten. Daher würde eine solche Symmetrie das Hierarchieproblem des Standardmodells lösen und gibt Anlass zu der Hoffnung, dass bereits am LHC Hinweise auf eine solche Symmetrie gefunden werden.

Die Transformationen einer Symmetrie, die Bosonen (ganzzahliger Spin) und Fermionen (halbganzer Spin) in Beziehung setzt, müssen von Generatoren erzeugt werden, die selbst einen Spin von $1/2$ tragen und müssen daher die Gruppe der Raumzeitsymmetrien erweitern. Die Möglichkeiten, die Symmetrien der S-Matrix einer relativistischen Quantenfeldtheorie um solche Generatoren zu erweitern, sind durch das Theorem von Coleman und Mandula [7] und seine Erweiterung von Haag, Lopuszanski und Sohnius [23] stark eingeschränkt und man nennt die (bis auf interne Symmetrien) einzig mögliche Art der Erweiterung Supersymmetrie. Neben den praktischen Gründen, die für die Einführung einer solchen Symmetrie sprechen, ist die Vermutung, dass in der Natur die in diesem Sinne höchstmögliche Symmetrie verwirklicht sein könnte, für viele Physiker attraktiv, weshalb die meisten der über das Standardmodell hinausgehenden Theorien Supersymmetrie beinhalten.

Da realistische Quantenfeldtheorien, die sämtliche Teilchen und ihre Wechselwirkungen berücksichtigen und in einer (mindestens) vierdimensionalen Raumzeit formuliert sind, sehr komplizierte und umfangreiche Berechnungen benötigen, um Wahrscheinlichkeiten für einzelne Prozesse vorherzusagen, eignen sie sich nicht besonders gut, um die Grundlage bestimmter Mechanismen näher zu untersuchen. In diesem Fall bietet es sich an, nach einem so weit wie möglich vereinfachten Modell zu suchen, das nur für den zu untersuchenden Mechanismus eine Ähnlichkeit zur realistischen Theorie besitzt. Zu dieser Art „Spielzeugmodelle“ gehören auch die in dieser Arbeit untersuchten supersymmetrischen $O(n)$ - und $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modelle. Sie gehören zu der Klasse nichtlinearer Sigma-Modelle, die, in zweidimensionaler Raumzeit formuliert, einige Eigenschaften von vierdimensionaler QCD abbilden. Eingeführt wurden zweidimensionale Sigma-Modelle, um den Mechanismus spontaner chiraler Symmetriebrechung zu untersuchen [35]. Für die zunächst entwickelten $O(n)$ -Modelle konnte die asymptotische Freiheit ähnlich zur QCD gezeigt werden [37]. Für das $O(3)$ -Modell wurden Lösungen der klassischen Feldgleichungen mit nicht-trivialer Topologie, sogenannte Instantonlösungen, gefunden. Die $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modelle bilden eine Verallgemeinerung des $O(3)$ -Modells (das $\mathbb{C}P^1$ -Modell ist äquivalent zum $O(3)$ -Modell), die diese Eigenschaft für beliebige n erhält. Das Confinement, das in diesen Theorien für $T = 0$ auftritt, konnte auf Instanton-

effekte zurückgeführt werden [9]. Leider konnte jedoch das Confinement in der QCD nicht durch den gleichen Mechanismus erklärt werden. Beide Klassen von Modellen konnten im Limes großer n exakt gelöst werden [10].

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Zunächst werden in Kapitel 2 die betrachteten Modelle in zweidimensionaler Minkowski-Raumzeit eingeführt und auf eine (zeitliche) Dimension reduziert. Die dimensionale Reduktion ist seit den Arbeiten von Kaluza und Klein [26, 29] ein Werkzeug der theoretischen Physik, das benötigt wird, wenn Auswirkungen von möglichen höherdimensionalen Theorien in der vierdimensionalen Raumzeit berechnet werden sollen. Im vorliegenden Fall ermöglicht die dimensionale Reduktion die Interpretation der reduzierten Theorien als klassische mechanische Modelle. In Kapitel 3 werden die Modelle, die aufgrund ihrer Nebenbedingungen nicht mit Poisson-Klammern kanonisch quantisiert werden können, mit Hilfe der Dirac-Quantisierung in quantenmechanische Modelle überführt. Danach wird in Kapitel 4 das $O(3)$ -Modell im Speziellen betrachtet, dessen Lösung in Kugelkoordinaten explizit angegeben werden kann. In Verallgemeinerung dieses Spezialfalls soll in Kapitel 5 gezeigt werden, dass die betrachteten Modelle aufgrund ihrer hohen Symmetrie mit Hilfe der Gruppentheorie der jeweiligen Symmetriegruppe auf rein algebraischem Wege gelöst werden können. Dabei greift die Methode auf die Arbeiten von Pauli zur algebraischen Lösung des Wasserstoffatoms [36] und deren Verallgemeinerung auf supersymmetrische Systeme von Wipf et. al. [27] zurück. Die Arbeit schließt mit Kapitel 6, in dem die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst werden.

1. *Einleitung*

2. Einführung der Modelle

In diesem ersten Kapitel werden die $O(n)$ - und CP^{n-1} -Modelle als zweidimensionale klassische Feldtheorien eingeführt und durch dimensionale Reduktion auf die Form gebracht, die in der weiteren Arbeit von Interesse sein wird. Zunächst werden jedoch die benutzten Konventionen vorgestellt und ein Überblick über die für diese Arbeit wichtigen Eigenschaften supersymmetrischer Theorien gegeben.

2.1. Konventionen

Für die Einführung der Modelle in zwei Dimensionen werden die folgenden Konventionen verwendet.

Die Modelle werden in der Minkowski-Raumzeit mit der Metrik

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

betrachtet. Als Darstellung der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

soll die Majorana-Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma^2, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^1, \quad \gamma^* = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma^3 \quad (2.3)$$

verwendet werden. In dieser Darstellung lauten die Lorentztransformationen eines Spinors ψ

$$\psi(x) \rightarrow S\psi(\Lambda^{-1}x) \quad (2.4)$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & -\sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Man erkennt, dass die unterschiedlichen Komponenten des Spinors bei Lorentztransformationen nicht mischen und daher chirale (Weyl-)Spinoren existieren. Zusätzlich lässt sich eine Realitätsbedingung $\psi^* = \psi$ an die Spinoren stellen, so dass in dieser Raumzeit Majorana-Weyl-Spinoren existieren.

Desweiteren sei mit

$$\bar{\psi}^\alpha = (\psi^\dagger \gamma^0)^\alpha = (i\psi_2^*, -i\psi_1^*)^\alpha \quad (2.6)$$

der zum Spinor

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_\alpha \quad (2.7)$$

2. Einführung der Modelle

Dirac-konjugierte Spinor bezeichnet.

Spinorindizes sollen im Folgenden weitestgehend unterdrückt werden und es wird eine implizite Summation über Spinorindizes gemäß „NW-SO“-Konvention vereinbart. Gehoben und gesenkt werden Spinorindizes mit dem total antisymmetrischen ε -Tensor ($\varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} = 1$) gemäß

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta. \quad (2.8)$$

2.2. Grundlegende Eigenschaften supersymmetrischer Theorien

2.2.1. Supersymmetrische Theorien in zwei Dimensionen

Eine Feldtheorie ist supersymmetrisch, wenn sie eine besondere fermionische Symmetrie besitzt. Eine Symmetrie heißt fermionisch, wenn der infinitesimale Variationsparameter eine Graßmann-ungerade Größe ist. Im Falle von $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetrie (mit einem Majorana-Spinor ϵ) erfüllen zwei infinitesimale Transformationen der fermionischen Symmetrie die Relation

$$[\delta_1, \delta_2]\phi = -2i\bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1\partial_\mu\phi, \quad (2.9)$$

wobei ϕ ein beliebiges Feld der Theorie darstellt. Liegt erweiterte ($\mathcal{N} = 2$) Supersymmetrie vor, so gilt

$$[\delta_1, \delta_2]\phi = i(\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2 - \bar{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1)\partial_\mu\phi. \quad (2.10)$$

Quantisiert man die Theorie, so wird aus der zu dieser Symmetrie gehörenden erhaltenen Ladung ein Operator, der die Supersymmetrietransformationen generiert und der Generator δ erhält die Form¹

$$\delta = i\bar{\epsilon}Q + i\bar{Q}\epsilon, \quad [\delta, \phi] = \delta\phi \quad (2.11)$$

Für $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetrie sind die beiden Summanden identisch. In diesem Fall sei die Superladung gemäß

$$\delta = i\bar{\epsilon}Q^{(1)} \quad (2.12)$$

definiert. Man stellt fest, dass die Spinor-Komponenten der Superladungen im Falle der erweiterten Supersymmetrie die folgende Supersymmetrieralgebra erfüllen

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} &= (\gamma^\mu)_\alpha{}^\beta P_\mu \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}^\alpha, \bar{Q}^\beta\} = 0 \\ [P_\mu, Q_\alpha] &= [P_\mu, \bar{Q}^\alpha] = 0 \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

sofern keine zentralen Ladungen auftreten.

Um die Supersymmetrieralgebra im Fall $\mathcal{N} = 1$ zu erhalten, werden die Superladungskomponenten zu einem reellen Spinor gemäß

$$\begin{aligned} Q_1^{(1)} &= Q_1 + iQ_1^\dagger = Q_1 + i\bar{Q}^2 \\ Q_2^{(1)} &= Q_2 + iQ_2^\dagger = Q_2 - i\bar{Q}^1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

¹ δ muss antihermitesch sein, damit $(\delta\phi)^\dagger = \delta\phi^\dagger$

2.2. Grundlegende Eigenschaften supersymmetrischer Theorien

kombiniert und man erhält

$$\begin{aligned}\{Q_1^{(1)}, Q_1^{(1)}\} &= 2(P_0 - P_1) \\ \{Q_2^{(1)}, Q_2^{(1)}\} &= 2(P_0 + P_1)\end{aligned}\tag{2.15}$$

und alle übrigen Antikommutatoren verschwinden.

Man sieht also, dass die Superladungen die Poincaré-Algebra auf eine graduierte Lie-Algebra erweitern und Haag, Sohnius und Łopuszanski bewiesen 1975, dass diese die einzige mit relativistischer Quantenfeldtheorie vereinbare Erweiterung der Symmetrien der S-Matrix ist [23].

2.2.2. Supersymmetrische Quantenmechanik

Mit Ausnahme des ersten Kapitels beschäftigt sich diese Arbeit ausschließlich mit eindimensionalen supersymmetrischen Feldtheorien. Reduziert man eine in zweidimensionaler Minkowski-Raumzeit formulierte Feldtheorie auf eine (zeitliche) Dimension, so erhält man formal eine eindimensionale Feldtheorie, die nur von einer Zeitkoordinate abhängt. Dies ist aber wesentlich einfacher als ein mechanisches Modell zu interpretieren, in dem jedes Feld eine Ortskoordinate beschreibt, die von der Zeit abhängt. Startet man mit einer Quantenfeldtheorie, so findet man nach der Reduktion ein quantenmechanisches Modell im Heisenbergbild. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie sich die obigen Eigenschaften einer supersymmetrischen Theorie auf ein quantenmechanisches Modell übertragen.

Bei der Reduktion der Spinoren werden aus den zweikomponentigen Spinoren einkomponentige Spinoren der eindimensionalen Feldtheorie. Daher zählt man in einer Dimension doppelt so viele unabhängige Superladungen wie in der zweidimensionalen Theorie: Aus der $\mathcal{N} = 1$ ($\mathcal{N} = 2$) Theorie wird also eine $\mathcal{N} = 2$ ($\mathcal{N} = 4$) Quantenmechanik. Üblicherweise werden in der $\mathcal{N} = 2$ Quantenmechanik die beiden reellen Superladungen zu einer komplexen Superladung

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1^{(1)} + iQ_2^{(1)}) \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1^{(1)} - iQ_2^{(1)})\tag{2.16}$$

zusammengefasst. Mithilfe der Supersymmetriealgebra erhält man, dass der Hamiltonoperator der supersymmetrischen Quantenmechanik in dieser komplexen Superladung ausgedrückt werden kann als

$$\{Q^\dagger, Q\} = 2P_0 \hat{=} 2H\tag{2.17}$$

Im Falle des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells, das sich als eine $\mathcal{N} = 4$ Quantenmechanik erweisen wird, werden die Superladungen ebenfalls komplex kombiniert zu

$$Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 \pm iQ_2) \quad Q_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1^\dagger \mp iQ_2^\dagger) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{Q}^1 \mp i\bar{Q}^2).\tag{2.18}$$

Da das \mathbb{CP}^{n-1} -Modell in der Quantenmechanik keine zentrale Ladung besitzt², erhält man den Hamiltonoperator aus der Supersymmetriealgebra zu

$$H = \{Q_+^\dagger, Q_+\} = \{Q_-^\dagger, Q_-\} = \frac{1}{2} \left(\{Q_+^\dagger, Q_+\} + \{Q_-^\dagger, Q_-\} \right).\tag{2.19}$$

²Als (2+1)-dimensionale Feldtheorie enthält das \mathbb{CP}^{n-1} -Modell eine zentrale Ladung (vgl. [1, 38]), die nach der Dimensionsreduktion (auf den physikalischen Zuständen) verschwindet.

2. Einführung der Modelle

Anhand des Beipfels einer freien $\mathcal{N} = 2$ (bzw. $\mathcal{N} = 4$) d -dimensionalen Quantenmechanik³ sollen nun einige Eigenschaften vorgestellt werden, die sich als auf die betrachteten Modelle verallgemeinerbar herausstellen werden.

Im Falle der freien $\mathcal{N} = 2$ Quantenmechanik hat die Superladung die Form

$$Q = i\psi_a \partial_a \quad Q^\dagger = i\psi_a^\dagger \partial_a, \quad (2.20)$$

wobei die ψ_a die d fermionischen Koordinaten der Quantenmechanik sind, die die Vertauschungsrelationen

$$\{\psi_a, \psi_b^\dagger\} = \delta_{ab} \quad (2.21)$$

erfüllen und daher mit hermiteschen γ -Matrizen in $2d$ euklidischer Raumzeit gemäß $\psi_a = 1/2(\gamma_a - i\gamma_{d+a})$ dargestellt werden können. Diese (nilpotenten) fermionischen Koordinaten spannen einen 2^d -dimensionalen Fock-Raum auf, dessen Basisvektoren durch Wirkung von p ($p = 0, \dots, d$) Erzeugern ψ^\dagger auf ein Vakuum $|0\rangle$, das von allen ψ_a vernichtet wird, konstruiert werden können. Dieser Fock-Raum zerfällt in Unterräume fester Fermionzahl p , die als Eigenwert bezüglich des Fermionzahloperators $N = \psi_a^\dagger \psi_a$ definiert ist:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{C}_d \quad \dim \mathcal{C}_p = \binom{d}{p} \quad (2.22)$$

Die Superladungen vertauschen nach Konstruktion mit dem Hamiltonian und verändern die Fermionzahl um eins, während der Hamiltonian selbst mit N vertauscht

$$[N, Q] = -Q, \quad [N, Q^\dagger] = Q^\dagger, \quad [H, N] = [H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0. \quad (2.23)$$

Daraus ergibt sich, dass der gesamte Hilbertraum, gegeben durch

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{C} \quad (2.24)$$

in die (disjunkten) Bilder der beiden Superladungsoperatoren und den Kern von H zerfällt

$$\mathcal{H} = Q\mathcal{H} \oplus Q^\dagger\mathcal{H} \oplus \text{Ker } H. \quad (2.25)$$

Dies sieht man wie folgt ein: Im Unterraum \mathcal{H}_0^\perp , der senkrecht auf dem (endlichdimensionalen) Kern des Operators H steht, ist H invertierbar und man erhält

$$\mathcal{H}_0^\perp = \frac{1}{2}(QQ^\dagger + Q^\dagger Q)H^{-1}\mathcal{H}_0^\perp = Q \left(\frac{Q^\dagger}{2H} \mathcal{H}_0^\perp \right) + Q^\dagger \left(\frac{Q}{2H} \mathcal{H}_0^\perp \right), \quad (2.26)$$

was die Behauptung beweist.⁴

Damit wird im p -Fermion-Sektor jeder Zustand (mit Ausnahme möglicher Grundzustände) entweder von Q in den $p-1$ -Fermion-Sektor oder von Q^\dagger in der $p+1$ -Fermion-Sektor abgebildet, wobei man einen Zustand gleicher Energie erhält. Die Grundzustände mit Energie 0

³Die Dimension der entstehenden Quantenmechanik ist gleich der Anzahl der unabhängigen bosonischen Felder der zweidimensionalen Theorie, da diese in die Koordinaten der Quantenmechanik übergehen.

⁴Dieser Beweis ist dem Artikel von Wipf et. al. [27] entnommen; der Abschnitt über die Konstruktion des Hilbertraums der supersymmetrischen Quantenmechanik in d Dimensionen richtet sich insgesamt nach diesem Artikel.

2.3. Einführung des supersymmetrischen $O(n)$ -Modells

werden von beiden Operatoren Q und Q^\dagger vernichtet. Alle Zustände positiver Energie besitzen einen supersymmetrischen Partnerzustand in einem der benachbarten Sektoren.

Im Fall der $\mathcal{N} = 4$ supersymmetrischen Quantenmechanik erhält man zwei Sorten von fermionischen Koordinaten $\psi_\pm^\dagger, \psi_\pm$, die entsprechend einen 2^{2d} -dimensionalen Fockraum aufspannen. Der Fermionenzahloperator ist nun $N = N_+ + N_-$ und die Sektoren des Fockraums werden durch die beiden Fermionenzahlen p_+, p_- charakterisiert. Da der Hilbertraum nun unabhängig voneinander bezüglich der beiden Superladungen zerfällt

$$\mathcal{H} = Q_+ \mathcal{H} \oplus Q_+^\dagger \mathcal{H} \oplus \text{Ker } H = Q_- \mathcal{H} \oplus Q_-^\dagger \mathcal{H} \oplus \text{Ker } H, \quad (2.27)$$

erhält man, dass jeder Zustand positiver Energie von genau zwei der vier Superladungen vernichtet wird. Durch Anwendung der beiden anderen Superladungen lassen sich zu jedem solchen Zustand drei weitere supersymmetrische Partnerzustände konstruieren. Für einen Zustand $|\phi\rangle$ im bosonischen Sektor erhält man beispielsweise die vier Zustände gleicher Energie

$$|\phi\rangle, \quad Q_+^\dagger |\phi\rangle, \quad Q_-^\dagger |\phi\rangle, \quad Q_-^\dagger Q_+^\dagger |\phi\rangle = -Q_+^\dagger Q_-^\dagger |\phi\rangle \quad (2.28)$$

Im Kapitel zur algebraischen Lösung der Modelle werden diese Grundlagen der supersymmetrischen Quantenmechanik benötigt und es wird deutlich werden, wie sich die Modelle in diesen allgemeinen Rahmen einordnen lassen. Zunächst ist jedoch einige Vorarbeit zu leisten, die mit der Einführung der betrachteten Modelle beginnen soll.

2.3. Einführung des supersymmetrischen $O(n)$ -Modells

2.3.1. Das supersymmetrische $O(n)$ -Modell in zwei Dimensionen

Bosonische Sigma-Modelle sind Feldtheorien, deren Lagrange-Dichten keinen Potentialterm enthalten und daher nur aus einem kinetischen Term bestehen. Von einer freien Theorie unterscheiden sie sich dadurch, dass die auftretenden Felder zusätzliche Nebenbedingungen erfüllen. Die Felder bilden also von der (in diesem Fall zweidimensionalen Minkowski-)Raumzeit auf eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , den sogenannten Targetraum, ab. Ist diese Mannigfaltigkeit kein linearer, sondern ein gekrümmter Raum, so spricht man von einem nichtlinearen Sigma-Modell.

Eine besonders einfache Klasse von nichtlinearen Sigma-Modellen sind die in dieser Arbeit betrachteten $O(n)$ -Modelle. In dieser Klasse ist die Mannigfaltigkeit, auf die die Felder eingeschränkt werden, die Einheitsphäre im \mathbb{R}^n S^{n-1} . Das bosonische $O(n)$ -Modell ist also definiert durch die Wirkung

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \partial_\mu \vec{n}^T \partial^\mu \vec{n} \quad (2.29)$$

und die Nebenbedingung

$$\vec{n}^T \vec{n} = 1, \quad (2.30)$$

wobei $\vec{n}^T = (n_1, \dots, n_n)$ die n reellen bosonischen Felder in einen Vektor zusammenfasst. Dieses Modell ist offensichtlich invariant unter den orthogonalen Transformationen

$$\vec{n}' = O \vec{n}, \quad \vec{n}'^T = \vec{n}^T O^T, \quad O^T O = \mathbf{1}, \quad (2.31)$$

2. Einführung der Modelle

woraus das Modell seinen Namen erhält. Im Folgenden sollen die Vektorpfeile weggelassen werden und die Summation über Vektorindizes soll implizit geschehen. Falls hierbei Zweideutigkeiten entstehen, sollen Klammern auf die richtige Summation hindeuten.

Eine manifest supersymmetrische Erweiterung des Modells leitet man am einfachsten im sogenannten Superraumformalismus her. Dies soll aber nicht Teil dieser Arbeit sein, da die Invarianz unter Supersymmetrietransformationen ohnehin explizit gezeigt wird.

Als supersymmetrische Verallgemeinerung erhält man, wie erstmals von Di Vecchia und Ferrara [12] und Witten [44] im Jahre 1977 eingeführt⁵

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu n \partial^\mu n + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + FF) \quad (2.32)$$

mit den Nebenbedingungen

$$nn = 1, \quad n\psi = 0, \quad nF = \frac{1}{2} \bar{\psi}\psi, \quad (2.33)$$

wobei die Felder ψ^i (reelle) Majorana-Spinoren und die Felder F^i reelle bosonische Felder sind⁶. Da in der Wirkung keine Ableitungen der Felder F^i auftreten, können diese durch ihre Bewegungsgleichungen eliminiert werden. Durch Einführung von Lagrange-Multiplikatoren für die Nebenbedingungen erhält man für die Bewegungsgleichung

$$F^i = \frac{1}{2} (\bar{\psi}\psi) n^i. \quad (2.34)$$

Hat man das Hilfsfeld eliminiert so lautet die Wirkung und Nebenbedingung des supersymmetrischen $O(n)$ -Modells

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \left(\partial_\mu n \partial^\mu n + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} (\bar{\psi}\psi)^2 \right) \quad (2.35)$$

und

$$nn = 1, \quad n\psi = 0. \quad (2.36)$$

Neben der manifesten $O(n)$ -Symmetrie des Modells ist das System invariant unter den Supersymmetrietransformationen:

$$\begin{aligned} \delta n^i &= \bar{\epsilon} \psi^i \\ \delta \psi^i &= -i \gamma^\mu \epsilon \partial_\mu n^i + \epsilon F^i \\ \delta \bar{\psi}^i &= i \bar{\epsilon} \gamma^\mu \partial_\mu n^i + \bar{\epsilon} F^i \\ \delta F^i &= -i \bar{\epsilon} \gamma^\mu \partial_\mu \psi^i \end{aligned} \quad (2.37)$$

Der Supersymmetrieparameter ϵ ist ein Majorana-Spinor, d.h. es handelt sich um $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetrie.

⁵In der Literatur tritt aus dimensionalen Gründen noch eine Kopplungskonstante vor der gesamten Wirkung auf, die in dieser Arbeit insgesamt weggelassen werden soll, da sie die Struktur der Ergebnisse nicht verändert.

⁶Der Index i hat den Wertebereich $1, \dots, n$. Die Bedeutung des Symbols n , als Dimension des umgebenden Raums \mathbb{R}^n einerseits und als bosonisches Feld andererseits, wird jeweils aus dem Zusammenhang deutlich.

2.3. Einführung des supersymmetrischen $O(n)$ -Modells

Nun bleibt nachzuweisen, dass das $O(n)$ -Modell tatsächlich invariant unter diesen Transformationen ist. Zunächst sollen die Nebenbedingungen betrachtet werden. Für die erste erhält man

$$\delta(nn) = 2n^i \delta n^i = 2\bar{\epsilon}(n\psi) = 0. \quad (2.38)$$

Im Fall der zweiten Nebenbedingung ergibt sich

$$\delta(n\psi_\alpha) = \delta n^i \psi_\alpha^i + n^i \delta \psi_\alpha^i = (\bar{\epsilon}\psi^i)\psi_\alpha^i - in^i(\gamma^\mu \epsilon)_\alpha \partial_\mu n^i + \epsilon_\alpha(nF) = 0, \quad (2.39)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der dritten Nebenbedingung und den Identitäten

$$(\bar{\epsilon}\psi^i)\psi_\alpha^i = -\frac{1}{2}\epsilon_\alpha(\bar{\psi}\psi), \quad 2n^i \partial_\mu n^i = \partial_\mu(nn) = 0 \quad (2.40)$$

folgt. Für die letzte Nebenbedingung ergibt sich ähnlich (mit $n^i \partial \psi^i = -\psi^i \partial n^i$)

$$\delta\left(nF - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\right) = \bar{\epsilon}\psi^i F^i - in^i \bar{\epsilon}\gamma^\mu \partial_\mu \psi^i - \bar{\epsilon}\psi^i F^i - i\bar{\epsilon}\gamma^\mu \partial_\mu \psi^i n^i = 0. \quad (2.41)$$

Um die Supersymmetrieminvarianz der Wirkung nachzuweisen, genügt es zu zeigen, dass sich die Lagrange-Dichte unter Supersymmetrietransformationen nur um eine totale Ableitung ändert. Man erhält:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\delta(\partial_\mu n \partial^\mu n + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + F^2) \\ &= \partial_\mu n \partial^\mu(\delta n) + i(\delta\bar{\psi})\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu\left(\frac{i}{2}\delta\bar{\psi}\gamma^\mu \psi\right) + F\delta F \\ &= \partial_\mu n(\bar{\epsilon}\partial^\mu \psi) - \bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \psi \partial_\mu + \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\nu \gamma^\mu \psi \partial_\nu n - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu \psi F\right) \\ &= \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\nu \gamma^\mu \psi \partial_\nu n - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu \psi F\right) =: \partial_\mu K^\mu \end{aligned} \quad (2.42)$$

Damit ist die Invarianz des Modells unter Supersymmetrietransformationen nachgewiesen. Nun soll noch der zu dieser Symmetrie gehörende erhaltene Strom, der sogenannte Superstrom, berechnet werden. Aus dem Noether-Theorem erhält man

$$J^\mu = \sum_i \delta\phi_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} - K^\mu, \quad (2.43)$$

wobei die Summe über ϕ_i als Summe über alle Felder der Theorie zu verstehen ist. Mit

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu n)} = \partial^\mu n, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)} = -\frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu)_\alpha \quad (2.44)$$

ergibt sich für den Superstrom

$$J^\mu = \bar{\epsilon}\gamma^\nu \gamma^\mu \psi \partial_\nu n =: \bar{\epsilon}^\alpha J_\alpha^\mu \quad (2.45)$$

Da der infinitesimale zweikomponentige Parameter $\bar{\epsilon}$ beliebig gewählt ist, bilden auch die Komponenten des Majorana-Spinors J_α^μ einzeln erhaltene Ströme. Die Superladung des Modells ergibt sich als Raumintegral über die $(\mu=0)$ -Komponente dieses Spinors zu

$$Q_\alpha = \int dx^1 J_\alpha^0 = \int dx^1 (\gamma^\nu \gamma^0 \psi)_\alpha \partial_\nu n = \int dx^1 \begin{pmatrix} \psi_1(\partial_0 - \partial_1)n \\ \psi_2(\partial_0 + \partial_1)n \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

2.3.2. Dimensionsreduktion des supersymmetrischen $O(n)$ -Modells

Bei der bisherigen Betrachtungsweise des supersymmetrischen $O(n)$ -Modells handelt es sich um eine zweidimensionale klassische Feldtheorie. Diese soll nun dimensionsreduziert werden, wobei die räumliche Koordinate kompaktifiziert werden soll. Damit erhält man ein (supersymmetrisches) mechanisches Modell, das ein Teilchen auf der Sphäre S^{n-1} beschreibt. Während die bosonischen Koordinaten eine direkt anschauliche Bedeutung (als Ort des Teilchens) haben, bilden die fermionischen (antikommutierenden) Koordinaten eine formale Erweiterung des Modells⁷, die die Untersuchung der Supersymmetrie des Modells im Rahmen der Mechanik möglich machen.

Technisch wird die dimensionale Reduktion wie folgt durchgeführt: Da das Modell nach der Reduktion nicht mehr von der x^1 -Koordinate abhängen darf, werden alle Ableitungen nach dieser Koordinate in der Lagrange-Dichte nullgesetzt. Außerdem muss die Clifford-Algebra reduziert werden. Da in zwei Dimensionen die Majorana-Weyl-Darstellung der γ -Matrizen gewählt wurde, mischen die beiden Komponenten der Spinoren unter Lorentztransformationen nicht. Da die Spinoren in einer Dimension nur noch eine Komponente besitzen und keine Clifford-Algebra mehr existiert, können die einzelnen Komponenten der zweidimensionalen Majorana-Spinoren als zwei (eindimensionale) Majorana-Spinoren in der eindimensionalen Theorie aufgefasst werden. Als weitere Vereinfachung des Ausdrucks für die Lagrangefunktion sollen die entstehenden zwei Majorana-Spinoren in einem eindimensionalen Dirac-Spinor wie folgt zusammengefasst werden

$$\Psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^i + i\psi_2^i) \quad \Psi^{i\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^i - i\psi_2^i). \quad (2.47)$$

Damit ergibt sich für die Lagrangefunktion des reduzierten Modells⁸

$$L = \frac{1}{2} \left(\partial_0 n \partial_0 n + i(\Psi^\dagger \partial_0 \Psi + \Psi \partial_0 \Psi^\dagger) + (\Psi^\dagger \Psi)(\Psi^\dagger \Psi) \right) \quad (2.48)$$

mit den Nebenbedingungen

$$nn - 1 = 0 \quad n\Psi = 0 = n\Psi^\dagger. \quad (2.49)$$

Die Superladung wird nach den gleichen Regeln dimensional reduziert und die einzelnen reellen Komponenten ebenso zu einem Dirac-Spinor zusammengefasst. Es ergibt sich

$$Q = \Psi \partial_0 n, \quad Q^\dagger = \Psi^\dagger \partial_0 n. \quad (2.50)$$

⁷Die Erweiterung der klassischen Mechanik um Grassmann-ungerade Größen wird z.B. in dem Artikel von Casalbuoni [6] beschrieben

⁸Grundsätzlich muss bei einer dimensional Reduktion noch eine Dimensionsbetrachtung der reduzierten Größen durchgeführt werden [42], damit die Wirkung dimensionslos bleibt. In diesem Fall können aber alle Änderungen in der (unterdrückten) Kopplungskonstante absorbiert werden.

2.4. Einführung des supersymmetrischen \mathbb{CP}^{n-1} -Modells

2.4.1. Das supersymmetrische \mathbb{CP}^{n-1} -Modell in zwei Dimensionen

Das \mathbb{CP}^{n-1} -Modell ist ebenfalls ein nichtlineares Sigma-Modell und es soll wiederum zunächst das bosonische Modell betrachtet werden. In diesem Fall gibt der Targetraum dem Modell seinen Namen: \mathbb{CP}^{n-1} steht für den $(n-1)$ -dimensionalen komplex projektiven Raum, der wie folgt beschrieben werden kann. Sei

$$z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{mit} \quad z \neq 0. \quad (2.51)$$

Man identifiziere alle z, z' miteinander, für die gilt

$$z' = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (2.52)$$

so bilden die entsprechenden Äquivalenzklassen den komplex projektiven Raum mit der (komplexen) Dimension $n-1$. Anders ausgedrückt ist der \mathbb{CP}^{n-1} der Raum der komplexen Ursprungsgeraden im \mathbb{C}^n . Um das \mathbb{CP}^{n-1} -Modell zu beschreiben, müssen zunächst Koordinaten im \mathbb{CP}^{n-1} gewählt werden. Von den verschiedenen in der Literatur üblichen Möglichkeiten, sollen in dieser Arbeit die z -Koordinaten des \mathbb{C}^n verwendet werden, in dem der \mathbb{CP}^{n-1} eingebettet ist. Damit diese zu sinnvollen Koordinaten des \mathbb{CP}^{n-1} werden, dürfen alle nach (2.52) identifizierten Vektoren z effektiv nur durch eine Koordinate beschrieben werden. Deshalb fordert man zunächst die Nebenbedingung

$$\bar{z}z = 1, \quad (2.53)$$

die die Identifikation für ein reelles λ implementiert. Desweiteren müssen noch die Vektoren, die sich um eine reine Phase $\lambda = \exp(i\Lambda)$, unterscheiden, miteinander identifiziert werden. Dies geschieht nicht durch eine weitere Nebenbedingung, sondern es wird als eine Invarianz des Modells unter $U(1)$ -Transformationen implementiert. Diese Überlegung zeigt, dass der \mathbb{CP}^{n-1} sich auch als der Quotientenraum

$$\mathbb{CP}^{n-1} \simeq S^{2n-1}/U(1) \quad (2.54)$$

darstellen lässt.

Im Falle des zweidimensionalen bosonischen \mathbb{CP}^{n-1} -Modells werden aus den z -Koordinaten von den Raumzeitkoordinaten x^μ abhängige Felder. Die Invarianz unter den $U(1)$ -Transformationen muss nun also auch für eine ortsabhängige Phase gelten, $z \rightarrow \exp(i\Lambda(x^\mu))z$, wodurch das \mathbb{CP}^{n-1} -Modell eine $U(1)$ -Eichsymmetrie erhält.

Diese Eichsymmetrie kann in der Wirkung durch die Verwendung einer eichkovarianten Ableitung mit reellem Eichfeld A_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \quad (2.55)$$

manifest gemacht werden. Damit lautet die Wirkung des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells

$$S = \int d^2x (D_\mu z)^\dagger D^\mu z = \int d^2x (\partial_\mu \bar{z} \partial^\mu z - 2iz \partial_\mu \bar{z} A^\mu + A_\mu A^\mu) \quad (2.56)$$

2. Einführung der Modelle

und das Eichfeld A^μ kann durch seine Bewegungsgleichung

$$A_\mu = i\bar{z}\partial_\mu z \quad (2.57)$$

eliminiert werden, so dass Wirkung und Nebenbedingung die Form

$$\int d^2x (\partial_\mu \bar{z} \partial^\mu z - (z \partial_\mu \bar{z})(\bar{z} \partial^\mu z)) \quad \bar{z}z = 1 \quad (2.58)$$

annehmen. Neben dieser lokalen $U(1)$ -Eichsymmetrie ist das Modell offensichtlich symmetrisch unter globalen $SU(n)$ -Transformationen. Aus diesem Grund ist das Modell auch unter dem Namen $SU(n)$ -Sigma-Modell bekannt. In dieser Form wurde das Modell erstmals 1978 von Eichenherr [15] und D'Adda, Di Vecchia und Lüscher [10] untersucht.

Eine supersymmetrische Erweiterung des Modells wurde im gleichen Jahr von D'Adda, Di Vecchia und Lüscher [9] (in euklidischer Raumzeit) und Cremmer und Scherk [8] (in vier Dimensionen) entwickelt. In der zweidimensionalen Minkowski-Raumzeit ist das supersymmetrische \mathbb{CP}^{n-1} -Modell durch die Wirkung [33]

$$S = \int d^2x \left[(D_\mu z)^\dagger D^\mu z + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi + \frac{1}{4} ((\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma^*\psi)^2) \right] \quad (2.59)$$

und die Nebenbedingungen

$$\bar{z}z = 1, \quad z\bar{\psi} = \bar{z}\psi = 0 \quad (2.60)$$

gegeben, wobei ψ Dirac-Spinoren sind und das Eichfeld in $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ zwar nun eine andere Bewegungsgleichung erfüllt, aber immer noch eliminiert werden kann.

Dieses supersymmetrische Modell erfüllt die $U(1)$ -Eichsymmetrie des rein bosonischen Modells mit

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \exp[i\Lambda(x)]z \\ \psi &\rightarrow \exp[i\Lambda(x)]\psi \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x), \end{aligned} \quad (2.61)$$

sowie die weiterhin offensichtliche $SU(n)$ -Symmetrie. Darüber hinaus ist es invariant unter den folgenden Supersymmetrietransformationen

$$\begin{aligned} \delta z &= -i\bar{\epsilon}\psi \\ \delta\psi_\alpha &= (\gamma^\mu \epsilon)_\alpha D_\mu z + \frac{i}{2} ((\bar{\psi}\psi)\epsilon_\alpha + (\bar{\psi}\gamma^*\psi)(\gamma^*\epsilon)_\alpha) z. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Im Unterschied zu den $O(n)$ -Modellen ist der infinitesimale Supersymmetrieparameter ϵ in diesem Fall ein komplexer Spinor. Daraus folgt unmittelbar, dass das \mathbb{CP}^{n-1} -Modell eine erweiterte $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetrie besitzt, die manchmal auch komplexe Supersymmetrie genannt wird. Es ist ein allgemeines Resultat, dass zweidimensionale Sigma-Modelle genau dann eine solch erweiterte Supersymmetrie zulassen, wenn der Targetraum eine sogenannte Kähler-Mannigfaltigkeit darstellt [46]. Da die Sphären S^n (mit Ausnahme der S^2) keine Kähler-Mannigfaltigkeiten sind, ist eine $\mathcal{N} = 2$ supersymmetrische Erweiterung des $O(n)$ -Modells nicht möglich. Die Sphäre S^2 hingegen ist isomorph zum Raum \mathbb{CP}^1 , d.h. die zugehörigen Sigma-Modelle sind äquivalent [9].

2.4.2. Dimensionsreduktion des supersymmetrischen \mathbb{CP}^{n-1} -Modells

Die Dimensionsreduktion des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells erfolgt nach dem gleichen Muster wie bei den $O(n)$ -Modellen. Zunächst werden alle Ableitungen nach der zweiten Raumzeit-Koordinate nullgesetzt. Danach wird die Komponente A_1 des Eichfelds durch ihre Bewegungsgleichung eliminiert nach

$$A_1 = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_1 \psi. \quad (2.63)$$

Man erhält als Zwischenergebnis die Lagrange-Funktion

$$L = \partial_0 \bar{z} \partial_0 z + 2i A_0 (z \partial_0 \bar{z}) - A_0 \bar{\psi} \gamma^0 \psi + A_0^2 + i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi + \frac{1}{4} ((\bar{\psi} \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma^* \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma^1 \psi)^2). \quad (2.64)$$

Nun müssen wiederum die Komponenten der Spinoren in zwei Dimensionen als Spinoren in einer Dimension aufgefasst werden. Eliminiert man noch die Eichfeldkomponente A_0 durch

$$A_0 = i \bar{z} \partial_0 z + \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \psi, \quad (2.65)$$

so erhält man für die Lagrange-Funktion

$$L = \partial_0 \bar{z} \partial_0 z + (\bar{z} \partial_0 z)^2 - i (\bar{z} \partial_0 z) (\psi_1^\dagger \psi_1 + \psi_2^\dagger \psi_2) + i (\psi_2^\dagger \partial_0 \psi_2 + \psi_1^\dagger \partial_0 \psi_1) + (\psi_2^\dagger \psi_1) (\psi_1^\dagger \psi_2) - (\psi_1^\dagger \psi_1) (\psi_2^\dagger \psi_2), \quad (2.66)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\bar{z} z = 1, \quad \bar{z} \psi_\alpha = z \psi_\alpha^\dagger = 0. \quad (2.67)$$

Die Supersymmetrietransformationen, die auf die gleiche Weise reduziert werden, ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \delta z &= -i \bar{\epsilon} \psi = \epsilon_2^\dagger \psi_1 - \epsilon_1^\dagger \psi_2 \\ \delta \psi_1 &= \epsilon_2 \left[-i (\partial_0 z - (\bar{z} \partial_0 z) z) + (\psi_1^\dagger \psi_1) z \right] - \epsilon_1 (\psi_2^\dagger \psi_1) z \\ \delta \psi_2 &= \epsilon_1 \left[i (\partial_0 z - (\bar{z} \partial_0 z) z) - (\psi_2^\dagger \psi_2) z \right] + \epsilon_2 (\psi_1^\dagger \psi_2) z \end{aligned} \quad (2.68)$$

Mit diesen Transformationen soll nun die Supersymmetrie des reduzierten Modells nachgewiesen und die Superladungen berechnet werden. Für die Nebenbedingungen gilt

$$\delta(\bar{z} z) = \epsilon_1 \psi_2^\dagger z - \epsilon_2 \psi_1^\dagger z + \epsilon_2^\dagger \bar{z} \psi_1 - \epsilon_1^\dagger \bar{z} \psi_2 = 0 \quad (2.69)$$

$$\delta(\bar{z} \psi_1) = (\epsilon_1 \psi_2^\dagger - \epsilon_2 \psi_1^\dagger) \psi_1 + \epsilon_2 \psi_1^\dagger \psi_1 - \epsilon_1 \psi_2^\dagger \psi_1 = 0 \quad (2.70)$$

Für die andere Spinorkomponente folgt die Invarianz analog. Die Transformation der Lagrange-Dichte ist eine etwas umfangreichere Rechnung, die hier in aller Kürze dargestellt werden soll. Um die Terme übersichtlicher zu gestalten, soll auf die 2D Spinor-Schreibweise zurückgegriffen werden. Für die ersten beiden Terme erhält man

$$\delta (\partial_0 \bar{z} \partial_0 z + (\bar{z} \partial_0 z)^2) = i (\partial_0 \bar{\psi} \epsilon) \partial_0 z - i \partial_0 \bar{z} (\bar{\epsilon} \partial_0 \psi) - 2 (\bar{z} \partial_0 z) (-i (\bar{\psi} \epsilon) \partial_0 z + i \bar{z} (\bar{\epsilon} \partial_0 \psi)). \quad (2.71)$$

2. Einführung der Modelle

Für die übrigen Terme ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta (L - \partial_0 \bar{z} \partial_0 z + (\bar{z} \partial_0 z)^2) &= i(\partial_0 \bar{z} \bar{\epsilon} \partial_0 \psi - \partial_0 z \partial_0 \bar{\psi} \epsilon) + i(\bar{z} \partial_0 z)(z \partial_0 \bar{\psi} \epsilon + \bar{z} \bar{\epsilon} \partial_0 \psi) \\ &\quad - i(\bar{z} \partial_0 z)(\partial_0 \bar{z} \bar{\epsilon} \psi + \partial_0 z \bar{\psi} \epsilon) + \partial_0 (\bar{\psi} \epsilon \partial_0 z) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Unter Benutzung von $\partial_0 \bar{z} \psi = -\bar{z} \partial_0 \psi$ folgt, dass sich die Lagrangefunktion nur um die zeitliche Ableitung

$$\delta L = \partial_0 (\bar{\psi} \epsilon \partial_0 z) \quad (2.73)$$

ändert, was die Supersymmetrie des reduzierten Modells bestätigt. Für die erhaltene Ladung, die im reduzierten Modell der J^0 Komponente des erhaltenen Stroms in Gleichung (2.43) entspricht, erhält man

$$J^0 = -i\bar{\epsilon} \psi \partial_0 \bar{z} + i\bar{\psi} \epsilon \partial_0 z. \quad (2.74)$$

Durch den beliebigen komplexen Supersymmetrieparameter ϵ zerfällt diese Ladung in vier unabhängige Komponenten

$$Q_\alpha = -i\partial_0 \bar{z} \psi_\alpha, \quad Q_\alpha^\dagger = i\partial_0 z \psi_\alpha^\dagger \quad (2.75)$$

Schließlich soll noch die Transformation

$$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2), \quad \Psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2) \quad (2.76)$$

der fermionischen Koordinaten durchgeführt werden. In diesen neuen Koordinaten lautet die Lagrangefunktion des Modells mit dem Eichfeld A_0

$$\begin{aligned} L &= \partial_0 \bar{z} \partial_0 z + 2iA_0(z\partial_0 \bar{z}) - A_0(\Psi_+^\dagger \Psi_+ + \Psi_-^\dagger \Psi_-) + A_0^2 \\ &\quad + i(\Psi_+^\dagger \partial_0 \Psi_+ + \Psi_-^\dagger \partial_0 \Psi_-) + (\Psi_-^\dagger \Psi_+)(\Psi_+^\dagger \Psi_-) + \frac{1}{4}(\Psi_+^\dagger \Psi_+ - \Psi_-^\dagger \Psi_-)^2, \end{aligned} \quad (2.77)$$

den Nebenbedingungen

$$\bar{z}z = 1 \quad z\Psi_\pm^\dagger = \bar{z}\Psi_\pm = 0 \quad (2.78)$$

und den Superladungen

$$Q_\pm = -i\partial_0 \bar{z} \Psi_\pm \quad Q^\dagger = i\partial_0 z \Psi_\pm^\dagger. \quad (2.79)$$

In dieser Form sollen die Modelle im nächsten Kapitel quantisiert werden.

3. Dirac-Quantisierung der Modelle

Nachdem im letzten Kapitel die Modelle dimensionsreduziert wurden und nun als klassische mechanische Modelle (mit abstrakten fermionischen Freiheitsgraden) interpretiert werden können, sollen diese nun quantisiert werden. Aufgrund der Nebenbedingungen, denen die Systeme unterworfen sind, kann dies nicht kanonisch unter Verwendung von Poisson-Klammern geschehen. Tatsächlich ist die Quantisierung von Systemen mit Nebenbedingungen ein umfangreiches Gebiet, da die verschiedenen Methoden nicht auf alle Systeme angewendet werden können. Einen guten Überblick über die verschiedenen Quantisierungsmethoden liefert das Buch von Henneaux und Teitelboim [25]. Dirac entwickelte als erster eine Methode zur Quantisierung mit Nebenbedingungen [13, 14], die in dieser Arbeit auf die betrachteten Modelle angewendet werden soll. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die Methode von Dirac vorgestellt und in den folgenden auf das $O(n)$ - und das $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modell angewendet.

3.1. Kanonische Quantisierung mit Nebenbedingungen

Um ein System mit Nebenbedingungen kanonisch zu quantisieren ist es notwendig, einen klassischen Formalismus zu finden, der durch Ersetzung einer symplektischen Struktur auf dem Phasenraum des Systems (ähnlich der Poisson-Klammer) durch Kommutatoren zu einer in sich konsistenten Quantentheorie führt. Die gewöhnlichen Poisson-Klammern sind immer dann nicht zulässig, wenn zwei Nebenbedingungen Φ_a, Φ_b existieren, deren Poisson-Klammer miteinander nicht verschwindet. Dies würde sofort zu einem Widerspruch in der Quantentheorie führen, wie man an folgendem Beispiel sieht:

$$[\Phi_a, \Phi_b] = C \quad \implies \quad C|\Psi\rangle = [\Phi_a, \Phi_b]|\Psi\rangle = \Phi_a\Phi_b|\Psi\rangle - \Phi_b\Phi_a|\Psi\rangle = 0 \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{H} \quad (3.1)$$

Auf der rechten Seite erhält man 0, da die Nebenbedingungen auf physikalischen Zuständen verschwinden müssen, während die linke Seite für einen nichtverschwindenden Kommutator nicht für alle $|\Psi\rangle$ gleich 0 sein darf.

Neben der Eigenschaft, dass die gesuchte Struktur in der Quantentheorie zu verschwindenden Kommutatoren von sämtlichen Nebenbedingungen führen sollte, ergibt sich eine weitere Konsistenzbedingung daraus, dass die Nebenbedingungen in der Zeitentwicklung konstant ($= 0$) bleiben müssen. Daher sollte jede Nebenbedingung auch mit dem Hamiltonoperator kommutieren.

Um eine solche Struktur zu finden, soll nun der klassische Hamiltonsche Formalismus mit Nebenbedingungen eingeführt werden.

3. Dirac-Quantisierung der Modelle

3.1.1. Klassischer Hamiltonscher Formalismus mit Nebenbedingungen¹

Im Hamiltonschen Formalismus werden zunächst die zu den Koordinaten konjugierten Impulse definiert als:

$$p_i(q_j, \dot{q}_j) = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j)}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.2)$$

Falls die Matrix

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (3.3)$$

invertierbar ist, können alle Geschwindigkeiten nach den Phasenraumvariablen aufgelöst werden ($\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j)$). Ist der Rang R der Matrix nicht maximal, so existieren $M = N - R$ Nebenbedingungen (sogenannte *primary constraints*), die in der Form

$$\Phi_m(p_i, q_i) = 0 \quad m = 1, \dots, M \quad (3.4)$$

geschrieben werden können und die den erlaubten Phasenraum auf eine $(2N - M)$ -dimensionale Constraintfläche Γ_p reduzieren. Sind die Constraintfunktionen in dem Sinne lokal linear unabhängig, dass sie in jedem Punkt der Fläche Γ_p als M Koordinaten senkrecht zur Fläche verwendet werden können, dann gelten die folgenden beiden Sätze (Beweis siehe [43]):

Satz 1: Jede glatte Funktion, die auf der Constraintfläche verschwindet (bezeichnet durch $F \approx 0$), kann als Kombination der Constraints geschrieben werden $F = f_m \Phi_m$ (f_m beliebige Funktionen).

Satz 2: Falls $\lambda_i \delta q_i + \mu_i \delta p_i = 0$ für Variationen tangential zur Constraintfläche gilt, so haben λ_i und μ_i (für beliebige Funktionen u_m) die Form:

$$\lambda_i = u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_i} \quad \mu_i = u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i} \quad (3.5)$$

Der Hamiltonsche Formalismus sieht als nächsten Schritt eine Legendretransformation $H = \dot{q}_i p_i - L$ vor. Da die so erhaltene kanonische Hamiltonfunktion aber wegen

$$\delta H = \delta \dot{q}_i p_i + \dot{q}_i \delta p_i - \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{q}_i \delta p_i - \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (3.6)$$

nur von $p_i = p_i(q_j, \dot{q}_j)$ und q_i abhängt, ist sie nur auf der Constraintfläche definiert und die Variationen δp_i , δq_i sind notwendigerweise tangential zu ihr.

Für das weitere Vorgehen gibt es nun zwei Möglichkeiten: Es können im Phasenraum angepasste Koordinaten gewählt werden, die die Constraintfläche parametrisieren; dann ist die Definition der Hamiltonfunktion auf der Constraintfläche ausreichend und die Koordinaten sind nicht mehr an Nebenbedingungen gebunden. Will man aber das Problem einbetten in den höherdimensionalen Phasenraum, so ist eine Fortsetzung der Hamiltonfunktion auf den gesamten Phasenraum zu suchen, die gewährleistet, dass das System, wenn es auf der

¹Die Ausführungen in diesem Abschnitt richten sich im Wesentlichen nach [43] und [25].

3.1. Kanonische Quantisierung mit Nebenbedingungen

Constraintfläche startet, für alle Zeiten auf ihr verweilt. Da Gleichung (3.6) auch wie folgt geschrieben werden kann

$$\delta q_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial^R H}{\partial p_i} - \dot{q}_i \right) \delta p_i = 0 \quad (3.7)$$

(das hochgestellte R bezeichnet die Rechtsableitung) liefert Satz 2 unter Verwendung der Bewegungsgleichungen die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial^R H}{\partial p_i} + u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_i} \quad (3.8)$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_i} \quad (3.9)$$

(wobei \approx Gleichheit auf Γ_p bedeutet). Dies ist gleichbedeutend mit der Feststellung, dass die auf den gesamten Phasenraum erweiterte Funktion H zunächst nur bis auf eine beliebige auf Γ_p verschwindende Funktion definiert ist, so dass eine allgemeine erweiterte Hamiltonfunktion nach Satz 1 in der Form

$$H_p = H + u_m \Phi_m \quad (3.10)$$

geschrieben werden kann. Die Bewegungsgleichungen von beliebigen Größen (die alle nur auf der Constraintfläche Γ_p physikalische Relevanz haben) lassen sich nun als Poisson-Klammer mit dem *primary Hamiltonian* H_p beschreiben,

$$\dot{A} \approx \{A, H_p\} = \{A, H\} + u_m \{A, \Phi_m\}, \quad (3.11)$$

wobei die bisher beliebigen Funktionen u_m noch so zu bestimmen sind, dass die Lösung konsistent und eindeutig ist.

Die Konsistenzbedingungen ergeben sich aus der schon erwähnten Einschränkung, dass die zeitliche Ableitung der Constraints auf Γ_p verschwinden muss, also dass gelten soll:

$$\dot{\Phi}_m \approx \{\Phi_m, H\} + \{\Phi_m, \Phi_n\} u_n = h_m + C_{mn} u_n \approx 0 \quad (3.12)$$

Falls die Matrix C_{mn} auf Γ_p invertierbar ist, so sind die Lösungen für die u_n festgelegt zu $u_n \approx -C_{nm}^{-1} h_m$ und für die zeitliche Ableitung beliebiger Phasenraumfunktionen gilt:

$$\dot{A} \approx \{A, H\} - \{A, \Phi_m\} C_{mn}^{-1} \{ \Phi_n, H \} \quad (3.13)$$

Ist der Rang der Matrix C hingegen nicht maximal, so muss zunächst überprüft werden, ob zusätzliche Bedingungen aus der Konsistenzforderung entstehen, da für die Links-Null-Eigenvektoren $w_m^{(a)}$ von C aus Gleichung (3.12) die Bedingungen

$$h_m w_m^{(a)} \approx 0 \quad (3.14)$$

folgen. Diese Gleichungen sind entweder identisch erfüllt oder sie müssen als zusätzliche, sogenannte *secondary constraints* zu den ursprünglichen Nebenbedingungen hinzugenommen werden. In diesem Fall ist die Matrix C entsprechend um diese Nebenbedingung zu

3. Dirac-Quantisierung der Modelle

erweitern und zu überprüfen, ob ihr Rang nun maximal ist. Hierbei können wiederum neue Nebenbedingungen auftreten. Am Ende dieser Prozedur erhält man eine Matrix, die alle Konsistenzbedingungen erfüllt, aber noch weitere Freiheiten in den Lösungen der u_m besitzen kann.

Um dies genauer zu fassen ist eine andere Klassifikation der Nebenbedingungen sinnvoll: Ist der Rang der Matrix C maximal, so besitzt das System ausschließlich *second class constraints* (SCC). Ein SCC ist eine Nebenbedingung, deren Poisson-Klammern nicht mit allen anderen Nebenbedingungen verschwindet. Andernfalls besitzt die Matrix C einen $(M - \text{rk}(C))$ -dimensionalen Kern, der aufgespannt sei durch die Vektoren $v^{(a)}$. Die Linearkombinationen der Constraints $\Phi^{(a)} = v_m^{(a)} \Phi_m$ besitzen nun verschwindende Poisson-Klammern mit sämtlichen anderen Constraints, da

$$\{\Phi^{(a)}, \Phi_m\} = \{v_n^{(a)} \Phi_n, \Phi_m\} = v_n^{(a)} C_{nm} \approx 0. \quad (3.15)$$

Das System besitzt also insgesamt $\dim(\ker C)$ unabhängige *first class constraints* (FCC). Dies führt dazu, dass die Lösungen für die Funktionen u_m nur bis auf Funktionen, die im Kern der Abbildung C liegen, aus den Konsistenzbedingungen zu bestimmen sind. Dabei sind die verschiedenen Lösungen für die u_m physikalisch äquivalent. Folglich führen *first class constraints* automatisch zu Eichfreiheiten im betrachteten System. Durch die Wahl von einer Anzahl unabhängiger Eichbedingungen, die der Anzahl FCCs entspricht und die mit den FCCs nichtverschwindende Poisson-Klammern besitzen, kann das System in ein *second class system* überführt werden. Die Auswahl einer speziellen Lösung für die Funktionen u_m entspricht somit einer Eichfixierung der Theorie. Das in dieser Arbeit betrachtete supersymmetrische $O(n)$ -Modell erweist sich als ein *second class system*, während das \mathbb{CP}^{n-1} -Modell eine $U(1)$ -Eichsymmetrie besitzt, wodurch FCCs auftreten. In der quantisierten Theorie ist allerdings ein anderer Umgang mit FCCs möglich, der für das \mathbb{CP}^{n-1} -Modell gewählt werden soll und im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

3.1.2. Quantisierung der Theorie

Im Fall eines *second class systems* ist der Übergang zu einer konsistenten Quantentheorie nach der obigen Vorarbeit relativ einfach: Die gesuchte symplektische Struktur, die in der Quantentheorie durch Kommutatoren ersetzt wird, heißt Dirac-Klammer und lässt sich aus der Zeitentwicklung der allgemeinen Phasenraumfunktion (3.13) motivieren zu

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Phi_m\} C_{mn}^{-1} \{\Phi_n, B\}. \quad (3.16)$$

Die Dirac-Klammer besitzt alle geforderten Eigenschaften: Sie ist (für bosonische Größen) antisymmetrisch, erfüllt die Jacobi-Identität

$$\{\{A, B\}_D, C\}_D + \{\{B, C\}_D, A\}_D + \{\{C, A\}_D, B\}_D = 0 \quad (3.17)$$

und erfüllt zusätzlich die Bedingung, dass die Dirac-Klammer jedes Constraints mit beliebigen anderen Größen verschwindet, da

$$\{\Phi_p, A\}_D = \{\Phi_p, A\} - \{\Phi_p, \Phi_m\} C_{mn}^{-1} \{\Phi_n, A\} = \{\Phi_p, A\} - C_{pm} C_{mn}^{-1} \{\Phi_n, A\} = 0. \quad (3.18)$$

3.2. Dirac-Quantisierung des $O(n)$ -Modells

Die eigentliche Quantisierung erfolgt nun durch die Ersetzung $\{A, B\}_D \longrightarrow -i[A, B]$ bzw. analog für zwei fermionische Größen $\{A, B\}_D \longrightarrow -i\{A, B\}$. Diese Vorschrift ist allerdings im Allgemeinen nicht eindeutig, da auf der rechten Seite Ordnungsprobleme durch nicht vertauschende Operatoren auftreten können. Diese Mehrdeutigkeit kann durch Bedingungen wie die Anti-Hermitizität des Kommutators der (hermiteschen) kanonischen Variablen eingeschränkt, aber im Allgemeinen nicht vollständig ausgeräumt werden. Außerdem kann durch den Einfluss der Ordnung die klassisch geltende Jacobi-Identität für die Kommutatoren gebrochen sein, was eventuell durch Korrekturterme (die höheren Ordnungen in \hbar entsprechen) ausgeglichen werden muss, die wiederum nicht die ursprünglichen Konsistenzbedingungen (Ordnungsproblem evt. auch in den Nebenbedingungen) brechen dürfen [28]. Somit kann diese Quantisierungsprozedur mit erheblichen Schwierigkeiten behaftet sein, um insbesondere die Konsistenz der entstehenden quantisierten Theorie sicherzustellen. Hat man eine konsistente Operatoralgebra gefunden, so muss in einem nächsten Schritt eine Darstellung dieser Algebra gefunden werden, um Wahrscheinlichkeitsamplituden berechnen zu können. Für Systeme mit FCCs ist es wie oben beschrieben möglich, durch Eichfixierungsbedingungen ein *second class system* mit fixierter Eichung zu erhalten. Eine andere Möglichkeit die FCCs zu berücksichtigen ist die Forderung, dass alle FCCs auf allen physikalischen Zuständen verschwinden müssen. Es wird somit der Hilbertraum auf einen Unterraum eingeschränkt, der physikalischen Zuständen des Systems entspricht. Bei dieser Einschränkung tritt nicht der eingangs erwähnte Widerspruch auf, da die FCCs mit allen übrigen Nebenbedingungen vertauschen. Diese Einschränkung hat auch eine physikalische Interpretation: In den meisten Systemen² entsprechen die FCCs genau den Generatoren der Eichtransformationen des Systems. Mit der obigen Einschränkung des physikalischen Hilbertraums beschränkt man sich also auf Zustände, die invariant unter Eichtransformationen sind.

3.2. Dirac-Quantisierung des $O(n)$ -Modells

3.2.1. Berechnung der Dirac-Klammern und der resultierenden Kommutatoralgebra

Wendet man die in Abschnitt 3.1 beschriebene Prozedur zur kanonischen Quantisierung auf das $O(n)$ -Modell an³, so findet man zunächst, dass das System neben den drei aus Kapitel 2.3.2 bekannten, insgesamt den folgenden Nebenbedingungen unterworfen ist

$$\begin{aligned} \Phi_{1i} : \quad \Pi_{\Psi_i} + \frac{i}{2}\Psi_i^\dagger &= 0 & \Phi_3 : \quad n\Psi &= 0 & \Phi_5 : \quad nn - 1 &= 0 \\ \Phi_{2i} : \quad \Pi_{\Psi_i^\dagger} + \frac{i}{2}\Psi_i &= 0 & \Phi_4 : \quad n\Psi^\dagger &= 0 & \Phi_6 : \quad np &= 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\Pi_{\Psi_i^{(\dagger)}} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \Psi_i^{(\dagger)})} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 n_i)}. \quad (3.19)$$

²Für eine genauere Untersuchung dieses Punkts siehe [25].

³Als rein bosonisches Modell entspricht das Problem der Quantisierung eines Teilchens auf der $(n-1)$ -Sphäre, das bereits von mehreren Autoren [16, 30, 34] betrachtet wurde.

3. Dirac-Quantisierung der Modelle

Die einzelnen Bedingungen entstehen aus verschiedenen Gründen: Φ_{1i} und Φ_{2i} ergeben sich, da in der klassischen Lagrangefunktion des Systems

$$L = \frac{1}{2}(\partial_0 n \partial_0 n + i(\Psi^\dagger \partial_0 \Psi + \Psi \partial_0 \Psi^\dagger) + (\Psi^\dagger \Psi)^2) \quad (3.20)$$

die Ableitungen der fermionischen Koordinaten nur linear vorkommen und sich die fermionischen Impulse daher nicht nach den Geschwindigkeiten auflösen lassen. Die Constraints Φ_3 , Φ_4 und Φ_5 legen die Geometrie des Modells fest, nämlich, dass das Teilchen an die Oberfläche der Einheitskugel gebunden ist und die fermionischen Koordinaten im Tangentialraum des jeweiligen Punktes liegen müssen⁴. Die letzte Bedingung Φ_6 schließlich ergibt sich als Konsistenzbedingung, damit die anderen Constraints in der Zeitentwicklung erhalten bleiben und ist somit ein *secondary constraint*.

Zur kanonischen Quantisierung des Modells muss zunächst die Matrix der Poisson-Klammern der Nebenbedingungen untereinander bestimmt werden, wobei die kanonischen Poisson-Klammern

$$\{p_i, n_j\} = -\delta_{ij} \quad \{\Pi_{\Psi_i}, \Psi_j\} = -\delta_{ij} \quad \{\Pi_{\Psi_i^\dagger}, \Psi_j^\dagger\} = -\delta_{ij} \quad (3.21)$$

vorausgesetzt werden. Als Matrix C_{mn} erhält man (wobei die erste und zweite Zeile/Spalte jeweils als $n \times n$ Blöcke zu verstehen sind):

$$C_{mn} = \{\Phi_m, \Phi_n\} = \begin{pmatrix} 0 & -i\delta_{ij} & -n_i & 0 & 0 & 0 \\ -i\delta_{ij} & 0 & 0 & -n_i & 0 & 0 \\ -n_j & 0 & 0 & 0 & 0 & n\Psi \\ 0 & -n_j & 0 & 0 & 0 & n\Psi^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n^2 \\ 0 & 0 & -n\Psi & -n\Psi^\dagger & -2n^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Da diese Matrix invertierbar ist, liegt ein sogenanntes *second class system* vor, in dem keine *first class constraints* existieren. Die Inverse zu dieser Matrix lautet nach Nullsetzen der Nebenbedingungen:

$$(C^{-1})_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & i(\delta_{ij} - n_i n_j) & -n_i & 0 & 0 & 0 \\ i(\delta_{ij} - n_i n_j) & 0 & 0 & -n_i & 0 & 0 \\ -n_j & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -n_j & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Matrix lassen sich die Dirac-Klammern der kanonischen Variablen nach der Formel

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Phi_m\}(C^{-1})_{mn}\{\Phi_n, B\} \quad (3.22)$$

⁴Statt diese geometrischen Bedingungen als *primary constraints* direkt zu implementieren, ist es auch möglich sie durch Lagrange-Multiplikatoren in der Lagrange-Funktion einzuführen. In diesem Fall treten die Nebenbedingungen selbst erst als *secondary constraints* auf. Diese Methode soll im Fall des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells verwendet werden, um die Äquivalenz der beiden Methoden zu zeigen.

3.2. Dirac-Quantisierung des $O(n)$ -Modells

aus den Poissonklammern berechnen. Die kanonische Quantisierung ersetzt nun die Dirac-Klammern durch $-i$ mal den entsprechenden (Anti-)Kommutator, wobei die folgende Dirac-Algebra entsteht:

$$\begin{aligned}
[n_i, p_j] &= i(\delta_{ij} - n_i n_j) \\
[p_i, p_j] &= -(\Psi_i^\dagger \Psi_j - \Psi_j^\dagger \Psi_i) - i(n_i p_j - n_j p_i) \\
\{\Psi_i^\dagger, \Psi_j\} &= \delta_{ij} - n_i n_j \\
[p_i, \Psi_j] &= i n_j \Psi_i \\
[p_i, \Psi_j^\dagger] &= i n_j \Psi_i^\dagger
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Das hierbei auftretende Ordnungsproblem im Kommutator der Impulskomponenten wurde so gelöst, dass der Kommutator antihermitesch ist und die Algebra die Jacobi-Identität erfüllt. Die gewählte Ordnung auf der rechten Seite entspricht der Weyl-Ordnung. Ebenso soll in der Nebenbedingung $np = 0 \rightarrow np + pn = 0$ die Weyl-Ordnung angewendet werden.

3.2.2. Darstellung der Dirac-Algebra des $O(n)$ -Modells

Als nächster Schritt konnte für die Dirac-Algebra des $O(n)$ -Modells eine Darstellung gefunden werden, die geometrisch der Einbettung der auf die S^{n-1} beschränkten Koordinaten in den umgebenden \mathbb{R}^n entspricht.

$$\begin{aligned}
n_i &= x_i \\
p_i &= -i(\delta_{ij} - x_i x_j) \partial_j + i \frac{n-1}{2} x_i - i x_j \chi_j^\dagger \chi_i + i \chi_i^\dagger x_j \chi_j \\
\Psi_i^{(\dagger)} &= (\delta_{ij} - x_i x_j) \chi_j^{(\dagger)}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Hierbei gelten für die neu eingeführten Objekte die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\partial_i, x_j] = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \{\chi_i, \chi_j^\dagger\} = \delta_{ij}. \tag{3.25}$$

Dass dies wirklich eine Darstellung der Dirac-Algebra (3.23) ist, wird in einer expliziten Rechnung im Anhang A.1 gezeigt.

In dieser Darstellung sind die Constraints $n\Psi^{(\dagger)} = 0$ und $np + pn = 0$ identisch erfüllt. Allerdings erkennt man, dass der Impulsoperator bezüglich des Skalarprodukts mit dem üblichen Maß $d^n x$ im \mathbb{R}^n nicht hermitesch ist, da bezüglich dieses Maßes gilt

$$p_i^\dagger = p_i + i x_i \tag{3.26}$$

Dieses Problem kann gleichzeitig mit der Implementierung des letzten Constraints $nn = 1$ elegant durch die Einführung des Maßes $\delta(1 - \sqrt{x_i x_i}) d^n x$ gelöst werden. Durch die Wahl dieses eingeschränkten Maßes wird direkt ersichtlich, dass das Skalarprodukt und damit sämtliche Erwartungswerte nur von den Werten der Wellenfunktionen auf der Einheitskugel abhängen. Dies entspricht aber dem Constraint $nn = 1$. Die Behauptung, dass der Impulsoperator bezüglich des eingeschränkten Maßes hermitesch ist, soll nun bewiesen werden.

3. Dirac-Quantisierung der Modelle

Bei der Rechnung wird nur der rein bosonische Teil des Operators betrachtet, da der fermionische Anteil ohnehin bezüglich beider Maße hermitesch ist. Startet man mit dem (trunkierten) Operator $\tilde{p}_i = -i(\delta_{ij} - x_i x_j) \partial_j$, der durch Addition eines Operators $a_i(\vec{x})$ hermitesch gemacht werden soll ($p_i = \tilde{p}_i + a_i$), so muss gelten

$$\int f^*(p_j h) \delta(1 - \sqrt{x_i x_i}) d^n x = \int (p_j f)^* h \delta(1 - \sqrt{x_i x_i}) d^n x \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \implies & \int (a_j^* - a_j) f^* h \delta(1 - \sqrt{x_i x_i}) d^n x = \int [f^*(\tilde{p}_j h) - (\tilde{p}_j f)^* h] \delta(1 - \sqrt{x_i x_i}) d^n x \\ \stackrel{P.I.}{=} & \frac{i}{2\pi} \int dq \int f^* h (\delta_{jk} - x_j x_k) \partial_k e^{iq(1 - \sqrt{x_i x_i})} d^n x + i \int f^* h \underbrace{[\partial_k (\delta_{jk} - x_j x_k)]}_{-(n+1)x_j} \delta(1 - \sqrt{x_i x_i}) d^n x \\ = & -\frac{i}{2\pi} \int \underbrace{q dq \frac{\partial}{\partial q} \left(e^{iq(1 - \sqrt{x_i x_i})} \right)}_{\stackrel{P.I.}{=} -2\pi \delta(1 - \sqrt{x_i x_i})} f^* h \frac{x_j (1 + \sqrt{x_i x_i})}{\sqrt{x_i x_i}} d^n x - i(n+1) \int f^* h x_j \delta(1 - \sqrt{x_i x_i}) d^n x \\ = & -i(n-1) \int f^* h x_j \delta(1 - \sqrt{x_i x_i}) d^n x \end{aligned} \quad (3.28)$$

Damit ist die einfachste Wahl für den Operator a_j :

$$a_i = i \operatorname{Im} a_i = -\frac{1}{2}(a_i^* - a_i) = i \frac{n-1}{2} x_i \quad (3.29)$$

Somit ist der Operator

$$p_i = -i(\delta_{ij} - x_i x_j) \partial_j + i \frac{n-1}{2} x_i \quad (3.30)$$

hermitesch bezüglich des Integralmaßes $\delta(1 - \sqrt{x_i x_i}) d^n x$. Damit ist eine Darstellung gefunden, die allen Nebenbedingungen genügt und in der die eingeschränkten Variablen als hermitesche Kombinationen von Orts- und Impulsoperatoren des umgebenden Raums auftreten.

3.2.3. Hamiltonoperator des $O(n)$ -Modells

Gemäß der Supersymmetrieralgebra (2.15) ergibt sich der Hamiltonian des quantenmechanischen $O(n)$ -Modells aus dem Antikommutator der Superladungen nach

$$H = \frac{1}{2} \{Q^\dagger, Q\} \quad (3.31)$$

Da die Komponenten von p und $\Psi^{(\dagger)}$ nicht vertauschen, muss das Ordnungsproblem, dass beim Übergang zum quantenmechanischen Superladungsoperator auftritt, gelöst werden. In dieser Arbeit ist bei allen auftretenden Ordnungsproblemen die Weyl-Ordnung gewählt worden, also

$$Q_{cl} \longrightarrow Q_{qu} = \frac{1}{2} (\vec{p} \vec{\Psi} + \vec{\Psi} \vec{p}) = \vec{p} \vec{\Psi}. \quad (3.32)$$

3.2. Dirac-Quantisierung des $O(n)$ -Modells

Mit dieser Superladung und ihrem komplex konjugierten $Q^\dagger = \vec{p}\vec{\Psi}^\dagger$ ergibt sich der Hamiltonoperator des $O(n)$ -Modells zu

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\{Q^\dagger, Q\} = \frac{1}{2}\left(\Psi_i^\dagger[p_i, p_j]\Psi_j + \Psi_i^\dagger p_j[p_i, \Psi_j] + [\Psi_i^\dagger, p_j]\Psi_j p_i + p_j\{\Psi_i^\dagger, \Psi_j\}p_i\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{p}^2 - \frac{1}{2}(\vec{p}\vec{n})(\vec{n}\vec{p}) + \frac{1}{2}N((n-1) - N), \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei $N = \vec{\Psi}^\dagger\vec{\Psi}$ ein Fermionanzahloperator ist, der durch seine Vertauschungsrelationen mit Ψ_i und Ψ_i^\dagger seine Bedeutung erhält

$$[N, \Psi_j] = -(\delta_{ij} - n_i n_j)\Psi_j = -\Psi_j \quad (3.34)$$

$$[N, \Psi_j^\dagger] = +(\delta_{ij} - n_i n_j)\Psi_j^\dagger = \Psi_j^\dagger. \quad (3.35)$$

Die Operatoren Ψ_i und Ψ_i^\dagger bilden also unter der Dirac-Algebra Leiteroperatoren bezüglich der Fermionzahl auf den physikalischen Zuständen.

Die Nebenbedingung $\vec{n}\vec{p} = 0$ wird ebenfalls Weyl-geordnet und zusammen mit $[n_i, p_i] = (n-1)i$ erhält man

$$\vec{n}\vec{p} = \frac{n-1}{2}i, \quad \vec{p}\vec{n} = -\frac{n-1}{2}i \quad (3.36)$$

Damit ergibt sich für den Hamiltonian die Form

$$H = \frac{1}{2}\left(\vec{p}^2 - \frac{(n-1)^2}{4} + N((n-1) - N)\right) \quad (3.37)$$

Aus den kanonischen Variablen n_i und p_j lässt sich der folgende Operator definieren

$$\tilde{J}_{ij} = n_i p_j - n_j p_i - i\Psi_i^\dagger \Psi_j + i\Psi_j^\dagger \Psi_i, \quad (3.38)$$

der die Algebra

$$[\tilde{J}_{ij}, \tilde{J}_{kl}] = i(\delta_{ik}\tilde{J}_{jl} + \delta_{jl}\tilde{J}_{ik} - \delta_{il}\tilde{J}_{jk} - \delta_{jk}\tilde{J}_{il}) \quad (3.39)$$

unter Benutzung der Dirac-Algebra erfüllt. Dies ist die zur Lie-Gruppe $SO(n)$ gehörige Lie-Algebra. Es fällt auf, dass der bosonische und der fermionische Anteil des Operators unter Dirac-Kommutatoren nicht separat eine solche Algebra erfüllen, sondern dies nur in der obigen Kombination der Fall ist.

Die Algebra der $SO(n)$ besitzt einen quadratischen Casimir-Operator der Form

$$\mathcal{C}^{(2)} = \tilde{J}_{ij}\tilde{J}_{ij}, \quad \text{mit} \quad [\mathcal{C}^{(2)}, \tilde{J}_{ij}] = 0. \quad (3.40)$$

Berechnet man diesen Casimir-Operator, so erkennt man, dass er bis auf einen Faktor dem Hamiltonoperator entspricht

$$H = \frac{1}{4}\tilde{J}_{ij}\tilde{J}_{ij} \quad (3.41)$$

Im umgebenden Raum ist in natürlicher Weise ein verallgemeinerter Drehimpulsoperator definiert, der die Drehungen des \mathbb{R}^n generiert:

$$J_{ij} = -i(x_i \partial_j - x_j \partial_i + \chi_i^\dagger \chi_j - \chi_j^\dagger \chi_i) \quad (3.42)$$

3. Dirac-Quantisierung der Modelle

Dieser erfüllt erwartungsgemäß ebenfalls die $so(n)$ -Algebra (3.39). Setzt man in \tilde{J}_{ij} die Darstellung (3.24) ein, so erhält man

$$\tilde{J}_{ij} = J_{ij} \quad (3.43)$$

und damit steht J_{ij} ebenfalls in Beziehung zum Hamiltonian nach der Gleichung

$$H = \frac{1}{4} \tilde{J}_{ij} \tilde{J}_{ij} = \frac{1}{4} J_{ij} J_{ij} \quad (3.44)$$

Dieses Ergebnis ist plausibel, da der Hamiltonoperator des Modells aufgrund der $O(n)$ -Symmetrie des Modells mit den Generatoren der Drehungen im \mathbb{R}^n J_{ij} vertauschen muss. Dadurch dass gezeigt werden konnte, dass der Hamiltonian dem Quadrat des Gesamtdrehimpulses (also dem quadratischen Casimir-Operator der Drehimpulsalgebra) entspricht, können seine Eigenwerte und Eigenfunktionen in den verschiedenen Sektoren aufgrund gruppentheoretischer Überlegungen explizit bestimmt werden. Dies soll in Kapitel 5 gezeigt werden.

Nun soll noch der Fockraum der eingeschränkten Theorie als Unterraum des Fockraums einer freien Theorie im \mathbb{R}^n bestimmt werden. Es ist leicht ersichtlich, dass dieser Teilraum nur 2^{n-1} fermionische Basisvektoren haben darf, da bei der Einschränkung des \mathbb{R}^n auf die $(n-1)$ -Sphäre ein bosonischer Freiheitsgrad verloren geht, was in einem supersymmetrischen Modell zu einem Verlust von einem fermionischen Freiheitsgrad führen muss. Dieser Verlust des fermionischen Freiheitsgrads ist bereits in der Matrix, die $\vec{\Psi}$ mit $\vec{\chi}$ in Beziehung setzt (vgl. Gleichung (3.24)) und den Rang $n-1$ hat, enthalten. Geometrisch gesprochen projiziert die Matrix den Vektor $\vec{\chi}$ auf seinen zu \vec{x} senkrechten Anteil, den Vektor $\vec{\Psi}$. Da nur die $\vec{\Psi}^{(\dagger)}$ physikalische Operatoren sind, darf der zu \vec{x} parallele Anteil $\vec{x}\vec{\chi}^{(\dagger)}$ keinerlei physikalische Relevanz haben. Diese Tatsache zeigt sich auch daran, dass $\vec{x}\vec{\chi}^{(\dagger)}$ mit sämtlichen physikalischen Operatoren ($x_i, p_i, \Psi_i^{(\dagger)}$ und Bildungen daraus) vertauscht.

Betrachtet man den Fermionzahloperator $N' = \vec{\chi}^\dagger \vec{\chi}$ des umgebenden Raumes, so findet man die folgende Zerlegung

$$N' = \vec{x}\vec{\chi}^\dagger \vec{x}\vec{\chi} + \vec{\Psi}^\dagger \vec{\Psi} =: N_r + N \quad (3.45)$$

Da N_r mit allen physikalischen Operatoren vertauscht, kann er stets diagonalisiert werden. Den Fockraum der eingeschränkten Theorie erhält man daher durch Projektion des gesamten Fockraums auf einen Teilraum mit fixierter Fermionzahl N_r . Als Projektionsoperatoren können dabei $P = \vec{x}\vec{\chi}\vec{x}\vec{\chi}^\dagger$ für $N_r = 0$ oder $P = \vec{x}\vec{\chi}^\dagger \vec{x}\vec{\chi}$ für $N_r = 1$ dienen. Gleichbedeutend damit ist die Forderung, dass entweder $\vec{x}\vec{\chi}|\Phi\rangle = 0$ ($N_r = 0$) oder $\vec{x}\vec{\chi}^\dagger|\Phi\rangle = 0$ ($N_r = 1$) auf allen physikalischen Zuständen gelten muss.

3.3. Dirac-Quantisierung des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells

3.3.1. Berechnung der Dirac-Klammern und der resultierenden Kommutatoralgebra

Die auf eine (Zeit-)Dimension reduzierte Wirkung des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells lautet, wie in Abschnitt (2.4) hergeleitet,

$$\begin{aligned} L = & \partial_0 \bar{z} \partial_0 z + A_0 (i(z \partial_0 \bar{z} - \bar{z} \partial_0 z) - \Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm) + \frac{i}{2} (\Psi_\pm^\dagger \partial_0 \Psi_\pm - \partial_0 \Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm) + (\Psi_-^\dagger \Psi_+) (\Psi_+^\dagger \Psi_-) \\ & + \frac{1}{4} (\Psi_+^\dagger \Psi_+ - \Psi_-^\dagger \Psi_-)^2 + A_0^2 + \lambda(\bar{z}z - 1) + \eta_\pm z \Psi_\pm^\dagger + \eta_\pm^\dagger \bar{z} \Psi_\pm, \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.3. Dirac-Quantisierung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

wobei die Nebenbedingungen, die die Geometrie des Modells festlegen, nun durch die Methode der Lagrange-Multiplikatoren gewährleistet werden. Hierbei ist λ ein bosonischer und η_{\pm} bzw. η_{\pm}^{\dagger} sind fermionische (Grassmann-ungerade) Multiplikatoren. Außerdem soll in obiger Gleichung und im Folgenden in verkürzter Schreibweise für doppelt auftretende \pm -Indizes gelten $\Psi_{\pm}^{\dagger}\Psi_{\pm} = \Psi_{+}^{\dagger}\Psi_{+} + \Psi_{-}^{\dagger}\Psi_{-}$.

Nach der von Dirac eingeführten Prozedur⁵ ergibt sich bei der Berechnung der kanonisch konjugierten Impulse, dass diese den folgenden *primary constraints* ($\Phi_{p,i}$) unterworfen sind

$$\Pi_{\lambda} = 0 \qquad \Pi_{\eta_{\pm}} = 0 \qquad \Pi_{\bar{\eta}_{\pm}} = 0 \qquad (3.47)$$

$$\Pi_{\Psi_{\pm}} = -\frac{i}{2}\Psi_{\pm}^{\dagger} \qquad \Pi_{\Psi_{\pm}^{\dagger}} = -\frac{i}{2}\Psi_{\pm} \qquad \Pi_{A_0} = 0 \qquad (3.48)$$

Die Gleichungen in der ersten Zeile zeigen nur, dass die Lagrange-Multiplikatoren keine dynamischen Felder sind. Ebenso erweist sich das Eichfeld A_0 als nicht dynamisch. Außerdem treten noch die für fermionische Wirkungen üblichen Constraints auf.

Der *primary Hamiltonian* ergibt sich zu

$$\begin{aligned} H_p = & \bar{\Pi}\Pi - A_0(i(z\Pi - \bar{z}\bar{\Pi}) - (\Psi_{+}^{\dagger}\Psi_{+} + \Psi_{-}^{\dagger}\Psi_{-})) - \Psi_{-}^{\dagger}\Psi_{+}\Psi_{+}^{\dagger}\Psi_{-} \\ & - \frac{1}{4}(\Psi_{+}^{\dagger}\Psi_{+} + \Psi_{-}^{\dagger}\Psi_{-})^2 - \lambda(\bar{z}z - 1) - \eta_{\pm}z\Psi_{\pm}^{\dagger} - \eta_{\pm}^{\dagger}\bar{z}\Psi_{\pm} - u_i\Phi_{p,i}, \end{aligned} \qquad (3.49)$$

wobei $\Pi \equiv \Pi_z$ gilt. Die gewünschten geometrischen Constraints treten jetzt erst als *secondary constraints*, also als die Bedingungen, die aus der Forderung $\{\Phi_{p,i}, H_p\} = 0$ entstehen, auf:

$$\bar{z}\Psi_{\pm} = 0 \qquad z\Psi_{\pm}^{\dagger} = 0 \qquad (3.50)$$

$$z\bar{z} - 1 = 0 \qquad \bar{z}\bar{\Pi} + z\Pi = 0 \qquad (3.51)$$

$$i(\bar{z}\bar{\Pi} - z\Pi) + \Psi_{\pm}^{\dagger}\Psi_{\pm} = 0 \qquad (3.52)$$

Die Gleichung $\Pi_{A_0} = 0$ und Gleichung (3.52) erweisen sich als *first class constraints*, die die Eichtransformationen des Modells erzeugen. Für die erste Gleichung kann die Eichung problemlos mit $A_0 = 0$ fixiert werden, da die kanonischen Poisson-Klammern von A_0 und Π_{A_0} mit allen übrigen Koordinaten des Phasenraums verschwinden, so dass deren Dirac-Klammern untereinander durch die Eichfixierung nicht verändert werden⁶. Nach dieser Wahl der Eichung ist das System immer noch unter einer zeitunabhängigen $U(1)$ -Transformation invariant, die von der Nebenbedingung (3.52) generiert wird. Diese soll später auf den Zuständen des Hilbertraums der Theorie implementiert werden, so dass der entsprechende quantenmechanische Operator alle physikalischen Zustände annihiliert⁷.

Die übrigen Constraints bilden ein *second class system* und sollen wie folgt durchnumeriert

⁵Die Struktur der Dirac-Klammern des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells in mehr als einer Dimension wurde schon von verschiedenen Autoren untersucht. So wird das rein bosonische Modell in [22, 31] und das supersymmetrische Modell in [1, 38, 33] betrachtet.

⁶Gozzi und Guha [22] bezeichnen diese Eichung im bosonischen $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modell in Anlehnung an die Elektrodynamik als temporale Eichung.

⁷Gozzi und Guha [22] setzen diese Bedingung in Anlehnung an Gervais und Sakita [20] mit dem Fehlen einer externen Ladung gleich.

3. Dirac-Quantisierung der Modelle

werden:

$$\begin{aligned}
\Phi_{1i} : \quad \Pi_{\Psi_{+i}} + \frac{i}{2}\Psi_{+i}^\dagger &= 0 & \Phi_{2i} : \quad \Pi_{\Psi_{+i}^\dagger} + \frac{i}{2}\Psi_{+i} &= 0 \\
\Phi_{3i} : \quad \Pi_{\Psi_{-i}} + \frac{i}{2}\Psi_{-i}^\dagger &= 0 & \Phi_{4i} : \quad \Pi_{\Psi_{-i}^\dagger} + \frac{i}{2}\Psi_{-i} &= 0 \\
\Phi_{5\pm} : \quad \bar{z}\Psi_\pm &= 0 & \Phi_{6\pm} : \quad z\Psi_\pm^\dagger &= 0 \\
\Phi_7 : \quad \bar{z}z - 1 &= 0 & \Phi_8 : \quad \bar{z}\bar{\Pi} + z\Pi &= 0
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Dirac-Klammern muss zunächst die Matrix der Poisson-Klammern der Constraints untereinander $C_{mn} = \{\Phi_m, \Phi_n\}$ bestimmt werden:

$$C_{mn} = \begin{array}{c|cccccccc} & \Phi_{1j} & \Phi_{2j} & \Phi_{3j} & \Phi_{4j} & \Phi_{5\pm} & \Phi_{6\pm} & \Phi_7 & \Phi_8 \\ \hline \Phi_{1i} & 0 & -i\delta_{ij} & 0 & 0 & -\bar{z}_i\delta_{+\pm} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{2i} & -i\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & -z_i\delta_{+\pm} & 0 & 0 \\ \Phi_{3i} & 0 & 0 & 0 & -i\delta_{ij} & -\bar{z}_i\delta_{-\pm} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{4i} & 0 & 0 & -i\delta_{ij} & 0 & 0 & -z_i\delta_{-\pm} & 0 & 0 \\ \Phi_{5\pm} & -\bar{z}_j\delta_{\pm+} & 0 & -\bar{z}_j\delta_{\pm-} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{6\pm} & 0 & -z_j\delta_{\pm+} & 0 & -z_j\delta_{\pm-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \Phi_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Die Einträge in dieser Matrix sind als Blockmatrizen zu verstehen, deren Indizes jeweils über die Vektor- (a, b) bzw. Spinor-Indizes ($+, -$) der einzelnen Constraints laufen. Sie hat maximalen Rang und lässt sich daher invertieren. Unter Verwendung der Constraints ergibt sich für die inverse Matrix:

$$C_{mn}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i(\delta_{ij} - z_i\bar{z}_j) & 0 & 0 & -z_i\delta_{+\pm} & 0 & 0 & 0 \\ i(\delta_{ij} - \bar{z}_iz_j) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{z}_i\delta_{+\pm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i(\delta_{ij} - z_i\bar{z}_j) & -z_i\delta_{-\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i(\delta_{ij} - \bar{z}_iz_j) & 0 & 0 & -\bar{z}_i\delta_{-\pm} & 0 & 0 \\ -z_j\delta_{\pm+} & 0 & -z_j\delta_{\pm-} & 0 & 0 & i\delta_{\pm\pm} & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{z}_j\delta_{\pm+} & 0 & -\bar{z}_j\delta_{\pm-} & i\delta_{\pm\pm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Hiermit lassen sich nun die Dirac-Klammern der Variablen des Phasenraums nach der Formel

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Phi_m\}C_{mn}^{-1}\{\Phi_n, B\} \quad (3.53)$$

bestimmen. Für die quantisierte Dirac-Algebra erhält man in der Übersicht

$$[z_i, \Pi_j] = i \left(\delta_{ij} - \frac{z_i\bar{z}_j}{2} \right) \quad (3.54a)$$

$$[\bar{z}_i, \Pi_j] = -\frac{i}{2}\bar{z}_i\bar{z}_j \quad (3.54b)$$

$$[\Pi_i, \Pi_j] = -\frac{i}{2}(\bar{z}_i\Pi_j - \bar{z}_j\Pi_i) \quad (3.54c)$$

$$[\Pi_i, \bar{\Pi}_j] = -\frac{i}{2}(\bar{z}_i\bar{\Pi}_j - z_j\Pi_i) - \Psi_{\pm i}^\dagger\Psi_{\pm j} + (\delta_{ij} - \bar{z}_iz_j) \quad (3.54d)$$

$$[\bar{\Pi}_i, \Psi_{\pm j}] = iz_j\Psi_{\pm i} \quad (3.54e)$$

$$\{\Psi_{\pm i}, \Psi_{\pm j}^\dagger\} = (\delta_{ij} - z_i\bar{z}_j)\delta_{\pm\pm}. \quad (3.54f)$$

3.3. Dirac-Quantisierung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

Aufgrund des Zusammenhangs $(\Pi_i)^\dagger = \bar{\Pi}_i$ ergeben sich weitere nichtverschwindende Kommutatoren aus der Beziehung

$$[A^\dagger, B^\dagger] = -([A, B])^\dagger. \quad (3.55)$$

Alle übrigen (Anti-)Kommutatoren verschwinden. Das in den Gleichungen (3.54c) und (3.54d) auftretende Ordnungsproblem der nicht vertauschenden Operatoren Π und z sowie Ψ_\pm^\dagger und Ψ_\pm wurde wiederum durch Weyl-Ordnung der rechten Seiten gelöst. Hierbei wurde darauf geachtet, dass die Algebra in der gewählten Ordnung die Jacobi-Identität erfüllen muss, was allerdings nicht an allen, aber beispielhaft an einigen, nicht direkt einsichtigen Kombinationen überprüft wurde.

Auch die Ordnungsprobleme in den Constraints wurden beim Übergang zum quantisierten Modell durch Weyl-Ordnung gelöst:

$$\Phi_8 \rightarrow \frac{1}{2}(\bar{z}\bar{\Pi} + \bar{\Pi}\bar{z} + z\Pi + \Pi z) = \bar{z}\bar{\Pi} + \Pi z \quad (3.56)$$

$$\text{FCC} \rightarrow \frac{i}{2}(\bar{z}\bar{\Pi} + \bar{\Pi}\bar{z} - z\Pi - \Pi z) + \frac{1}{2}(\Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm - \Psi_\pm \Psi_\pm^\dagger) = i(\bar{z}\bar{\Pi} - \Pi z) + \Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm + \frac{1}{2} \quad (3.57)$$

Da der FCC wie oben angedeutet nicht als Operator-Identität sondern nur auf den durch diese Eigenschaft ausgezeichneten physikalischen Zuständen verschwinden soll, lassen sich die beiden obigen Constraints zu den folgenden Beziehungen zusammenfassen, die ebenfalls nur auf den physikalischen Zuständen gelten:

$$\begin{aligned} \bar{z}\bar{\Pi} &= \frac{i}{2}\Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm + \frac{i}{4} & \bar{\Pi}\bar{z} &= \bar{z}\bar{\Pi} + i\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ \Pi z &= -\frac{i}{2}\Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm - \frac{i}{4} & z\Pi &= \Pi z - i\left(n - \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Um diese Beziehungen bei der Berechnung des Hamiltonians nutzen zu können, muss der zu ersetzende Term ganz nach rechts durchgetauscht werden, also direkt auf den physikalischen Zustand wirken, da rechte und linke Seiten von (3.58) identisch auf Zustände wirken, aber nicht dieselben Vertauschungsrelationen mit den übrigen Operatoren erfüllen.

Die Weyl-Ordnung der Superladungen liefert

$$Q_\pm = \Pi\Psi_\pm, \quad Q_\pm^\dagger = \bar{\Pi}\Psi_\pm^\dagger. \quad (3.59)$$

3.3.2. Darstellung der Dirac-Algebra des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

Auch für die Algebra der Dirac-Kommutatoren des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells konnte eine Darstellung in Koordinaten des umgebenden Raums gefunden werden:

$$\begin{aligned} z_i &= z_i & \bar{z}_i &= \bar{z}_i & N_r &= (z\chi_\pm^\dagger)(\bar{z}\chi_\pm) \\ \Pi_i &= -i\left(\delta_{ij} - \frac{\bar{z}_i z_j}{2}\right)\partial_j + i\frac{\bar{z}_i \bar{z}_j}{2}\bar{\partial}_j + i\frac{2n-1}{4}\bar{z}_i - i\frac{N_r+1}{2}\bar{z}_i + i\bar{z}_j \chi_{\pm i}^\dagger \chi_{\pm j} \\ \bar{\Pi}_i &= -i\left(\delta_{ij} - \frac{z_i \bar{z}_j}{2}\right)\bar{\partial}_j + i\frac{z_i z_j}{2}\partial_j + i\frac{2n-1}{4}z_i + i\frac{N_r+1}{2}z_i - iz_j \chi_{\pm i}^\dagger \chi_{\pm j} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\Psi_{\pm i} = (\delta_{ij} - z_i \bar{z}_j)\chi_{\pm j}$$

$$\Psi_{\pm i}^\dagger = (\delta_{ij} - \bar{z}_i z_j)\chi_{\pm j}^\dagger$$

3. Dirac-Quantisierung der Modelle

Hierbei erfüllen die neu eingeführten Operatoren wieder die üblichen Relationen

$$[z_i, \partial_j] = -\delta_{ij} \quad [\bar{z}_i, \bar{\partial}_j] = -\delta_{ij} \quad \{\chi_i, \chi_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad (3.61)$$

und alle übrigen (Anti-)Kommutatoren verschwinden.

Da der rein bosonische Anteil dieser Darstellung gerade einer Koordinatentransformation des bosonischen Anteils der Darstellung im Falle des $O(2n)$ -Modells entspricht, wobei statt $2n$ reeller n komplexe Koordinaten eingeführt wurden, gilt $\bar{\Pi} = \Pi^\dagger$ bezüglich des Maßes $\sqrt{1 - \bar{z}z} d^n z d^n \bar{z}$. In Anhang A.2 wird nachgewiesen, dass es sich tatsächlich um eine Darstellung der Algebra (3.54) handelt.

3.3.3. Hamiltonoperator des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells

Der quantenmechanische Hamiltonoperator des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells lässt sich mithilfe der in Abschnitt 2.2.2 hergeleiteten Formel

$$H = \frac{1}{2} \left(\{Q_+, Q_+^\dagger\} + \{Q_-, Q_-^\dagger\} \right) \quad (3.62)$$

berechnen.

Als Zwischenschritt soll zunächst $\{Q_+^\dagger, Q_+\}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} \{Q_+, Q_+^\dagger\} &= \{\Psi_+^\dagger \bar{\Pi}, \Pi \Psi_+\} \\ &= \Psi_{+i}^\dagger [\bar{\Pi}_i, \Pi_j] \Psi_{+j} + \Psi_{+i}^\dagger \Pi_j [\bar{\Pi}_i, \Psi_{+j}] + [\Psi_{+i}^\dagger, \Pi_j] \Psi_{+j} \bar{\Pi}_i + \Pi_j \{\Psi_{+i}^\dagger, \Psi_{+j}\} \bar{\Pi}_i \\ &= \Pi \bar{\Pi} - \Pi z \bar{z} \bar{\Pi} - \Psi_+^\dagger \Psi_+ (i(\bar{z} \bar{\Pi} - \Pi z) + \Psi_+^\dagger \Psi_+) - (\Psi_+^\dagger \Psi_-) (\Psi_-^\dagger \Psi_+) + \frac{1}{2} \Psi_+^\dagger \Psi_+ \end{aligned} \quad (3.63)$$

Daraus lässt sich der gesamte Hamiltonian zusammensetzen zu:

$$\begin{aligned} H &= \Pi \bar{\Pi} - \underbrace{\Pi z \bar{z} \bar{\Pi}}_{\frac{1}{4}((\Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm)^2 + (\Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm) + \frac{1}{4})} - \frac{1}{2} \left(\Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm \right) \underbrace{\left(i(\bar{z} \bar{\Pi} - \Pi z) + \Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm \right)}_{=-\frac{1}{2}} + \\ &+ \Psi_+^\dagger \Psi_+ \Psi_-^\dagger \Psi_- - \frac{1}{2} \left(\Psi_+^\dagger \Psi_- \Psi_-^\dagger \Psi_+ + \Psi_-^\dagger \Psi_+ \Psi_+^\dagger \Psi_- \right) + \frac{1}{4} \Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm \end{aligned} \quad (3.64)$$

was sich zu der endgültigen Form

$$H = \Pi \bar{\Pi} - \frac{1}{4} \left(\Psi_+^\dagger \Psi_+ - \Psi_-^\dagger \Psi_- \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\Psi_+^\dagger \Psi_- \Psi_-^\dagger \Psi_+ + \Psi_-^\dagger \Psi_+ \Psi_+^\dagger \Psi_- \right) + \frac{1}{4} \Psi_\pm^\dagger \Psi_\pm - \frac{1}{16} \quad (3.65)$$

vereinfacht.

Ziel der folgenden Betrachtung ist es, zu zeigen, dass der Hamiltonoperator des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells der quadratische Casimir-Operator einer Darstellung der $SU(n)$ ist. Betrachtet man die folgenden Operatoren (wobei das große W für Weyl-Ordnung steht)

$$\tilde{D}_{ij} = W \left[i(\bar{z}_i \bar{\Pi}_j - z_j \Pi_i) + \Psi_{\pm i}^\dagger \Psi_{\pm j} \right] = i(\bar{z}_i \bar{\Pi}_j - z_j \Pi_i) + \Psi_{\pm i}^\dagger \Psi_{\pm j} - (\delta_{ij} - \bar{z}_i z_j) \quad (3.66)$$

3.3. Dirac-Quantisierung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

dann stellt man fest, dass sie die folgenden Eigenschaften haben:

$$\tilde{D}_{ij} = \tilde{D}_{ji}^\dagger \quad \tilde{D}_{ii} = 0 \quad (\text{FCC}). \quad (3.67)$$

Desweiteren erfüllen sie die folgenden Kommutatorrelationen

$$[\tilde{D}_{ij}, \tilde{D}_{kl}] = \delta_{jk}\tilde{D}_{il} - \delta_{il}\tilde{D}_{kj}. \quad (3.68)$$

Damit bilden sie einen Satz von Leiteroperatoren der $SU(n)$ [4]. Auf diese Tatsache soll in Kapitel 5 noch näher eingegangen werden.

Offenbar ist $\tilde{D}_{ij}\tilde{D}_{ji}$ der quadratische Casimir-Operator der Algebra, denn:

$$\begin{aligned} [\tilde{D}_{ij}\tilde{D}_{ji}, \tilde{D}_{kl}] &= \tilde{D}_{ij}[\tilde{D}_{ji}, \tilde{D}_{kl}] + [\tilde{D}_{ij}, \tilde{D}_{kl}]\tilde{D}_{ji} \\ &= \tilde{D}_{ij}(\delta_{ik}\tilde{D}_{jl} - \delta_{jl}\tilde{D}_{ki}) + (\delta_{jk}\tilde{D}_{il} - \delta_{il}\tilde{D}_{kj})\tilde{D}_{ji} = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Bildet man die Kommutatoren von \tilde{D}_{ij} mit den Variablen des Phasenraums, so stellt man fest, dass die zueinander komplex konjugierten Größen gerade entgegengesetzt transformieren

$$\begin{aligned} [\tilde{D}_{ij}, z_k] &= -\delta_{ik}z_j & [\tilde{D}_{ij}, \bar{z}_k] &= \delta_{jk}\bar{z}_i \\ [\tilde{D}_{ij}, \Pi_k] &= \delta_{ik}\Pi_j & [\tilde{D}_{ij}, \bar{\Pi}_k] &= -\delta_{jk}\bar{\Pi}_i \\ [\tilde{D}_{ij}, \Psi_{\pm k}] &= -\delta_{ik}\Psi_{\pm j} & [\tilde{D}_{ij}, \Psi_{\pm k}^\dagger] &= \delta_{jk}\Psi_{\pm i}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.70)$$

so dass Kombinationen wie $\bar{z}z$, $z\Pi$, $\Psi_{\pm}\Pi$ Skalare unter den von \tilde{D}_{ij} erzeugten $SU(n)$ -Transformationen sind. Berechnet man den obigen Casimir-Operator unter Verwendung von der Dirac-Algebra des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells gemäß

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ij}\tilde{D}_{ji} &= \left[i(\bar{\Pi}_j\bar{z}_i - \Pi_i z_j) + \Psi_{\pm i}^\dagger\Psi_{\pm j} - (\delta_{ij} - \bar{z}_i z_j) \right] \\ &\quad \times \left[i(\bar{z}_j\bar{\Pi}_i - z_i\Pi_j) + \Psi_{\pm j}^\dagger\Psi_{\pm i} - (\delta_{ij} - \bar{z}_j z_i) \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

so stellt man nach einigen Umformungsschritten und unter Verwendung der Beziehungen (3.58) fest, dass das Ergebnis auf die Form von Gleichung (3.65) gebracht werden kann. Insgesamt erhält man für die Beziehung zwischen Casimir-Operator und Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2}\tilde{D}_{ij}\tilde{D}_{ji}. \quad (3.72)$$

Setzt man für die in \tilde{D}_{ij} auftretenden Phasenraumvariablen die Darstellung (3.60) ein, so erhält man den Operator

$$D_{ij} = \tilde{D}_{ij} = \bar{z}_i\bar{\partial}_j - z_j\partial_i + \chi_{\pm i}^\dagger\chi_{\pm j} - \delta_{ij}, \quad (3.73)$$

der in natürlicher Weise einen Generator der $SU(n)$ -Transformationen im umgebenden Raum darstellt (ähnlich wie im Falle des $O(n)$ -Modells ein verallgemeinerter Drehimpuls definiert wurde), sofern der FCC

$$D_{ii} = \bar{z}\bar{\partial} - z\partial + N_+ + N_- - n \quad (3.74)$$

auf allen betrachteten (physikalischen) Zuständen verschwindet.

3. Dirac-Quantisierung der Modelle

4. Das supersymmetrische $O(3)$ -Modell

In diesem Kapitel soll als Spezialfall das supersymmetrische $O(3)$ -Modell näher betrachtet werden. Dazu soll in den ersten beiden Abschnitten untersucht werden, welche Aussagen sich über den Fock-Raum und das Spektrum des Systems treffen lassen, ohne dass eine konkrete Darstellung der Operatoren der Dirac-Algebra (3.23) bekannt ist. Im letzten Abschnitt wird die Darstellung der Operatoren in Kugelkoordinaten gewählt, um das $O(3)$ -Modell zu lösen. Diese Ergebnisse sollen in Kapitel 5 als Konsistenztest für die allgemeinen Ergebnisse des $O(n)$ -Modells dienen.

4.1. Hamiltonoperator und Fockraum der Theorie

Als Spezialfall von Gleichung (3.33) erhält man für den Hamiltonoperator des $O(3)$ -Modells

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\{Q^\dagger, Q\} = \frac{1}{2}\left(\Psi_i^\dagger[p_i, p_j]\Psi_j + \Psi_i^\dagger p_j[p_i, \Psi_j] + [\Psi_i^\dagger, p_j]\Psi_j p_i + p_j\{\Psi_i^\dagger, \Psi_j\}p_i\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{p}^2 - \frac{1}{2}(\vec{p}\vec{n})(\vec{n}\vec{p}) + \frac{1}{2}N(2 - N) = \frac{1}{2}\vec{L}^2 + \frac{1}{2}N(2 - N) = \frac{1}{2}\vec{J}^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Hierbei sind einige Operatoren implizit eingeführt worden: Der Gesamtdrehimpuls \vec{J} und der Bahndrehimpuls \vec{L} , definiert durch

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{x} \wedge \vec{p} - i\Psi^\dagger \wedge \Psi. \quad (4.2)$$

\vec{J} steht mit dem verallgemeinerten Drehimpulsoperator \tilde{J}_{ij} in Beziehung nach

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\tilde{J}_{jk} \quad (4.3)$$

Es ist wiederum so, dass weder der Bahndrehimpuls noch der Spinterm unter Dirac-Kommutatoren einzeln eine Drehimpulsalgebra erfüllen, sondern nur der Gesamtdrehimpuls \vec{J} die bekannte Relation

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad (4.4)$$

erfüllt. Für die Komponenten der Operatoren \vec{L} und \vec{S} gelten dagegen die Kommutatorrelationen

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}(L_k - n_k(\vec{n}\vec{S})) \quad (4.5)$$

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}(S_k - n_k(\vec{n}\vec{S})) \quad (4.6)$$

Der Fermionzahloperator $N = \vec{\Psi}^\dagger \vec{\Psi}$ erfüllt die Vertauschungsrelationen

$$[N, \Psi_j] = -\Psi_j \quad [N, \Psi_j^\dagger] = \Psi_j^\dagger \quad (4.7)$$

4. Das supersymmetrische $O(3)$ -Modell

Die Operatoren Ψ_i^\dagger spannen also durch Anwendung auf ein Vakuum $|0\rangle$ mit Fermionzahl 0 einen Fockraum auf, dessen Sektoren sich durch die Fermionzahl unterscheiden. Durch die Tatsache, dass $(\Psi_i^\dagger)^2 = 0$ gilt, ist klar, dass der Fermionzahloperator N nur ganzzahlige Eigenwerte zwischen 0 und 3 besitzen kann. Später wird gezeigt, dass auf physikalischen Zuständen nur die Eigenwerte 0, 1 und 2 angenommen werden.

Naiv lässt sich zunächst ein allgemeiner Zustand des Fockraums in der Ortsdarstellung in der Form

$$|\Phi\rangle = a|0\rangle + b_i\Psi_i^\dagger|0\rangle + c_i\tilde{\Psi}_i^\dagger|0\rangle + d\Psi_{123}^\dagger|0\rangle \quad (4.8)$$

schreiben, wobei a, b_i, c_i, d beliebige Funktionen von \vec{n} sind und

$$\tilde{\Psi}_i^\dagger = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Psi_j^\dagger\Psi_k^\dagger \quad \Psi_{123}^\dagger = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\Psi_i^\dagger\Psi_j^\dagger\Psi_k^\dagger = \Psi_1^\dagger\Psi_2^\dagger\Psi_3^\dagger \quad (4.9)$$

Da der Dirac-Formalismus sicherstellt, dass die *second class constraints* bei der Quantisierung in komplexe Zahlen überführt werden, gelten die Nebenbedingungen $\vec{n}\vec{\Psi} = 0$ bzw. $\vec{n}\vec{\Psi}^\dagger = 0$ als Operator-Identitäten. Daraus folgt, dass nur zwei der drei Komponenten von $\vec{\Psi}$ linear unabhängig sind, wodurch Ψ_{123}^\dagger identisch null ist.

Aus der linearen Abhängigkeit der Ψ_i^\dagger folgt auch für den dritten Term eine Einschränkung: Es gilt

$$\frac{1}{2}c_i\varepsilon_{ijk}\Psi_j^\dagger\Psi_k^\dagger = \frac{(\vec{n}\cdot\vec{c})}{n_a}\Psi_b^\dagger\Psi_c^\dagger \quad \text{mit } (abc) = (123) \text{ und zyklisch} \quad (4.10)$$

sofern $n_a \neq 0$ (dies ist aber mindestens für ein a der Fall). Somit ist nur der zu \vec{n} parallele Anteil von \vec{c} von Belang und es darf die Ersetzung $\vec{c} \rightarrow f_2\vec{n}$ gemacht werden.

Ein allgemeiner Zustand im Fockraum lässt sich aufgrund dieser Überlegungen also auf die Form

$$|\Phi\rangle = f_0|0\rangle + f_{1i}\Psi_i^\dagger|0\rangle + f_2n_i\tilde{\Psi}_i^\dagger|0\rangle \quad (4.11)$$

bringen.

Die klassische Nebenbedingung Φ_6 führt bei der Quantisierung nach Gleichung (3.36) im Spezialfall des $O(3)$ -Modells zu den weiteren Operatoridentitäten

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \vec{n}\vec{p} + \vec{p}\vec{n} \\ 2i = \vec{n}\vec{p} - \vec{p}\vec{n} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}\vec{p} = i \\ \vec{p}\vec{n} = -i \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Da in der Ortsdarstellung die Koeffizientenfunktionen nur von \vec{n} abhängen und diese Nebenbedingung als *secondary constraint* auftritt, um die Bedingung $\vec{n}^2 = 1$ in der Zeitentwicklung aufrechtzuerhalten, führt sie zu keiner Einschränkung der Koeffizientenfunktionen.

Die Bedingung $\vec{n}^2 = 1$ selbst soll dadurch auf den allgemeinen Zuständen des Fockraums implementiert werden, dass die Koeffizientenfunktionen nur vom Raumwinkel abhängen dürfen. Zusammengefasst lässt sich also ein Zustand, der sämtlichen Constraints genügt, folgendermaßen darstellen:

$$|\Phi\rangle = f_0|0\rangle + \vec{f}_1\vec{\Psi}^\dagger|0\rangle + f_2\vec{n}\vec{\Psi}^\dagger|0\rangle \quad f_0, f_2, f_{1i} \in L^2(\Omega) \quad (4.13)$$

Betrachtet man die einzelnen Summanden, so stellt man fest, dass diese den Sektoren mit den Fermionzahlen 0, 1 und 2 entsprechen. Insgesamt entspricht die Dimension des Fockraums

4.2. Aussagen über das Spektrum des Hamiltonoperators

nach Implementierung der Constraints genau derjenigen, die man für ein supersymmetrisches Teilchen in zwei Dimensionen erwartet: Man erhält jeweils einen eindimensionalen Sektor für bosonische und 2-Fermion-Zustände und der Sektor für die 1-Fermion-Zustände ist (aufgrund der linearen Abhängigkeit der Komponenten von $\vec{\Psi}$) zweidimensional, wobei die Koeffizientenfunktionen nur noch von zwei unabhängigen bosonischen Koordinaten abhängen. Die Implementierung der Constraints auf den 3D-Koordinaten liefert also einen Fockraum mit der selben Anzahl an Freiheitsgraden, wie derjenige, der aus angepassten, unbeschränkten Koordinaten entsteht. Es lässt sich eine eindeutige Zuordnung finden, die die beiden Fockräume ineinander überführt, wie in Abschnitt 4.3 gezeigt wird.

4.2. Aussagen über das Spektrum des Hamiltonoperators

In diesem Abschnitt soll explizit gezeigt werden, dass der Hamiltonoperator des Systems in jedem Sektor die gleichen, nicht negativen Eigenwerte besitzt, was eine Folge aus Supersymmetrie des Modells ist, und dass die Eigenwerte im 1-Fermion-Sektor eine doppelt so große Entartung aufweisen, wie die entsprechenden Eigenwerte im bosonischen und 2-Fermion-Sektor.

Da der Operator \vec{J} einer Drehimpulsalgebra genügt ($[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$) lassen sich in der üblichen Art und Weise Leiteroperatoren $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ definieren, die die folgenden Kommutatoren mit J_3 haben:

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (4.14)$$

\vec{J}^2 ist ein skalarer Operator (d.h. er vertauscht mit allen Komponenten von \vec{J}) und kommutiert daher auch mit den Leiteroperatoren. Die notwendigerweise positiven Eigenwerte von \vec{J}^2 ($\langle \vec{J}^2 \rangle_{\Psi} = \sum_i \|J_i|\Psi\rangle\|^2$) lassen sich in der Form $j(j+1)$ schreiben, wobei sich zeigen lässt, dass die Eigenwerte von J_3 für jeden Eigenwert von \vec{J}^2 eine Leiter mit ganzzahligen Abständen zwischen $-j$ und j bilden, so dass j nur ganz oder halb ganz sein kann.

Da die Vektoren \vec{n} , $\vec{\Psi}$ und $\vec{\Psi}^\dagger$ Vektoroperatoren bzgl. \vec{J} sind, also die Kommutatoren

$$[J_i, n_j] = i\varepsilon_{ijk}n_k \quad [J_i, \Psi_j] = i\varepsilon_{ijk}\Psi_k \quad [J_i, \Psi_j^\dagger] = i\varepsilon_{ijk}\Psi_k^\dagger \quad (4.15)$$

mit \vec{J} erfüllen, ist $N = \vec{\Psi}^\dagger \vec{\Psi}$ ein skalarer Operator, der mit \vec{J}^2 vertauscht. Aufgrund dieser Überlegungen ist also klar, dass sich der Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2}\vec{J}^2$ in jedem Sektor einzeln diagonalisieren lässt, wobei nur Eigenwerte der Form $\frac{1}{2}j(j+1)$ mit j (halb-)ganz auftreten können. Nicht offensichtlich ist indes, welche konkreten Werte j annimmt und ob diese Werte in jedem Sektor die gleichen sind. Daher soll nun verglichen werden, wie der Hamiltonoperator in den einzelnen Sektoren wirkt.

Im bosonischen Sektor wirkt H trivialerweise direkt auf die Wellenfunktion $f_0|0\rangle$ und der Anteil $\sim N(2-N)$ des Hamiltonians verschwindet.

Im 2-Fermion-Sektor steht ein Spatprodukt aus drei Vektoroperatoren $\vec{n} \cdot (\vec{\Psi}^\dagger \wedge \vec{\Psi}^\dagger)$, das einen skalaren Operator bezüglich $H = \frac{1}{2}\vec{J}^2$ bildet. Daher gilt

$$H f_2 \frac{1}{2} \vec{n} \cdot (\vec{\Psi}^\dagger \wedge \vec{\Psi}^\dagger) |0\rangle = \frac{1}{2} \vec{n} \cdot (\vec{\Psi}^\dagger \wedge \vec{\Psi}^\dagger) H f_2 |0\rangle, \quad (4.16)$$

4. Das supersymmetrische $O(3)$ -Modell

so dass H wiederum direkt auf die Wellenfunktion wirkt.

Man sieht also, dass der Hamiltonoperator in den beiden Sektoren identisch wirkt und daher nicht nur die gleichen Eigenwerte, sondern auch die gleichen Eigenfunktionen für f_0 und f_2 besitzt.

Nun ist aufgrund der Konstruktion des Hamiltonoperators als Antikommutator der Superladungen klar, dass dieser mit Q und Q^\dagger vertauscht, und daher für jeden Zustand im bosonischen bzw. im 2-Fermion-Sektor durch Anwendung von Q^\dagger bzw. Q ein Zustand mit derselben Energie im 1-Fermion-Sektor entsteht ($[N, Q] = -Q$, $[N, Q^\dagger] = Q^\dagger$). Diese sollen nun explizit konstruiert werden.

Für die beiden Zustände, die durch Anwendung der Superladungen entstehen, erhält man, sofern sie nicht vernichtet werden und damit Grundzustände des Systems bilden, die Gleichungen:

$$Q^\dagger(f_0|0\rangle) = \vec{\Psi}^\dagger \vec{p}(f_0|0\rangle) \quad \Longrightarrow \quad f_{1i}|0\rangle = p_i f_0|0\rangle \quad (4.17)$$

$$Q\left(f_2 \frac{1}{2} \vec{n} \cdot (\vec{\Psi}^\dagger \wedge \vec{\Psi}^\dagger)|0\rangle\right) = \vec{\Psi}^\dagger \vec{L} f_2|0\rangle = \vec{\Psi}^\dagger \vec{J} f_2|0\rangle \quad \Longrightarrow \quad f_{1i}|0\rangle = L_i f_2|0\rangle \quad (4.18)$$

Man erkennt, dass die entstehenden Zustände der Form der 1-Fermion-Zustände in der allgemeinen Entwicklung entsprechen und die entsprechenden Wellenfunktionen im 1-Fermion-Sektor sind abzulesen. Für gleiche Funktionen $f_0 = f_2$ sind die beiden entstehenden 1-Fermion-Zustände orthogonal zueinander (da $\vec{p} \perp \vec{L}$), so dass die Gesamtheit dieser Zustände den zweidimensionalen 1-Fermion-Sektor aufspannt.

Untersucht man, wie der Hamiltonian auf die so konstruierten Zustände im 1-Fermion-Sektor wirkt, so sind die Kommutatoren

$$[H, \Psi_i^\dagger p_i] = [H, Q^\dagger] = 0 \quad \text{und} \quad [H, \Psi_i^\dagger J_i] = 0 \quad (4.19)$$

zu bestimmen. Man erhält daher in der Übersicht

$$\begin{aligned} H(f_0|0\rangle) &= H(f_0|0\rangle) \\ HQ^\dagger f_0|0\rangle &= H\Psi_i^\dagger p_i(f_0|0\rangle) = \Psi_i^\dagger p_i(Hf_0|0\rangle) \\ HQ f_2 \vec{n} \vec{\Psi}^\dagger|0\rangle &= H\Psi_i^\dagger J_i(f_2|0\rangle) = \Psi_i^\dagger J_i(Hf_2|0\rangle) \\ H(f_2 \vec{n} \vec{\Psi}^\dagger|0\rangle) &= \vec{n} \vec{\Psi}^\dagger H(f_2|0\rangle). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Die durch Anwendung der Superladungen entstandenen Zustände sind also wie erwartet Eigenzustände des Hamiltonians im 1-Fermion-Sektor, und es wird explizit deutlich, dass in jedem Sektor die gleichen Eigenwerte angenommen werden, da die Anwendung des Hamiltonians in den verschiedenen Sektoren in jedem Fall auf die Form $Hf_i|0\rangle$ zurückzuführen ist. Außerdem ist die Entartung der Eigenwerte im 1-Fermion-Sektor doppelt so groß wie im bosonischen bzw. 2-Fermion-Sektor, da die beiden betrachteten Zustände für gleiche Funktionen $f_0 = f_2$ linear unabhängig (sogar orthogonal) sind. Welche der möglichen Werte für j allerdings angenommen werden, lässt sich nicht allein aus den Kommutationseigenschaften von \vec{J} ableiten. Dies war auch nicht zu erwarten, da es unendlich viele Darstellungen der Drehimpulsalgebra gibt, die in keinerlei Beziehung zu dem betrachteten $O(3)$ -Modell und damit der Algebra (3.23) stehen. Um die Energieeigenwerte des Modells zu berechnen, muss eine Darstellung der Algebra (3.23) gefunden und in dieser Darstellung der Hamiltonian diagonalisiert werden. Dies ist Inhalt des nächsten Abschnitts.

4.3. Darstellung der Dirac-Algebra und Lösung des Modells

Es erweist sich, dass die Dirac-Algebra (3.23) wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin \theta \cos \varphi & \Psi_1 &= \cos \theta \cos \varphi c_\theta - \sin \varphi c_\varphi \\ n_2 &= \sin \theta \sin \varphi & \Psi_2 &= \cos \theta \sin \varphi c_\theta + \cos \varphi c_\varphi \\ n_3 &= \cos \theta & \Psi_3 &= -\sin \theta c_\theta \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos \varphi \cos \theta R_\theta + \frac{i}{2} \sin \theta \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} R_\varphi + \frac{i}{2} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} + i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \varphi (c_\varphi^\dagger c_\theta - c_\theta^\dagger c_\varphi) \\ p_2 &= \sin \varphi \cos \theta R_\theta + \frac{i}{2} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} R_\varphi + \frac{i}{2} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} - i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi (c_\varphi^\dagger c_\theta - c_\theta^\dagger c_\varphi) \\ p_3 &= -\sin \theta R_\theta + \frac{i}{2} \cos \theta \end{aligned} \quad (4.22)$$

Führt man die Indexschreibweise

$$\alpha_m = (\theta, \varphi), \quad R_m = (R_\theta, R_\varphi), \quad c_m^{(\dagger)} = (c_\theta^{(\dagger)}, c_\varphi^{(\dagger)}) \quad (4.23)$$

ein, so erfüllen die neuen Variablen die einfachen Kommutatorrelationen

$$[\alpha_m, R_n] = i\delta_{mn} \quad \{c_m, c_n^\dagger\} = \delta_{mn} \quad (4.24)$$

und alle anderen Kommutatoren verschwinden. Dadurch können die c_m 's durch Linearkombinationen vierdimensionaler euklidischer γ -Matrizen (mit $\{\gamma_m, \gamma_n\} = 2i\delta_{mn}$) dargestellt werden

$$c_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1 + i\gamma_2) \quad c_\theta^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1 - i\gamma_2) \quad c_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_3 + i\gamma_4) \quad c_\varphi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_3 - i\gamma_4) \quad (4.25)$$

und die R_m 's als Ableitungen, die allerdings um hermitesch zu sein durch

$$R_m = -ig^{-1/4} \partial_m g^{1/4} \implies R_\theta = -i\partial_\theta - \frac{i \cos \theta}{2 \sin \theta}, \quad R_\varphi = -i\partial_\varphi \quad (4.26)$$

mit $g = \sin^2 \theta$ dargestellt werden.

Geometrisch anschaulicher werden die oben aufgeführten Transformationen, wenn man sie in der folgenden Form schreibt:

$$\vec{n} = \vec{e}_r \quad \vec{\Psi} = c_\theta \vec{e}_\theta + c_\varphi \vec{e}_\varphi \quad \vec{p} = \vec{e}_\theta \partial_\theta + i\vec{e}_r + \frac{1}{\sin \theta} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi + i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \vec{e}_\varphi (\vec{e}_r \cdot (\vec{e}_\theta^\dagger \wedge \vec{e}_\varphi)) \quad (4.27)$$

wobei $\vec{e} = c_\theta \vec{e}_\theta + c_\varphi \vec{e}_\varphi$. Nun ist direkt ersichtlich, dass $\vec{\Psi}$ senkrecht auf \vec{n} steht und \vec{p} dem herkömmlichen Impulsoperator gleicht, dessen Radialanteil ∂_r gestrichen wurde und der einen fermionischen Zusatzterm enthält. Um die Hermitizität bezüglich des eingeschränkten Maßes zu gewährleisten, ergibt sich noch der zusätzliche Term $i\vec{e}_r$.

Diese Darstellung wurde gefunden, indem das Problem in Kugelkoordinaten reformuliert und nach der Quantisierung in die Variablen transformiert wurde, in der die Kommutatorrelationen die einfachste Form annehmen (vgl. [11]).

In diesen neuen Variablen sind alle Constraints identisch erfüllt und ein allgemeiner Zustand läßt sich ausdrücken als

$$|\Phi\rangle_2 = g_0 |0\rangle_2 + g_{1\theta} c_\theta^\dagger |0\rangle_2 + g_{1\varphi} c_\varphi^\dagger |0\rangle_2 + g_2 c_\theta^\dagger c_\varphi^\dagger |0\rangle_2, \quad (4.28)$$

4. Das supersymmetrische $O(3)$ -Modell

da sich der Fermionzahloperator zu $N = \vec{\Psi}^\dagger \vec{\Psi} = c_i^\dagger c_i$ übersetzt. Wenn man $|0\rangle_2$ mit $|0\rangle$ (dem Vakuum im Abschnitt (4.2)) identifiziert, dann liefert die Koordinatentransformation eine Identifikation der beiden Fockräume, in der gilt

$$g_0 = f_0 \quad g_{1\theta} = f_{1m} v_m \quad g_{1\varphi} = f_{1m} u_m \quad g_2 = f_2, \quad (4.29)$$

wenn man die Vektoren

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}}(-n_2, n_1, 0) = \vec{e}_\varphi \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}}(n_1 n_3, n_2 n_3, n_3^2 - 1) = \vec{e}_\theta \quad (4.30)$$

in dieser Weise festlegt.

Zur Berechnung des Hamiltonians sind zunächst die Superladungen zu transformieren. Sie ergeben sich zu

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}(\vec{p}\vec{\Psi} + \vec{\Psi}\vec{p}) = R_\theta c_\theta + \frac{1}{\sin\theta} R_\varphi c_\varphi + i \frac{\cos\theta}{\sin\theta} (c_\varphi^\dagger c_\varphi c_\theta - \frac{1}{2} c_\theta) \\ Q^\dagger &= \frac{1}{2}(\vec{p}\vec{\Psi}^\dagger + \vec{\Psi}^\dagger\vec{p}) = R_\theta c_\theta^\dagger + \frac{1}{\sin\theta} R_\varphi c_\varphi^\dagger - i \frac{\cos\theta}{\sin\theta} (c_\varphi^\dagger c_\varphi c_\theta^\dagger - \frac{1}{2} c_\theta^\dagger) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Als Antikommutator der Superladungen erhält man den Hamiltonian zu

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\{Q, Q^\dagger\} \\ &= \frac{1}{2} \left(R_\theta^2 - \frac{1}{2\sin^2\theta} + \frac{1}{4\sin^2\theta} \cos^2\theta + \frac{1}{\sin^2\theta} R_\varphi^2 - 2i \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} R_\varphi (c_\varphi^\dagger c_\theta - c_\theta^\dagger c_\varphi) + \frac{1}{\sin^2\theta} N(2-N) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta) - \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\varphi^2 - 2 \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \partial_\varphi (c_\varphi^\dagger c_\theta - c_\theta^\dagger c_\varphi) + \frac{1}{\sin^2\theta} N(2-N) \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Hierbei fällt auf, dass die ersten beiden Terme des Hamiltonians genau dem gewöhnlichen Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten entsprechen und die beiden hinteren Terme bei Anwendung auf $f_i|0\rangle$ identisch null sind. Das bedeutet aber, dass die Eigenwerte des Hamiltonians gleich $\frac{1}{2}j(j+1)$ sind, wobei j die natürlichen Zahlen durchläuft, da die gesuchten Eigenfunktionen f_0 und f_2 die Kugelflächenfunktionen sind. In der Übersicht ergeben sich also die gesuchten Eigenzustände für die verschiedenen Sektoren mit ihren Eigenwerten und Entartungen zu:

	Eigenzustand	Eigenwert	Entartung	$j \in$
bosonischer Sektor	$Y_{jm} 0\rangle$	$j(j+1)/2$	$2j+1$	\mathbb{N}_0
1-Fermion-Sektor	$(\vec{p}Y_{jm})\vec{\Psi}^\dagger 0\rangle$	$j(j+1)/2$	$2j+1$	\mathbb{N}^*
1-Fermion-Sektor	$((\vec{n} \wedge \vec{p})Y_{jm})\vec{\Psi}^\dagger 0\rangle$	$j(j+1)/2$	$2j+1$	\mathbb{N}^*
2-Fermion-Sektor	$Y_{jm}\vec{n}\vec{\Psi}^\dagger 0\rangle$	$j(j+1)/2$	$2j+1$	\mathbb{N}_0

Die Konstruktion der 1-Fermion-Zustände bedingt eine Besonderheit für die Grundzustände in den einzelnen Sektoren: Die Anwendung der Superladungen Q^\dagger bzw. Q auf die Grundzustände im bosonischen bzw. 2-Fermion-Sektor vernichtet diese, so dass keine 1-Fermion-Zustände mit Energie 0 existieren. Die gesamte Entartung der Eigenwerte ist also:

$$\begin{aligned} &2 && \text{für } j = 0 \\ &4 \cdot (2j + 1) && \text{für } j > 0, j \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.33)$$

4.3. Darstellung der Dirac-Algebra und Lösung des Modells

Aus der Äquivalenz der beiden Fockräume, die aus den Gleichungen (4.28) bis (4.30) hervorgeht, lässt sich auch eine Basis des zweidimensionalen 1-Fermion-Sektors angeben, in der der Hamiltonian diagonal ist.

Im Fockraum mit den zwei Leiteroperatoren c_θ, c_φ ergeben sich die unabhängigen 1-Fermion-Zustände, die durch Anwendung der Superladung konstruiert werden, zu:

$$Q^\dagger Y_{jm}|0\rangle = -i(\partial_\theta Y_{jm})c_\theta^\dagger|0\rangle - \frac{i}{\sin\theta}(\partial_\varphi Y_{jm})c_\varphi^\dagger|0\rangle \quad (4.34)$$

$$QY_{jm}c_\theta^\dagger c_\varphi^\dagger|0\rangle = \frac{i}{\sin\theta}(\partial_\varphi Y_{jm})c_\theta^\dagger|0\rangle - i(\partial_\theta Y_{jm})c_\varphi^\dagger|0\rangle \quad (4.35)$$

Nun ist es leicht ersichtlich, dass in der angepassten Basis

$$c_1^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_\theta^\dagger - ic_\varphi^\dagger)|0\rangle \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{v} - i\vec{u})\vec{\Psi}^\dagger|0\rangle : \quad g_1' = \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{jm} + \partial_\theta Y_{jm} \quad (4.36)$$

$$c_2^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_\theta^\dagger + ic_\varphi^\dagger)|0\rangle \hat{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{v} + i\vec{u})\vec{\Psi}^\dagger|0\rangle : \quad g_2' = \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{jm} - \partial_\theta Y_{jm} \quad (4.37)$$

der Hamiltonoperator diagonal ist und die Eigenfunktionen bzgl. dieser Basis die angegebene Form annehmen. Explizit lässt sich der Hamiltonian in dieser Basis als die Diagonalmatrix

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) - \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 \right) \cdot \mathbb{1}_4 + i \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sin^2\theta} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Unter Ausnutzung der expliziten Form der Kugelflächenfunktionen lassen sich die Ausdrücke der Wellenfunktionen noch weiter vereinfachen zu:

$$g_1' = -m \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) Y_{jm} + \sqrt{(j+m+1)(j-m)} e^{-i\varphi} Y_{jm+1} \quad (4.38)$$

$$g_2' = -m \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) Y_{jm} - \sqrt{(j+m+1)(j-m)} e^{-i\varphi} Y_{jm+1} \quad (4.39)$$

Der Absolutbetrag der Wellenfunktionen g_1' ist in Abbildung 4.1 dargestellt. In der Darstellung ist für $j = 1, 2, 3$ in Kugelkoordinaten der Betrag der Wellenfunktion als Abstand zum Ursprung aufgetragen. Für die anderen Eigenfunktionen g_2' ergibt sich ein identisches Bild, wenn man m durch $-m$ ersetzt. Außerdem entspricht der Übergang $m \rightarrow -m$ einer Spiegelung an der x - y -Ebene (d.h. einem Übergang $\theta \rightarrow \pi - \theta$). Diese Eigenschaften des Betrags der Wellenfunktionen lassen sich weniger leicht aus ihrer expliziten Darstellung, als aus der definierenden Gleichung (4.36) und (4.37) herleiten:

Sei $D_+ = \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi + \partial_\theta$ und $D_- = \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi - \partial_\theta$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} g_1'(m) &= (D_+ Y_{jm}) = (-1)^m D_-^* Y_{j-m}^* = (-1)^m g_2'^*(-m) \\ &\implies |g_1'(m)| = |g_2'(-m)|. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die zweite Behauptung lässt sich ebenfalls einfach beweisen, wenn man vorher feststellt, dass unter $m \rightarrow -m$ und $\theta \rightarrow \pi - \theta$ gilt

$$D_+(\theta) \rightarrow D_+(\pi - \theta) = D_-(\theta) \quad Y_{jm}(\theta) \rightarrow Y_{j-m}(\pi - \theta) = (-1)^j Y_{jm}^*(\theta) \quad (4.41)$$

4. Das supersymmetrische $O(3)$ -Modell

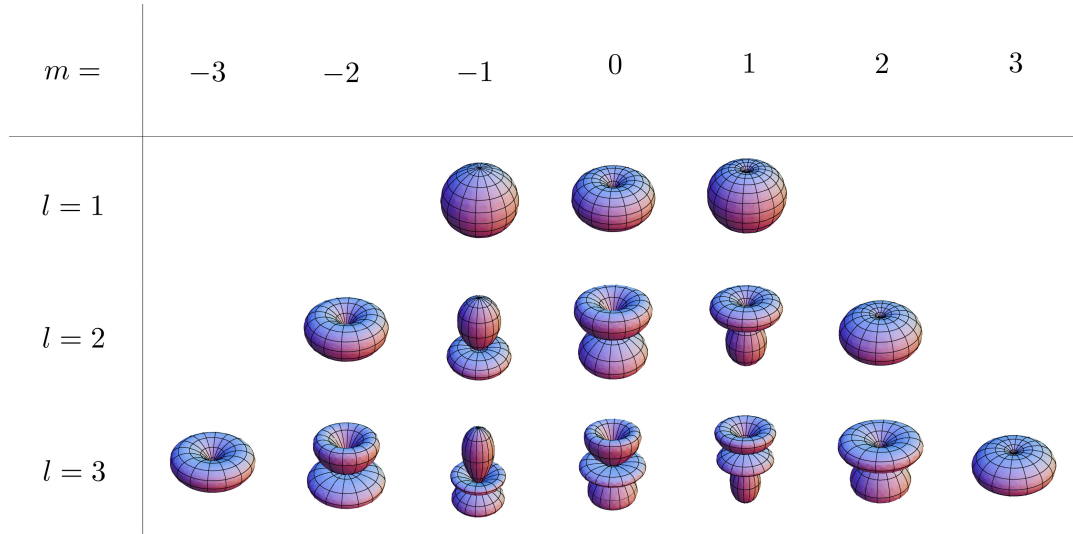


Abbildung 4.1.: Absolutbetrag der fermionischen Eigenfunktionen g'_1 für $j = 1, 2, 3$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
 g'_1(-m, \pi - \theta) &= (-1)^j D_- Y_{jm}^* = (-1)^{j+1} D_+ Y_{jm}^* = (-1)^{j+1} g_1^*(m, \theta) \\
 &\implies |g'_1(-m, \pi - \theta)| = |g_1^*(m, \theta)|.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Die gleichen Beziehungen findet man analog für g'_2 , womit die Behauptung gezeigt ist.

5. Algebraische Lösung der Modelle

Nachdem im vorherigen Kapitel das $O(3)$ -Modell explizit gelöst wurde, soll in diesem Kapitel eine Lösung der $O(n)$ - und \mathbb{CP}^{n-1} -Modelle für beliebiges natürliches n entwickelt werden. Die hierfür verwendete, algebraische Methode nutzt die $SO(n)$ -Symmetrie des $O(n)$ -Modells bzw. die $SU(n)$ -Symmetrie des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells aus, weshalb zunächst einige Grundlagen der Gruppentheorie anhand dieser Gruppen erläutert werden sollen.

5.1. Grundlegendes zur Gruppentheorie der $SO(n)$ und $SU(n)$

5.1.1. Allgemeine Definitionen

Eine **Lie-Gruppe** ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G , auf der zusätzlich eine differenzierbare Multiplikation

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2 \quad (5.1)$$

definiert ist, die die Gruppeneigenschaften erfüllt (Assoziativität, Existenz eines Einselements, Existenz eines inversen Elements zu jedem Gruppenelement).

Diese Struktur ermöglicht die Definition einer weiteren Abbildung der Gruppe auf sich selbst, die sogenannte **Linkstranslation**

$$L_{g_1} : G \rightarrow G, \quad L_{g_1}(g_2) = g_1 g_2. \quad (5.2)$$

Da die Lie-Gruppe eine differenzierbare Mannigfaltigkeit darstellt, existiert an jedem Punkt $g_1 \in G$ ein Tangentialraum T_{g_1} , der durch n Basisvektorfelder ($n = \dim G$)¹ aufgespannt wird. Die Linkstranslation der Gruppe induziert eine Abbildung $L_{g_1}^*$ der Tangentialräume aufeinander, mit $L_{g_1}^* : T_{g_2} \rightarrow T_{g_1 g_2}$.

Ein Vektorfeld auf der Gruppe heißt **linksinvariant** wenn gilt

$$L_{g_1}^*(X_{g_2}) = X_{g_1 g_2}. \quad (5.3)$$

Die Menge aller linksinvarianten Vektorfelder auf der Gruppe ist isomorph zum Tangentialraum am Einselement, da die Abbildung $L_{g_1}^*$ die Vektorfelder in allen Tangentialräumen eindeutig festlegt, und hat die mathematische Struktur einer Lie-Algebra. Man spricht von der zur Lie-Gruppe G gehörigen **Lie-Algebra** g .

Eine Lie-Algebra ist ein Vektorraum g über einem Körper K , auf dem eine Verknüpfung, die sogenannte Lie-Klammer,

$$[\cdot, \cdot] : g \times g \rightarrow g, \quad (x, y) \rightarrow [x, y] \quad (5.4)$$

gegeben ist, die die folgenden definierenden Eigenschaften erfüllt ($x, y, z \in g$, $a, b \in K$) :

¹In dieser Arbeit sollen nur endlichdimensionale Lie-Gruppen betrachtet werden.

5. Algebraische Lösung der Modelle

- $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ und $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$ (Bilinearität)
- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jacobi-Identität)
- $[x, x] = 0$

Die erste und dritte Eigenschaft liefern zusammen die Antisymmetrie der Lie-Klammer. Die zur Lie-Gruppe G gehörige Lie-Algebra g hat die gleiche Dimension wie die Mannigfaltigkeit G . Die Elemente eines Satzes von Basisvektoren des Tangentialraums $T_e G = g$ heißen **Generatoren** der Lie-Gruppe.

5.1.2. Struktur der Lie-Algebren und ihrer Darstellungen

Im Folgenden wird die mathematische Struktur der Lie-Algebren $so(n)$ und $su(n)$ und ihrer Darstellungen von besonderem Interesse sein. Deshalb ist es sinnvoll, einige Begriffe einzuführen, die helfen diese Struktur zu beschreiben.²

Eine (lineare) **Darstellung** ρ einer Lie-Algebra auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung, die jedem Algebraelement eine lineare, invertierbare Abbildung des Vektorraums auf sich selbst zuordnet und dabei mit der Lie-Klammer verträglich ist, also

$$\rho : g \rightarrow L(V) \quad \text{mit} \quad \rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)], \quad (5.5)$$

wobei die Klammer auf der rechten Seite den Kommutator der Abbildungen $\rho(x)$ und $\rho(y)$ bezeichnet. Die Dimension der Darstellung ist durch die Dimension des Raums V gegeben. Ebenso lässt sich eine Darstellung der Gruppe definieren:

$$\tilde{\rho} : G \rightarrow L(V), \quad g \rightarrow \tilde{\rho}(g) \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho}(e) = \mathbb{1}, \quad \tilde{\rho}(g)\tilde{\rho}(h) = \tilde{\rho}(gh). \quad (5.6)$$

Zu jeder Darstellung der Gruppe lässt sich eine (gleichdimensionale) Darstellung der Algebra finden, die durch eine (für $SU(n)$ und $SO(n)$ auch surjektive) Exponentialabbildung miteinander verknüpft sind:

$$\exp : \rho(g) \rightarrow \tilde{\rho}(G), \quad x \rightarrow \exp(x) \quad (5.7)$$

Eine wichtige Eigenschaft von Darstellungen ist die Reduzibilität: Eine Darstellung heißt **irreduzibel**, wenn sie keinen echten Unterraum von V invariant lässt. Für die betrachteten Gruppen sind alle Darstellungen vollreduzibel. Das heißt, dass sich jede reduzible Darstellung als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen schreiben lässt.

Unter den Generatoren einer Lie-Gruppe lässt sich immer ein maximaler Satz von Generatoren finden, deren Lie-Klammer untereinander verschwindet. Ein solcher Satz bildet die sogenannte **Cartan-Unteralgebra** H (kurz: CSA, für engl. *Cartan subalgebra*) der Lie-Algebra und ist bis auf die Wahl einer Basis eindeutig bestimmt. Die Dimension von H heißt Rang der Algebra und eine Basis der CSA soll mit h_i bezeichnet werden. Die übrigen Generatoren lassen sich immer so kombinieren, dass sie Eigenvektoren bezüglich der Lie-Klammer mit einem beliebigen CSA-Element sind, und heißen dann Wurzelvektoren e_α , also:

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha \quad (5.8)$$

²Dieses Kapitel richtet sich in Inhalt und Bezeichnungen weitgehend nach dem Buch von Robert Cahn [5].

5.1. Grundlegendes zur Gruppentheorie der $SO(n)$ und $SU(n)$

Eine Basis der Algebra bestehend aus CSA-Elementen h_i und Wurzelvektoren e_α , die die Relation (5.8) erfüllt, heißt Cartan-Weyl-Basis der Algebra.

Die Zuordnungen α sind lineare Funktionale auf der CSA, spannen den zu H dualen Vektorraum H^* auf und heißen **Wurzeln** der Algebra. Sie bilden das sogenannte Wurzelsystem der Algebra, dessen Eigenschaften sich mit Hilfe der Jacobi-Identität beweisen lassen. Insbesondere gelten die beiden Aussagen:

- Wenn α eine Wurzel ist, ist $-\alpha$ ebenfalls eine Wurzel. Darüber hinaus existieren keine weiteren zu α linear abhängigen Wurzeln.
- Für zwei linear unabhängige Wurzeln ist deren Summe stets auch eine Wurzel.

Auf dem Raum H^* lässt sich ein Skalarprodukt definieren, das sich aus den zu den Wurzeln dualen CSA-Elementen wie folgt berechnet (Σ sei ein Satz aller Wurzeln):

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle := \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha(h_{\alpha_1})\alpha(h_{\alpha_2}) \quad (5.9)$$

Geht man zu Darstellungen der Algebra über (die jeweiligen Größen in der Darstellung sollen mit Großbuchstaben bezeichnet werden), so kann immer eine Basis gewählt werden, in der die Elemente der CSA diagonal sind. Ein allgemeines Element $H = \sum_i c_i H_i$ wirkt daher auf die Basiselemente $\phi^a \in V$ des Vektorraums gemäß:

$$H\phi^a = \sum_i c_i H_i \phi^a = \left(\sum_i c_i \lambda_i^a \right) \phi^a = M^a(h)\phi^a \quad (5.10)$$

Die Funktionen $M^a(h)$ heißen **Gewichte** der Darstellung und sind analog zu den Wurzeln der Algebra Elemente des Dualraums H^* . Für eine spezielle Darstellung, die adjungierte Darstellung mit $\text{ad}: h \rightarrow [h, \cdot]$, sind die Gewichte der Darstellung gleich den Wurzeln der Algebra.

Die Darstellungseigenschaft überträgt die speziellen Kommutationsregeln (5.8) auf H und E_α , so dass man erhält:

$$HE_{\pm\alpha}\phi^a = ([H, E_{\pm\alpha}] + E_{\pm\alpha}H)\phi^a = (M^a(h) \pm \alpha(h))E_{\pm\alpha}\phi^a \quad (5.11)$$

Hieraus folgt, dass die Gewichte immer in Reihen auftreten, die sich um Wurzeln unterscheiden. Eine Reihe bricht ab, wenn eine abermalige Anwendung von E_α oder $E_{-\alpha}$ auf den Vektor verschwindet. Aufgrund dieser Eigenschaft heißen die $E_{\pm\alpha}$ auch Leiteroperatoren zur Wurzel α .

Eine spezielle Basis des Raums der reellen Linearkombinationen von Wurzeln H_0^* bilden die sogenannten **einfachen Wurzeln**. Um einfache Wurzeln zu definieren, benötigt man zunächst eine beliebige Basis von H_0^* , nach der jede Wurzel entwickelt werden kann. Eine Wurzel heißt nun positiv, wenn der erste von null verschiedene Entwicklungskoeffizient größer als null ist. Einfache Wurzeln sind positive Wurzeln, die nicht als Summe von anderen positiven Wurzeln geschrieben werden können. Mit Hilfe dieser einfachen Wurzeln α_i können nun alle anderen Wurzeln als ganzzahlige Linearkombinationen in einfachen Wurzeln ausgedrückt werden. Die Anzahl der einfachen Wurzeln ist natürlich gleich der Dimension

5. Algebraische Lösung der Modelle

von H_0^* und entspricht damit dem Rang der Algebra.

Mit Hilfe der einfachen Wurzeln lässt sich die sogenannte **Cartan-Matrix** einer Algebra definieren, die sämtliche Eigenschaften der einfachen Lie-Algebra beschreibt:

$$A_{ij} = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \quad (5.12)$$

Ebenso wie die Wurzeln lassen sich die Gewichte nach derselben beliebigen Basis von H_0^* ordnen und man kann auf diese Weise zu jeder Darstellung einen Vektor mit dem höchsten Gewicht Λ finden. Aus Gleichung (5.11) wird klar, dass dies der Vektor ist, auf dem alle zu den einfachen Wurzeln gehörenden Aufsteigeoperatoren E_{α_i} verschwinden. Ausgehend von diesem Höchstgewichtsvektor können alle Gewichtsvektoren der (irreduziblen, endlich-dimensionalen) Darstellung durch mehrfaches Absteigen bezüglich aller einfachen Wurzeln erhalten werden. Hierbei können mehrere Gewichtsvektoren mit dem gleichen Gewicht entstehen. Die Multiplizität eines Gewichts in einer Darstellung lässt sich mit der sogenannten Freudenthal-Formel berechnen, die hier nicht näher behandelt werden soll.

Damit ist es möglich, eine Darstellung eindeutig durch den ihr zugehörigen Höchstgewichtsvektor (bzw. das Höchstgewicht) zu definieren. Eine übliche Möglichkeit das Höchstgewicht zu charakterisieren, ist die Angabe von Dynkin-Koeffizienten Λ_i , die nicht-negative ganze Zahlen als Werte annehmen:

$$\Lambda_i = 2 \frac{\langle \Lambda, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \quad (5.13)$$

Entwickelt man das Höchstgewicht in einfachen Wurzeln $\Lambda = \sum_i \lambda_i \alpha_i$, erhält man folgenden Zusammenhang:

$$\Lambda_i = 2 \sum_k \lambda_k \frac{\langle \alpha_k, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \sum_k \lambda_k A_{ki} \quad (5.14)$$

Führt man weiterhin eine Matrix C_{ij} ein, die über $[H_i, E_{\alpha_j}] = \alpha_j(h_i)E_{\alpha_j} = C_{ij}E_{\alpha_j}$ die einfachen Wurzeln charakterisiert, und bezeichnet die Eigenwerte der H_i auf Höchstgewichtszuständen mit $w_i := \Lambda(h_i) = \sum_k C_{ik}\lambda_k$, so erhält man die folgende Beziehung

$$\Lambda_i = ((A^T)C^{-1}w)_i \quad (5.15)$$

zwischen den Dynkin-Koeffizienten und den Eigenwerten der Höchstgewichtszustände.

Da eine Darstellung durch ihr Höchstgewicht eindeutig charakterisiert ist, lässt sich auch die Dimension der Darstellung daraus berechnen. Dies leistet Weyls Dimensionsformel

$$\dim_{\Lambda} = \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \alpha, \Lambda + \delta \rangle}{\langle \alpha, \delta \rangle}, \quad (5.16)$$

wobei $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$ der sogenannte Weyl-Vektor ist. Diese abstrakte Formel lässt sich für konkrete Gruppen vereinfachen und liefert dann einen expliziten Zusammenhang zwischen Dynkin-Koeffizienten und Dimension der Darstellung.

5.1.3. Ausreduktion von Produktdarstellungen

Hat man zwei Darstellungen einer Lie-Algebra mit $\rho^1(x) = X^{(1)}$ und $\rho^2(x) = X^{(2)}$, so dass $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ lineare Operatoren auf den Vektorräumen V_1 und V_2 sind, die mit den Basen

5.1. Grundlegendes zur Gruppentheorie der $SO(n)$ und $SU(n)$

ϕ_i und η_j ausgestattet seien, so lässt sich stets auf dem Tensorprodukt der Vektorräume eine weitere Darstellung definieren durch:

$$X\phi_i \otimes \eta_j = \left(X^{(1)}\phi_i\right) \otimes \eta_j + \phi_i \otimes \left(X^{(2)}\eta_j\right) \quad (5.17)$$

Aus dieser Gleichung wird klar, dass in der Produktdarstellung alle Gewichte vorkommen, die sich als Summen der Gewichte der Faktoren schreiben lassen. Es ist daher verständlich, dass sich die Multiplizitäten der Gewichte in der Produktdarstellung nach der Formel

$$n_M = \sum_{M=M_1+M_2} n_{M_1} \cdot n_{M_2} \quad (5.18)$$

ergeben, wobei n_{M_1} und n_{M_2} die Multiplizitäten der Gewichte M_1 und M_2 bezeichnen. Insbesondere folgt daraus, dass sich das höchste Gewicht der Produktdarstellung als Summe der Höchstgewichte der beiden Darstellungen ergibt ($\Lambda = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)}$) und mit der Multiplizität eins auftritt. Dennoch lassen sich aus diesem Höchstgewicht nicht alle Gewichtsvektoren der Produktdarstellung erhalten, da die Produktdarstellung im Allgemeinen nicht irreduzibel ist. Für die betrachteten Lie-Algebren ist aber immer (wie bereits oben erwähnt) eine Zerlegung der Produktdarstellung in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen möglich.

Mit den bereits erklärten Begriffen lässt sich eine (wenn auch aufwendige) Methode angeben, mit der die Ausreduktion einer Produktdarstellung möglich ist:

Zunächst sind alle auftretenden Gewichte der Produktdarstellung mitsamt ihrer Multiplizität zu ermitteln. Dann werden ausgehend vom Höchstgewicht alle Gewichte dieser irreduziblen Darstellung berechnet und unter Berücksichtigung ihrer Multiplizitäten aus der Liste aller Gewichte gestrichen. Das höchste der übrigbleibenden Gewichte ist das Höchstgewicht einer weiteren irreduziblen Darstellung, die in der Summe auftritt. Diese Prozedur wird wiederholt, bis alle Gewichte aus der Liste gestrichen sind.

Eine andere Methode zur Ausreduktion bedient sich diagrammatischer Hilfsmittel, den sogenannten Young-Tableaux. Hierbei steht jedes Tableau für eine irreduzible Darstellung der jeweiligen Algebra und die Ausreduktion erfolgt nach speziellen Regeln, die von der betrachteten Algebra abhängen und auf Weyls Charakterformel zurückgehen. Eine praktische Anleitung dieser diagrammatischen Ausreduktion für alle klassischen Lie-Algebren findet sich in [18]. Hierauf wird im Folgenden Bezug genommen, wenn in den gruppenspezifischen Abschnitten die Ausreduktion mittels Young-Tableaux behandelt wird.

5.1.4. Spezifische Eigenschaften und Darstellungen der $su(n)$ -Algebra

Die Gruppe $SU(n)$ besteht aus den unitären $n \times n$ -Matrizen mit Determinante 1, die gleichzeitig die definierende Darstellung der Gruppe sind. Die Generatoren der Gruppe sind die antihermiteschen, spurlosen $n \times n$ -Matrizen, da diese durch Exponentiation auf Gruppenelemente abgebildet werden. Lässt man komplexe Kombinationen der Generatoren zu, so erhält man die komplexifizierte Version der $SU(n)$, die Gruppe A_{n-1} . Für diese lässt sich wie folgt die bereits erwähnte Cartan-Weyl-Basis aus Cartan-Generatoren und Leiteroperatoren finden.

Sei e_{ab} die $n \times n$ -Matrix, in der nur an der (a,b)-ten Position eine eins steht, also

$$(e_{ab})_{kl} = \delta_{ak}\delta_{bl} \quad (5.19)$$

5. Algebraische Lösung der Modelle

Dann bilden offenbar die spurlosen Diagonalmatrizen die Cartan-Unteralgebra. Als eine Basis der CSA seien die Matrizen h_i wie folgt gewählt:

$$h_i = e_{ii} - e_{i+1\ i+1}, \quad i = 1 \dots n - 1 \quad (5.20)$$

Die Algebra hat also den Rang $n - 1$. Als übrige Generatoren können die nicht-diagonalen Matrizen e_{ab} , $a \neq b$ dienen, die die Cartan-Weyl-Basis vervollständigen, da gilt

$$[h_i, e_{ab}] = (\delta_{ia} - \delta_{i+1\ a} - (\delta_{ib} - \delta_{i+1\ b}))e_{ab}. \quad (5.21)$$

Definiert man die e_{ab} mit $a < b$ als Aufsteiger, so ist e_{ba} der zugehörige Absteigeoperator, da der Eigenwert antisymmetrisch in a und b ist. Die zu den einfachen Wurzeln gehörenden Auf- und Absteiger sind die Matrizen $e_{i\ i+1}$ und $e_{i+1\ i}$. Für diese vereinfacht sich die Relation (5.21) zu

$$[h_i, e_{j\ j+1}] = (2\delta_{ij} - \delta_{j+1\ i} - \delta_{i+1\ j})e_{j\ j+1} = C_{ij}e_{j\ j+1} \quad (5.22)$$

und man erhält durch die spezielle Gestalt der Cartan-Matrix der $su(n)$, $A = A^T = C$, aus Gleichung (5.15), dass für diese Basis der CSA gilt:

$$\Lambda_i = w_i \quad (5.23)$$

Die für diese Arbeit wichtigen Darstellungen der $su(n)$ lassen sich aus dieser definierenden Darstellung leicht herleiten. Dazu ist folgende Beobachtung wichtig:

Seien g_k sämtliche obige Generatoren der $SU(n)$ in Matrixform. Falls die je n Operatoren P_i und Q_i die Vertauschungsrelationen $[P_i, Q_j] = \delta_{ij}$ und $[P_i, P_j] = 0 = [Q_i, Q_j]$ erfüllen, dann erfüllen die Operatoren

$$\sum_{ij} Q_i(g_k)_{ij} P_j \quad (5.24)$$

ebenfalls die $su(n)$ -Algebra, da die Kommutatorrelation auf die Vertauschungsrelation der Matrizen zurückführt (implizite Summation über Matrixindizes):

$$[Q_i(g_k)_{ij} P_j, Q_m(g_l)_{mn} P_n] = Q_i(g_k)_{ij} (g_l)_{jn} P_n - Q_m(g_l)_{mn} (g_k)_{jn} P_n = Q_i([g_k, g_l])_{ij} P_j \quad (5.25)$$

Genauso erhält man für Operatoren, die die Antikommutatorrelationen $\{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}$ erfüllen, eine Darstellung der Algebra.

Die für die Lösung der $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modelle benötigten Darstellungen ergeben sich, wenn man für die Operatoren Q_i, P_j komplexe bosonische Koordinaten $z_i, \bar{\partial}_j$ bzw. $\bar{z}_i, \bar{\partial}_j$ oder fermionische Größen $\chi_{\pm i}, \chi_{\pm j}^\dagger$ einsetzt. Diese Darstellungen wirken auf einen Fock-Raum und es wird die Aufgabe sein, zu untersuchen, wie dieser in irreduzible Darstellungen zerfällt.

Ausreduktion von Produktdarstellungen der $su(n)$ mittels Young-Tableaux

Ein Young-Tableau der $su(n)$ ist ein Diagramm, das aus Kästchen besteht. Es kann maximal $n - 1$ Zeilen haben und die Länge der Zeilen nimmt von oben nach unten ab ($l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n-1}$). Da es eine irreduzible Darstellung repräsentiert, sind die Zeilenlängen aus den Dynkin-Koeffizienten zu bestimmen. Im Fall der $su(n)$ gilt: $\Lambda_i = l_i - l_{i+1}$. Ein Young-Tableau der $su(5)$ mit Dynkin-Koeffizienten (2,0,1,0) hat demnach beispielsweise die Form:



5.1. Grundlegendes zur Gruppentheorie der $SO(n)$ und $SU(n)$

Die Ausreduktion eines Tensorprodukts zweier Darstellungen erfolgt bei der $su(n)$ nach folgenden Regeln:

Die Kästchen des zweiten Faktors werden mit Buchstaben ausgefüllt, die erste Zeile mit a's, die zweite mit b's usw.. Danach werden die einzelnen Kästchen der ersten Zeile an die Zeilen des ersten Tableaus angefügt, und zwar so, dass bei jedem Zwischenschritt ein Diagramm von erlaubter Form entsteht und keine zwei Kästchen mit dem gleichen Buchstaben in einer Spalte stehen. Das Hinzufügen eines Kästchens in eine neue, leere Zeile ist ebenfalls erlaubt. Wird das Kästchen in die n-te Zeile hinzugefügt, führt dies zum Streichen der gesamten ersten Spalte des Diagramms. Die Kästchen der anderen Zeilen werden auf die gleiche Weise angefügt, wobei darauf zu achten ist, dass für die Buchstabenfolge von oben rechts nach unten links gelesen an jeder Position gilt, dass die Anzahl der aufgetretenen a's größer gleich der der b's und die wiederum größer gleich der der c's usw. ist. Aus den verschiedenen entstehenden Young-Tableaux sind die Dynkin-Koeffizienten der irreduziblen Komponenten des Tensorprodukts abzulesen. Sind zwei der entstehenden Young-Tableaux der äußeren Form nach gleich, aber unterscheiden sich in der Buchstabenfolge, so tritt diese irreduzible Darstellung zweifach auf.

Beispiel für $SU(3)$:

$$\begin{aligned}
 (1,1) \otimes (1,1) &= \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline a & \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \bullet \\
 &= (2,2) \oplus (3,0) \oplus (0,3) \oplus 2 \cdot (1,1) \oplus (0,0) \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

Young-Tableaux liefern auch eine einfache Möglichkeit die Dimension der entsprechenden Darstellung zu bestimmen. Es gilt die sogenannte Hakenregel:

$$\dim \mathcal{D} = \prod_{(i,j)} \frac{N - i + j}{h_{ij}} \tag{5.27}$$

Dabei läuft das Produkt über alle Kästchen des Young-Tableaus, indiziert durch Zeile i und Spalte j . h_{ij} ist die sogenannte Hakenlänge des Kästchens (i, j) und definiert als die Anzahl der Kästchen im Tableau mit $i' = i$ und $j' \geq j$ oder $i' > i$ und $j' > j$. Die Formel (5.27) bildet somit einen Spezialfall von Weyls Dimensionsformel (5.16) für die Gruppe $SU(n)$.

5.1.5. Spezifische Eigenschaften und Darstellungen der $so(n)$ -Algebra

Die $SO(n)$ ist die Gruppe aller orthogonalen $n \times n$ -Matrizen ($O^T O = \mathbf{1}$) mit Determinante eins. Sie entspricht der Menge aller Drehungen um den Ursprung im \mathbb{R}^n . Aus der Orthogonalitätsbedingung folgt, dass die Generatoren der $SO(n)$ antisymmetrische $n \times n$ -Matrizen sein müssen. Da antisymmetrische Matrizen nur nicht-diagonale Elemente besitzen, müsste ein Basiswechsel durchgeführt werden, um die Cartan-Unteralgebra-Elemente in Diagonalf orm zu bringen. Hier soll aber zunächst die Cartan-Weyl-Basis in den antisymmetrischen Generatoren eingeführt werden; in der später wichtigen Darstellung der Algebra wird deutlich, dass der Übergang zu komplexen Koordinaten genau den gewünschten Basiswechsel liefert.

5. Algebraische Lösung der Modelle

Da die $so(2n)$ und die $so(2n+1)$ denselben Rang n haben, sich aber in der Dimension unterscheiden, handelt es sich um unterschiedliche Lie-Algebren (die komplexifizierten Versionen heißen D_n bzw. B_n), die getrennt voneinander behandelt werden sollen.

Cartan-Weyl-Basis der $so(2n)$: Seien a_{ab} eine Basis der antisymmetrischen Matrizen mit

$$(a_{ab})_{ij} = (e_{ab} - e_{ba})_{ij} = \delta_{ai}\delta_{bj} - \delta_{aj}\delta_{bi} \quad (5.28)$$

Dann lässt sich eine Basis der Cartan-Generatoren angeben durch:

$$h_i = -ia_{2i-1\ 2i}, \quad i = 1 \dots n \quad (5.29)$$

Die CSA der $so(2n)$ entspricht der Auswahl von n Paaren von Koordinatenachsen, die Ebenen aufspannen, die unabhängig voneinander gedreht werden können. Die Generatoren dieser Drehungen vertauschen daher.

Die Gestalt der Leiteroperatoren ist etwas komplizierter, da sich die Wurzeln der $so(2n)$ in zwei Klassen einteilen lassen. Die Aufsteigeoperatoren lauten (mit $i < j$):

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \frac{1}{2i}(a_{2i-1\ 2j-1} + a_{2i\ 2j} - ia_{2i-1\ 2j} + ia_{2i\ 2j-1}) \quad \text{zur Wurzel} \quad \alpha(h_k) = \delta_{ik} - \delta_{jk} \\ e_\alpha &= \frac{1}{2i}(a_{2i-1\ 2j-1} - a_{2i\ 2j} + ia_{2i-1\ 2j} + ia_{2i\ 2j-1}) \quad \text{zur Wurzel} \quad \alpha(h_k) = \delta_{ik} + \delta_{jk} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Die zugehörigen Absteigeoperatoren sind die zu den Aufsteigern adjungierten Matrizen $e_{-\alpha} = e_\alpha^\dagger$. Zusammen bilden diese Operatoren die Cartan-Weyl-Basis der $so(2n)$, die der Relation (5.8) genügen. Als die n einfachen Wurzeln dienen

$$\alpha_i(h_j) = \delta_{ij} - \delta_{i+1\ j}, \quad i = 1 \dots n-1 \quad \text{und} \quad \alpha_n(h_j) = \delta_{n-1\ j} + \delta_{n\ j} \quad (5.31)$$

Die zugehörigen Aufsteigeoperatoren sind

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{1}{2i}(a_{2i-1\ 2i+1} + a_{2i\ 2i+2} - ia_{2i-1\ 2i+2} + ia_{2i\ 2i+1}) \quad \text{zur Wurzel} \quad \alpha_i \\ e_n &= \frac{1}{2i}(a_{2n-3\ 2n-1} - a_{2n-2\ 2n} + ia_{2n-3\ 2n} + ia_{2n-2\ 2n-1}) \quad \text{zur Wurzel} \quad \alpha_n \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ganz analog zum Fall der $SU(n)$ lässt sich aus dieser Matrixdarstellung eine Darstellung der $so(2n)$ in bosonischen bzw. fermionischen Operatoren (mit den (Anti-)Vertauschungsrelationen $[P_i, Q_j] = \delta_{ij}$ bzw. $\{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}$) finden. Kombiniert man diese je $2n$ Operatoren nach

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{2i-1} + iQ_{2i}), & \bar{q}_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{2i-1} - iQ_{2i}) \\ p_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(P_{2i-1} + iP_{2i}), & \bar{p}_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(P_{2i-1} - iP_{2i}), \quad i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (5.33)$$

so nehmen die Cartan-Generatoren und Leiteroperatoren der Darstellung eine wesentlich einfachere Form an:

$$\begin{aligned} H_i &= q_i p_i - \bar{q}_i \bar{p}_i, & i &= 1 \dots n \\ E_i &= \frac{1}{i}(q_i p_{i+1} - \bar{q}_{i+1} \bar{p}_i), & i &= 1 \dots n-1 \\ E_n &= \frac{1}{i}(q_{n-1} \bar{p}_n - q_n \bar{p}_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.1. Grundlegendes zur Gruppentheorie der $SO(n)$ und $SU(n)$

Cartan-Weyl-Basis der $so(2n+1)$: Für den Übergang zur $so(2n+1)$ -Algebra sind nur wenige Änderungen vorzunehmen. Da auch hier die Darstellung in den Operatoren p_i, q_j wesentlich eleganter ist und auch nur diese im Folgenden wichtig sein wird, soll hier auf eine Darstellung in $(2n+1) \times (2n+1)$ -Matrizen verzichtet werden. Da die Operatoren p_i, q_j die Operatoren P_i, Q_j jeweils in Paaren komplex kombinieren, bleiben im Fall der $so(2n+1)$ die Operatoren P_{2n+1}, Q_{2n+1} untransformiert. Da für den Rang und die Dimension der Algebren gilt

$$\text{rank}(so(2n)) = \text{rank}(so(2n+1)) \quad \text{und} \quad \dim(so(2n+1)) = \dim(so(2n)) + 2n \quad (5.35)$$

und die Cartan-Generatoren der $so(2n)$ offensichtlich auch Cartan-Generatoren der $so(2n+1)$ sind, kann die Basis der CSA übernommen werden:

$$H_i = q_i p_i - \bar{q}_i \bar{p}_i, \quad i = 1 \dots n \quad (5.36)$$

Da die $SO(2n)$ eine Untergruppe der $SO(2n+1)$ bildet, sind auch sämtliche Leiteroperatoren der $SO(2n)$ Leiteroperatoren der $SO(2n+1)$ zu den gleichen Wurzeln. Aufgrund der höheren Dimension der $so(2n+1)$ fehlen noch n zusätzliche Aufsteiger, die gegeben sind durch:

$$E_\alpha = \frac{1}{i}(q_i P_{2n+1} - Q_{2n+1} \bar{p}_i) \quad \text{zur Wurzel} \quad \alpha(h_k) = \delta_{ik} \quad (5.37)$$

Diese neuen Wurzeln lassen sich nicht aus den einfachen Wurzeln der $so(2n)$ kombinieren, weshalb die Form der einfachen Wurzeln nicht erhalten bleibt. Die einfachen Wurzeln und die zugehörigen Aufsteigeoperatoren der $so(2n+1)$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{i}(q_i p_{i+1} - \bar{q}_{i+1} \bar{p}_i), & \alpha_i(h_j) &= \delta_{ij} - \delta_{i+1j}, & i &= 1 \dots n-1 \\ E_n &= \frac{1}{i}(q_n P_{2n+1} - Q_{2n+1} \bar{p}_n), & \alpha_n(h_j) &= \delta_{nj} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Young-Tableaux für die $so(2n)$ - und $so(2n+1)$ -Algebren Ein Young-Tableau der $so(2n)$ und der $so(2n+1)$ hat maximal n Zeilen und ist dementsprechend durch die Angabe von n geordneten Zeilenlängen $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$ eindeutig definiert. Die oben angegebene Basis der Cartan-Unteralgebra ist so gewählt, dass die Eigenwerte der H_i auf den Höchstgewichtszuständen genau mit den entsprechenden Zeilenlängen übereinstimmen ($l_i = w_i$). Der Zusammenhang zwischen Dynkin-Koeffizienten und Eigenwerten (Zeilenlängen) nach Gleichung (5.15) ergibt

$$\Lambda_i = (w_1 - w_2, w_2 - w_3, \dots, w_{n-1} - w_n, w_{n-1} + w_n), \quad \text{für } so(2n) \quad (5.39)$$

$$\Lambda_i = (w_1 - w_2, w_2 - w_3, \dots, w_{n-1} - w_n, 2w_n), \quad \text{für } so(2n+1). \quad (5.40)$$

Bei der Gruppe $SO(n)$ unterscheidet man zwischen spinoriellen und nicht-spinoriellen Darstellungen. Für die Dynkin-Koeffizienten von Spinor-Darstellungen der $so(2n)$ gilt: $\Lambda_{n-1} + \Lambda_n$ ungerade; für die der $so(2n+1)$: Λ_n ungerade. Auf dem für die Lösung des $O(n)$ -Modells später betrachteten Fockraum treten keine Spinor-Darstellungen auf, da dort alle w_i positive ganze Zahlen sind. Diese Tatsache vereinfacht die Regeln, die zur Ausreduktion von Tensorprodukten benötigt werden, enorm. Überhaupt sollen in diesem Abschnitt nur die Regeln Erwähnung finden, die zur Ausreduktion der später auftretenden Tensorprodukte benötigt

5. Algebraische Lösung der Modelle

werden. Für eine umfassende Darstellung sämtlicher Regeln für die $so(n)$ verweise ich auf [18].

Die Ausreduktion im Falle der $so(2n)$ bzw. $so(2n+1)$ folgt einem ähnlichen Schema wie bei der $su(n)$: Die mit Buchstaben versehenen Kästchen des zweiten Young-Tableaus werden einzeln an das erste Tableau angefügt. Dies erfolgt nach den gleichen Regeln wie bei der $su(n)$, mit der Ausnahme, dass ein Anfügen in der n -ten Zeile nicht zum Streichen der entsprechenden Spalte führt. Stattdessen ist es sogar möglich, das Tableau über die n -te Zeile hinaus zu erweitern, was bei Beachtung der Regeln nur in der ersten Spalte geschehen kann. Das entstehende Diagramm mit $p > n$ Kästchen in der ersten Spalte ist äquivalent zum einem sonst gleichen Diagramm mit $2n - p$ Kästchen in der ersten Spalte³, wodurch man wiederum ein Tableau erlaubter Form erhält. Im Falle der $so(2n)$ gibt es für das Diagramm mit $p = n$ Kästchen in der ersten Spalte zwei nicht-äquivalente Darstellungen. Hat das Young-Tableau also nach dem Hinzufügen des letzten Kästchens n Zeilen, so treten zwei Darstellungen mit diesem Young-Tableau als Komponenten der Ausreduktion auf. Neben dem Anfügen von Kästchen ist bei der $so(d)$ auch das Aufheben eines bestehenden Kästchens durch das neue Kästchen möglich. Diese Operation entspricht der Kontraktion zweier Indizes der beiden Faktordarstellungen mit δ_{ab} . Ein aufgehobenes Kästchen kann durch ein weiteres wieder erzeugt werden. In diesem Fall steht das Kästchen für beide Buchstaben der hinzugefügten Kästchen gleichzeitig. Umgekehrt ist dieser Vorgang nicht erlaubt, da dies die Kontraktion zweier Indizes einer irreduziblen Darstellung bedeuten würde, welche null ergibt.

Die Dimension einer Darstellung der $so(n)$ lässt sich aus den Zeilenlängen des jeweiligen Young-Tableaus nach folgenden Formeln bestimmen [27], die sich aus Weyls Dimensionsformel herleiten lassen:

$$\dim(\mathcal{D}(\{l_i\})) = \prod_{1 \leq r < s \leq n} \binom{l_r + l_s + 2n - r - s}{2n - r - s} \binom{l_r - l_s + s - r}{s - r} \quad \text{für } so(2n) \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{D}(\{l_i\})) &= \prod_{t=1}^n \frac{2l_t + d - 2t}{d - 2t} \\ &\times \prod_{1 \leq r < s \leq n} \binom{l_r + l_s + d - r - s}{d - r - s} \binom{l_r - l_s + s - r}{s - r} \quad \text{für } so(d = 2n+1) \end{aligned} \quad (5.42)$$

³Lässt man $O(n)$ -Transformationen zu, so heißen diese Darstellungen zueinander assoziiert. Für die Einschränkung auf $SO(n)$ -Transformationen werden die Darstellungen äquivalent [24].

5.2. Algebraische Lösung des $O(n)$ -Modells

Zur Lösung des $O(n)$ -Modells wird eine Methode verwendet, wie sie von Wipf et. al. für die Lösung des supersymmetrischen Wasserstoffatoms vorgestellt wurde [27]. Auch die Lösung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells im nächsten Abschnitt beruht auf einer (leicht verallgemeinerten) Form dieser Methode.

Wie in Kapitel 3.2.2 gezeigt, lässt sich das $O(n)$ -Modell mit den Operatoren x_i , ∂_{x_i} , χ_i und χ_i^\dagger beschreiben, die die Vertauschungsrelationen $[\partial_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}$ und $\{\chi_i^\dagger, \chi_j\} = \delta_{ij}$ erfüllen. In Erinnerung an Kapitel 2.2.2 soll nun der Hilbertraum des $O(n)$ -Modells konstruiert werden. Die fermionischen Operatoren erzeugen einen Fock-Raum mit Vakuum $|0\rangle$, der in Unterräume fixierter Fermionzahl p zerfällt:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{C}_n, \quad \dim \mathcal{C}_p = \binom{n}{p}, \quad \dim \mathcal{C} = 2^n, \quad (5.43)$$

mit

$$N|_{\mathcal{C}_p} = \sum_{i=1}^n \chi_i^\dagger \chi_i \Big|_{\mathcal{C}_p} = p \quad (5.44)$$

Da der Fermionzahloperator mit dem Hamiltonian vertauscht (skalärer Operator), ist die Fermionzahl eine Erhaltungsgröße und man spricht von p -Fermion-Sektoren des Fock-Raums. Als Basis des p -Fermion-Sektors \mathcal{C}_p dienen die Vektoren

$$\chi_{a_1}^\dagger \dots \chi_{a_p}^\dagger |0\rangle, \quad a_1 < a_2 < \dots < a_p. \quad (5.45)$$

Die bosonischen Koordinaten spannen hingegen den in der Quantenmechanik üblichen Hilbertraum $L_2(\mathbb{R}^n)$ auf. Der gesamte Hilbertraum des supersymmetrischen Modells ergibt sich also als Tensorprodukt der beiden Räume, der ebenfalls in Sektoren konstanter Fermionzahl zerfällt.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \quad (5.46)$$

Stellt man die fermionischen Operatoren wie bereits erwähnt durch hermitesche euklidische γ -Matrizen dar, dann ist der Hilbertraum \mathcal{H}_p explizit realisiert durch:

$$\mathcal{H}_p = L_2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^{\binom{n}{p}}, \quad p = 0 \dots n \quad (5.47)$$

Nach diesen Vorbetrachtungen können nun die Eigenfunktionen des Hamiltonoperators des supersymmetrischen $O(n)$ -Modells entwickelt werden. Aufgrund der Unterschiede der Lie-Algebren $so(2n)$ und $so(2n+1)$ soll dies für gerade und ungerade Dimensionen in unterschiedlichen Abschnitten geschehen.

5.2.1. Lösung des Modells für gerade Dimensionen

Da der Hamiltonian des Modells der quadratische Casimir-Operator einer Darstellung der $so(n)$ ist, müssen die Zustände mit gleicher Energie eine Darstellung (oder genauer: einen Darstellungsvektorraum) der $so(n)$ bilden. Die gefundene reduzible Darstellung der $so(n)$

$$J_{ij} = -i(x_i \partial_j - x_j \partial_i) - i(\chi_i^\dagger \chi_j - \chi_j^\dagger \chi_i) \quad (5.48)$$

5. Algebraische Lösung der Modelle

ist (da alle bosonischen mit allen fermionischen Operatoren vertauschen) eine Tensorprodukt-darstellung einer (reduziblen) bosonischen mit einer (reduziblen) fermionischen Darstellung, d.h.

$$L_{ij} = -i(x_i \partial_j - x_j \partial_i) \quad \text{und} \quad S_{ij} = -i(\chi_i^\dagger \chi_j - \chi_j^\dagger \chi_i) \quad (5.49)$$

sind jeweils eine Darstellung der $so(n)$ -Algebra. Die Vorgehensweise um herauszufinden wie der gesamte Hilbertraum \mathcal{H} in irreduzible Darstellungen der Operatoren J_{ij} zerfällt, ist deshalb die Folgende: Zunächst wird untersucht, wie der Raum $L_2(\mathbb{R}^n)$ in irreduzible Darstellungen der L_{ij} und der Fock-Raum \mathcal{C} in irreduzible Darstellungen der S_{ij} zerfällt. Danach wird jede Darstellung im Raum $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit jeder im Fockraum \mathcal{C} tensoriert und ausreduziert, um so die irreduziblen Darstellungen im gesamten Hilbertraum \mathcal{H} zu erhalten. Dieses Vorgehen wäre extrem aufwendig, wenn nicht, wie gezeigt werden wird, beim Tensorieren der Darstellungen immer die gleiche, überschaubare Anzahl an irreduziblen Komponenten entstehen würde.

Irreduzible Darstellungen des Drehimpulsoperators L_{ij} : Die Darstellungen des Drehimpulsoperators L_{ij} findet man, in dem man nach allen Zuständen sucht, die von sämtlichen Aufsteigeoperatoren vernichtet werden. Außerdem müssen die Zustände Eigenzustände der CSA-Basis H_i zu ganzzahligen positiven Eigenwerten sein, damit sie durch Anwendung einer endlichen Anzahl von Absteigeoperatoren vernichtet werden. Im Falle des Drehimpulsoperators L_{ij} lauten die CSA-Elemente und die zu den n einfachen Wurzeln gehörenden Aufsteigeoperatoren aus Gleichung (5.34)

$$\begin{aligned} H_i &= z_i \partial_i - \bar{z}_i \bar{\partial}_i, & i &= 1 \dots n \\ E_i &= \frac{1}{i} (z_i \partial_{i+1} - \bar{z}_{i+1} \bar{\partial}_i), & i &= 1 \dots n-1 \\ E_n &= \frac{1}{i} (z_{n-1} \bar{\partial}_n - z_n \bar{\partial}_{n-1}), \end{aligned} \quad (5.50)$$

wobei die $(z_i, \bar{z}_i, \partial_i, \bar{\partial}_i)$ komplexe Kombinationen der bosonischen Koordinaten und Ableitungen x_j, ∂_k gemäß (5.33) sind.

Die erste Bedingung liefert offensichtlich, dass die gesuchten Zustände nur von der Koordinate z_1 und einer radialen Funktion $f(r)$ abhängen dürfen. Aus der zweiten Bedingung erhält man schließlich für die Form der Höchstgewichtszustände

$$f(r) z_1^l, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (5.51)$$

Da das Modell letztendlich auf die Sphäre mit $r = 1$ eingeschränkt werden soll und $f(r)$ mit allen Operatoren der $so(n)$ -Algebra vertauscht, darf die Funktion $f(r)$ als Normierungskonstante betrachtet werden. Da im Folgenden sämtliche Zustände nicht normiert werden, soll die Konstante weggelassen werden.

Die zugehörigen Darstellungen sollen mit \mathcal{D}_1^l bezeichnet werden und haben die Dynkin-Koeffizienten und die Young-Tableaux:

$$\mathcal{D}_1^l : (l, 0, \dots, 0) \quad \boxed{1 \mid 2 \mid \cdot \mid \cdot \mid L} \quad (5.52)$$

Irreduzible Darstellungen des Spinoperators S_{ij} : Analog zum Fall des Bahndrehimpulses L_{ij} sind irreduzible Darstellungen der Operatoren S_{ij} zu finden. In diesem Fall lauten die CSA-Elemente H_i und die Aufsteigeoperatoren:

$$\begin{aligned} H_i &= \phi_i^\dagger \phi_i - \bar{\phi}_i^\dagger \bar{\phi}_i, & i &= 1 \dots n \\ E_i &= \frac{1}{i} (\phi_i^\dagger \phi_{i+1} - \bar{\phi}_{i+1}^\dagger \bar{\phi}_i), & i &= 1 \dots n-1 \\ E_n &= \frac{1}{i} (\phi_{n-1}^\dagger \phi_n - \phi_n^\dagger \bar{\phi}_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Hierbei sind die $\phi_i^{(\dagger)}, \bar{\phi}_j^{(\dagger)}$ wie im bosonischen Fall komplexe Kombinationen von den antikommutierenden Größen $\chi_i^{(\dagger)}$ gemäß (5.33), die dann ebenfalls antikommutieren

$$\{\phi_i, \phi_j^\dagger\} = \{\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_j^\dagger\} = \delta_{ij}. \quad (5.54)$$

Ein allgemeiner Eigenzustand aller CSA Generatoren des Fockraums \mathcal{C} ist proportional zu

$$|\vec{p}\vec{p}'\rangle = \phi_1^{\dagger p_1} \dots \phi_n^{\dagger p_n} \bar{\phi}_1^{\dagger p'_1} \dots \bar{\phi}_n^{\dagger p'_n} |0\rangle, \quad (5.55)$$

wobei die p_i, p'_i aufgrund der Antikommutativität der ϕ 's nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Da sich der Fermionzahloperator gemäß

$$N = \vec{\chi}^\dagger \vec{\chi} = \bar{\phi}^\dagger \vec{\phi} + \vec{\phi}^\dagger \bar{\phi} \quad (5.56)$$

in die neuen Koordinaten übersetzt, ist der Zustand $|\vec{p}\vec{p}'\rangle$ ein Zustand im p -Fermion-Sektor, mit

$$p = \sum_i (p_i + p'_i). \quad (5.57)$$

In jedem Fermionsektor existiert ein fermionischer Höchstgewichtszustand $|p\rangle$ definiert durch:

$$p_1 \geq \dots \geq p_n \geq p'_n \geq \dots \geq p'_1 \quad (5.58)$$

Im n -Fermion-Sektor existiert neben diesem Höchstgewichtszustand ein weiterer mit

$$|n'\rangle : \quad p_1 = \dots = p_{n-1} = p'_n = 1, \quad p_n = p'_1 = \dots = p'_{n-1} = 0. \quad (5.59)$$

Die fermionischen Höchstgewichtszustände gehören zu den Darstellungen \mathcal{D}_p^1 mit den Young-Tableaux:

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline p \\ \hline \end{array} \quad (5.60)$$

Für $p > n$ gilt die oben erwähnte Äquivalenz $\mathcal{D}_p^1 \sim \mathcal{D}_{2n-p}^1$. Für die Dimension der Darstellung \mathcal{D}_p^1 vereinfacht sich die allgemeine Formel (5.41) zu:

$$\dim(\mathcal{D}_p^1) = \binom{2n}{p} \quad \text{für } p < n, \quad \dim(\mathcal{D}_n^1) = \frac{1}{2} \binom{2n}{p} \quad \text{für } p = n. \quad (5.61)$$

Damit ist klar wie der gesamte Fock-Raum \mathcal{C} in irreduzible Darstellungen zerfällt: Für $p \neq n$ existiert genau eine Darstellung, die den gesamten p -Fermion-Sektor aufspannt, während der n -Fermion-Sektor durch zwei nichtäquivalente Darstellungen mit gleichem Young-Tableau aufgespannt wird.

5. Algebraische Lösung der Modelle

Irreduzible Darstellungen des Gesamtdrehimpulsoperators J_{ab} : Um die irreduziblen Darstellungen des Gesamtdrehimpulses J_{ab} zu finden, in die der Hilbertraum zerfällt, werden die allgemeinen bosonischen und fermionischen Darstellungen miteinander tensoriert und ausreduziert⁴. Nach den Regeln für $so(2n)$ -Young-Tableaux erhält man die vier möglichen Young-Tableaux:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\square \square \square \square}^l \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} a \\ b \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} p = p+1 \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\square \square \square \square}^l \\ a \\ b \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \oplus p \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\square \square \square \square}^{l+1} \\ b \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \oplus p \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\square \square \square \square}^{l-1} \\ b \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \oplus p-1 \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\square \square \square \square}^l \\ c \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \quad (5.62)$$

Die vier Summanden sind schon nach dem Hinzufügen der ersten beiden Kästchen festgelegt: Wird das erste Kästchen in die erste Spalte hinzugefügt, so müssen sämtliche anderen auch in die erste Spalte gesetzt werden, damit die Buchstabenfolge korrekt ist. Die anderen Möglichkeiten ergeben sich durch Hinzufügen des ersten Kästchens in die erste Zeile und Aufheben des letzten Kästchens der ersten Zeile. Nur im letzten Fall ergeben sich zwei Möglichkeiten für das Kästchen \overline{b} : Entweder es wird in der ersten Spalte zugefügt oder das aufgehobene Kästchen wird wiederhergestellt. Alle weiteren Kästchen müssen in der ersten Spalte zugefügt werden. Für $p = n - 1$ tritt der Sonderfall ein, dass der erste Summand n Zeilen hat und daher zweifach auftritt. Dies ist der einzige Fall, für den das Tensorprodukt in 5 irreduzible Darstellungen zerfällt. Es gibt allerdings weitere Spezialfälle, in denen man nur drei Darstellungen erhält:

- Für $p = n$ sind die erste und die vierte Darstellung äquivalent.
- Für $p = 1$, $l \neq 1$ tritt die vierte Darstellung nicht auf.
- Für $l = 1$ tritt die dritte Darstellung nicht auf.

Nachdem nun das Tensorprodukt beliebiger bosonischer und fermionischer Darstellungen ausreduziert wurde, sind noch die jeweiligen Höchstgewichtszustände der irreduziblen Komponenten zu bestimmen, um die Darstellungen eindeutig zu charakterisieren. Für die zweite Darstellung ist dies leicht möglich: Hier handelt es sich um die Darstellung mit dem insgesamt höchsten Gewicht und der Höchstgewichtszustand ergibt sich als Produkt der Höchstgewichtszustände der Faktordarstellungen zu

$$\mathcal{D}_p^{l+1} : z_1^l |p\rangle. \quad (5.63)$$

Für die Höchstgewichte der anderen Darstellungen sind zwei Bedingungen zu erfüllen: Zum einen muss der Zustand die richtigen Eigenwerte bzgl. der $H_i = H_i^{\text{bos.}} + H_i^{\text{ferm.}}$ besitzen (muss also zu dem Young-Tableau gehören) und zum anderen muss jeder Zustand des Tensorprodukts (und damit auch die Höchstgewichtszustände) l bosonische Koordinaten und p fermionische Erzeuger enthalten. Da skalare Operatoren mit dem Gesamtdrehimpuls vertauschen, bilden sie Höchstgewichtszustände auf Höchstgewichtszustände ab. Durch Anwendung

⁴Um die allgemeinen gruppentheoretischen Berechnungen an konkreten Beispielen zu überprüfen, wurde das Programm LiE [40] benutzt.

5.2. Algebraische Lösung des $O(n)$ -Modells

von skalaren Operatoren ist es also möglich, die Anzahl der bosonischen und fermionischen Koordinaten zu verändern, ohne dass sich das zugehörige Young-Tableau des Höchstgewichtszustands verändert. Man stellt fest, dass sich mit dieser Überlegung die Höchstgewichtszustände der übrigen Darstellungen durch Anwendung von skalaren Operatoren auf Zustände der Form (5.63) erhalten lassen. Hierfür kommen die skalaren Bildungen

$$S = \vec{x}\vec{\chi} = \sum_i (z_i \phi_i + \bar{z}_i \bar{\phi}_i), \quad S^\dagger = \vec{x}\vec{\chi}^\dagger = \sum_i (\bar{z}_i \phi_i^\dagger + z_i \bar{\phi}_i^\dagger), \quad (5.64)$$

$$N = \vec{\chi}^\dagger \vec{\chi}, \quad r = \vec{x}\vec{x} \quad (5.65)$$

in Betracht. Da die Zustände (5.63) ohnehin Eigenzustände der Operatoren in der zweiten Zeile sind (hier soll die Einschränkung des \mathbb{R}^n auf die S^{n-1} vorweggenommen werden, so dass gilt $r \equiv 1$), sind nur die beiden Operatoren S, S^\dagger von Interesse. Da sie nilpotent sind, lassen sich nur die vier unabhängigen abgeleiteten Operatoren

$$1 = \vec{z}\vec{z} = \{S, S^\dagger\}, \quad S, \quad S^\dagger, \quad [S, S^\dagger] \quad (5.66)$$

aus ihnen bilden. Dies entspricht genau der Anzahl der irreduziblen Komponenten und man erhält für die Höchstgewichtszustände der einzelnen Darstellungen

$$\mathcal{D}_p^{l+1} : z_1^l |p\rangle \quad \mathcal{D}_{p+1}^l : S z_1^{l-1} |p+1\rangle \quad (5.67)$$

$$\mathcal{D}_{p-1}^l : S^\dagger z_1^{l-1} |p-1\rangle \quad \mathcal{D}_p^{l-1} : [S, S^\dagger] z_1^{l-2} |p\rangle. \quad (5.68)$$

Für den Spezialfall $p = n - 1$ erhält man die zusätzliche irreduzible Komponente dadurch, dass man mit S auf die beiden n -Fermion-Darstellungen $|n\rangle$ und $|n'\rangle$ wirkt. Für die Fälle, in denen man nur drei irreduzible Komponenten erhält, ist in Tabelle 5.1 aufgelistet, welche der obigen Höchstgewichte auftreten. Nachdem nun der Hilbertraum in irreduzible Darstellungen des Gesamtdrehimpulses J_{ij} zerlegt wurde, ist als letzter Schritt die schon erwähnte Projektion durchzuführen, die den überzähligen fermionischen Freiheitsgrad beseitigt. Als Projektionsoperator soll $P = \vec{x}\vec{\chi}\vec{x}\vec{\chi}^\dagger = SS^\dagger$ dienen, so dass $\vec{x}\vec{\chi}$ nach der Projektion auf allen Zuständen verschwindet. Die resultierenden Höchstgewichtsvektoren sind zusammen mit den Parameterbereichen für l und p , für die sie auftreten, in Tabelle 5.1 aufgelistet.

Darstellung:	\mathcal{D}_p^{l+1}	\mathcal{D}_{p+1}^l	\mathcal{D}_{p-1}^l	\mathcal{D}_p^{l-1}
Zustand:	$z_1^l p\rangle$	$S z_1^{l-1} p+1\rangle$	$S^\dagger z_1^{l-1} p-1\rangle$	$[S, S^\dagger] z_1^{l-2} p\rangle$
Projektion:	$P z_1^l p\rangle$	$S z_1^{l-1} p+1\rangle$	0	$P z_1^{l-2} p\rangle$
Parameterbereich:	$l \geq 0,$ $0 \leq p \leq 2n$	$l \geq 1,$ $1 \leq p \leq 2n - 2$ oder $l = 1, p = 2n - 1$	$l \geq 1,$ $2 \leq p \leq 2n - 1$ oder $l = 1, p = 1$	$l \geq 2,$ $1 \leq p \leq 2n - 1$

Tabelle 5.1.: Die auftretenden Darstellungen nach der Projektion mit ihrem Parameterbereich

Man erkennt, dass bei der Projektion die Darstellung in der dritten Spalte verschwindet und die Darstellungen in erster und vierter Spalte äquivalent werden $\mathcal{D}_p^{l+1} \sim \mathcal{D}_p^{l-1}$, wenn gilt $l' = l + 2, p = 1 \dots 2n - 1$.

5. Algebraische Lösung der Modelle

Man kann sich davon überzeugen, dass für jede vernichtete Darstellung aus der dritten Spalte \mathcal{D}_{p-1}^l eine Darstellung $\mathcal{D}_{p'+1}^l$ mit $p' = 2n - p$ aus der zweiten Spalte mit gleichem Young-Tableau erhalten bleibt. Ebenso bleiben im bosonischen Sektor alle Darstellungen erhalten, während im $2n$ -Fermion-Sektor alle Darstellungen vernichtet werden. Alle übrigen Darstellungen lassen sich zu Paaren zusammenfassen, die durch die Projektion äquivalent werden. Daraus folgt, dass sich die Dimension des gesamten Hilbertraums, wie erwartet, unter der Projektion halbiert.

Nun bleibt zu untersuchen, wie sich die Supersymmetrie des Modells in der Sprache der Darstellungen manifestiert. Mit der Darstellung der Dirac-Algebra aus Kapitel (3.2.2) hat die komplexe Superladung die Form:

$$Q^\dagger = \vec{\Psi}^\dagger \vec{p} = -i(\vec{\chi}^\dagger \vec{\partial} - S^\dagger \vec{x} \vec{\partial}) + iS^\dagger N \quad (5.69)$$

$$Q = \vec{\Psi} \vec{p} = -i(\vec{\chi} \vec{\partial} - S \vec{x} \vec{\partial}) - iS(N - 2n) \quad (5.70)$$

Da es sich ebenfalls um skalare Operatoren handelt, werden durch Anwendung der Superladungen Darstellungen mit gleichem Young-Tableau aufeinander abgebildet. Durch eine kurze explizite Rechnung erhält man, wie die Superladungen auf die projizierten Höchstgewichtszustände wirken:

$$Q^\dagger P z_1^l |p\rangle = \begin{cases} -ilP z_1^{l-1} |1\rangle & p = 0 \\ 0 & p > 0 \end{cases} \quad Q^\dagger S z_1^l |p\rangle = \begin{cases} 0 & p = 0 \\ -i(p+l)P z_1^l |p\rangle & p > 0 \end{cases} \quad (5.71)$$

sowie

$$QP z_1^l |p\rangle = \begin{cases} i(2n+l-p)S z_1^l |p\rangle & p < 2n \\ 0 & p = 2n \end{cases} \quad (5.72)$$

$$QS z_1^l |p\rangle = \begin{cases} 0 & p < 2n \\ ilS z_1^{l-1} |2n-1\rangle & p = 2n \end{cases}$$

Man erkennt, dass fast alle Höchstgewichtszustände entweder durch Q oder durch Q^\dagger auf einen anderen Höchstgewichtszustand abgebildet werden, wie aufgrund der in Kapitel 2.2.2 hergeleiteten Zerlegung

$$\mathcal{H} = Q\mathcal{H} \oplus Q^\dagger\mathcal{H} \oplus \text{Ker } H \quad (5.73)$$

des Hilbertraums erwartet wurde. Dadurch entstehen die schon beschriebenen Paare von Zuständen gleicher Energie. Einzige Ausnahme bilden die Zustände $|0\rangle$ (das Vakuum) und $S|2n\rangle$ im $(2n-1)$ -Fermion-Sektor. In der Tat liegen die beiden ungepaarten Zustände im Kern von $H = 1/2\{Q^\dagger, Q\}$, da sie sowohl von Q als auch von Q^\dagger vernichtet werden. Damit bilden sie die beiden Grundzustände des Modells. Mit den Gleichungen (5.71) und (5.72) lassen sich nun auf einfache Weise die Eigenwerte des Hamiltonians auf den einzelnen Darstellungen berechnen. In der Übersicht erhält man Tabelle (5.2). Hierbei treten alle Darstellungen, die ein $|q\rangle$ mit $q = n$ enthalten, zweimal auf, da $|n\rangle$ und $|n'\rangle$ für $|q\rangle$ eingesetzt werden kann. Aus der Tabelle kann man entnehmen, dass im p -Fermion- und im $(2n-p-1)$ -Fermion-Sektor jeweils Darstellungen mit den gleichen Young-Tableaux und damit auch den gleichen Eigenwerten auftreten. Aufgrund der Paarung der Darstellungen in benachbarten Sektoren

5.2. Algebraische Lösung des $O(n)$ -Modells

Sektor	Darstellung	Eigenwerte	
bosonisch	$Pz_1^l 0\rangle$	$\frac{1}{2}l(2n+l-2)$	$l \geq 0$
p-Fermion ($1 \leq p \leq 2n-2$)	$Pz_1^l p\rangle$ $Sz_1^{l-1} p+1\rangle$	$\frac{1}{2}(p+l)(2n+l-p)$ $\frac{1}{2}(p+l)(2n-2+l-p)$	$l \geq 0$ $l \geq 1$
$2n-1$ -Fermion	$Pz_1^l 2n-1\rangle$ $S 2n\rangle$	$\frac{1}{2}(l+1)(2n+l-1)$ 0	$l \geq 0$

Tabelle 5.2.: Energieeigenwerte in den verschiedenen Sektoren des $O(2n)$ -Modells

$E \setminus p$	0	1	2	3
0	• $ 0\rangle$			• $S 4\rangle$
$\frac{3}{2}$	\square $Pz_1^1 0\rangle$	\longleftrightarrow \square $Pz_1^0 1\rangle$	\square $Sz_1^0 3\rangle$	\longleftrightarrow \square $Pz_1^0 3\rangle$
2		$2 \cdot \square$ $Sz_1^0 2^{(\prime)}\rangle$	\longleftrightarrow $2 \cdot \square$ $Pz_1^0 2^{(\prime)}\rangle$	
4	$\square \square$ $Pz_1^2 0\rangle$	\longleftrightarrow $\square \square$ $Pz_1^1 1\rangle$	$\square \square$ $Sz_1^1 3\rangle$	\longleftrightarrow $\square \square$ $Pz_1^1 3\rangle$
$\frac{9}{2}$		$2 \cdot \square \square$ $Sz_1^1 2^{(\prime)}\rangle$	\longleftrightarrow $2 \cdot \square \square$ $Pz_1^1 2^{(\prime)}\rangle$	

Tabelle 5.3.: Die Darstellungen zu den niedrigsten Energien des $O(4)$ -Modells

und dieser Dualität der Sektoren erhält man (mit Ausnahme der Grundzustände) jeweils 4 Darstellungen mit demselben Young-Tableau. Die Entartung eines Eigenwerts ist damit

$$4 \cdot \dim \mathcal{D}_p^l \quad (5.74)$$

und die Dimension der Darstellung ist jeweils aus der allgemeinen Formel (5.41) zu bestimmen.

Da diese Ergebnisse zwar allgemeingültig, aber nicht besonders übersichtlich sind, ist in Tabelle (5.3) eine Übersicht über die Darstellungen zu den niedrigsten Energiewerten im Spezialfall des $O(4)$ -Modells erstellt worden. Die Tabelle ist nach unten fortzusetzen, indem die Potenzen von z_1 von Abschnitt zu Abschnitt um 1 zunehmen und dadurch die Young-Tableaux in ihrer ersten Zeile ein Kästchen hinzugewinnen. Für ein allgemeines $O(2n)$ -Modell sieht die Tabelle ähnlich aus, mit dem Unterschied, dass jeder Abschnitt aus n Zeilen besteht, in dem die Young-Tableaux von außen nach innen je ein Kästchen in der ersten Spalte hinzugewinnen.

5.2.2. Lösung des Modells für ungerade Dimensionen

Das Vorgehen im Falle des $O(2n+1)$ -Modells ist analog zu dem im Falle gerader Dimensionen und die Ergebnisse sind der Form nach ähnlich. Deshalb sollen in diesem Abschnitt die Ergebnisse in aller Kürze dargestellt werden.

Irreduzible Darstellungen des Drehimpulsoperators L_{ij} : Eine Basis der CSA und die Aufsteigeoperatoren zu den einfachen Wurzeln der $so(2n+1)$ haben in den bosonischen Operatoren nach Gleichung (5.38) die Form:

$$\begin{aligned} H_i &= z_i \partial_i - \bar{z}_i \bar{\partial}_i, & i &= 1 \dots n \\ E_i &= \frac{1}{i} (z_i \partial_{i+1} - \bar{z}_{i+1} \bar{\partial}_i), & i &= 1 \dots n-1 \\ E_n &= \frac{1}{i} (z_n \partial_{x_{2n+1}} - x_{2n+1} \bar{\partial}_n), \end{aligned} \quad (5.75)$$

Daraus ergeben sich die der Form nach identischen, bosonischen Höchstgewichtszustände zu:

$$z_1^l \quad \text{mit dem Young-Tableau} \quad \boxed{1} \boxed{2} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{L} \quad (5.76)$$

Irreduzible Darstellungen des Spinoperators S_{ij} : Die entsprechende Darstellung der Algebra in den fermionischen Operatoren lautet:

$$\begin{aligned} H_i &= \phi_i^\dagger \phi_i - \bar{\phi}_i^\dagger \bar{\phi}_i, & i &= 1 \dots n \\ E_i &= \frac{1}{i} (\phi_i^\dagger \phi_{i+1} - \bar{\phi}_{i+1}^\dagger \bar{\phi}_i), & i &= 1 \dots n-1 \\ E_n &= \frac{1}{i} (\phi_n^\dagger \chi_{2n+1} - \chi_{2n+1}^\dagger \bar{\phi}_n). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Die allgemeinen Eigenzustände aller CSA-Generatoren lauten nun

$$|\vec{p}q\vec{p}'\rangle = \phi_1^{\dagger p_1} \dots \phi_n^{\dagger p_n} \chi_{2n+1}^{\dagger q} \bar{\phi}_1^{\dagger p'_1} \dots \phi_n^{\dagger p'_n} |0\rangle. \quad (5.78)$$

Die $2n+2$ Höchstgewichtszustände sind gegeben durch die Bedingung

$$|p\rangle = |\vec{p}q\vec{p}'\rangle \quad \text{mit} \quad p_1 \geq \dots \geq p_n \geq q \geq p'_n \dots \geq p'_1, \quad (5.79)$$

wobei sich die Fermionzahl p nach

$$p = \sum_i (p_i + p'_i) + q \quad (5.80)$$

ergibt. Im Falle ungerader Dimensionen fällt die Besonderheit des n -Fermion-Sektors weg. Jeder Sektor des Fock-Raums \mathcal{C} wird durch genau eine Darstellung aufgespannt, mit der Bezeichnung, dem Young-Tableau und der Dimension:

$$\mathcal{D}_p^1, \quad \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p \end{array}}, \quad \dim \mathcal{D}_p^1 = \binom{2n+1}{p} \quad (5.81)$$

Irreduzible Darstellungen des Gesamtdrehimpulsoperators J_{ij} : Das Tensorprodukt der bosonischen mit den fermionischen Darstellungen wird nach den gleichen Regeln ausreduziert, nur dass ein Young-Tableau mit n Zeilen keinen Sonderfall mehr darstellt. Man erhält somit maximal 4 irreduzible Komponenten

$$\mathcal{D}_p^1 \otimes \mathcal{D}_1^l = \mathcal{D}_{p+1}^l \oplus \mathcal{D}_p^{l+1} \oplus \mathcal{D}_p^{l-1} \oplus \mathcal{D}_{p-1}^l \quad (5.82)$$

und die Spezialfälle mit drei Komponenten bleiben erhalten.

Um die Höchstgewichtszustände anzugeben, werden wiederum die skalaren Operatoren S, S^\dagger benötigt, die nun die Form

$$S = \vec{x}\vec{\chi} = \sum_i (z_i \phi_i + \bar{z}_i \bar{\phi}_i) + x_{2n+1} \chi_{2n+1}, \quad S^\dagger = \vec{x}\vec{\chi}^\dagger = \sum_i (\bar{z}_i \phi_i^\dagger + z_i \bar{\phi}_i^\dagger) + x_{2n+1} \chi_{2n+1}^\dagger \quad (5.83)$$

annehmen. Man stellt fest, dass die gesuchten Höchstgewichtszustände der Form nach identisch konstruiert werden, gemäß:

$$\mathcal{D}_p^{l+1} : z_1^l |p\rangle \quad \mathcal{D}_{p+1}^l : S z_1^{l-1} |p+1\rangle \quad (5.84)$$

$$\mathcal{D}_{p-1}^l : S^\dagger z_1^{l-1} |p-1\rangle \quad \mathcal{D}_p^{l-1} : [S, S^\dagger] z_1^{l-2} |p\rangle. \quad (5.85)$$

Als Projektionsoperator dient weiterhin $P = SS^\dagger$ und es entsteht analog zu Tabelle 5.2 die Tabelle 5.4.

Sektor	Darstellung	Eigenwerte	
bosonisch	$P z_1^l 0\rangle$	$\frac{1}{2}l(2n+l-1)$	$l \geq 0$
p-Fermion	$P z_1^l p\rangle$	$\frac{1}{2}(p+l)(2n+l-p+1)$	$l \geq 0$
$(1 \leq p \leq 2n-1)$	$S z_1^{l-1} p+1\rangle$	$\frac{1}{2}(p+l)(2n-1+l-p)$	$l \geq 1$
2n-Fermion	$P z_1^l 2n\rangle$	$\frac{1}{2}(l+1)(2n+l)$	$l \geq 0$
	$S 2n+1\rangle$	0	

Tabelle 5.4.: Energieeigenwerte in den verschiedenen Sektoren des $O(2n+1)$ -Modells

Man erhält also, trotz der Unterschiede in der zugrundeliegenden Gruppenstruktur, der Form nach identische Ergebnisse für die Höchstgewichtszustände der irreduziblen Darstellungen des Gesamtdrehimpulsoperators J_{ij} für gerade und ungerade Dimensionen, wenn man von der Besonderheit des n -Fermion-Sektors im $O(2n)$ -Modell absieht. Aufgrund dieser Ähnlichkeit sollen die Ergebnisse für ein allgemeines $O(n)$ -Modell noch einmal im Abschnitt 5.2.3 zusammenfassend dargestellt werden.

Als konkretes Beispiel sind in Tabelle 5.5 die Darstellungen zu den niedrigsten Eigenwerten des Hamiltonoperators im Fall des $O(5)$ -Modells aufgeführt.

5. Algebraische Lösung der Modelle

$E \setminus p$	0	1	2	3	4
0	• $ 0\rangle$				• $S 5\rangle$
2	\square $Pz_1^1 0\rangle$	\square $Pz_1^0 1\rangle$		\square $Sz_1^0 4\rangle$	\square $Pz_1^0 4\rangle$
3		$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Sz_1^0 2\rangle$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Pz_1^0 2\rangle \quad Sz_1^0 3\rangle$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Pz_1^0 3\rangle$	
5	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Pz_1^2 0\rangle$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Pz_1^1 1\rangle$		$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Sz_1^1 4\rangle$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Pz_1^1 4\rangle$
6		$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Sz_1^1 2\rangle$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Pz_1^1 2\rangle \quad Sz_1^1 3\rangle$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$ $Pz_1^1 3\rangle$	

Tabelle 5.5.: Die Darstellungen zu den niedrigsten Energien des $O(5)$ -Modells

5.2.3. Zusammenfassung der Ergebnisse für das $O(n)$ -Modell

Für ein allgemeines $O(n)$ -Modell zerfällt der Hilbertraum nach der Projektion in die irreduziblen Darstellungen des Gesamtdrehimpulses J_{ij} mit den in Tabelle 5.6 aufgeführten Höchstgewichtszuständen. Auch im allgemeinen Fall ist die Entartung der Grundzustands-

Sektor	Darstellung	Eigenwerte	
bosonisch	$Pz_1^l 0\rangle$	$\frac{1}{2}l(n+l-2)$	$l \geq 0$
p-Fermion	$Pz_1^l p\rangle$	$\frac{1}{2}(p+l)(n+l-p)$	$l \geq 0$
$(1 \leq p \leq n-2)$	$Sz_1^{l-1} p+1\rangle$	$\frac{1}{2}(p+l)(n-2+l-p)$	$l \geq 1$
$n-1$ -Fermion	$Pz_1^l n-1\rangle$	$\frac{1}{2}(l+1)(n+l-1)$	$l \geq 0$
	$S n\rangle$	0	

Tabelle 5.6.: Energieeigenwerte in den verschiedenen Sektoren des $O(n)$ -Modells

energie gleich 2 und die der höheren Energien ergibt sich nach

$$4 \cdot \dim \mathcal{D}_p^l \tag{5.86}$$

aus der Dimension der jeweiligen Darstellung, da zu jedem Young-Tableau vier unterschiedliche Darstellungen auftreten. Die Dimension der Darstellung lässt sich mit den Formeln (5.41) und (5.42) für gerade und ungerade Dimensionen berechnen. Ein struktureller Unterschied zwischen geraden und ungeraden Dimension ist, dass in geraden Dimensionen in den Sektoren mit Fermionzahl $n/2$ und $n/2 - 1$ je zwei Darstellungen mit gleicher Energie existieren, während dies bei ungerader Dimension nur im Sektor mit Fermionzahl $(n-1)/2$ der Fall ist.

In beliebiger Dimension sind die Darstellungen

$$\begin{aligned} Sz_1^l|p\rangle &\longleftrightarrow Pz_1^l|p\rangle & p = 1 \dots n-1, l \geq 0 \\ Pz_1^l|0\rangle &\longleftrightarrow Pz_1^{l-1}|1\rangle & l \geq 1 \end{aligned} \quad (5.87)$$

durch Supersymmetrietransformationen miteinander verbunden und nur die Grundzustände sind nicht Teil eines Supermultipletts.

Da die Darstellungen in Tabelle 5.6 eine Basis des gesamten Hilbertraums des Systems bilden, lassen sich aus den Höchstgewichtszuständen durch Anwendung von Absteigeoperatoren sämtliche Energieeigenzustände mitsamt Eigenwerten berechnen. Es ist also gelungen, das quantenmechanische supersymmetrische $O(n)$ -Modell mit Methoden der Gruppentheorie zu lösen.

5.2.4. Vergleich der algebraischen Lösung des $O(3)$ -Modells mit früheren Ergebnissen

In diesem Abschnitt soll die Lösung des $O(2n+1)$ -Modells auf das $O(3)$ -Modell spezialisiert werden und mit den Ergebnissen aus Kapitel 4.3 verglichen werden.

Aus Tabelle 5.6 entnimmt man die Höchstgewichtszustände der auftretenden Darstellungen für das $O(3)$ -Modell zu:

	bosonisch	1 Fermion	2 Fermionen
Grundzustände:	$ 0\rangle$		$S\phi_1^\dagger\chi_3^\dagger\bar{\phi}_1^\dagger 0\rangle$
angeregte Zustände:	$z_1^l 0\rangle$	$Pz_1^{l-1}\phi_1^\dagger 0\rangle$	$Pz_1^{l-1}\phi_1^\dagger\chi_3^\dagger 0\rangle$

Nun soll eine Koordinatentransformation in Kugelkoordinaten durchgeführt werden, um zu zeigen, dass diese Zustände (bis auf Normierung) genau den Wellenfunktionen aus Kapitel 4.3 entsprechen, die aus den Kugelflächenfunktionen Y_l gebildet werden, da diese den Höchstgewichtszuständen entsprechen.

Aus dem bosonischen Grundzustand erhält man, dass das Vakuum in beiden Beschreibungen übereinstimmt. Für die angeregten bosonischen Zustände gilt:

$$z_1^l|0\rangle = (x_1 + ix_2)^l|0\rangle \sim Y_l|0\rangle \quad (5.88)$$

Für den 2-Fermion-Sektor benötigt man die Beobachtung

$$z_1^{l-1}P\phi_1^\dagger\chi_3^\dagger|0\rangle = iz_1^l(x_1\chi_2^\dagger\chi_3^\dagger + x_2\chi_3^\dagger\chi_1^\dagger + x_3\chi_1^\dagger\chi_2^\dagger)|0\rangle = \frac{i}{2}z_1^l\epsilon_{ijk}x_i\chi_j^\dagger\chi_k^\dagger|0\rangle \sim Y_l\vec{x}\vec{\Psi}^\dagger|0\rangle \quad (5.89)$$

um die Äquivalenz der Beschreibungen einzusehen. Im 1-Fermion-Sektor schließlich erhält man

$$\begin{aligned} Pz_1^{l-1}\phi_1^\dagger|0\rangle &= z_1^{l-1}(z_1\bar{z}_1\phi_1^\dagger - z_1^2\bar{\phi}_1^\dagger - z_1x_3\chi_3^\dagger + x_3^2\chi_1^\dagger)|0\rangle \\ &= \frac{z_1^{l-1}}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_2^2 - ix_1x_2 + x_3^2 \\ ix_1^2 - x_1x_2 + ix_3^2 \\ -x_1x_3 - ix_2x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{f}_1} \cdot \chi^\dagger|0\rangle = \vec{f}_1\vec{\Psi}^\dagger|0\rangle, \end{aligned} \quad (5.90)$$

5. Algebraische Lösung der Modelle

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $\vec{x}f_1 = 0$ gilt.

In Kugelkoordinaten erhält man für \vec{f}_1 in Übereinstimmung mit Gleichung (4.34)

$$\vec{f}_1 \vec{e}_\varphi = C_0 \cdot \frac{-i\partial_\varphi Y_{ll}}{\sin(\theta)} \quad \vec{f}_1 \vec{e}_\theta = C_0 \cdot (-i\partial_\theta Y_{ll}) \quad (5.91)$$

mit einer für beide Komponenten gleichen Konstante C_0 .

Für den zweiten Höchstgewichtszustand im 1-Fermion-Sektor ergibt die Rechnung

$$S z_1^{l-1} \phi_1^\dagger \chi_3^\dagger |0\rangle = \underbrace{\frac{z_1^{l-1}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -x_3 \\ -ix_3 \\ x_1 + ix_2 \end{pmatrix}}_{\vec{f}_2} \cdot \vec{\chi}^\dagger |0\rangle = \vec{f}_2 \vec{\Psi}^\dagger |0\rangle \quad (5.92)$$

und man bekommt in Kugelkoordinaten

$$\vec{f}_2 \vec{e}_\varphi = (-iC_0)(-i\partial_\theta Y_{ll}) \quad \vec{f}_2 \vec{e}_\theta = (-iC_0) \frac{i\partial_\varphi Y_{ll}}{\sin(\theta)}. \quad (5.93)$$

Dies entspricht Gleichung (4.35). Damit konnte eine vollständige Äquivalenz der Lösung des $O(3)$ -Modells in Kugelkoordinaten und in Koordinaten des umgebenden Raums gezeigt werden, was einen gewissen Test für die Richtigkeit der allgemeinen algebraischen Lösung des $O(n)$ -Modells darstellt.

5.3. Algebraische Lösung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dass sich auch das $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modell algebraisch lösen lässt, wobei sich allerdings einzelne Schritte als etwas komplizierter erweisen. In Kapitel 3.3.3 konnte gezeigt werden, dass der Hamiltonian des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells proportional zum quadratischen Casimir-Operator der $su(n)$ -Algebra ist, also gilt

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n D_{jk} D_{kj} \quad \text{mit } D_{jk} = \bar{z}_j \bar{\partial}_k - z_k \partial_j + \chi_{+j}^\dagger \chi_{+k} + \chi_{-j}^\dagger \chi_{-k} - \delta_{jk} \quad (5.94)$$

und der FCC, der die Eichinvarianz des Modells sichert, auf dem physikalischen Hilbertraum durch die Bedingung

$$\sum_{j=1}^n D_{jj} |\Phi_{\text{phys}}\rangle = 0 \quad (5.95)$$

implementiert werden kann. Man erkennt, dass die D_{jk} einer Darstellung der $su(n)$ entsprechen, die nach der Form von Gleichung (5.24) gebildet wurde. Eine Basis der CSA und die zu den einfachen Wurzeln gehörenden Auf- und Absteigeoperatoren sind daher gegeben durch

$$\begin{aligned} H_i &= D_{ii} - D_{i+1 \ i+1} \\ E_i &= D_{i \ i+1} & i &= 1 \dots n-1 \\ E_i^\dagger &= D_{i+1 \ i} \end{aligned} \quad (5.96)$$

Diese Operatoren sehen der bei der Lösung der $O(n)$ -Modelle wichtigen Darstellung insofern ähnlich, als dass sie ebenfalls aus zwei Sorten von bosonischen und zwei Sorten von fermionischen Operatoren gebildet werden. Ein wesentlicher Unterschied ist jedoch, dass aufgrund der einfacheren Struktur der $su(n)$ -Algebra kein Aufsteigeoperator existiert, der jeweils die beiden Sorten von Operatoren mischt. Es handelt sich daher in diesem Fall um eine Produktdarstellung von vier Darstellungen der $su(n)$ -Algebra (für jede Sorte der bosonischen und fermionischen Operatoren eine), deren irreduzible Komponenten bestimmt werden müssen. Hierzu ist es notwendig, zunächst die irreduziblen Komponenten der einzelnen vier Darstellungen zu finden, diese miteinander zu tensorieren und auszureduzieren. Dies soll in zwei Schritten geschehen: Zunächst werden die beiden bosonischen und fermionischen Darstellungen tensoriert und danach deren irreduzible Komponenten noch einmal tensoriert (und ausreduziert).

5.3.1. Bosonische Höchstgewichtszustände und deren Tensorprodukt

Für die beiden Sorten bosonischer Operatoren ergibt sich die Darstellung aus den Summanden der obigen Gleichungen zu

$$\bar{H}_i = \bar{z}_i \bar{\partial}_i - \bar{z}_{i+1} \bar{\partial}_{i+1} \qquad H_i = z_{i+1} \partial_{i+1} - z_i \partial_i \qquad (5.97)$$

$$\bar{E}_i = \bar{z}_i \bar{\partial}_{i+1} \qquad E_i = -z_{i+1} \partial_i \qquad (5.98)$$

Aus dieser Form der Aufsteigeoperatoren lassen sich die möglichen Höchstgewichtszustände ablesen (wobei die mögliche radiale Funktion wie im Fall des $O(n)$ -Modells direkt weggelassen werden soll) zu

$$\bar{z}_1^{\bar{l}}|0\rangle \quad \text{und} \quad z_n^l|0\rangle, \qquad (5.99)$$

die bezüglich der jeweiligen CSA-Generatoren die Eigenwerte $(\bar{l}, 0, \dots, 0)$ bzw. $(0, \dots, 0, l)$ besitzen. Die zugehörigen Young-Tableaux sind daher

$$\bar{z}_1^{\bar{l}}|0\rangle : \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{\bar{l}} \qquad z_n^l|0\rangle : n-1 \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right\}_l \qquad (5.100)$$

Nach den Regeln zur Ausreduktion mittels $su(n)$ Young-Tableaux erhält man für das Tensorprodukt

$$n-1 \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right\}_l \otimes \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{\bar{l}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \dots \oplus \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right\}_{\bar{l}-l} \oplus \dots \oplus \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right\}_{l-\bar{l}} \qquad (5.101)$$

5. Algebraische Lösung der Modelle

Der erste Summand hat das insgesamt höchste Gewicht und damit den Höchstgewichtszustand $\bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^l |0\rangle$. Die anderen Summanden erhält man, wenn jeweils ein \bar{z} mit einem z kontrahiert wird. Die Ausreduktion lässt sich also formal in Höchstgewichtszuständen schreiben als:

$$\left(\bar{z}_1^{\bar{l}} \otimes z_n^l\right) |0\rangle = \bigoplus_{i=0}^{\min\{\bar{l}, l\}} (\bar{z}z)^i \bar{z}_1^{\bar{l}-i} z_n^{l-i} |0\rangle \quad (5.102)$$

Es ist möglich, bereits zu diesem Zeitpunkt die Projektion der bosonischen Koordinaten auf die Einheitskugel vorwegzunehmen, also die Identität $\bar{z}z = 1$ zu benutzen. Dadurch lässt sich der allgemeine, rein bosonische Höchstgewichtszustand in der Form

$$\bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^l |0\rangle \quad \bar{l}, l \geq 0 \quad (5.103)$$

schreiben.

5.3.2. Fermionische Höchstgewichtszustände und deren Tensorprodukt

Für die beiden Darstellungen in fermionischen Operatoren gilt

$$H_{+i} = \chi_{+i}^\dagger \chi_{+i} - \chi_{+i+1}^\dagger \chi_{+i+1} \quad H_{-i} = \chi_{-i}^\dagger \chi_{-i} - \chi_{-i+1}^\dagger \chi_{-i+1} \quad (5.104)$$

$$E_{+i} = \chi_{+i}^\dagger \chi_{+i+1} \quad E_{-i} = \chi_{-i}^\dagger \chi_{-i+1} \quad (5.105)$$

Die je $n+1$ Höchstgewichtszustände bezüglich dieser Aufsteigeoperatoren lassen sich wiederum ablesen und nehmen die Form

$$|m_+\rangle = \chi_{+1}^\dagger \chi_{+2}^\dagger \cdots \chi_{+m_+}^\dagger |0\rangle \quad \text{und} \quad |m_-\rangle = \chi_{-1}^\dagger \chi_{-2}^\dagger \cdots \chi_{-m_-}^\dagger |0\rangle \quad (5.106)$$

an. Zu diesem Höchstgewichtsvektor gehört die Darstellung mit dem Young-Tableau und der Dimension

$$|m_\pm\rangle : m_\pm \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \quad \dim_{m_\pm} = \binom{n}{m_\pm}. \quad (5.107)$$

Die Dimensionen der Darstellungen addieren sich jeweils zu 2^n , so dass sichergestellt ist, dass diese irreduziblen Darstellungen jeweils den gesamten Fock-Raum \mathcal{C}_\pm aufspannen. Wiederum soll das Tensorprodukt dieser allgemeinen Darstellungen mittels Young-Tableaux ausreduziert werden:

$$m_+ \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \otimes m_- \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \square \ \square \\ \square \ \square \\ \square \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{c} \square \ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \oplus \cdots \oplus \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \ \square \\ \square \end{array} \right\} \oplus \cdots \oplus \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_+ + m_- - n \quad \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right\} \quad \text{für } m_+ + m_- \geq n \\ m_+ + m_- \quad \left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \quad \text{für } m_+ + m_- < n \end{array} \right. \quad (5.108)$$

Definiert man die speziellen Vektoren $|m_+, m_-\rangle$ im Produktraum der Fock-Räume \mathcal{C}_+ und \mathcal{C}_- wie folgt

$$|m_+, m_-\rangle = \begin{cases} \chi_{+1}^\dagger \chi_{-1}^\dagger \cdots \chi_{+m_+}^\dagger \chi_{-m_-}^\dagger \chi_{+m_+}^\dagger \cdots \chi_{+m_+}^\dagger |0\rangle & m_+ \geq m_- \\ \chi_{+1}^\dagger \chi_{-1}^\dagger \cdots \chi_{+m_+}^\dagger \chi_{-m_+}^\dagger \chi_{-m_+}^\dagger \cdots \chi_{-m_-}^\dagger |0\rangle & m_+ \leq m_-, \end{cases} \quad (5.109)$$

dann findet man, dass sich sämtliche Höchstgewichtszustände obiger Zerlegung als Vektoren dieser Form schreiben lassen, auf die der skalare Operator $(\chi_+^\dagger \chi_-)^i$ wirkt. Man erhält

$$|m_+\rangle_{\mathcal{C}_+} \otimes |m_-\rangle_{\mathcal{C}_-} = \begin{cases} \bigoplus_{i=0}^{\min(m_-, n-m_+)} (\chi_-^\dagger \chi_+)^i |m_+ + i, m_- - i\rangle & m_+ \geq m_- \\ \bigoplus_{i=0}^{\min(m_+, n-m_-)} (\chi_+^\dagger \chi_-)^i |m_+ - i, m_- + i\rangle & m_+ \leq m_- \end{cases} \quad (5.110)$$

Es gilt die Relation

$$\frac{(\chi_-^\dagger \chi_+)^p}{p!} |m_+, m_-\rangle = \frac{(\chi_+^\dagger \chi_-)^{m_+ - m_- - p}}{(m_+ - m_- - p)!} |m_-, m_+\rangle \quad \text{für } m_+ \geq m_-, \quad (5.111)$$

die per Induktion bewiesen werden soll. Der Induktionsanfang

$$\frac{(\chi_-^\dagger \chi_+)^{m_+ - m_-}}{(m_+ - m_-)!} |m_+, m_-\rangle = |m_-, m_+\rangle \quad (5.112)$$

gilt, da jede Anwendung von $(\chi_-^\dagger \chi_+)$ eine überzählige χ_+^\dagger -Komponente durch die entsprechende χ_-^\dagger -Komponente ersetzt und nach $(m_+ - m_-)$ -maliger Anwendung $(m_+ - m_-)!$ -mal der gleiche Term $|m_-, m_+\rangle$ entsteht. Der Induktionsschluss ist

$$\begin{aligned} \frac{(\chi_+^\dagger \chi_-)^{m_+ - m_- - p + 1}}{(m_+ - m_- - p + 1)!} |m_-, m_+\rangle &= \frac{[\chi_+^\dagger \chi_-, (\chi_-^\dagger \chi_+)^p]}{(m_+ - m_- - p + 1) p!} |m_+, m_-\rangle \\ &= \frac{(\chi_-^\dagger \chi_+)^{p-1} (N_+ - N_- - p + 1)}{(p-1)! (m_+ - m_- - p + 1)} |m_+, m_-\rangle \\ &= \frac{(\chi_-^\dagger \chi_+)^{p-1}}{(p-1)!} |m_+, m_-\rangle. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Aufgrund dieser Überlegung ist also jeder rein fermionische Höchstgewichtszustand proportional zu einem Zustand der Form

$$(\chi_-^\dagger \chi_+)^p |m_+, m_-\rangle \quad \text{mit } m_+ \geq m_-, 0 \leq p \leq m_+ - m_-. \quad (5.114)$$

Es lässt sich zeigen, dass auch jeder dieser Zustände in einem der Tensorprodukte auftreten muss (nämlich in $|m_+ - p\rangle \otimes |m_- + p\rangle$) und die Zustände dieser Form daher eine Basis des $\mathcal{C}_+ \otimes \mathcal{C}_-$ bilden.

5.3.3. Tensorprodukt der bosonischen und fermionischen Darstellungen

Als letzter Schritt muss nun eine allgemeine bosonische Darstellung mit einer fermionischen Darstellung tensoriert werden. Dies soll ebenfalls mit Hilfe von Young-Tableaux geschehen. Ziel der folgenden etwas umfangreichen Überlegung ist, dass das Tensorprodukt

$$\bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^l \otimes (\chi_-^\dagger \chi_+)^p |m_+, m_-\rangle \quad (5.115)$$

5. Algebraische Lösung der Modelle

im allgemeinen Fall in höchstens 16 irreduzible Darstellungen zerfällt. Da der skalare Operator $(\chi_-^\dagger \chi_+)^p$ nur auf den zweiten Faktor wirkt, gilt

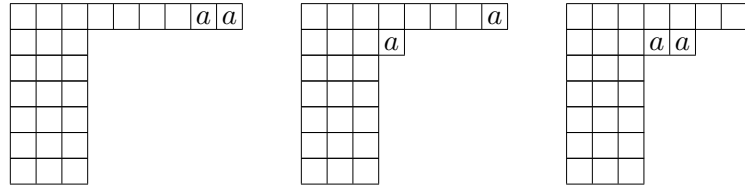
$$\bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^l \otimes (\chi_-^\dagger \chi_+)^p |m_+, m_-\rangle = (\chi_-^\dagger \chi_+)^p \left(\bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^l \otimes |m_+, m_-\rangle \right) \quad (5.116)$$

und es genügt, für das spezielle Tensorprodukt mit $p = 0$ Höchstgewichtszustände zu ermitteln, da man diejenigen für $p \neq 0$ durch Anwendung von $(\chi_-^\dagger \chi_+)^p$ erhält. Außerdem kann weiterhin o.B.d.A. $m_+ \geq m_-$ angenommen werden.

In der Sprache der Young-Tableaux erhält man für das allgemeine Tensorprodukt⁵

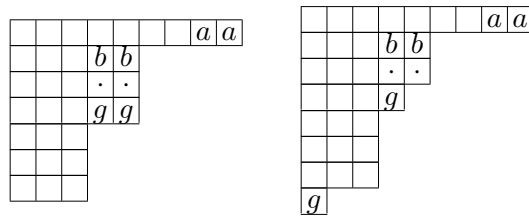
$$n-1 \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\square \square \square \square \square \square \square}^{\bar{l}+l} \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \end{array} \right\} \otimes m_+ \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & b \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline g & g \\ \hline h & \\ \hline i & \\ \hline \end{array} \\ m_- \end{array} \right\} \quad (5.117)$$

Zunächst gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, die beiden Kästchen der ersten Zeile so anzulegen, dass das Tableau danach noch um weitere Kästchen erweitert werden kann:

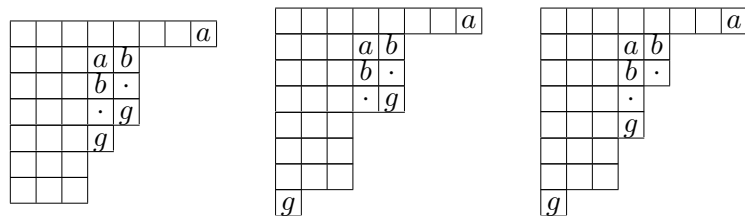


$$(5.118)$$

Bis zur $(m_- - 1)$ -ten Zeile gibt es danach nur genau eine Möglichkeit, das jeweilige Tableau fortzusetzen. Von den letzten beiden Kästchen mit doppelt vorkommendem Buchstaben darf eines in die n -te Zeile gebracht werden, ohne dass dies automatisch zu einer ungültigen Buchstabenfolge führt. Man erhält dadurch folgende weitere Möglichkeiten:



$$(5.119)$$



$$(5.120)$$

⁵Die Wahl der Buchstaben g, h, i ist willkürlich und soll den allgemeinen Fall darstellen.

5.3. Algebraische Lösung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

			a	a				
			b	b				
			·	·				
			g	g				

			a	a				
			b	b				
			·	·				
				g				

(5.121)

Mit Ausnahme des ersten Tableaus in (5.120) ist das Anfügen von weiteren einzelnen Kästchen bis zum vorletzten Kästchen eindeutig. Das letzte Kästchen kann entweder in der n -ten Zeile oder in der $(l+1)$ -ten Spalte angefügt werden, so dass aus jedem der sechs Tableaux wiederum zwei unterschiedliche Tableaux entstehen. Für das erste Tableau in (5.120) gibt es zwei Möglichkeiten, das erste einfach vorkommende Kästchen anzufügen und wiederum zwei Möglichkeiten für das letzte Kästchen. Somit entstehen aus diesem Tableau vier Möglichkeiten, die zusammen mit den anderen 12 auf maximal 16 irreduzible Darstellungen im Tensorprodukt führen.

Die Dynkin-Koeffizienten der auftretenden Darstellungen sind alle von der Form $(a, \dots, 1, \dots, 1, \dots, b)$, wobei die Punkte für verschwindende Koeffizienten stehen. Die auftretenden Darstellungen können also durch die Angabe von vier Zahlen $\mathcal{D}(a, b, i, j)$ charakterisiert werden, wobei i, j (mit $i \leq j$) die Positionen sind, an denen die Koeffizienten 1 vorkommen. Damit lässt sich das ausreduzierte Tensorprodukt aufschreiben als

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{D}(\bar{l}, l, 0, 0) \otimes \mathcal{D}(0, 0, m_-, m_+) & (5.122) \\
 & = \mathcal{D}(\bar{l}, l, m_-, m_+) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}, l-1, m_- - 1, m_+) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}, l-1, m_-, m_+ - 1) \\
 & \oplus \mathcal{D}(\bar{l}, l-2, m_- - 1, m_+ - 1) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_-, m_+ + 1) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_- - 1, m_+ + 1) \\
 & \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_-, m_+) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-2, m_- - 1, m_+) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_-, m_+ + 1, m_+) \\
 & \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_-, m_+) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_- + 1, m_+ - 1) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-2, m_-, m_+ - 1) \\
 & \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-2, l, m_- + 1, m_+ + 1) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-2, l-1, m_-, m_+ + 1) \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-2, l-1, m_- + 1, m_+) \\
 & \oplus \mathcal{D}(\bar{l}-2, l-2, m_-, m_+).
 \end{aligned}$$

Man erkennt in dieser Ausreduktion folgendes Muster: „Auf Kosten“ des ersten bzw. letzten Dynkin-Koeffizienten kann man die Positionen i, j jeweils höchstens um eins nach rechts bzw. links verschieben und alle 16 so zu bildenden Darstellungen treten im allgemeinen Tensorprodukt auf.

Allerdings gibt es eine Reihe von Spezialfällen, in denen nicht alle 16 verschiedenen Darstellungen auftreten. Diese Spezialfälle hängen von den Werten der Zahlen (\bar{l}, l, m_-, m_+) ab und die meisten treten für die jeweils kleinst- und größtmöglichen Zahlenwerte ein. In diesen Fällen ist die Zuordnung zwischen den vier Zahlen (a, b, i, j) und der Form des Young-Tableaus nicht mehr eindeutig; so gehören $(a, b-1, 1, j)$ und $(a, b, 0, j)$ zum gleichen Young-Tableau. Hier sollen einige Fälle erwähnt werden, die leicht nachvollziehbar und systematisch anzuordnen sind. Insbesondere Kombinationen der unten aufgeführten Fälle führen zu neuen Spezialfällen, für die es im Zweifel einfacher ist, die Ausreduktion erneut durchzuführen, als sie alle im Einzelnen aufzulisten. Die Fälle, die sich aus speziellen Werten für m_+, m_- ergeben, sind:

5. Algebraische Lösung der Modelle

- Für $m_- = 0$ treten in Abhängigkeit von m_+ maximal die vier Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{l}, l, 0, m_+) & \quad 0 \leq m_+ \leq n, & \mathcal{D}(\bar{l}, l-1, 0, m_+-1) & \quad 1 \leq m_+ \leq n-1, \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l, 0, m_++1) & \quad 1 \leq m_+ \leq n-2, & \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, 0, m_+) & \quad 2 \leq m_+ \leq n-1, \end{aligned}$$

auf.

- Für $m_+ = n$ treten analog maximal die vier Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{l}, l, m_-, n) & \quad 0 \leq m_- \leq n, & \mathcal{D}(\bar{l}, l-1, m_- -1, n) & \quad 1 \leq m_- \leq n-1, \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_- +1, n) & \quad 1 \leq m_- \leq n-2, & \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_-, n) & \quad 2 \leq m_- \leq n-1, \end{aligned}$$

auf.

- Für $m_- = 1$ fallen mindestens die vier Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{l}-2, l-2, m_-, m_+) & \quad \mathcal{D}(\bar{l}-2, l-1, m_-, m_++1) \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-2, m_-, m_+-1) & \quad \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_-, m_+) \end{aligned} \quad (5.123)$$

weg. Für $m_+ = 1, 2, (n-1)$ treten jeweils nur 6, 11, 9 verschiedene Darstellungen auf.

- Für $m_+ = n-1$ fallen ebenfalls mindestens vier Darstellungen weg:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{l}-2, l, m_- +1, m_++1) & \quad \mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_-, m_++1) \\ \mathcal{D}(\bar{l}-2, l-1, m_-, m_++1) & \quad \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_- -1, m_++1) \end{aligned} \quad (5.124)$$

Für $m_- = n-2$ bzw. $m_- = n-1$ treten nur 11 bzw. 6 Darstellungen auf.

- Für $m_+ = m_- + 1$ fällt die Darstellung mit $m_+ - 1, m_- + 1$ weg.
- Für $m_+ = m_-$ werden die insgesamt 6 Paare von Darstellungen äquivalent, die unter Austausch von i und j ineinander übergehen, da sich kein Unterschied ergibt, wenn m_+ oder m_- um eins verändert wird.

Für spezielle Werte von \bar{l}, l erhält man:

- Für $\bar{l} = 0$ bzw. $l = 0$ treten nur maximal die vier Darstellungen mit \bar{l} bzw. l auf.
- Für $\bar{l} = 1$ bzw. $l = 1$ fallen die 4 Darstellungen mit $\bar{l} - 2$ bzw. $l - 2$ weg.

Kombinationen dieser Spezialfälle führten in allen überprüften Fällen auch zu den Kombinationen der entsprechenden Bedingungen. Da aber nicht alle Spezialfälle systematisch überprüft wurden, sollte zweifelsfalls die Ausreduktion per Young-Tableaux durchgeführt werden.

Nachdem nun die auftretenden irreduziblen Darstellungen gefunden sind, ist es die Aufgabe, die entsprechenden Höchstgewichtszustände zu bestimmen. Dies soll wiederum dadurch geschehen, dass skalare Operatoren gefunden werden, die einen Zustand der Form

$$\bar{z}_1^{\bar{k}} z_n^k |p_+, p_-\rangle, \quad (5.125)$$

5.3. Algebraische Lösung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

der so gewählt ist, dass er zur Darstellung mit dem richtigen Young-Tableau gehört, auf den gesuchten Höchstgewichtszustand abbildet. Dieser Höchstgewichtszustand $|HW\rangle$ muss außerdem noch die weiteren Bedingungen

$$\bar{z}\bar{\partial}|HW\rangle = \bar{l}|HW\rangle \quad N_+|HW\rangle = \chi_+^\dagger\chi_+|HW\rangle = m_+|HW\rangle \quad (5.126)$$

$$z\partial|HW\rangle = l|HW\rangle \quad N_-|HW\rangle = \chi_-^\dagger\chi_-|HW\rangle = m_-|HW\rangle \quad (5.127)$$

erfüllen, wenn er eine irreduzible Komponente des Tensorprodukts

$$\bar{z}_1^{\bar{l}}z_n^l \otimes |m_+, m_-\rangle \quad (5.128)$$

ist. Diese Bedingungen charakterisieren den Höchstgewichtszustand aber noch nicht vollständig. Betrachtet man den hermiteschen Operator

$$F = (\chi_+^\dagger\chi_-)(\chi_-^\dagger\chi_+), \quad (5.129)$$

so stellt man fest, dass dieser auf den Zuständen der Form $|m_+, m_-\rangle$ diagonal ist mit den Eigenwerten

$$F|m_+, m_-\rangle = \begin{cases} (m_+ - m_-)|m_+, m_-\rangle & m_+ \geq m_- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.130)$$

Da der Operator F skalar ist, besitzt er den gleichen Eigenwert auf allen Zuständen der zu dem Höchstgewichtszustand $|m_+, m_-\rangle$ gehörenden Darstellung. Da er nur auf den fermionischen Anteil des Tensorproduktes wirkt, muss er auch auf sämtlichen Produktdarstellungen den gleichen Eigenwert haben. Man erhält also die zusätzliche Bedingung

$$F|HW\rangle = (m_+ - m_-)|HW\rangle \quad \text{da o.B.d.A. } m_+ \geq m_- \quad (5.131)$$

Aus diesen Bedingungen lassen sich Bedingungen an die Vertauschungsrelationen der gesuchten skalaren Operatoren S mit den auf $|HW\rangle$ diagonalen Operatoren finden. So muss z.B. gelten:

$$\begin{aligned} z\partial|HW\rangle &= z\partial S \bar{z}_1^{\bar{k}}z_n^k|p_+, p_-\rangle = ([z\partial, S] + kS)\bar{z}_1^{\bar{k}}z_n^k|p_+, p_-\rangle = l|HW\rangle \\ \iff [z\partial, S]\bar{z}_1^{\bar{k}}z_n^k|p_+, p_-\rangle &= (l - k)S\bar{z}_1^{\bar{k}}z_n^k|p_+, p_-\rangle \end{aligned} \quad (5.132)$$

Für die weiteren Operatoren erhält man analog, dass der jeweilige gesuchte Operator S auf dem Zustand $\bar{z}_1^{\bar{k}}z_n^k|p_+, p_-\rangle$ die Bedingungen

$$[z\partial, S] = (l - k)S \quad [N_+, S] = (m_+ - p_+)S \quad (5.133)$$

$$[\bar{z}\bar{\partial}, S] = (\bar{l} - \bar{k})S \quad [N_-, S] = (m_- - p_-)S \quad (5.134)$$

und

$$[F, S] = \begin{cases} (m_+ - m_- - (p_+ - p_-))S & m_+ > m_-, p_+ > p_- \\ (m_+ - m_-)S & m_+ > m_-, p_+ \leq p_- \\ -(p_+ - p_-)S & m_+ \leq m_-, p_+ > p_- \\ 0 & m_+ \leq m_-, p_+ \leq p_- \end{cases} \quad (5.135)$$

5. Algebraische Lösung der Modelle

erfüllen muss. Aus der allgemeinen Ausreduktion des Tensorproduktes ist bekannt, dass für die entstehenden Young-Tableaux gilt:

$$|p_{\pm} - m_{\pm}| \leq 1, \quad l - k \leq 2, \quad \bar{l} - \bar{k} \leq 2. \quad (5.136)$$

In Verallgemeinerung der Lösung des $O(n)$ -Modells habe ich zunächst vermutet, dass die Operatoren $S_{\pm} = \bar{z}\chi_{\pm}$ und $S_{\pm}^{\dagger} = z\chi_{\pm}^{\dagger}$, sowie Produktbildungen davon (insgesamt gibt es 16 unabhängige), die gesuchten skalaren Operatoren wären, da sie die Eigenwerte von $N_{\pm}, z\partial, \bar{z}\bar{\partial}$ in der gewünschten Weise modifizieren. Man stellt jedoch fest, dass diese Operatoren die Bedingung bezüglich des Kommutators mit F nicht erfüllen. Man sieht hingegen leicht ein, dass die Operatoren $S'_{\pm} = \bar{z}\chi_{\mp}(\chi_{\mp}^{\dagger}\chi_{\pm})$ und $S'_{\pm}{}^{\dagger} = z\chi_{\mp}^{\dagger}(\chi_{\pm}^{\dagger}\chi_{\mp})$ ebenfalls den Bedingungen genügen, die auch von $S_{\pm}^{(\dagger)}$ erfüllt werden, weshalb eine Linearkombination der Operatoren S_{\pm} und S'_{\pm} zu suchen ist, die zusätzlich die gewünschte Kommutatorbedingung mit F erfüllt. Dabei stellt man fest, dass es aufgrund der Fallunterscheidung in (5.135) nicht immer möglich ist, eine feste Linearkombination zu finden, die die Bedingungen auf allen Zuständen obiger Form erfüllt. Beispielsweise ist

$$[F, S_{+}^{\dagger}] = S_{+}^{\dagger} + S_{+}^{\dagger}(\chi_{+}^{\dagger}\chi_{-}) \quad (5.137)$$

und da $(\chi_{+}^{\dagger}\chi_{-})$ auf Zuständen mit $p_{+} \geq p_{-}$ verschwindet, erfüllt S_{+}^{\dagger} alle obigen Bedingungen falls

$$m_{+} - p_{+} = 1, \quad m_{-} - p_{-} = 0, \quad p_{+} \geq p_{-} \Leftrightarrow m_{+} > m_{-}. \quad (5.138)$$

Für alle Zustände mit $p_{+} < p_{-}$ muss die Linearkombination

$$(p_{-} - p_{+})S_{+}^{\dagger} - S_{+}^{\prime\dagger} \quad (5.139)$$

verwendet werden, da für sie gilt

$$\begin{aligned} [F, (p_{-} - p_{+})S_{+}^{\dagger} - S_{+}^{\prime\dagger}] &= S_{+}^{\dagger}(p_{-} - p_{+} - N_{-} + N_{+} - F) - S_{+}^{\prime\dagger}(N_{-} - N_{+} - p_{-} + p_{+}) \\ &= 0 \quad \text{auf } |p_{+}, p_{-}\rangle \text{ mit } p_{+} < p_{-} \Leftrightarrow m_{+} \leq m_{-}. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Da nach wie vor $m_{+} \geq m_{-}$ angenommen werden darf, müssen für einige Operatoren keine Fallunterscheidungen gemacht werden, obwohl die Bedingungen nicht für alle möglichen m_{+}, m_{-} erfüllt sind. Im Folgenden sollen linear unabhängige Kombinationen der 8 Operatoren $S_{\pm}^{(\dagger)}, S'_{\pm}{}^{(\dagger)}$ gebildet und gezeigt werden, dass diese bei Beachtung obiger Bedingungen eindeutig zu den Höchstgewichtszuständen der 16 maximal auftretenden Darstellungen des Tensorprodukts führen.

Der Zustand mit dem absolut höchsten Gewicht im Tensorprodukt ist wie gewohnt durch das Produkt der Höchstgewichtszustände der Faktordarstellungen gegeben:

$$\mathcal{D}(\bar{l}, l, m_{-}, m_{+}) : \quad \bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^l |m_{+}, m_{-}\rangle. \quad (5.141)$$

Für die Darstellungen mit $m_{+} \pm 1$ oder $m_{-} \pm 1$ werden lineare Kombinationen der skalaren Operatoren benötigt. Man erhält aus obigem Beispiel

$$\mathcal{D}(\bar{l}, l - 1, m_{-}, m_{+} - 1) : \quad \begin{aligned} &S_{+}^{\dagger} \bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^{l-1} |m_{+} - 1, m_{-}\rangle & m_{+} > m_{-} \\ (S_{+}^{\dagger} - S_{+}^{\prime\dagger}) \bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^{l-1} |m_{+} - 1, m_{-}\rangle & m_{+} = m_{-} \end{aligned} \quad (5.142)$$

und analog

$$\mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_-, m_+): \quad \begin{array}{ll} S_- \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^l |m_+, m_- + 1\rangle & m_+ > m_- \\ (S_- + S'_-) \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^l |m_+, m_- + 1\rangle & m_+ = m_- \end{array} \quad (5.143)$$

$$\mathcal{D}(\bar{l}, l-1, m_-, m_+): \quad [(m_+ - m_- + 1)S_-^\dagger - S'_+{}^\dagger] \bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^{l-1} |m_+, m_- - 1\rangle \quad m_+ \geq m_- \quad (5.144)$$

$$\mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_-, m_+ + 1): \quad [(m_+ - m_- + 1)S_+ + S'_+] \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^l |m_+ + 1, m_-\rangle \quad m_+ \geq m_- \quad (5.145)$$

Als nächstes sollen quadratische Kombinationen der skalaren Operatoren betrachtet werden, was zu Höchstgewichten von sechs weiteren Darstellungen führt. Die ersten beiden sind diejenigen, bei denen die Positionen (i, j) beide um eins nach rechts bzw. nach links verschoben sind. Hier werden quadratische Kombinationen von $\alpha S_- + S'_-$ und $\beta S_+ + S'_+$ bzw. $\alpha S_-^\dagger + S'_+{}^\dagger$ und $\beta S_+^\dagger + S'_+{}^\dagger$ benötigt. Man stellt fest, dass sowohl Kommutator als auch Antikommutator der jeweiligen Operatoren auf den betrachteten Zuständen proportional zu $S_- S_+$ bzw. $S_-^\dagger S_+^\dagger$ sind und damit keine anderen quadratischen Kombinationen von Interesse sind. Man erhält also

$$\mathcal{D}(\bar{l}-2, l, m_-, m_+ + 1): \quad S_- S_+ \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^l |m_+ + 1, m_- + 1\rangle \quad (5.146)$$

und

$$\mathcal{D}(\bar{l}, l-2, m_-, m_+ - 1): \quad S_-^\dagger S_+^\dagger \bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^{l-2} |m_+ - 1, m_- - 1\rangle. \quad (5.147)$$

Für die beiden Darstellungen, bei denen Position i nach rechts und Position j nach links (bzw. umgekehrt) verschoben ist, treten erneut Fallunterscheidungen auf, da hier mehrere mögliche quadratische Kombinationen denkbar sind, von denen aber jeweils nur eine im jeweiligen Bereich die Bedingung (5.135) erfüllt. Es ergibt sich:

$$\mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_-, m_+ - 1): \quad (5.148)$$

$$\begin{cases} S_+^\dagger S_- \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-1} |m_+ - 1, m_- + 1\rangle & m_+ \geq m_- + 2 \\ ((m_- - m_+ + 1)S_+^\dagger - S'_+{}^\dagger)((m_- - m_+ + 2)S_- + S'_-) \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-1} |m_+ - 1, m_- + 1\rangle & m_+ < m_- + 2 \end{cases}$$

und

$$\mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_-, m_+ + 1): \quad (5.149)$$

$$((m_+ - m_- + 1)S_-^\dagger - S'_+{}^\dagger)((m_+ - m_- + 2)S_+ + S'_+) \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-1} |m_+ + 1, m_- - 1\rangle \quad m_+ \geq m_- - 2.$$

Schließlich sind noch die beiden Höchstgewichte der Darstellungen zu finden, bei denen Position i bzw. j hin- und zurückgeschoben wird, so dass zwei inäquivalente Darstellungen mit gleichem Young-Tableau entstehen. Hierfür kommen zunächst vier quadratische Bildungen der skalaren Operatoren in Frage, die alle notwendigen Bedingungen erfüllen:

$$A = ((m_+ - m_- + 1)S_+ + S'_+)S_+^\dagger \quad B = S_+^\dagger((m_+ - m_-)S_+ + S'_+) \quad (5.150)$$

$$C = ((m_+ - m_- + 1)S_-^\dagger - S'_+{}^\dagger)S_- \quad D = S_-((m_+ - m_-)S_-^\dagger - S'_+{}^\dagger) \quad (5.151)$$

5. Algebraische Lösung der Modelle

Allerdings stellt man fest, dass diese Operatoren den folgenden Beziehungen genügen:

$$\begin{aligned}
(A + B) + (C + D) &= 2(m_+ - m_- + 1)\bar{z}z \\
(A + B) - (C + D) &= 2(S_- S_-^\dagger - S_+^\dagger S_+) \\
(A - B) - (C - D) &= 2(m_+ - m_- + 1)(S_- S_-^\dagger - S_+^\dagger S_+)
\end{aligned} \tag{5.152}$$

Mit der Nebenbedingung $\bar{z}z = 1$ sieht man ein, dass die erste Kombination eine Darstellung liefert, die der Form der Darstellung (5.141) entspricht und dass die zweite Kombination proportional zur dritten ist. Daraus folgt, dass man alle von den Operatoren A, B, C, D erzeugten Darstellungen erhalten kann, wenn man, zusätzlich zu den bisherigen Darstellungen, nur die beiden Kombinationen $A - B$ und $C - D$ zulässt. Man erhält also für die Höchstgewichte der beiden Darstellungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{l} - 1, l - 1, m_-, m_+) &: (A - B)\bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-1} |m_+, m_-\rangle \\
\mathcal{D}(\bar{l} - 1, l - 1, m_-, m_+) &: (C - D)\bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-1} |m_+, m_-\rangle.
\end{aligned} \tag{5.153}$$

Natürlich könnten an dieser Stelle auch zwei andere unabhängige Kombinationen von $A - B$ und $C - D$ gewählt werden, deren zugehörige Darstellungen dann aber den gleichen Unterraum des Hilbertraums aufspannen. Aus Zeitgründen konnte leider nicht mehr untersucht werden, welche Kombination der $A - B, C - D$ in den Fällen zu wählen ist, in denen die Darstellung $\mathcal{D}(\bar{l} - 1, l - 1, m_-, m_+)$ nur einfach auftritt.

Analog zu den linearen Kombinationen gibt es vier Dreier-Kombinationen der Operatoren, die weitere vier Höchstgewichte erzeugen. Sie lauten

$$\mathcal{D}(\bar{l}-2, l-1, m_-, m_++1) : \left\{ (m_+ - m_- + 1)S_-^\dagger - S_-'^\dagger, S_- S_+ \right\} \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^{l-1} |m_++1, m_-\rangle \quad m_+ \geq m_-$$

$$\mathcal{D}(\bar{l}-1, l-2, m_--1, m_+) : \left\{ (m_+ - m_- + 1)S_+ - S_+' , S_+^\dagger S_-^\dagger \right\} \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-2} |m_+, m_--1\rangle \quad m_+ \geq m_-$$

$$\mathcal{D}(\bar{l}-2, l-1, m_-+1, m_+) : \begin{cases} S_- [S_+, S_+^\dagger] \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^{l-1} |m_+, m_-+1\rangle & m_+ > m_- \\ \{S_+^\dagger - S_+' , S_+ S_-\} \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^{l-1} |m_+, m_-+1\rangle & m_+ = m_- \end{cases} \tag{5.154}$$

$$\mathcal{D}(\bar{l}-1, l-2, m_-, m_+-1) : \begin{cases} S_+^\dagger [S_-, S_-^\dagger] \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-2} |m_+-1, m_-\rangle & m_+ > m_- \\ \{S_- + S_-' , S_-^\dagger S_+^\dagger\} \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-2} |m_+-1, m_-\rangle & m_+ = m_- \end{cases} \tag{5.155}$$

Die Kommutatoren/Antikommutatoren, die in den obigen Höchstgewichtszuständen auftreten, erklären sich dadurch, dass die entsprechenden Antikommutatoren/Kommutatoren trivial sind und Höchstgewichtszustände liefern, die proportional zu anderen schon aufgetretenen Höchstgewichtszuständen sind.

Als letzten, sechzehnten Höchstgewichtszustand erhält man schließlich folgende Viererkombination

$$\mathcal{D}(\bar{l} - 2, l - 2, m_-, m_+) : \left[S_+^\dagger, S_+ \right] \cdot \left[S_-^\dagger, S_- \right] \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^{l-2} |m_+, m_-\rangle. \tag{5.156}$$

Damit sind für alle maximal 16 im Tensorprodukt

$$\bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^l \otimes |m_+, m_-\rangle \quad \text{mit } m_+ \geq m_- \quad (5.157)$$

auftretenden Darstellungen die Höchstgewichtszustände angegeben. Die Höchstgewichtszustände des allgemeinen Tensorprodukts (5.115) ergeben sich nach (5.116) durch p -fache Anwendung des Operators $(\chi_-^\dagger \chi_+)$ auf die angegebenen Höchstgewichtszustände.

Nachdem nun bekannt ist, wie der gesamte Hilbertraum in irreduzible Darstellungen der Operatoren D_{ij} zerfällt, muss als letzter Schritt wiederum eine Projektion durchgeführt werden, um die überzähligen fermionischen Freiheitsgrade zu verlieren. Hierbei kommen folgende vier Projektionsoperatoren in Frage

$$\begin{aligned} P_1 &= S_+ S_+^\dagger S_- S_-^\dagger & P_3 &= S_+^\dagger S_+ S_- S_-^\dagger \\ P_2 &= S_+ S_+^\dagger S_-^\dagger S_- & P_4 &= S_+^\dagger S_+ S_-^\dagger S_- \end{aligned} \quad (5.158)$$

die die „radialen“ Fermionenzahlen N_{+r}, N_{-r} der physikalischen Zustände auf ± 1 festlegen. Die Lösungen, die sich für die verschiedenen Projektionen ergeben, sollten physikalisch äquivalent sein, da es sich einzig um verschiedene Einbettungen des physikalischen Unterraums in den gesamten Hilbertraum handelt. Leider konnte die Beziehung unterschiedlicher Projektionen zueinander nicht mehr genauer untersucht werden. Für die Angabe der allgemeinen Lösung soll der Projektionsoperator P_1 verwendet werden, für den $[P_1, (\chi_-^\dagger \chi_+)^p] = 0$ gilt, wodurch eine einfachere Darstellung der Lösung möglich ist. Für den Vergleich des $\mathbb{C}P^1$ -Modells mit dem $O(3)$ -Modell soll die Projektion P_2 verwendet werden, da hier die Identifikation der einzelnen Sektoren besonders leicht gelingt.

Wendet man den Projektor $P = P_1$ auf die Höchstgewichtszustände der einzelnen Darstellungen an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{l}, l, m_-, m_+) &: & P \bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^l |m_+, m_-\rangle \\ \mathcal{D}(\bar{l}, l-1, m_-, m_+ - 1) &: & 0 \\ \mathcal{D}(\bar{l}, l-1, m_- - 1, m_+) &: & 0 \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_-, m_+ + 1) &: & -S_- S_+ \left((m_+ - m_- + 1) S_-^\dagger - S_-'^\dagger \right) \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^l |m_+ + 1, m_-\rangle \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_- + 1, m_+) &: & \begin{cases} S_+ S_+^\dagger S_- \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^l |m_+, m_- + 1\rangle & m_+ > m_- \\ S_- S_+ (S_+^\dagger - S_+'^\dagger) \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^l |m_+, m_- + 1\rangle & m_+ = m_- \end{cases} \\ \mathcal{D}(\bar{l}, l-2, m_- - 1, m_+ - 1) &: & 0 \\ \mathcal{D}(\bar{l}-2, l, m_- + 1, m_+ + 1) &: & S_- S_+ \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^l |m_+ + 1, m_- + 1\rangle \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_- + 1, m_+ - 1) &: & 0 \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_- - 1, m_+ + 1) &: & 0 \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_-, m_+) &: & (m_+ - m_- + 2) P \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-1} |m_+, m_-\rangle \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-1, m_-, m_+) &: & (m_+ - m_-) P \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^{l-1} |m_+, m_-\rangle \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-2, m_-, m_+ - 1) &: & 0 \\ \mathcal{D}(\bar{l}-1, l-2, m_- - 1, m_+) &: & 0 \end{aligned}$$

5. Algebraische Lösung der Modelle

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{l}-2, l-1, m_-, m_+ + 1) &: S_- S_+ \left((m_+ - m_- + 1) S_-^\dagger - S_+^{\prime\dagger} \right) \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^{l-1} |m_+ + 1, m_-\rangle \\
\mathcal{D}(\bar{l}-2, l-1, m_- + 1, m_+) &: \begin{cases} S_- S_+ S_+^\dagger \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^{l-1} |m_+, m_- + 1\rangle & m_+ > m_- \\ S_+ S_- (S_+^\dagger - S_+^{\prime\dagger}) \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^{l-1} |m_+, m_- + 1\rangle & m_+ = m_- \end{cases} \\
\mathcal{D}(\bar{l}-2, l-2, m_-, m_+) &: P \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^{l-2} |m_+, m_-\rangle
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass einige der Darstellungen unter Projektion verschwinden und andere äquivalent zueinander werden. Alle obigen projizierten Höchstgewichtszustände entsprechen der Form nach denen der vier Darstellungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\bar{l}, l, m_-, m_+) &: P \bar{z}_1^{\bar{l}} z_n^l |m_+, m_-\rangle \\
\mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_-, m_+ + 1) &: -S_- S_+ \left((m_+ - m_- + 1) S_-^\dagger - S_+^{\prime\dagger} \right) \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^l |m_+ + 1, m_-\rangle \\
\mathcal{D}(\bar{l}-1, l, m_- + 1, m_+) &: \begin{cases} S_+ S_+^\dagger S_- \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^l |m_+, m_- + 1\rangle & m_+ > m_- \\ S_- S_+ (S_+^\dagger - S_+^{\prime\dagger}) \bar{z}_1^{\bar{l}-1} z_n^l |m_+, m_- + 1\rangle & m_+ = m_- \end{cases} \quad (5.159) \\
\mathcal{D}(\bar{l}-2, l, m_- + 1, m_+ + 1) &: S_- S_+ \bar{z}_1^{\bar{l}-2} z_n^l |m_+ + 1, m_- + 1\rangle.
\end{aligned}$$

Die anderen Zustände unterscheiden sich zwar für festes \bar{l}, l von diesen, doch besteht die Angabe einer Lösung des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells darin, alle voneinander verschiedenen Darstellungen zu finden, die für beliebige \bar{l}, l auftreten. In der Lösung des allgemeinen \mathbb{CP}^{n-1} -Modells treten daher nur Darstellungen der obigen Form auf, sowie diejenigen, die durch p -fache Anwendung des Operators $\chi_-^\dagger \chi_+$ ($p = 1 \dots (m_+ - m_-)$) daraus entstehen, da $\chi_-^\dagger \chi_+$ mit dem Projektionsoperator P_1 vertauscht. Leider blieb auch für die genauere Untersuchung der Struktur der Lösung des allgemeinen \mathbb{CP}^{n-1} -Modells nicht genügend Zeit. Insbesondere konnte nicht mehr untersucht werden, wie die vier obigen Darstellungen im allgemeinen Fall unter Supersymmetrietransformationen aufeinander abgebildet werden. Da das allgemeine \mathbb{CP}^{n-1} -Modell nicht näher betrachtet wurde, soll im nächsten Abschnitt anhand eines Beispiels gezeigt werden, wie man prinzipiell vorgehen muss, um aus den obigen Überlegungen die Lösung des \mathbb{CP}^{n-1} -Modells für beliebiges n zu konstruieren.

5.3.4. Lösung des \mathbb{CP}^1 -Modells

Als Beispiel für die Konstruktion einer Lösung eines beliebigen \mathbb{CP}^{n-1} -Modells soll hier das \mathbb{CP}^1 -Modell behandelt werden. Um die Eichinvarianz des Modells zu gewährleisten, muss Bedingung (5.95) erfüllt sein, die sich in die einfache Gleichung

$$\bar{l} - l + m_+ + m_- = n \quad (5.160)$$

übersetzt. Im Beispiel des \mathbb{CP}^1 -Modells gilt $n = 2$. Jetzt können die Darstellungen, die in den einzelnen Sektoren mit unterschiedlichen m_+, m_- auftreten, bestimmt werden. Dabei ist klar, dass m_\pm nur die Werte 0, 1 annehmen kann, da $m_\pm = 2$ auf null projiziert wird. Hierzu ist in jedem Sektor mit festem $m_+ \geq m_-$ das Tensorprodukt

$$(\chi_-^\dagger \chi_+)^p P \left(\bar{z}_1^{\bar{l}} z_2^l \otimes |m_+ + p, m_- - p\rangle \right) \quad p = 0 \dots \min(n - m_+, m_-) \quad (5.161)$$

5.3. Algebraische Lösung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

auszureduzieren. Im Prinzip könnten die auftretenden Höchstgewichtszustände nun direkt aus Gleichung (5.159) abgelesen werden, doch bildet das $\mathbb{C}P^1$ -Modell einen Sonderfall, da für $m_+ = 1$ bzw. $m_- = 1$ die Darstellungen $|m_+ \pm 1, m_- \rangle$ bzw. $|m_+, m_- \pm 1 \rangle$ das gleiche Young-Tableau haben. Dies ist eine Besonderheit, die für $n > 2$ nicht mehr auftritt. Aus diesem Grund erhält man bei der expliziten Ausreduktion Kombinationen der verschiedenen Höchstgewichtsvektoren mit gleichem Young-Tableau.

Glücklicherweise treten im Fall des $\mathbb{C}P^1$ -Modells bei den Tensorprodukten nur wenige irreduzible Komponenten auf, weshalb die Produkte in den einzelnen Sektoren explizit ausreduziert werden konnten.

$m_+ = m_- = 0$: In diesem Fall ist das Tensorprodukt trivial und man erhält

$$P\bar{z}_1^{\bar{l}}z_2^l|0,0\rangle = \bar{z}_1^{\bar{l}}z_2^l|0,0\rangle. \quad (5.162)$$

Die Eichbedingung liefert $\bar{l} - l = 2$, so dass alle Darstellungen, die in diesem Sektor auftreten, der Form

$$\bar{z}_1^{l+2}z_2^l|0,0\rangle \quad l \geq 0 \quad (5.163)$$

entsprechen.

$m_+ = 1, m_- = 0, \bar{l} = l + 1$: In diesem Sektor ergibt sich für das Tensorprodukt

$$z_1^{l+1}z_2^l \otimes |1,0\rangle = \bar{z}_1^{l+1}z_2^l|1,0\rangle \oplus \left[(l+1)(2S_+ + S'_+) \bar{z}_1^l z_2^l |2,0\rangle + 3lS_+^\dagger \bar{z}_1^{l+1} z_2^{l-1} |0,0\rangle \right]. \quad (5.164)$$

Nach der Projektion erhält man

$$-S_+ \bar{z}_1^{l+1} z_2^{l+1} |2,0\rangle \oplus 3(l+1)S_+ \bar{z}_1^l z_2^l |2,0\rangle, \quad (5.165)$$

so dass sich wiederum alle Darstellungen dieses Sektors in einer einheitlichen Form

$$S_+ \bar{z}_1^l z_2^l |2,0\rangle \quad l \geq 0 \quad (5.166)$$

schreiben lassen.

$m_+ = 0, m_- = 1, \bar{l} = l + 1$: Da $\chi_-^\dagger \chi_+ |1,0\rangle = |0,1\rangle$ gilt, erhält man alle Zustände dieses Sektors durch einmaliges Anwenden von $\chi_-^\dagger \chi_+$ auf den allgemeinen Höchstgewichtszustand des vorigen Sektors, also

$$(\chi_-^\dagger \chi_+) S_+ \bar{z}_1^l z_2^l |2,0\rangle = S_- \bar{z}_1^l z_2^l |0,2\rangle \quad l \geq 0. \quad (5.167)$$

$m_\pm = 1, \bar{l} = l$: Hier erhält man bei der Ausreduktion

$$\begin{aligned} \bar{z}_1^l z_2^l \otimes |1,1\rangle &= \bar{z}_1^l z_2^l |1,1\rangle \oplus \left[(S_-^\dagger - S_-'^\dagger) \bar{z}_1^l z_2^{l-1} |1,0\rangle + (S_+ + S_+') \bar{z}_1^{l-1} z_2^l |2,1\rangle \right] \\ &\oplus \left[(l-1) \left(S_+^\dagger S_-^\dagger \bar{z}_1^l z_2^{l-2} |0,0\rangle + S_- S_+ \bar{z}_1^{l-2} z_2^l |2,2\rangle \right) \right. \\ &\left. + l(S_-^\dagger - S_-'^\dagger)(2S_+ + S_+') \bar{z}_1^{l-1} z_2^{l-1} |2,0\rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.168)$$

5. Algebraische Lösung der Modelle

Bei der Projektion werden aus den Linearkombinationen jeweils alle bis auf einen Summanden vernichtet und die drei verbleibenden Darstellungen gehen für unterschiedliche l ineinander über. Alle Darstellungen, die aus obigem Tensorprodukt verbleiben, haben die Höchstgewichtszustände

$$S_+ S_- \bar{z}_1^l z_2^{l+2} |2, 2\rangle \quad l \geq 0. \quad (5.169)$$

Außerdem könnten in diesem Sektor im Allgemeinen noch Darstellungen aus dem Tensorprodukt

$$z_1^l z_2^l \otimes (\chi_-^\dagger \chi_+) |2, 0\rangle \quad (5.170)$$

fallen, doch werden diese bei der Projektion vernichtet.

Die Darstellungen in den verschiedenen Sektoren sind aufgrund der erweiterten Supersymmetrie des Modells durch Anwendung der vier Superladungen Q_\pm, Q_\pm^\dagger , die in der Darstellung (3.60) die Form

$$Q_\pm^\dagger = \Psi_\pm^\dagger \bar{\Pi} = -i(\chi_\pm^\dagger \bar{\partial}) + i(z\chi_\pm^\dagger)(\bar{z}\bar{\partial} + N_\pm) + i(z\chi_\mp^\dagger)(\chi_\pm^\dagger \chi_\mp) + i(z\chi_\pm^\dagger)(z\chi_\mp^\dagger)(\bar{z}\chi_\mp) \quad (5.171)$$

$$Q_\pm = \Psi_\pm \Pi = -i(\chi_\pm \partial) + i\bar{z}\chi_\pm(z\partial + n - N_\pm) - i(\chi_\mp^\dagger \chi_\pm)(\bar{z}\chi_\mp) - i(\bar{z}\chi_\pm)(z\chi_\mp^\dagger)(\bar{z}\chi_\mp) \quad (5.172)$$

annehmen, miteinander verbunden. Man erhält

$$\begin{aligned} Q_\pm^\dagger \bar{z}_1^{l+2} z_2^l |0, 0\rangle &= i(l+2) S_\pm \bar{z}_1^{l+1} z_2^{l+1} \chi_{\pm 1}^\dagger \chi_{\pm 2}^\dagger |0\rangle \\ Q_\pm S_\pm \bar{z}_1^{l+1} z_2^{l+1} \chi_{\pm 1}^\dagger \chi_{\pm 2}^\dagger |0\rangle &= -i(l+1) \bar{z}_1^{l+2} z_2^l |0, 0\rangle \\ Q_\mp^\dagger S_\pm \bar{z}_1^{l+1} z_2^{l+1} \chi_{\pm 1}^\dagger \chi_{\pm 2}^\dagger |0\rangle &= \mp i(l+1) S_- S_+ \bar{z}_1^l z_2^{l+2} |2, 2\rangle \\ Q_\pm S_- S_+ \bar{z}_1^l z_2^{l+2} |2, 2\rangle &= \pm i(l+2) S_\pm \bar{z}_1^{l+1} z_2^{l+1} \chi_{\pm 1}^\dagger \chi_{\pm 2}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad l \geq 0 \quad (5.173)$$

und die beiden anderen Superladungen verschwinden auf den jeweiligen Zuständen. Man liest die Energie des obigen Multipletts ab

$$H \bar{z}_1^{l+2} z_2^l |0, 0\rangle = \frac{1}{2} \left(\{Q_+^\dagger, Q_+\} + \{Q_-^\dagger, Q_-\} \right) \bar{z}_1^{l+2} z_2^l |0, 0\rangle = (l+1)(l+2) \bar{z}_1^{l+2} z_2^l |0, 0\rangle \quad (5.174)$$

und erkennt, dass neben den in Multipletts gruppierten Darstellungen zwei Grundzustände existieren, auf denen alle Superladungen verschwinden

$$S_+ |2, 0\rangle, \quad S_- |0, 2\rangle, \quad E = 0. \quad (5.175)$$

Insgesamt treten also die folgenden Energien mit ihren jeweiligen Entartungen auf

$$E = l(l+1) \quad l \geq 0 \quad \text{mit Entartung} \quad \begin{cases} 2 & l = 0 \\ 4 \cdot (2l+1) & l \geq 1. \end{cases} \quad (5.176)$$

Die l -Abhängigkeit der Energien und ihre Entartung stimmen also mit den Ergebnissen für das $O(3)$ -Modell überein. Allerdings ist zunächst verwunderlich, dass die Grundzustände in den beiden 1-Fermion-Sektoren auftreten und nicht im bosonischen und 2-Fermion-Sektor. Im nächsten Abschnitt soll gezeigt werden, dass eine einfache Koordinatentransformation zwischen CP^1 - und $O(3)$ -Modell vermittelt, wenn man statt der Projektion P_1 die Projektion P_2 wählt. Dies legt den Schluss nahe, dass die Ergebnisse in verschiedenen Projektionen ineinander überführt werden können, wenn man die verschiedenen Sektoren in einer bestimmten Weise miteinander identifiziert.

5.3.5. Vergleich der Lösung des $\mathbb{C}P^1$ - mit der des $O(3)$ -Modells

Es ist bekannt, dass das $O(3)$ -Modell und das $\mathbb{C}P^1$ -Modell äquivalent sind, dass also unter einer Koordinatentransformation Wirkung und Nebenbedingungen der Modelle ineinander überführt werden können [9, 2]. Auf die bosonischen Koordinaten der Hilberträume überträgt sich diese Transformation gemäß

$$x_{O(3)}^i = \bar{z}\sigma^i z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_{O(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{O(3)}^1 + ix_{O(3)}^2) = \sqrt{2}\bar{z}_1 z_2 \\ \bar{z}_{O(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{O(3)}^1 - ix_{O(3)}^2) = \sqrt{2}z_1 \bar{z}_2 \\ x_3 = \bar{z}_1 z_1 - \bar{z}_2 z_2 \end{cases} \quad (5.177)$$

und für die fermionischen Operatoren erhält man aus

$$\chi_{O(3)}^i = \bar{z}\sigma^i \chi_+ + \chi_-^\dagger \sigma^i z, \quad \chi_{O(3)}^{\dagger i} = \bar{z}\sigma^i \chi_- + \chi_+^\dagger \sigma^i z \quad (5.178)$$

die expliziten Transformationen

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{2}(z_1 \chi_{-2}^\dagger + \bar{z}_2 \chi_{+1}) & \phi^\dagger &= \sqrt{2}(\bar{z}_1 \chi_{-2} + z_2 \chi_{+1}^\dagger) \\ \bar{\phi} &= \sqrt{2}(z_2 \chi_{-1}^\dagger + \bar{z}_1 \chi_{+2}) & \bar{\phi}^\dagger &= \sqrt{2}(\bar{z}_2 \chi_{-1} + z_1 \chi_{+2}^\dagger) \\ \chi_3 &= \bar{z}_1 \chi_{+1} - \bar{z}_2 \chi_{+2} + z_1 \chi_{-1}^\dagger - z_2 \chi_{-2}^\dagger & \chi_3^\dagger &= z_1 \chi_{+1}^\dagger - z_2 \chi_{+2}^\dagger + \bar{z}_1 \chi_{-1} - \bar{z}_2 \chi_{-2}. \end{aligned} \quad (5.179)$$

An diesen Transformationen erkennt man, dass die beiden bisher verwendeten Vakua $|0\rangle_{O(3)}$ und $|0\rangle_{\mathbb{C}P^1}$ nicht identisch sein können, da die Operatoren $\phi, \bar{\phi}, \chi_3$ des $O(3)$ -Modells auf dem $\mathbb{C}P^1$ -Vakuum nicht verschwinden. Stattdessen liegt die Identifikation

$$|0\rangle_{O(3)} = \chi_{-1}^\dagger \chi_{-2}^\dagger |0\rangle_{\mathbb{C}P^1} = |0, 2\rangle \quad (5.180)$$

nahe. Für ein so definiertes Vakuum tauschen die Operatoren χ_-, χ_-^\dagger ihre Rolle bezüglich der Interpretation von Fermionerzeugung und -vernichtung.

Aus dieser Identifikation der Vakua der beiden Modelle folgt, dass der bosonische Sektor des $O(3)$ -Modells durch die Koordinatentransformation auf den $|0, 2\rangle$ -Sektor des $\mathbb{C}P^1$ -Modells abgebildet wird und der 2-Fermion-Sektor nach der Transformation im $(m_\pm = 1)$ -Sektor liegt. Im Formalismus zur Lösung des $\mathbb{C}P^1$ -Modells können in beiden dieser Sektoren überhaupt nur dann nichtverschwindende Wellenfunktionen auftreten, wenn der Projektor P_2 verwendet wird, da mindestens einer dieser Sektoren von allen anderen Projektoren vernichtet wird. Deshalb soll nun die Lösung des $\mathbb{C}P^1$ -Modells mit dem Projektor P_2 entwickelt werden.

$m_+ = 0, m_- = 2, \bar{l} = l$: In diesem Sektor treten die Darstellungen aus dem Tensorprodukt

$$P_2 \left(\bar{z}_1^l \otimes z_2^l \otimes |0, 2\rangle \right) \quad (5.181)$$

auf. Da der letzte Faktor ein Singlett ist, ist dieses Produkt trivial und man erhält, dass alle Höchstgewichtszustände von der Form

$$\bar{z}_1^l z_2^l |0, 2\rangle \quad l \geq 0 \quad (5.182)$$

sind.

5. Algebraische Lösung der Modelle

$m_+ = 1, m_- = 2, \bar{l} = l - 1$: Hier lautet das Produkt vor der Projektion

$$\bar{z}_1^{l-1} z_2^l \otimes |1, 2\rangle = \bar{z}_1^{l-1} z_2^l |1, 2\rangle \oplus \left[3(l-1) S_+ \bar{z}_1^{l-2} z_2^l |2, 2\rangle - l S_+^\dagger \bar{z}_1^{l-1} z_2^{l-1} |0, 2\rangle \right]. \quad (5.183)$$

Durch die Projektion fällt der zweite Summand der zweiten Darstellung weg und die Höchstgewichte der übrigbleibenden Darstellungen sind in diesem Sektor von der Form

$$S_+ \bar{z}_1^{l-1} z_2^{l+1} |2, 2\rangle \quad l \geq 1. \quad (5.184)$$

$m_+ = 0, m_- = 1, \bar{l} = l + 1$: In diesem Sektor können die Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt verwendet werden. Vor der Projektion erhält man durch Anwendung von $(\chi_-^\dagger \chi_+)$ auf (5.164)

$$\bar{z}_1^{l+1} z_2^l \otimes |0, 1\rangle = \bar{z}_1^{l+1} z_2^l |0, 1\rangle \oplus \left[(l+1)(2S_- + S_-') \bar{z}_1^l z_2^l |0, 2\rangle + 3l S_-^\dagger \bar{z}_1^{l+1} z_2^{l-1} |0, 0\rangle \right]. \quad (5.185)$$

Nach der Projektion erhält man für die verbleibenden Darstellungen die Höchstgewichte der Form

$$S_-^\dagger \bar{z}_1^{l+2} z_2^l |0, 0\rangle \quad l \geq 0. \quad (5.186)$$

$m_+ = 1, m_- = 1, \bar{l} = l$: In diesem Sektor ergibt sich zunächst das gleiche Produkt wie (5.168). Durch die andere Projektion sind nun die Zustände der Form

$$S_+ S_-^\dagger \bar{z}_1^l z_2^l |2, 0\rangle, \quad l \geq 0. \quad (5.187)$$

In diesem Falle liefert aber auch das Tensorprodukt

$$(\chi_-^\dagger \chi_+) \left(\bar{z}_1^l z_2^l \otimes |2, 0\rangle \right) = (\chi_-^\dagger \chi_+) \bar{z}_1^l z_2^l |2, 0\rangle \quad (5.188)$$

nach der Projektion einen Beitrag, doch dieser ist ebenfalls von der obigen Form.

Übersichtlich zusammengefasst lauten die Ergebnisse in den verschiedenen Sektoren also

	$m_+ = 0$	$m_+ = 1$	
$m_- = 2$	$\bar{z}_1^l z_2^l 0, 2\rangle$	$S_+ \bar{z}_1^{l-1} z_2^{l+1} 2, 2\rangle$	$l \geq 1$
$m_- = 1$	$S_-^\dagger \bar{z}_1^{l+1} z_2^{l-1} 0, 0\rangle$	$S_+ S_-^\dagger \bar{z}_1^l z_2^l 2, 0\rangle$	

Die Superladungen $Q_+^{(\dagger)}$ bilden die Darstellungen in einer Zeile und die Superladungen $Q_-^{(\dagger)}$ die Darstellungen in einer Spalte aufeinander ab. Die Grundzustände lauten $|0, 2\rangle$ und $S_+ S_-^\dagger |0, 2\rangle$. Die auftretenden Energien und Entartungen entsprechen den Ergebnissen aus Abschnitt 5.3.4.

Um diese Ergebnisse mit denen des $O(3)$ -Modells zu vergleichen, sind letztere mit den obigen Transformationen zu übersetzen. Bei dieser expliziten Rechnung erhält man

Sektor	$O(3)$ -Koordinaten	$\mathbb{C}P^1$ -Koordinaten
bosonisch	$z_1^l 0\rangle$	$\sim (\bar{z}_1 z_2)^l 0\rangle$
1-Fermion	$P z_1^{l-1} \phi_1^\dagger 0\rangle$	$\sim (\bar{z}_1 z_2)^{l-1} \left(-\bar{z}_1^2 S_-^\dagger 0\rangle + z_2^2 S_+ 2, 2\rangle \right)$
	$S z_1^{l-1} \phi_1^\dagger \chi_3^\dagger 0\rangle$	$\sim (\bar{z}_1 z_2)^{l-1} \left(\bar{z}_1^2 S_-^\dagger 0\rangle + z_2^2 S_+ 2, 2\rangle \right)$
2-Fermion	$S z_1^l \phi_1^\dagger \chi_3^\dagger \bar{\phi}_1^\dagger 0\rangle$	$\sim (\bar{z}_1 z_2)^l S_+ S_-^\dagger 2, 0\rangle$

5.3. Algebraische Lösung des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Wellenfunktionen im bosonischen und 2-Fermion-Sektor in beiden Beschreibungsweisen übereinstimmen. Im 1-Fermion-Sektor führt die Beschreibung des $O(3)$ -Modells auf eine andere Basis des Sektors, aber man sieht, dass der Sektor in beiden Beschreibungen übereinstimmt. Die Dimensionen der auftretenden Darstellungen sind in beiden Beschreibungen durch $2l + 1$ gegeben und die Energien stimmen bis auf den Faktor 2, um den sich die Hamiltonoperatoren der Modelle unterscheiden, überein. Damit konnte die Äquivalenz der Lösungen des $\mathbb{C}P^1$ - und des $O(3)$ -Modells nachgewiesen werden.

5. Algebraische Lösung der Modelle

6. Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, für die quantenmechanischen supersymmetrischen $O(n)$ - und $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modelle eine Lösung in Form von Eigenzuständen und Eigenwerten des jeweiligen Hamiltonoperators zu entwickeln.

Nach der dimensional Reduktion der klassischen Modelle auf eine zeitliche Koordinate konnten die bosonischen Felder als Koordinaten eines mechanischen Modells mit Nebenbedingungen aufgefasst werden, das im Falle der $O(n)$ -Modelle im \mathbb{R}^n und im Falle der $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modelle im \mathbb{C}^n formuliert ist. Die fermionischen Felder gingen in abstrakte Graßmannungerade Koordinaten über, die keine direkt anschauliche Bedeutung haben. Die Erweiterung der klassischen Mechanik um diese Größen macht es jedoch möglich, supersymmetrische Theorien auf der Ebene der Mechanik zu untersuchen. Die Supersymmetrie der betrachteten Modelle konnte für beide Modell-Klassen explizit nachgewiesen werden.

Mit Hilfe der Dirac-Quantisierung konnten die Modelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen kanonisch quantisiert werden. Dabei wurde die im $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modell enthaltene Eichfreiheit teilweise durch die Wahl einer Eichung fixiert. Der Generator der verbleibenden globalen $U(1)$ -Symmetrie wurde als *first class constraint* auf dem physikalischen Hilbertraum implementiert. Zur Lösung aller auftretenden Ordnungsprobleme wurde die Weyl-Ordnung der Operatoren verwendet.

Anschließend wurde für den Spezialfall des $O(3)$ -Modells untersucht, welche Aussagen über den Hilbertraum und das Spektrum des Modells getroffen werden können, ohne das eine Darstellung der bei der Dirac-Quantisierung entstandenen Algebra der kanonischen Variablen bekannt ist. Hierbei wurde gefunden, dass der Hilbertraum in drei Sektoren mit Fermionenzahl 0, 1, 2 zerfällt, im bosonischen und 2-Fermion-Sektor die gleichen Eigenfunktionen auftreten müssen und dass zu jedem solchen Eigenzustand positiver Energie je zwei weitere supersymmetrische Partnerzustände im 1-Fermion-Sektor konstruiert werden können. Anschließend wurde eine Darstellung der Dirac-Algebra des $O(3)$ -Modells in Kugelkoordinaten genutzt, um zu zeigen, dass der Hamiltonoperator dem Quadrat eines verallgemeinerten Drehimpulsoperators entspricht, wodurch die Eigenfunktionen explizit angegeben werden konnten. Hierbei bestätigten sich die allgemeinen Aussagen über Hilbertraum und Spektrum der Theorie. In Verallgemeinerung der Darstellung für die Algebra des $O(3)$ -Modells konnte anschließend sowohl für das $O(n)$ - als auch für das $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modell eine Darstellung der Dirac-Algebra angegeben werden, die zumindest teilweise geometrisch anschaulich erscheint, in der Weise wie sie die Operatoren der durch Nebenbedingungen eingeschränkten Modelle mit den entsprechenden Operatoren einer freien Theorie im umgebenden Raum in Beziehung setzt. Es konnte gezeigt werden, dass der Hamiltonoperator des $O(n)$ -Modells einem quadratischen Casimir-Operator der $SO(n)$ und der des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells dem quadratischen Casimir-Operator der $SU(n)$ entspricht. Unter Verwendung der jeweiligen Darstellung der Dirac-Algebra konnte gezeigt werden, dass diese Operatoren gerade zu den Darstellungen gehören, die die jeweiligen Gruppentransformationen der Koordinaten des umgebenden Raums generieren. Um die

6. Zusammenfassung und Ausblick

Eigenfunktionen des jeweiligen Modells zu finden, musste im Folgenden untersucht werden, wie der gesamte Hilbertraum des Modells in irreduzible Darstellungen der jeweiligen Gruppe zerfällt.

Für das $O(n)$ -Modell konnte unter Benutzung der Methode von Wipf et. al. [27] für beliebiges n gezeigt werden, wie die Lösung des Modells zu konstruieren ist. Bei der Betrachtung der Modelle mit $n = 3, 4, 5$ wurde festgestellt, dass sich die Lösung in einfacher Weise für größere n verallgemeinern lässt. Wie erwartet, konnte nachgewiesen werden, dass sämtliche Zustände positiver Energie mit genau einem Zustand gleicher Energie in einem benachbarten Fermionzahl-Sektor durch Anwendung der Superladungsoperatoren verbunden sind. Außerdem konnte gezeigt werden, dass die Lösung für $n = 3$ mit der zuvor in Kugelkoordinaten gefundenen Lösung übereinstimmt.

Für das $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modell ist eine Angabe der Lösung in dieser Allgemeinheit im vorgegebenen Zeitrahmen leider nicht gelungen. Zwar konnte die zuvor verwendete Methode auf das $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modell übertragen werden und bestimmt werden, welche Darstellungen der $SU(n)$ in den jeweiligen Sektoren des Hilbertraums auftreten, doch ist es nicht gelungen, die allgemeine Struktur der Lösung für beliebiges n anzugeben und näher zu untersuchen. Dennoch konnte für das $\mathbb{C}P^1$ -Modell eine Lösung bestimmt werden, die die erwartete Struktur einer $\mathcal{N} = 4$ supersymmetrischen Quantenmechanik aufweist. Außerdem wurde an diesem Beispiel deutlich, wie man die Lösung für ein allgemeines n konstruieren kann. Allerdings stellte sich heraus, dass mehrere Projektionen denkbar sind, die den Hilbertraum der im umgebenden Raum formulierten freien Theorie auf den des jeweiligen Modells einschränken. Unter Benutzung einer bestimmten Projektion konnte die Äquivalenz der Lösungen von $O(3)$ - und $\mathbb{C}P^1$ -Modell nachgewiesen werden.

Als denkbare Fortführung dieser Arbeit wäre es wünschenswert, eine allgemeine Lösung für das $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modell zu entwickeln, in der neben der Angabe der Eigenfunktionen und Eigenwerte des Hamiltonoperators auch deutlich wird, wie die Supersymmetrietransformationen die auftretenden Darstellungen in Beziehung setzt. Daneben wäre es interessant zu untersuchen, ob die physikalische Äquivalenz der verschiedenen denkbaren Projektionen nachgewiesen werden kann und in welcher Weise die Sektoren unter verschiedenen Projektionen miteinander zu identifizieren sind.

Eine über diese Arbeit hinausgehende interessante Fragestellung wäre, ob bei der Beschreibung des Problems mit Hilfe von Superalgebren die auftretenden Darstellungen, die durch Anwendung der Superladungen ineinander überführt werden, in natürlicher Weise in Verbindung stehen.

A. Anhang

A.1. Nachweis der Darstellung der Dirac-Algebra des $O(n)$ -Modells

Unter Benutzung der Darstellung (3.24) soll in diesem Abschnitt explizit gezeigt werden, dass die Dirac-Algebra (3.23) auf Operatorebene erfüllt ist.

$$[p_i, x_j] = -(\delta_{ik} - x_i x_k) \delta_{kj} = -i(\delta_{ij} - x_i x_j) \quad (\text{A.1})$$

$$\{\Psi_i, \Psi_j^\dagger\} = (\delta_{ik} - x_i x_k)(\delta_{jl} - x_j x_l) \delta_{kl} = \delta_{ij} - x_i x_j \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} [p_i, \Psi_j^{(\dagger)}] &= i(\delta_{ik} - x_i x_k) \underbrace{[\partial_k, x_j x_l]}_{\delta_{kj} x_l + x_j \delta_{kl}} \chi_l^{(\dagger)} + i \underbrace{[x_m \chi_i^\dagger \chi_m - x_m \chi_m^\dagger \chi_i, \chi_l^{(\dagger)}]}_{x_m \chi_i^{(\dagger)} \delta_{lm} - x_m \chi_m^{(\dagger)} \delta_{il}} (\delta_{jl} - x_j x_l) \\ &= i(\delta_{il} - x_i x_l) \chi_l^{(\dagger)} x_j = i x_j \Psi_i^{(\dagger)} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} [p_i, p_k] &= -[(\delta_{ij} - x_i x_j) \partial_j, (\delta_{kl} - x_k x_l) \partial_l] + \underbrace{[(\delta_{ij} - x_i x_j) \partial_j, x_m \chi_k^\dagger \chi_m - x_m \chi_m^\dagger \chi_k]}_{(\delta_{im} - x_i x_m)(\chi_i^\dagger \chi_m - \chi_m^\dagger \chi_i)} - \\ &\quad - (i \longleftrightarrow k) - \underbrace{[x_m \chi_i^\dagger \chi_m - x_m \chi_m^\dagger \chi_i, x_n \chi_k^\dagger \chi_n - x_n \chi_n^\dagger \chi_k]}_{x_m x_n (\chi_i^\dagger \chi_n \delta_{mk} - \chi_k^\dagger \chi_m \delta_{in} + \chi_m^\dagger \chi_k \delta_{in} - \chi_n^\dagger \chi_i \delta_{mk} + \chi_k^\dagger \chi_i \delta_{mn} - \chi_i^\dagger \chi_k \delta_{mn})} \\ &= x_k (\delta_{il} - x_i x_l) \partial_l - x_i (\delta_{kj} - x_k x_j) \partial_j + \chi_k^\dagger \chi_i - \chi_i^\dagger \chi_k \\ &= -\Psi_i^\dagger \Psi_k + \Psi_k^\dagger \Psi_i - i(x_i p_k - x_k p_i) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.2. Nachweis der Darstellung der Dirac-Algebra des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells

Wie für das $O(n)$ -Modell in A.1 soll die Darstellungseigenschaft von Gleichung (3.60) für die Dirac-Algebra des $\mathbb{C}P^{n-1}$ -Modells (3.54) nachgewiesen werden.

$$\begin{aligned} [\Pi_i, z_k] &= -i \left(\delta_{ij} - \frac{\bar{z}_i z_j}{2} \right) \delta_{jk} = -i \left(\delta_{ik} - \frac{\bar{z}_i z_k}{2} \right) & [\Pi_i, \bar{z}_k] &= i \frac{\bar{z}_i \bar{z}_k}{2} \\ [\bar{\Pi}_i, \bar{z}_k] &= -i \left(\delta_{ij} - \frac{z_i \bar{z}_j}{2} \right) \delta_{jk} = -i \left(\delta_{ik} - \frac{z_i \bar{z}_k}{2} \right) & [\bar{\Pi}_i, z_k] &= i \frac{z_i z_k}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\{\Psi_{\pm i}, \Psi_{\pm j}^\dagger\} = (\delta_{ik} - z_i \bar{z}_k)(\delta_{jl} - \bar{z}_j z_l) \{\chi_{\pm k}, \chi_{\pm l}^\dagger\} = (\delta_{ij} - z_i \bar{z}_j) \delta_{\pm\pm} \quad (\text{A.6})$$

A. Anhang

$$[\Pi_i, \Psi_{\pm k}] = i \left(\delta_{ik} - \frac{\bar{z}_i z_k}{2} \right) \bar{z}_l \chi_{\pm l} - i \frac{\bar{z}_i \bar{z}_l}{2} \chi_{\pm l} z_k - i (\delta_{ki} - z_k \bar{z}_i) \bar{z}_n \chi_{\pm n} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$[\Pi_i, \Psi_{\pm k}^\dagger] = i \left(\delta_{il} - \frac{\bar{z}_i z_l}{2} \right) \bar{z}_k \chi_{\pm l}^\dagger - \frac{i}{2} \bar{z}_i \bar{z}_k (z_j \chi_j^\dagger) = i \bar{z}_k (\delta_{il} - \bar{z}_i z_l) \chi_{\pm l}^\dagger = i \bar{z}_k \Psi_{\pm i}^\dagger \quad (\text{A.8})$$

Analog erhält man

$$[\bar{\Pi}_i, \Psi_{\pm k}^\dagger] = 0 \quad [\bar{\Pi}_i, \Psi_{\pm k}] = i z_k \Psi_{\pm i}. \quad (\text{A.9})$$

Für die Kommutatoren der Impulse ist die Rechnung etwas umfangreicher:

$$\begin{aligned} [\Pi_i, \Pi_j] &= - \left[\left(\delta_{ik} - \frac{\bar{z}_i z_k}{2} \right) \partial_k, \left(\delta_{jl} - \frac{\bar{z}_j z_l}{2} \right) \partial_l \right] - \frac{1}{4} [\bar{z}_i \bar{z}_k \bar{\partial}_k, \bar{z}_j \bar{z}_l \bar{\partial}_l] - \frac{\bar{z}_i \bar{z}_n}{2} \chi_{\pm j}^\dagger \chi_{\pm n} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\bar{z}_i \bar{z}_k}{2} \left[\bar{\partial}_k, \left(\delta_{jl} - \frac{\bar{z}_j z_l}{2} \right) \right] \partial_l + \frac{\bar{z}_j \bar{z}_l}{2} \left[\left(\delta_{ik} - \frac{\bar{z}_i z_k}{2} \right), \bar{\partial}_l \right] \partial_k}_{=0} \\ &\quad - \left[\bar{z}_n, \frac{\bar{z}_j \bar{z}_l}{2} \bar{\partial}_l \right] \chi_{\pm i}^\dagger \chi_{\pm n} - \bar{z}_n \bar{z}_m [(\chi_{\pm i}^\dagger \chi_{\pm n}), (\chi_{\pm j}^\dagger \chi_{\pm m})] \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{z}_j \partial_i - \bar{z}_i \partial_j - (\bar{z}_j \chi_{\pm i}^\dagger - \bar{z}_i \chi_{\pm j}^\dagger) (\bar{z} \chi_{\pm}) \right) = -\frac{i}{2} (\bar{z}_i \Pi_j - \bar{z}_j \Pi_i) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Und analog

$$[\bar{\Pi}_i, \bar{\Pi}_j] = -\frac{i}{2} (z_i \bar{\Pi}_j - z_j \bar{\Pi}_i). \quad (\text{A.11})$$

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned} [\Pi_i, \bar{\Pi}_k] &= - \left[\left(\delta_{ij} - \frac{\bar{z}_i z_j}{2} \right) \partial_j, \left(\delta_{kl} - \frac{z_k \bar{z}_l}{2} \right) \bar{\partial}_l \right] + \left[\left(\delta_{ij} - \frac{\bar{z}_i z_j}{2} \right) \partial_j, \frac{z_k \bar{z}_l}{2} \partial_l \right] \\ &\quad - \left[\left(\delta_{ij} - \frac{\bar{z}_i z_j}{2} \right) \partial_j, z_n \right] \chi_{\pm n}^\dagger \chi_{\pm k} + \left[\frac{\bar{z}_i \bar{z}_j}{2} \bar{\partial}_j, \left(\delta_{kl} - \frac{z_k \bar{z}_l}{2} \right) \bar{\partial}_l \right] \\ &\quad + \chi_{\pm i}^\dagger \chi_n \left[\bar{z}_n, \left(\delta_{kl} - \frac{z_k \bar{z}_l}{2} \right) \bar{\partial}_l \right] + \bar{z}_n z_m [(\chi_{\pm i}^\dagger \chi_{\pm n}), (\chi_{\pm m}^\dagger \chi_{\pm k})] \\ &\quad + (N_r + 1) \left(\delta_{ij} - \frac{z_j \bar{z}_i}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (z_j \partial_i - \bar{z}_i \bar{\partial}_j) - \chi_{\pm i}^\dagger \chi_{\pm j} + \frac{z_j}{2} \chi_{\pm i}^\dagger (\bar{z} \chi_{\pm}) + \frac{\bar{z}_i}{2} (z \chi_{\pm}^\dagger) \chi_{\pm j} + \delta_{ij} - \frac{N_r + 1}{2} \bar{z}_i z_j \\ &= -\frac{i}{2} (\bar{z}_i \bar{\Pi}_j - z_j \Pi_i) - \Psi_{\pm i}^\dagger \Psi_{\pm j} + (\delta_{ij} - \bar{z}_i z_j). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Literaturverzeichnis

- [1] Shogo Aoyama. The (2+1)-dimensional Supersymmetric CP^{n-1} Model and the Central Charge. *Nucl. Phys.*, B168:354, 1980.
- [2] R. Banerjee. Quantum Equivalence of $O(3)$ Nonlinear Sigma Model and the CP^1 Model: A Gauge Independent Hamiltonian Approach. *Phys. Rev.*, D49:2133–2136, 1994.
- [3] R. Barate et al. Search for the Standard Model Higgs Boson at LEP. *Phys. Lett.*, B565:61–75, 2003.
- [4] Adam M. Bincer. Casimir operators for $su_q(n)$. *J. Phys.*, A24:L1133–L1138, 1991.
- [5] Robert N. Cahn. *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1984.
- [6] R. Casalbuoni. The Classical Mechanics for Bose-Fermi Systems. *Nuovo Cim.*, A33:389, 1976.
- [7] Sidney R. Coleman and J. Mandula. All Possible Symmetries of the S Matrix. *Phys. Rev.*, 159:1251–1256, 1967.
- [8] E. Cremmer and Joel Scherk. The Supersymmetric Nonlinear Sigma Model in Four-Dimensions and Its Coupling to Supergravity. *Phys. Lett.*, B74:341, 1978.
- [9] A. D’Adda, P. Di Vecchia, and M. Luscher. Confinement and Chiral Symmetry Breaking in CP^{n-1} Models with Quarks. *Nucl. Phys.*, B152:125–144, 1979.
- [10] A. D’Adda, M. Luscher, and P. Di Vecchia. A $1/n$ Expandable Series of Nonlinear Sigma Models with Instantons. *Nucl. Phys.*, B146:63–76, 1978.
- [11] A. C. Davis, A. J. Macfarlane, P. Popat, and J. W. van Holten. The Quantum Mechanics of the Supersymmetric Nonlinear Sigma Model. *J. Phys.*, A17:2945, 1984.
- [12] P. Di Vecchia and S. Ferrara. Classical Solutions in Two-Dimensional Supersymmetric Field Theories. *Nucl. Phys.*, B130:93, 1977.
- [13] Paul A. M. Dirac. Generalized Hamiltonian Dynamics. *Can. J. Math.*, 2:129–148, 1950.
- [14] Paul A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover Publications Inc., 2003.
- [15] H. Eichenherr. $SU(N)$ Invariant Nonlinear Sigma Models. *Nucl. Phys.*, B146:215–223, 1978.
- [16] Norbert K. Falck and Allen C. Hirshfeld. Dirac Bracket Quantization of a Constrained Nonlinear System: The Rigid Rotator. *Eur. J. Phys.*, 4:5, 1983.

Literaturverzeichnis

- [17] R. P. Feynman. Space-time Approach to Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev.*, 76:769–789, 1949.
- [18] Mark Fischler. Young Tableau Methods for Kronecker Products of Representations of the Classical Groups. FERMILAB-PUB-80-049-THY.
- [19] H. Fritzsch, Murray Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. *Phys. Lett.*, B47:365–368, 1973.
- [20] Jean-Loup Gervais and B. Sakita. Gauge Degrees of Freedom, External Charges, and Quark Confinement Criterion in the $A(0) = 0$ Canonical Formalism. *Phys. Rev.*, D18:453, 1978.
- [21] S. L. Glashow. Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [22] Ennio Gozzi and Arunabha Guha. Canonical Structure of the CP_2^{n-1} Model in Some Noncovariant Gauges. *J. Math. Phys.*, 24:1213, 1983.
- [23] Rudolf Haag, Jan T. Lopuszanski, and Martin Sohnius. All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix. *Nucl. Phys.*, B88:257, 1975.
- [24] Morton Hamermesh. *Group Theory and its Application to Physical Problems*. Dover Publications, Inc., 1989.
- [25] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1992.
- [26] Theodor Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921:966–972, 1921.
- [27] A. Kirchberg, J. D. Lange, P. A. G. Pisani, and A. Wipf. Algebraic Solution of the Supersymmetric Hydrogen Atom in d Dimensions. *Annals Phys.*, 303:359–388, 2003.
- [28] John R. Klauder and Sergei V. Shabanov. Coordinate-free Quantization of Second-class Constraints. *Nucl. Phys.*, B511:713–736, 1998.
- [29] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Z. Phys.*, 37:895–906, 1926.
- [30] Hagen Kleinert and Sergei V. Shabanov. Proper Dirac Quantization of a Free Particle on a D - dimensional Sphere. *Phys. Lett.*, A232:327–332, 1997.
- [31] A. Kovner. Canonical Quantization of the CP^N Model with a Theta Term. *Phys. Lett.*, B224:299, 1989.
- [32] Stephen P. Martin. *A Supersymmetry Primer*. 1997.
- [33] M. Nakamura and H. Minowa. Canonical Structure of Supersymmetric CP^n Model with and without Chern-Simons Term. *Nuovo Cim.*, A104:387–404, 1991.

- [34] Jorge Ananias Neto and Wilson Oliveira. Weyl Ordering Prescription for the Quantum Particle on the D-dimensional Sphere. *Int. J. Mod. Phys.*, A14:3699–3713, 1999.
- [35] V. A. Novikov, Mikhail A. Shifman, A. I. Vainshtein, and Valentin I. Zakharov. Two-Dimensional Sigma Models: Modeling Nonperturbative Effects of Quantum Chromodynamics. *Phys. Rept.*, 116:103, 1984.
- [36] W. Pauli. Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik. *Z. Phys*, 36:336–363, 1926.
- [37] Alexander M. Polyakov. Interaction of Goldstone Particles in Two-Dimensions. Applications to Ferromagnets and Massive Yang-Mills Fields. *Phys. Lett.*, B59:79–81, 1975.
- [38] S. Rouhani. The Central Charge in the Supersymmetric CP^{n-1} Model. *Nucl. Phys.*, B169:430, 1980.
- [39] Abdus Salam and John Clive Ward. Electromagnetic and Weak Interactions. *Phys. Lett.*, 13:168–171, 1964.
- [40] M. van Leeuwen, A. Cohen, and B. Lissers. LiE 2.1 Manual. Computer Algebra Group of CWI, Amsterdam.
- [41] Steven Weinberg. A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [42] A. Wipf. Introduction to Supersymmetry. Vorlesungsskript, 2001.
- [43] Andreas W. Wipf. Hamilton’s Formalism for Systems with Constraints. 1993.
- [44] Edward Witten. A Supersymmetric Form of the Nonlinear Sigma Model in Two-Dimensions. *Phys. Rev.*, D16:2991, 1977.
- [45] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.
- [46] B. Zumino. Supersymmetry and Kahler Manifolds. *Phys. Lett.*, B87:203, 1979.

Literaturverzeichnis

Danksagung

Für die hervorragende Betreuung während der Anfertigung meiner Diplomarbeit möchte ich mich herzlich bei Prof. Wipf bedanken. Sein stetes Interesse an meinen Fortschritten und die hilfreichen Diskussionen zu Fragen und Problemen haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Außerdem möchte ich mich bei Dr. Sebastian Uhlmann und Dr. Pablo Pisani bedanken, die mir besonders in der Einarbeitungszeit viele Fragen geduldig beantwortet haben. Der gesamten Arbeitsgruppe für Quantenfeldtheorie danke ich für die freundliche Atmosphäre, in der ich das Jahr über arbeiten durfte.

Ein besonderer Dank gilt Lukas Janssen, der mich das gesamte Studium als guter Freund begleitet hat und mit dem ich in dieser Zeit viel über Physik diskutieren, aber auch über andere Dinge reden konnte. Insbesondere danke ich ihm für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Meiner Freundin Tamara danke ich, dass ich bei ihr im letzten Jahr den nötigen Ausgleich zur Physik finden konnte und dass sie mir besonders in der letzten, anstrengenden Phase eine große Unterstützung war.

Meinen Eltern möchte ich danken, dass sie mir das Physikstudium ermöglicht haben und mich in dieser Zeit mit großem Interesse begleitet haben.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die Arbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, 13. Februar 2009

Ulrich Harst

