

Analytische und numerische Studie zum
Infrarotverhalten des
Gluonpropagators in Landaueichung

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Dpl. Physiker

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE

eingereicht von Thorsten Brüntjen
geboren am 05.09.1978 in Westerstede

1. Betreuer: Dr. Jean-Pierre Leroy
2. Betreuer: Prof. Dr. habil. A. Wipf

Orsay, 27. Februar 2006

Danksagung

Ich möchte meinen Eltern und meinem Bruder Steffen danken für den moralischen Anker und finanzielle Unterstützung während meines Studiums.

Weiterhin möchte ich meinem Betreuer Jean-Pierre Leroy und insbesondere Jacques Micheli und Olivier Pène danken für die Hilfe bei der Bearbeitung des Problems und Prof. Andreas Wipf für die nützliche Hilfe bei der Korrektur.

Dann danke ich meinen Kollegen im LPT Orsay, vor allem Nicolas, Alexei, Yacine, Benoît, FX, Mathieu, Paramita und Freunden, insbesondere Finne, Olli und Sebastian, welche mir zur Seite standen, für die Atmosphäre und viele kleine Handschläge.

Und nicht zuletzt Marie, die mein Herz erobert hat.

Ich freue mich auf den Beginn der Doktorarbeit und die Aussicht auf interessante Numerik mit Philippe Boucaud.

Aufgabenstellung

Daniel Zwanziger a établi en 1991 (Nucl. Phys. B 364, p. 127) un théorème qui affirme que, sur réseau, le propagateur du gluon en jauge de Landau s'annule à impulsion nulle. En principe ceci n'est vrai qu'en volume infini ce qui indique qu'il peut y avoir un problème d'ordre des limites $p \rightarrow 0$ et $V \rightarrow \infty$. La situation du côté des réseaux ne permet de trancher pour le moment.

Le stage pourrait ainsi avoir un double aspect théorique (étude de l'interchangeabilité des limites mentionnées auparavant) et numérique pour tenter d'affiner les résultats dans la région infra-rouge.¹

Cordialement,
J-P Leroy.

¹ Daniel Zwanziger hat 1991 (Nucl. Phys. B 364, p. 127) ein Theorem aufgestellt, welches behauptet, dass der Gluonpropagator in Landau-Eichung bei Nullimpuls verschwindet. Im Prinzip ist dies nur wahr im unendlichen Volumen, was darauf hinweist, dass es ein Problem der Ordnung der Limites $p \rightarrow 0$ und $V \rightarrow \infty$ geben kann. Gittersimulationen können das Problem bisher nicht entscheiden.

Das Praktikum könnte also einen doppelten Aspekt besitzen, theoretisch (Studie der Vertauschbarkeit der genannten Limites) und numerisch, um die Resultate im Infraroten zu verfeinern.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Eichtheorie	13
2.1	Basisobjekte	13
2.2	Eichfixierung	16
2.3	Gribovhorizont im Kontinuum	17
3	Gittereichtheorie	19
3.1	Diskretisierung und Observable	19
3.2	Skala und Kontinuumslimes	23
3.3	Landaueichung	24
3.4	Gribovkopien	27
4	Gribovhorizont	29
4.1	Faddeev-Popov-Matrix	29
4.2	Unitäre Schranke	32
4.3	Schranke als Folge des Gribovhorizonts	33
4.4	Schranken für erzeugende Funktionen	36
5	Gluonpropagator	37
5.1	Analytische Struktur	37
5.2	Renormierung	38
5.3	Numerische Resultate	39
5.4	Fehlerrechnung	41
5.5	Formvorschläge	45
6	Analytischer IR-Limes	47
6.1	Zwanzigers Extrapolation	47
6.2	Toy-model de Jacques	49
7	Zusammenfassung	53
A	Speziell unitäre Matrizen	55

B	Algorithmus Heat bath	57
C	Daten und toy.mw	61

Kapitel 1

Einleitung

Standardmodell der Elementarteilchen

Drei fundamentale Wechselwirkungen sind in dem Standardmodell der Elementarteilchen zusammengefasst. Sie unterscheiden sich im Wesentlichen in ihrer Stärke,

$$\begin{array}{ll} \text{Starke Wechselwirkung} & \alpha_s = 1, \\ \text{Elektromagnetische Wechselwirkung} & \alpha_e = 1/137, \\ \text{Schwache Wechselwirkung} & \alpha_{EW} = 10^{-5} \text{ GeV}^2. \end{array}$$

in ihrer Reichweite und in ihren Symmetrieeigenschaften. Die physikalische Welt der Atomkerne kann aus drei Quarkfamilien oder -flavors,

$$\begin{pmatrix} u & c & b \\ d & s & t \end{pmatrix},$$

aufgebaut werden. Die Darstellungstheorie erklärt dann den Elementarteilchenzoo der Flavourgruppe. Wir haben die leichtesten Mesonzustände,

$$[3] \otimes [\bar{3}] = [1] \oplus [8],$$

in denen sich beispielsweise die positiv geladenen Pionen und Kaonen befinden,

$$\pi^+ = u\bar{d} \quad K^+ = u\bar{s}.$$

Das Proton p findet sich im gemischt antisymmetrischen Oktett $[8]_{MA}$ der Hadronzustände:

$$[3] \otimes [3] \otimes [3] = [1] \oplus [8]_{MA} \oplus [8]_{MS} \oplus [10].$$

p ist antisymmetrisch unter der Vertauschung der up- und down-Quarks,

$$p_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u.$$

Das unter sämtlichen Vertauschungen vollständig symmetrische Dekuplett enthält Teilchen wie

$$\Delta^{++} = uuu \text{ und } \Omega^- = sss.$$

Nebst den 6 Quarks stehen die 3 Leptonenfamilien

$$\begin{pmatrix} e & \mu & \tau \\ \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \end{pmatrix}$$

welche elektroschwach mit den Hadronen und Mesonen wechselwirken. Quarks und Leptonen üben in Abhängigkeit von ihrem relativen Abstand Kräfte aufeinander aus. Wir stellen uns vor, dass sie von Boten überbracht werden, den Eichbosonen,

8 Gluonen Starke WW	W^\pm, Z Schwache WW	γ EM WW
------------------------	---------------------------	-------------------

Die Quarks und Leptonen unterscheiden sich von Bosonen (zum Beispiel sind auch Mesonen Bosonen) in ihren statistischen Eigenschaften. Die Symmetriegruppe, welche bestimmt, wer mit wem und wie stark wechselwirkt, ist

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1).$$

Dieses Standardmodell erklärt fast alle bekannten physikalischen Phänomene (ausser der unlängst beobachteten Neutrinooszillation vielleicht), und ist dennoch umstritten. Zum einen wurde ein notwendiges Teilchen, das skalare Feld mit Spin 0, das Higgsteilchen, noch nicht entdeckt. Das Higgsteilchen generiert den anderen Teilchen ihre Masse. Und zum anderen ist das Standardmodell erweiterbar, zum Beispiel um Partnerteilchen (ein Kandidat ist das minimal supersymmetric model (MSSM) der Supersymmetrie). SUSY stellt Symmetrietransformationen zwischen Teilchen unterschiedlicher Spins zur Verfügung, insbesondere werden fermionische und bosonische Freiheitsgrade aufeinander abgebildet. Desweiteren kann SUSY lokal Gravitation beschreiben (SUGRA), die Theorie wird wegen der Vereinigung der 4 bekannten physikalischen Kräfte heute intensiv untersucht. In SUGRA kann das große ausstehende Problem der Hierarchie der Skalen mit Branemodellen behandelt werden. Bis dato ist noch keine Spur von Supersymmetrie in der Natur entdeckt worden, in wenigen Jahren werden wir mehr wissen (CERN). Ein weiteres Problem ist, dass experimentelle Daten auf die Existenz schwarzer Materie und schwarzer Energie hinweisen. Es ist nicht bekannt, ob das Standardmodell dafür natürliche Kandidaten bereit hält, die Masse der Neutrinos scheint zu gering zu sein.

Confinement

Über Dualitäten können Korrespondenzen zwischen Theorien entwickelt werden. Observable einer Theorie können im besten Fall bijektiv auf Observable einer anderen Theorie abgebildet werden.

Zum Beispiel können Observable, welche „vernünftige“ Funktionen von der Ortsvariable sind, bijektiv auf Observable, welche Funktionen von Impulsvariablen sind, abgebildet werden (Fouriertransformation).

Eine Dualität von elektrischer und magnetischer Theorie führte Seiberg und Witten 1994 zur Supersymmetrischen Yang-Millstheorie in vier Dimensionen, welche die Nichtexistenz von freien Quarks und Gluonen unterhalb einer bestimmten Energie (Confinement, s.u. eine Definition) auf die Kondensation von magnetischen Monopolen zurückführt.

Der holländische Physiker G. 't Hooft und der Argentinier J. Maldacena verbinden in einer anderen interessanten Dualität Stingtheorien mit Kopplungskonstante $1/N$ im Grenzwert großer N mit den vierdimensionalen Eichtheorien $SU(N)$ oder $SO(N)$.

Ob das Problem des Confinements am besten durch eine Dualität beschrieben ist, steht noch offen.

Der Confinementforscher geht vom Standardmodell der Elementarteilchen aus, beschäftigt sich mit der stärksten der Kräfte des Standardmodells, mit Quarks und Gluonen und mit der Gruppe $SU(3)$, der Farbgruppe. Der übliche Zugang ist der feldtheoretische: Quantenchromodynamik (QCD). Er ist nicht der einzig mögliche, aber er hat sich als sehr erfolgreich herausgestellt. Beispielsweise sind Techniken der globalen Analysis [1], und auch algebraische Modelle im Umlauf [2].

QCD ist die Feldtheorie der Eichgruppe $SU(3)$, was heißt, dass wir Teilchen als Quanten der Felder ansehen. A. Jaffe und E. Witten [3] geben eine Liste von Punkten, welche QCD erfüllen muss, um erfolgreich die starke Kraft zu beschreiben:

- Die Theorie muss einen „mass gap“ besitzen, d.h. es muss eine positive Konstante Δ existieren, so dass jede Anregung des Vakuums mindestens die Energie Δ besitzt.
- Sie muss „quark confinement“ enthalten, d.h. obwohl die Theorie mit elementaren Feldern wie das Quarkfeld, welche sich nichttrivial unter $SU(3)$ -Eichtransformationen verhalten, beschrieben wird, sind die physikalischen Zustände wie das Proton, Neutron oder Pion $SU(3)$ invariant.
- Sie muss „chirale Symmetriebrechung“ beschreiben, d.h. das Vakuum ist im Grenzwert verschwindender Quarkmasse nur unter einer gewissen Untergruppe der vollen Eichgruppe invariant.

Sie schreiben weiter, „sowohl Experiment als auch Computersimulationen, welche seit den späten 70er Jahren durchgeführt wurden, weisen stark darauf hin, dass die QCD diese Eigenschaften besitzt. [...] Es existiert keine überzeugende, selbst wenn mathematisch nicht vollständige, theoretische Rechnung, welche eine der drei Eigenschaften der QCD beweist, und welche im Gegensatz zu stark vereinfachten Stutzungen steht“.

Wir betrachten in dieser Arbeit eine rein gluonische Theorie, d.h. wir rechnen ohne freie Valenzquarks. Wir werden ein Confinementszenario von V.Gribov [4] und D. Zwanziger [5] in minimaler Landaugleichung untersuchen. Aus der Positivität des Gitter-Faddeev-Popovoperators werden Schranken für die Felder abgeleitet, woraus das Verhalten des Gluonpropagators im Grenzwert des unendlichen Volumens,

$$\lim_{p \rightarrow 0} G(p) = 0, \quad (1.1)$$

vorhergesagt wird. Im Sinne von K. Wilson stellt ein Propagator zunächst keine physikalische Observable dar, unter einer Eichtransformation der weiter unten eingeführten Linkvariablen $U_\mu(x)$,

$${}^g U_\mu(x) = g(x) U_\mu(x) g^\dagger(x + e_\mu), \quad (1.2)$$

mit einem Element $g \in SU(3)$ ist die 2-Punktfunktion keine Invariante,

$$\langle g(x) A(x) g^\dagger(x + e_\mu) g(y) A(y) g^\dagger(y + e_\mu) \rangle \neq \langle A(x) A(y) \rangle.$$

Ein Verschwinden des Propagators ist damit im strengen Sinne keine physikalische Aussage. Dennoch kann man naiv argumentieren, dass ein Verschwinden des Propagators bedeutet, dass sich das Feld für niedrige Impulse nicht ausbreitet, und damit also kein freies Gluon existiert. Weiter kann man den Kurvenverlauf oder die Krümmung der Kurve mit Observablen wie der Spektralfunktion des Gluonfeldes in Verbindung bringen [6, 7] und daraus Konsequenzen ableiten.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In den ersten zwei Kapiteln werden wir einige grundlegende Konzepte der QCD vorstellen, zuerst im Kontinuum, dann in der diskreten Version. Der Schwerpunkt wird in der Eichfixierung liegen.

Im dritten Kapitel wird die analytische Rechnung Zwanzigers verifiziert. Die numerischen Untersuchungen zum Gluonpropagator werden in Kapitel 4 vorgestellt. Das letzte Kapitel wird der Hypothese eines Verschwindens des Gluonpropagators, Gl. (1.1), gewidmet.

Kapitel 2

Eichtheorie

Wir stellen in den beiden folgenden Kapiteln Konzepte vor, welche größtenteils in Vorlesungen in Jena und Orsay [8, 9, 10, 11] vermittelt wurden. Die verfügbare Literatur über Eichtheorie ist unüberschaubar, wir nutzten [12, 13, 15, 14, 16]. Wir rechnen in natürlichen Einheiten,

$$\hbar = c = k = 1.$$

2.1 Basisobjekte

Definition 1 (Euklidische Raumzeit). *Euklidische Raumzeit entsteht aus der Minkowski-Raumzeit mittels der Ersetzung*

$$t \rightarrow i\tau.$$

Das Wegelement ds wird zu

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = dx_\mu \eta^{\mu\nu} dx_\nu = dx_i \delta^{ij} dx_j, \quad (2.1)$$

wobei

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad \delta = \text{diag}(1, 1, 1, 1) \quad (2.2)$$

Es wird also die Einsteinsche Summenkonvention verwendet und angenommen, dass griechische und lateinische Indizes von 0 bis 3 laufen. Wir unterscheiden in Euklidischer Raumzeit nicht mehr zwischen ko- und kontravarianten Indizes. Eine mathematisch präzise Analyse der Gültigkeit zum Übergang zu Euklidischer Raumzeit kann in jedem einzelnen Fall mit Hilfe der Osterwalder-Schrader Axiome durchgeführt werden [17]. Nachdem wir das „set-up“ definiert haben, werden wir die Basisobjekte der QCD einführen.

Ein Basisobjekt der Theorie ist die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \sum_{\text{Flavours}} \bar{\psi}(x) (\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) + i g_0 \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x), \quad (2.3)$$

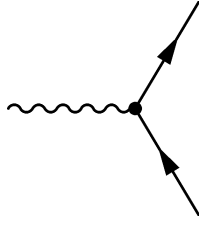


Abbildung 2.1: QED-Vertex

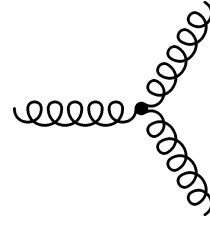


Abbildung 2.2: QCD-Vertex

aus welcher mittels Variationsrechnung die Bewegungsgleichungen der Felder berechnet werden können. Der erste Term der Lagrangefunktion ist das Quadrat des Feldstärketensors aus der Elektrodynamik,

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \quad (2.4)$$

der zweite Term die Lagrangedichte eines freien relativistischen Teilchens. Die angegebene Lagrangefunktion ist das Basisobjekt der Quantenelektrodynamik. Wir werden den Term der Quarkwechselwirkung nicht weiter betrachten. Die QCD beruht auf dem Modell nichtabelscher Eichfelder, ausgedrückt durch einen antisymmetrischen Zusatzterm in der Feldstärke,

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig_0[A_\mu(x), A_\nu(x)], \quad (2.5)$$

und einen zusätzlichen Isospinindex α ,

$$F_{\mu\nu}(x) = \sum \lambda^a F_{\mu\nu}^a(x), \quad (2.6)$$

wobei die Gell-Mann-Matrizen λ^a die Eichgruppe $SU(3)$ erzeugen. Sie sind definiert durch

$$\text{tr}[\lambda^a \lambda^b] = \frac{\delta^{ab}}{2}, \quad [\lambda^a, \lambda^b] = if^{abc} \lambda^c, \quad (2.7)$$

wobei f^{abc} die Strukturkonstanten der Eichgruppe $SU(3)$ sind. Der Kommutator in der Feldstärke lässt sich dann ausdrücken als

$$[A_\mu, A_\nu] = if^{abc} A_\mu^a A_\nu^b \lambda^c. \quad (2.8)$$

Diese Veränderung gegenüber der Quantenelektrodynamik (QED) verkompliziert die Rechnungen erheblich, in der Sprache Feynmans erhalten wir Vertices mit 3 und 4 Gluonen, was in der Quantenelektrodynamik (QED) ausgeschlossen ist, wo alle Vertices nur ein Photonfeld enthalten (vgl. Abb. 2.1).

Definition 2 (Eichtransformation). Wir definieren die lokale Eichtransformation des Gluonfeldes

$$A_\mu(x) \rightarrow {}^g A_\mu(x) = g^\dagger(x) A_\mu(x) g(x) - \frac{i}{g_0} g^\dagger(x) \partial_\mu g(x), \quad (2.9)$$

wobei $g(x)$ ein Element der Eichgruppe $SU(3)$ ist.

Die Feldstärke transformiert nach der adjungierten Darstellung der Eichgruppe,

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow g^\dagger(x)F_{\mu\nu}(x)g(x). \quad (2.10)$$

Wir verlangen eine eichinvariante Euklidische Wirkung, wählen deshalb die Spur über die Farbmatrizen,

$$S_E[A] = -\frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x). \quad (2.11)$$

Für eine infinitesimale Eichtransformation,

$$g(x) \approx 1 + i\omega(x), \quad (2.12)$$

mit einem Element $i\omega(x)$ der Liealgebra $su(3)$ mit den Eigenschaften

$$\omega(x) = \omega^a(x)\lambda^a \quad \text{und} \quad \omega^\dagger(x) = \omega(x), \quad (2.13)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} {}^g A_\mu(x) &= A_\mu(x) + i[A_\mu(x), \omega(x)] + \frac{1}{g_0} \partial_\mu \omega(x) \\ &\equiv A_\mu(x) + \frac{1}{g_0} D_\mu(x, A) \omega(x), \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei wir die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung eingeführt haben als

$$D_\mu(x, A) = \partial_\mu + ig_0[A_\mu(x), \cdot]. \quad (2.15)$$

Wir definieren weiter das Feynmansche Pfadintegral als

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{-S_E[A]}, \quad (2.16)$$

aus welchem Erwartungswerte von Observablen, n -Punktfunktionen, berechenbar sind als

$$\langle A_1 \dots A_n \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A A_1 \dots A_n e^{-S_E[A]}, \quad (2.17)$$

wobei \mathcal{N} die Normierungskonstante ($\langle 1 \rangle \stackrel{!}{=} 1$) ist. Das Pfadintegral ist im Fall einer Euklidischen Feldtheorie äquivalent zu der Zustandssumme der Statistischen Physik. $Z[J]$ ist das Schwingerfunktional, die Zustandssumme in Anwesenheit einer externen Quelle J ,

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A e^{-S_E[A]} e^{(J,A)}. \quad (2.18)$$

n -Punkts-Funtionen berechnen sich hieraus nach

$$\langle A_1 \dots A_n \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J[A_1] \dots \delta J[A_n]} \right|_{J=0}, \quad (2.19)$$

wobei wir durch Vergleich mit Gl. (2.17) $Z[0]^{-1} \equiv \mathcal{N}$ setzen können. Die Größe \mathcal{N} stellt in der Feynmanschen Theorie der Quantenfelder die Summe aller Vakuumbigramme dar. Die nichtverschwindenden Beiträge zum Vakuumerwartungswert einer Observable werden durch

$$W[J] \equiv \ln Z[J], \quad (2.20)$$

das Funktional der zusammenhängenden Korrelationsfunktionen erzeugt.

2.2 Eichfixierung

Wir stellen das Rezept von Faddeev und Popov zur kovarianten Eichfixierung vor. Eine kompakte Fassung, gültig für Gittereichtheorie, ist in [6] gegeben. Wir folgen Gribov [4]. Die Situation, dass viele eichäquivalente Konfigurationen, im Fall der Landaueichung Felder gleicher Divergenz, auftreten, ist typisch für nichtabelsche Eichtheorien. Wir integrieren die unphysikalischen Freiheitsgrade aus, indem wir die Identität

$$1 = \int \mathcal{D}g \delta(G[A[g]]) \det \left(\frac{\delta G[A[g]]}{\delta g} \right) \quad (2.21)$$

in die Zustandssumme einsetzen. Die unendlichdimensionale Funktionaldeterminante heißt Faddeev-Popovdeterminante, welche wir mit $M[A]$ bezeichnen,

$$M[A] \equiv \det \left(\frac{\delta G[A[g]]}{\delta g} \right). \quad (2.22)$$

Wir wählen

$$G[A[g]] = f - \partial_\mu^g A_\mu(x), \quad (2.23)$$

mit ${}^g A_\mu(x)$ aus Gl. (2.9), was ergibt,

$$Z = \int \mathcal{D}A e^{-S_E[A]} \int \mathcal{D}g \delta(f - \partial_\mu^g A_\mu) M[A]. \quad (2.24)$$

Unter einer Eichtransformation

$$A \rightarrow g^{-1} A \quad (2.25)$$

ist das Maß $\mathcal{D}A$ und die Wirkung $S_E[A]$ invariant, das heißt, wir können einen unendlichdimensionalen Faktor $\int \mathcal{D}g$ abspalten,

$$Z = \left(\int \mathcal{D}g \right) \int \mathcal{D}A e^{-S_E[A]} \delta(f - \partial_\mu^g A_\mu) M[A], \quad (2.26)$$

und in die Normierung der Zustandssumme absorbieren. Die Zustandssumme ist unabhängig von f . Wir mitteln über f , wobei wir ein Gaußsches Gewicht einfügen,

$$Z = \int \mathcal{D}A \int df e^{-S_E[A]} \delta[f - \partial_\mu^g A_\mu] M[A] e^{-\text{tr} \int d^4x \frac{f^2}{\alpha^2}}. \quad (2.27)$$

Die Ausführung der Integration über die δ -Funktion ergibt die Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}A \exp \left\{ -S - \frac{1}{\alpha^2} \text{tr} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2 \right\} M[A], \quad (2.28)$$

in welcher der Parameter α die kovarianten Eichungen klassifiziert,

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &: \text{ Landaueichung,} \\ \alpha = 1 &: \text{ Feynmaneichung.} \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.3 Gribovhorizont im Kontinuum

Sei

$${}^g A = g^\dagger A g - \frac{i}{g_0} g^\dagger \partial g \quad (2.30)$$

aus A mittels Eichtransformation g hervorgegangen. Gleichheit in der Divergenz bedeutet

$$\partial^g A - \partial A = 0, \quad (2.31)$$

was die für g die Bedingung

$$\partial_\mu g^\dagger [D_\mu, g] = 0 \quad (2.32)$$

nach sich zieht, denn

$$\begin{aligned} \partial^g A - \partial A &= \partial(g^\dagger A g - \frac{i}{g_0} g^\dagger \partial g) - \partial(g^\dagger A g) \\ &= \partial(g^\dagger [A, g]) - \frac{i}{g_0} \partial(g^\dagger \partial g). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Für eine infinitesimale Transformation,

$$g = 1 + i\omega, \quad \omega^\dagger = \omega, \quad (2.34)$$

ergibt sich nach Linearisierung

$$\tilde{\square}\omega \equiv \partial[D, \omega] = 0, \quad (2.35)$$

mit der oben eingeführten kovarianten Ableitung D . Die Determinante des Operators $\tilde{\square}$ geht, wie im vorigen Abschnitt gesehen, beim Eichfixierungsprozess in das Funktionalintegral ein, wenn wir eichäquivalente Konfigurationen ausintegrieren. Andererseits ist Gl. (2.35) zugleich eine Eigenwertgleichung vom Typ der Schrödingergleichung für den Operator $\tilde{\square}$ in vier Dimensionen in einem Potential $\partial[A, g]$ mit Energie Null,

$$-\tilde{\square}(A)a = \varepsilon a. \quad (2.36)$$

Der Operator $\tilde{\square}$ hängt von A ab. Wenn A genügend klein ist, dann hat die Gleichung nur Streulösungen für positives ε . Wenn A ansteigt, finden wir Lösungen zuerst mit verschwindender, dann mit negativer Energie; bei einer bestimmten Größe von A wird ein zweiter Zustand mit Nullenergie entstehen, usw. . . . Wir nennen die Zustände gebundene Geiztstände, denn eine Berechnung der Determinante des Faddeev-Popovoperators führt auf das Diracproblem,

$$\sqrt{2\pi}(\det M)^{1/2} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-\bar{\psi} M \psi}, \quad (2.37)$$

zu dessen Lösung man analog zur Behandlung von Fermionen Grassmannvariable einführt,

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \delta_{ij}, \quad (2.38)$$

$$\theta^2 = 0. \quad (2.39)$$

Weiterhin nennen wir das Gebiet, in dem alle Eigenwerte des Faddeev-Popovoperators positiv sind und welches das Nullfeld $A = 0$ enthält, den ersten Gribovhorizont. Das Spektrum der Faddeev-Popovoperators ist Gegenstand aktueller Forschung einer LQCD-Gruppe in Berlin [18].

Kapitel 3

Gittereichtheorie

3.1 Diskretisierung und Observable

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Grundlagen Wilsons Gittereichtheorie [19].

Definition 3 (Diskretisierung der Raumzeit). Seien die in einem 4-dimensionalen, periodischen Gitter der der Länge L liegenden Gitterplätze (im Folgenden „Sites“ genannt) durch 4-dimensionale Vektoren x_μ , $\mu = 0, \dots, 3$ bezeichnet. Bezeichne $U_\mu(x)$ das Element der $SU(3)$ Liegruppe, welches mit dem Link von x nach $x + ae_\mu$ verbunden wird. e_μ ist ein Einheitsvektor in die positive μ -Richtung und wir setzen $U_\mu(x) = U_\mu(x + Le_\mu)$ für Periodizität (Vgl. Abb. 3.2).

Die Diskretisierung der Raumzeit zieht einen Symmetribruch der Poincarégruppe in ihre hyperkubische Untergruppe $H(4)$ mit sich,

$$P(4) \rightarrow H(4), \quad (3.1)$$

was sich auf die Definition eines physikalischen Teilchens im relativistischen Sinne auswirkt. Wir definieren Teilchen als irreduzible Darstellung der vierdimensionalen hyperkubischen Algebra $H(4)$. Effekte der Diskretisierung werden in Abschnitt 5.4 beschrieben.

Wir setzen von nun an den Gitterabstand a auf Eins. Welcher physikalischen Länge oder Energie a entspricht, werden wir im nächstfolgenden Kapitel beschreiben.

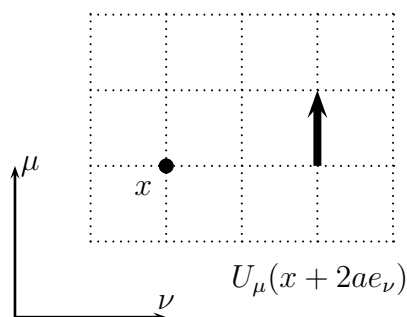


Abbildung 3.1: Diskretisierung der Raumzeit, „sites“ und „links“

Definition 4 (Wilsonwirkung). Wir definieren die Diskretisierung der Euklidischen Eichwirkung als

$$S_W[U] \equiv \beta \sum_{\square} \left(1 - \frac{1}{N} \Re \operatorname{tr} [U_{\square}]\right), \quad (3.2)$$

wobei U_{\square} die Plakette bezeichnet (Abb. 3.3),

$$U_{\square} \equiv U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + e_{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(x + e_{\nu})U_{\nu}^{\dagger}(x). \quad (3.3)$$

Wir definieren die Kopplung β als

$$\beta = \frac{2N}{g_0^2}. \quad (3.4)$$

Eine Rechnung unter Verwendung der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel zeigt, dass wir die Feldstärke $F_{\mu\nu}$ in Ordnung a^2 diskretisiert haben. Es existieren „improvement“-Programme, siehe z.B. [20], welche die Gitterartefakte um mehrere Ordnungen reduzieren. Wilsons Philosophie ist, dass nur eichinvariante Größen physikalische Information tragen. Die Plakette ist der kleinst m3glichste der „Wilsonloops“, welche eine eichinvariante Klasse von Observablen sind.

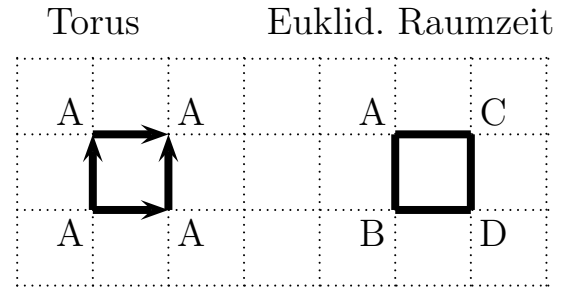


Abbildung 3.2: Topologie der Raumzeit. Orte mit gleichen Buchstaben werden identifiziert.

Definition 5 (Wilsonloop). Wir definieren den Wilsonloop als

$$U(C) \equiv \prod_{l \in C} U_l, \quad (3.5)$$

wobei C ein geschlossener Weg (Kontur) durch das Gitter ist. (Abb. 3.4)

Schon fr3h wurde erkannt, dass der Erwartungswert des Wilsonloops in reiner Eichtheorie ein Ordnungsparameter f3r Confinement ist. Creutz schreibt [15], „der Wilsonloop misst im Wesentlichen die Antwort der Eichfelder auf eine externe quarkartige Quelle, welche einmal den Loop abl3uft. F3r einen zeitartigen Loop stellt dies die Produktion eines Quark-Antiquark-Paares zu fr3hester Zeit dar, welches durch die Raumzeit entlang des Loops propagiert und sich dann zu sp3tester Zeit annihiliert.“ Sei $W(R, T)$ ein rechteckiger Wilsonloop (Abb. 3.4). Wir definieren das statische Quarkpotential

$$V_{q\bar{q}}(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W(R, T) \rangle \quad (3.6)$$

und die Stringspannung

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{V_{q\bar{q}}(R)}{R}. \quad (3.7)$$

Es gilt dann das folgende Prinzip,

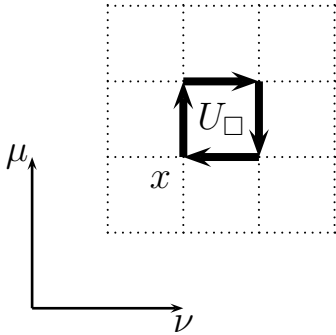


Abbildung 3.3: Diskretisierung der Feldstärke durch die Plakette. Die Linkvariablen werden miteinander multipliziert.

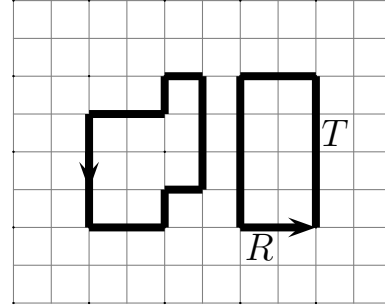


Abbildung 3.4: Zwei typische Wilson-loops. Der rechteckige Loop wird zur Definition der Stringsphannung genutzt.

- $\langle \sigma \rangle = 0$ nicht einschließende Phase,
- $\langle \sigma \rangle \neq 0$ einschließende Phase (Confinement).

Eine linear ansteigende Energie zwischen zwei Quarks impliziert

$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-\sigma A(C)}, \quad (3.8)$$

wobei $A(C)$ die Fläche innerhalb der Kontur ist. In einer Theorie ohne Confinement wird die Energie eines Quarkpaares nicht mit der Entfernung zunehmen, sondern sich der doppelten Selbstenergie eines isolierten Quarks annähern, im Wilsonloop drückt sich das durch

$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-kU(C)} \quad (3.9)$$

aus, wobei $U(C)$ den Umfang der Kontur misst. In Anwesenheit dynamischer Quarks wird das Flächengesetz nicht halten. Weit entfernte Quarkquellen werden ihre Energie durch die Erzeugung eines Quark-Antiquark-Paares aus Vakuumfluktuationen verringern können, welche effektiv die langreichweitigen Eichfelder abschirmen [21].

Eine zweite Konstruktion, welche Ordnungsparameter für Confinement ist, ist der „Polyakovloop“ bei endlicher Temperatur

$$T \equiv \frac{1}{\beta}. \quad (3.10)$$

Um endliche Temperatur zu simulieren werden spezielle Gitter verwendet, bei denen die Zeitrichtung stark verkürzt ist.

Definition 6 (Polyakovloop). Wir definieren den Polyakovloop als

$$\mathcal{P}(\vec{x}) \equiv \prod_{t=1, \dots, \beta} U_4(t, \vec{x}). \quad (3.11)$$

Das Gitter wird dabei einmal ganz in Zeitrichtung durchlaufen und besitzt damit spezielle topologische Eigenschaften. Der Polyakovloop kann im Grenzwert verschwindender Temperatur als einzelnes statisches Quark interpretiert werden. Die Theorie des Polyakovloops wird zum Beispiel in Jena und in Bielefeld untersucht [22, 23].

Weitere Observable, ausgedrückt in Polynomen der Linkvariablen, können durch externe Quellen erzeugt werden. Wir zeigen, wie wir die Masse eines Zustands aus dem Spektrum eines Operators berechnen. Sei $O(t, \vec{x})$ ein Operator erzeugt durch eine Quelle im Schwingerfunktional. T bezeichne den Operator der Zeitordnung. Die Faktoren sind so gewählt, dass die Rechnung relativistisch kovariant ist. Wir fügen im Erwartungswert des Operators ein vollständiges Orthonormalsystem von Zuständen ein, nutzen den Translationsoperator

$$P_{t, \vec{x}}[O(0, 0)] \equiv e^{iP_\mu x_\mu} O(0, 0) e^{-iP_\mu x_\mu} \equiv O(t, \vec{x}) \quad (3.12)$$

und berechnen

$$\begin{aligned} G(t, \vec{x}) &= \langle 0 | T(O(t, \vec{x}) O^\dagger(0, 0)) | 0 \rangle \\ &= \sum_n \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_n} \langle 0 | O(t, \vec{x}) | n, \vec{p} \rangle \langle n, \vec{p} | O^\dagger(0, 0) | 0 \rangle \\ &= \sum_n \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_n} |\langle 0 | O(0, 0) | n, \vec{p} \rangle|^2 e^{-iE_n t} e^{i\vec{p}\vec{x}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wir summieren über die räumlichen Freiheitsgrade,

$$\begin{aligned} \int d^3 \vec{x} G(t, \vec{x}) &= \sum_n \int d^3 \vec{p} \frac{1}{2E_n} \langle 0 | O(0, 0) | n, \vec{p} \rangle^2 e^{-iE_n t} \delta(\vec{p}) \\ &= \sum_n \frac{e^{-iE_n(\vec{p}=0)t}}{2E_n(\vec{p}=0)} |\langle 0 | O(0, 0) | n, 0 \rangle|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Analytische Fortsetzung, $it \rightarrow \tau$, ergibt

$$\int d^3 \vec{x} G(t, \vec{x}) = \sum_n |\langle 0 | O(0, 0) | n, 0 \rangle|^2 \frac{e^{-E_n(\vec{p}=0)\tau}}{2E_n(\vec{p}=0)}. \quad (3.15)$$

Im Grenzwert $\tau \rightarrow \infty$ wird nur der erste Summand beitragen, alle weiteren sind exponentiell unterdrückt,

$$G \sim |\langle 0 | O(0, 0) | n, 0 \rangle|^2 \frac{e^{-E_{n_0}(\vec{p}=0)\tau}}{2E_{n_0}(\vec{p}=0)}. \quad (3.16)$$

Der Faktor vor dem Bruch heißt Zerfallskonstante und wir identifizieren die Masse m ,

$$m \equiv E_{n_0}(\vec{p}=0). \quad (3.17)$$

Die Berechnung von 3-Punktfunktionen ist komplizierter, da das Ergebnis nach einem Resultat von Maiani und Testa [24] von der Art des interpolierenden Feldes abhängt. Als Konsequenz davon ist beispielsweise ist der Zerfall $K \rightarrow \pi\pi$ auf dem Gitter nicht studierbar.

3.2 Skala und Kontinuumslices

Die Parameter der Gitter-QCD sind der Gitterabstand a und die Kopplungskonstante g_0 . Der Gitterabstand wird auch als Ultraviolett-cut-off bezeichnet. Die beiden Größen hängen über die Renormierungsgruppe nichttrivial von einander ab, so dass sich letztendlich ein einziger freier Parameter ergibt, welcher durch ein beliebiges physikalisches Experiment fixiert wird. Auf diese Weise besitzt die Theorie Voraussagekraft. Wir stützen uns auf den experimentellen Wert der Stringspannung [25],

$$\sqrt{\sigma} \approx 445 \text{ MeV}. \quad (3.18)$$

Durch Dimensionsanalyse finden wir, dass sich $\sqrt{\sigma}$ als

$$\sqrt{\sigma} = \frac{1}{a} f(g_0) \quad (3.19)$$

schreiben lassen muss. Wenn der Gitterabstand a gegen Null geht, muss $\sqrt{\sigma}$ unabhängig von a werden,

$$a \frac{d}{da} \sqrt{\sigma} = 0. \quad (3.20)$$

Dies ergibt eine Differenzialgleichung für $f(g_0)$,

$$f(g_0) + f'(g_0) \beta^R(g_0) = 0, \quad (3.21)$$

in welcher $\beta^R(g_0)$ die Abhängigkeit der Kopplungskonstante vom Ultraviolett-cut-off a beschreibt,

$$\beta^R(g_0) = -a \frac{d}{da} g_0(a). \quad (3.22)$$

Die asymptotische Freiheit der QCD [26] sagt eine negative β -Funktion voraus,

$$\beta^R(g_0) \equiv -\beta_0^R g_0^3 + \mathcal{O}(g_0^5) = -\frac{1}{16\pi^2} \frac{11}{2N_c} g_0^3 + \mathcal{O}(g_0^5). \quad (3.23)$$

Die β -Funktion ist heute in der Störungstheorie bereits bis zur vierten loop-Ordnung bekannt [27]. Die Wahl einer speziellen Integrationskonstanten in der Lösung von Gl. (3.21) definiert einen dimensionierten Parameter Λ_L ,

$$\sqrt{\sigma} = c_\sigma \Lambda_L \quad (3.24)$$

mit

$$\Lambda_L = a^{-1} e^{-1/(2\beta_0^R g_0^2)} (\dots) \quad (3.25)$$

Wir können die Konstante Λ_L über Testläufe festlegen, d.h. fitten. Wir erhalten eine Abhängigkeit $a(\beta^R)$ und damit eine physikalische Skala. Für die $SU(3)$ -Gruppe rechnen wir mit den Daten aus Tabelle 3.5.

Wir definieren empirisch $\beta \leq 6.0$ als das Gebiet der starken Kopplung. In der Gruppe $SU(2)$ ist dieses Gebiet für $\beta \leq 2.2$ erreicht. Eine sorgfältige Studie über das Gebiet der starken Kopplung findet sich in [15].

β	a^{-1} [GeV]	a [fm]
5.7	1.07	0.18
5.8	1.34	0.15
5.9	1.65	0.12
6.0	1.97	0.1
6.2	2.7	0.07
6.4	3.58	0.055
6.8	6.48	0.03

(3.26)

Abbildung 3.5: Abhängigkeit des Gitterabstands von β für die Gruppe $SU(3)$ ohne dynamische Quarks

3.3 Landaugleichung

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Eichfixierung auf dem Gitter. Wir definieren das diskretisierte Gluonfeld als

$$A_\mu^a(x) \equiv -i \text{tr} [\lambda^a (U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x))]. \quad (3.27)$$

Setzen wir $\alpha = 0$ in Gl. (2.28) ein, so tragen nur Felder bei, welche

$$\partial_\mu A_\mu^a \equiv \sum_\mu [A_\mu^a(x) - A_\mu^a(x - e_\mu)] = 0 \quad (3.28)$$

erfüllen. Dies definiert transversal geeichte Felder bzw. die Landaugleichung. Weiterhin definieren wir die Impulsvariable k als

$$k_\mu \equiv \frac{2\pi n_\mu}{aL}, \quad n_\mu \in [-L/2, L/2], \quad (3.29)$$

mit n_μ einer ganzen Zahl. Definieren wir die Fouriertransformierte $a_\mu^b(k)$ des Gluonfeldes $A_\mu^b(x)$ als

$$A_\mu^a(x) = \frac{1}{V} \sum_k a_\mu^a(k) e^{ikx + k_\mu/2} \quad (3.30)$$

und die Umkehrtransformation als

$$a_\mu^a(k) = \sum_x A_\mu^a(x) e^{-ikx + k_\mu/2}, \quad (3.31)$$

dann können wir Transversalität im Fourierraum charakterisieren,

$$\begin{aligned} \sum_\mu [A_\mu^a(x) - A_\mu^a(x - e_\mu)] &= 0 \\ &= \frac{1}{V} \sum_{k,\mu} a_\mu^a(k) e^{ikx} (e^{ike_\mu/2} - e^{-ike_\mu/2}) \\ &= \frac{2i}{V} \sum_{k,\mu} a_\mu^a(k) e^{ikx} \sin(k_\mu/2). \end{aligned}$$

Da dies für alle x gilt, folgt

$$\sum_{\mu} a_{\mu}^a(k) \sin(k_{\mu}/2) = 0. \quad (3.32)$$

Definition 7 (Eichwirkung). Die Eichwirkung $S[g]$ ist definiert als

$$S[g] = \sum_{(x,\mu)=L} (1 - N^{-1} \Re \operatorname{tr} [g^{-1}(x) U_{\mu}(x) g(x + e_{\mu})]) \quad (3.33)$$

$$\equiv \sum_{x,\mu} (1 - N^{-1} \Re \operatorname{tr} {}^g U), \quad (3.34)$$

wobei ${}^g U$ die Eichtransformierte von U heißt.

Wenn wir die Linkvariablen $U_{\mu}(x)$ als Paralleltransporter deuten, in der infinitesimalen Version,

$$U_{\mu}(x) = e^{ig_0 a A_{\mu}(x+e_{\mu}/2)} \approx 1 + ig_0 a A_{\mu}(x + e_{\mu}/2), \quad (3.35)$$

dann entspricht die Eichtransformation für die Linkvariablen gerade der Eichtransformation für das Gluonfeld im Kontinuum, Gl. (2.9):

$$U'_{\mu}(x) = g^{\dagger}(x) U_{\mu}(x) g(x + e_{\mu}) \approx 1 + i g_0 a A'_{\mu}(x') \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} &= \left[g^{\dagger}(x') - \frac{a}{2} \partial_{\mu} g^{\dagger}(x') \right] \left[1 + i g_0 a A_{\mu}(x') \right] \left[g(x') + \frac{a}{2} \partial_{\mu} g(x') \right] \\ &= \underbrace{1 - \frac{a}{2} \partial_{\mu} g^{\dagger}(x') g(x') + \frac{a}{2} g^{\dagger}(x') \partial_{\mu} g(x')}_{= + \frac{a}{2} g^{\dagger}(x') \partial_{\mu} g(x')} + i g_0 a g^{\dagger}(x') A_{\mu}(x') g(x') \end{aligned}$$

$$\rightarrow A'_{\mu}(x') = g^{\dagger}(x') A_{\mu}(x') g(x') - \frac{i}{g_0} g^{\dagger}(x') \partial_{\mu} g(x'), \quad (3.37)$$

wobei wir abkürzend $x' = x + e_{\mu}/2$ geschrieben haben. Wir definieren die minimale Landaueichung durch den Minimierungsprozess

$$\min_g S[g], \quad g \in SU(3). \quad (3.38)$$

Wir werden sehen, dass die minimale Landaueichung im Kontinuumsimes die Landaueichung ergibt. Sei eine infinitesimale Eichtransformation gegeben durch

$$g(x) = e^{i\tau\omega(x)} \quad (3.39)$$

mit einem Element $i\omega(x)$ der Liealgebra $su(N)$, definiert in Gl. (2.13). Wir berechnen die erste Ableitung der Eichwirkung bezüglich eines Variationsparameters τ .

$$S(\tau) = \sum_{x,\mu} (1 - N^{-1} \Re \operatorname{tr} e^{i\tau\omega(x)} U_{\mu}(x) e^{-i\tau\omega(x+e_{\mu})}) \quad (3.40)$$

$$\equiv \sum_{x,\mu} (1 - N^{-1} \Re \operatorname{tr} {}^g U) \quad (3.41)$$

Wir zeigen

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0 \implies \partial_\mu A_\mu = 0. \quad (3.42)$$

Wir verwenden die Zyklizität der Spur und die Periodizität der Linkvariablen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau} &= 0 \\ &= -\frac{i}{N} \sum_{x,\mu} \Re \operatorname{tr} [\omega(x) {}^g U_\mu(x) - {}^g U_\mu(x + e_\mu)] \\ &= -\frac{i}{N} \sum_{x,\mu} \Re \operatorname{tr} [\omega(x) ({}^g U_\mu(x) - {}^g U_\mu(x - e_\mu))] \end{aligned}$$

Dies muss für alle $\omega(x) = \omega^a(x) \lambda^a$ gelten, also

$$\sum_\mu \Re \operatorname{tr} \lambda^a ({}^g U_\mu(x) - {}^g U_\mu(x - e_\mu)) = 0. \quad (3.43)$$

Dies bedeutet aber, dass die Gitterdivergenz des Gluonfeldes verschwindet,

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \sum_\mu \Re \operatorname{tr} \lambda^a ({}^g U_\mu(x) - {}^g U_\mu(x - e_\mu)) \\ &= -i \sum_\mu \operatorname{tr} [\lambda^a ({}^g U_\mu(x) - {}^g U_\mu(x - e_\mu) - {}^g U_\mu^\dagger(x) + {}^g U_\mu^\dagger(x - e_\mu))] \\ &= \sum_\mu (A_\mu^a(x) - A_\mu^a(x - e_\mu)) \\ &\equiv \partial_\mu A_\mu^a(x), \end{aligned} \quad (3.44)$$

was wir als Landaueichung definiert haben.

Die obige Definition des Gluonfeldes (3.27) ist nicht eindeutig. Andere Definitionen wurden in [28] untersucht.

Es wurden in den letzten Jahren viele Eichungen untersucht, am meisten vielleicht die Feynmaneichung (Störungstheorie), die maximal abelsche Eichung und die Axialeichung. Wir wollen kurz auf eine alternative Eichung eingehen.

Coulombeichung: (Die Indizes i und j laufen von 1 bis 3.) Die Coulombeichung wird ähnlich der minimalen Landaueichung definiert,

$$\min_g \sum_{\vec{x}, \mu} (1 - N^{-1} \Re \operatorname{tr} {}^g U), \quad (3.45)$$

wobei nun das Minimum in jedem Zeitabschnitt gewählt wird. Coulombeichung ist äquivalent zu

$$\min \|A\|^2 \equiv \min \int d^3x |A_i^a(x)|^2, \quad (3.46)$$

im Unterschied zur Landau-Eichung

$$\min \|A\|^2 \equiv \min \int d^4x |A_i^a(x)|^2. \quad (3.47)$$

In minimaler Coulomb-Eichung existieren keine unphysikalischen Zustände. Für den (noch einzuführenden) Gluonpropagator in Coulomb-Eichung versucht man, die folgenden beiden Prinzipien zu beweisen:

- G_{00} ist langreichweitig \rightarrow Gluonen vermitteln Quarkconfinement
- G_{ij} ist kurzreichweitig \rightarrow Gluonen sind selbst „confined“,

wobei $G_{ij}(0, x)$ den gleichzeitigen transversalen Propagator bezeichnet. Die Berechnung des Coulombpotentials V_{Coul} erfolgt durch

$$V_{\text{Coul}} = g^2 G_{00} = g^2 \langle A_0(t, \vec{x}) A_0(0, 0) \rangle \sim \langle \text{tr} U_0(t, \vec{x}) U_0^\dagger(0, 0) \rangle, \quad (3.48)$$

wobei

$$g^2 G_{00}(t, x) = V_{\text{Coul}}(|x|) \delta(t) + \text{nicht instantan.} \quad (3.49)$$

Es gilt [29]

Theorem 3.3.1. *Bezeichne σ bzw. σ' die Strings- und Gitterspannung. Es existiert kein Confinement ohne Coulombconfinement, d.h.*

$$V(r) \propto \sigma r \Rightarrow V_{\text{Coul}} \propto \sigma' r, \quad \sigma \geq \sigma'. \quad (3.50)$$

3.4 Gribovkopien

1. Kontinuum:

Gribov [4] zeigte die Existenz von eichäquivalenten Zuständen in beiderseitiger Umgebung der „nodal lines“, welche durch die Anwesenheit mindestens eines masselosen Geistzustands definiert sind. Heinzl [30] konstruierte die „einfachste Eichtheorie“ mit Gribovkopie. Singer [31] zeigte mit geometrischen Argumenten, dass auf der Mannigfaltigkeit $S^4 = E^4 + \{\infty\}$ keine eindeutige Eichung existiert. Wie man mit den sogenannten Gribovkopien im Kontinuum umzugehen hat, ist nicht verstanden.

2. Gitter:

Der numerische Prozess der Eichfixierung besitzt dieselbe Ausgangslage wie die Suche nach dem energetischen Minimum in einem Spinglas. Wir interpretieren den Ausdruck aus Gl. (3.34),

$$g(x) U_\mu(x) g(x + e_\mu),$$

als zwei Spins $g(x) = \sigma_i$ und $g(x + e_\mu) = \sigma_j$, gekoppelt durch $U_\mu(x)$. Im Spinglas ist die Kopplung zweier Spins σ_i und σ_j an jeder Stelle unterschiedlich. Ein typischer Fall ist in Abb. 3.6 dargestellt.

Welcher Zustand mit Minimum der Energie gewählt wird, ist dem Zufall überlassen. Gittereichkonfigurationen mit weitaus mehr Variablen besitzen viele „Eichvakua“, bekannt als Gittergribovkopien. Ein Entropieargument [32] zeigt, dass sich physikalisch relevante Felder im Gribovhorizont sammeln, also dort, wo der Faddeev-Popovoperator positiv ist, aber kleine Eigenwerte besitzt.

In dieser Frage ist man schon weiter. In numerischen Studien [33] wurde der Einfluss der Kopien auf Observable wie Geist- und Gluonpropagator untersucht. Die statistische Behandlung von Gribovkopien ist Teil unserer aktuellen Forschung, auf die wir hier nicht weiter eingehen.

Allgemein gilt, dass durch stochastische Quantisierung [34] Gitter-Gribovkopien vermieden werden können. Für die Suche nach dem absoluten Minimum der Eichwirkung schlug Zwanziger [5] eine nichtlokale Wirkung vor. Der Erwartungswert einer eichinvarianten Observablen $F(U)$ ist gegeben durch

$$\langle F \rangle = N \int dU e^{-S_W(U)} F(U), \quad (3.51)$$

mit der Wilsonwirkung $S_W(U)$ aus Gl. (3.2). Wir haben

$$\langle F \rangle = N \int dU dg e^{-S_W(U) - M^2 S_L(U^g)} F(U) / I(U) \quad (3.52)$$

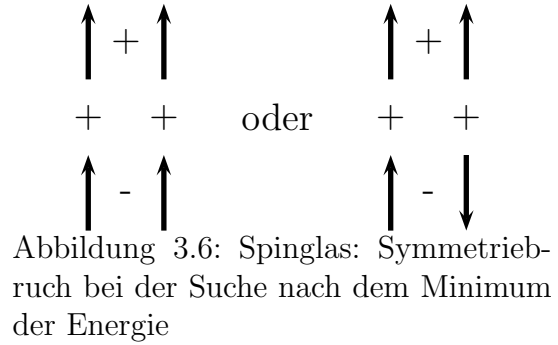
mit

$$I(U) = \int dg e^{-M^2 S_L(U^g)}. \quad (3.53)$$

Wir wählen als Integrationsmaß das eichinvariante Haarmaß aus Gl. (A.2), $dU = dU^g$. Da $S_W(U)$, $F(U)$ und $I(U)$ ebenfalls eichinvariant sind, können wir

$$\langle F \rangle = N \int dU e^{-S_W(U) - M^2 S_L(U) - W(U)} F(U) \quad (3.54)$$

schreiben, mit $W(U) \equiv \ln[I(U)]$ als eichinvariante aber nichtlokale Wirkung. Im Grenzwert $M^2 \rightarrow \infty$ ergibt das die minimale Landaueichung. Wie ist dies numerisch implementierbar? Wir lassen diese Fragen offen und rechnen ohne Gribovkopien weiter, wie sich am Ende des nächsten Abschnitts herausstellen wird.



Kapitel 4

Gribovhorizont

4.1 Faddeev-Popov-Matrix

In diesem Kapitel rechnen wir explizit den Artikel von D. Zwanziger [5] nach. Als Folge der minimalen Landaueichung sowie der Unitarität werden die Gluonfeldamplituden in unterschiedlicher Weise beschränkt. Die Schranken implizieren Schranken für das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Korrelationsfunktionen.

Wir setzen in diesem Abschnitt der Übersicht halber $\omega \equiv \omega(x)$ und $\omega' \equiv \omega(x + e_\mu)$. An einem stationären Punkt der Eichwirkung $S(g)$ sollte die Matrix der zweiten Ableitung \mathcal{M} , welche den Gitter-Faddeev-Popovoperator definiert, bei einem Minimum bezüglich Eichtransformationen positiv sein. \mathcal{M} besitzt die Struktur $\mathcal{M}(U) = \mathcal{K}(A) + \mathcal{M}'$, wobei \mathcal{M}' strikt negativ ist und $\mathcal{K}(A)$ linear von $A(x)$ abhängt. $(\omega, \mathcal{K}(A)\omega)$ ist also in Landau-Eichung eine positiv definite quadratische Form in der Variable ω . Das Gebiet Θ , welche die Positivität von \mathcal{K} aus dem A -Raum heraus schneidet, ist konvex, in jede Richtung beschränkt und enthält das Nullfeld [32].

Die hinreichende Bedingung für ein Minimum des Funktionals $S[g]$ lautet

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} \geq 0, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} &= \frac{1}{N} \sum_{x,\mu} \Re \operatorname{tr} [\omega^{2g} U - \omega^g U \omega' - \omega^g U \omega' + {}^g U \omega'^2] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{x,\mu} \Re \operatorname{tr} [(\omega'^2 - 2\omega' \omega + \omega^2)^g U]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

Die zweite Ableitung lesen wir als quadratische Form, und verstehen die Linkvariablen als in die minimale Landaugleichung transformiert, $U \equiv {}^g U_\mu(x)$.

$$\begin{aligned}
(\omega, \mathcal{M}\omega) &= 2 \sum_{x,\mu} \Re \operatorname{tr} [(\omega'^2 - 2\omega'\omega + \omega^2)U] \\
&= \sum_{x,\mu} \operatorname{tr} [(\omega'^2 - \omega'\omega - \omega\omega' + \omega^2)(U + U^\dagger) \\
&\quad - \omega'\omega U + \omega\omega'U - \omega\omega'U^\dagger + \omega'\omega U^\dagger] \\
&= \sum_{x,\mu} \operatorname{tr} [(\omega' - \omega)^2(U + U^\dagger) - [\omega', \omega](U - U^\dagger)] \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Wir definieren den reduzierten Faddeev-Popovoperator \mathcal{K} durch

$$(\omega, \mathcal{K}\omega) \equiv \sum_{x,\mu} \operatorname{tr} [2(\omega' - \omega)^2 - [\omega', \omega](U - U^\dagger)]. \tag{4.5}$$

Die Differenz $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M} - \mathcal{K}$ kann proportional zu einem Produkt einer Matrix B mit ihrer hermitesch konjugierten Matrix B^\dagger geschrieben werden,

$$\begin{aligned}
(\omega, \mathcal{M}'\omega) &= (\omega, (\mathcal{M} - \mathcal{K})\omega) \\
&= \sum_{x,\mu} \operatorname{tr} [(\omega' - \omega)^2(U + U^\dagger) - 2(\omega' - \omega)^2] \\
&= - \sum_{x,\mu} \operatorname{tr} [(2 - U - U^\dagger)(\omega' - \omega)^2] \\
&= - \sum_{x,\mu} \operatorname{tr} [(\omega' - \omega)(1 - U)(1 - U^\dagger)(\omega' - \omega)^\dagger] \\
&\equiv - \sum_{x,\mu} \operatorname{tr} [BB^\dagger], \tag{4.6}
\end{aligned}$$

und ist also negativ. Eine kurze Rechnung zeigt, dass die reduzierte Faddeev-Popovmatrix \mathcal{K} reell ist. Wir zerlegen die reduzierte Faddeev-Popovmatrix weiter in den Gitter-Laplaceoperator \mathcal{K}_0 und einen Rest \mathcal{K}_1 ,

$$(\omega, \mathcal{K}\omega) = \Re \sum_{x,\mu} \operatorname{tr} [2(\omega' - \omega)^2 - [\omega', \omega](U - U^\dagger)] \tag{4.7}$$

$$\equiv (\omega, (\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1)\omega). \tag{4.8}$$

Der Laplaceoperator ist unabhängig von $U_\mu(x)$ und damit farbdiagonal,

$$\begin{aligned}
(\omega, \mathcal{K}_0\omega) &= 2 \operatorname{tr} \sum_{x,\mu} (\lambda^b \lambda^b \omega'^{b2} - \lambda^a \omega^a \lambda^b \omega'^b - \lambda^b \omega'^b \lambda^a \omega^a + \lambda^a \lambda^a \omega'^{a2}) \\
&= \sum_{x,\mu} (2(\omega^a(x))^2 - \omega^a(x)\omega^a(x + e_\mu) - \omega^a(x - e_\mu)\omega^a(x)). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Die quadratische Form von \mathcal{K}_1 läßt sich x schreiben als

$$(\omega, \mathcal{K}_1 \omega) = - \sum_{x, \mu} f^{abc} \omega^a(x + e_\mu) A_\mu^b(x) \omega^c(x), \quad (4.10)$$

denn unter Verwendung von Gl. (2.7) und Gl. (3.27) erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{tr} [\omega', \omega](U - U^\dagger) &= \text{tr} [\lambda^a \omega'^a, \lambda^b \omega^b](U - U^\dagger) \\ &= \omega'^a \omega^b \text{tr} i f^{abc} \lambda^c (U - U^\dagger) \\ &= -\omega'^a \omega^b f^{abc} A^c \\ &= -f^{abc} \omega'^a A^c \omega^b \\ &= -f^{acb} \omega'^a A^b \omega^c \\ &= f^{abc} \omega'^a A^b \omega^c, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Wie wir sehen, ist \mathcal{K} linear in A , was für die spätere Variationsrechnungen wichtig ist. In einer Dimension auf einem Gitter der Größe 6 sieht \mathcal{K}_1 folgendermaßen aus,

$$(\omega, \mathcal{K}_1 \omega) = -\omega^a f^{abc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^b(6) \\ A^b(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^b(2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^b(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^b(4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^b(5) & 0 \end{pmatrix} \omega^c \quad (4.12)$$

$$= -\frac{1}{2} \omega^a f^{abc} \begin{pmatrix} 0 & -A^b(1) & 0 & 0 & 0 & A^b(6) \\ A^b(1) & 0 & -A^b(2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^b(2) & 0 & -A^b(3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^b(3) & 0 & -A^b(4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^b(4) & 0 & -A^b(5) \\ -A^b(6) & 0 & 0 & 0 & A^b(5) & 0 \end{pmatrix} \omega^c. \quad (4.13)$$

Die antisymmetrische Struktur f^{abc} überlagert sich tensoriell mit dieser antisymmetrischen Matrixstruktur, was eine symmetrische Matrix ergibt.

Wir definieren Gebiete

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv \{A : \nabla A = 0\}, \\ \Theta &\equiv \{A : \nabla A = 0 \text{ und } \mathcal{K} \geq 0\}, \\ \Omega &\equiv \{A : \nabla A = 0 \text{ und } \mathcal{M} \geq 0\}, \\ \Lambda &\equiv \{ \text{Menge der absoluten Minima der Eichwirkung} \}. \end{aligned}$$

Dann gelten die Inklusionen

$$\Lambda \subset \Omega \subset \Theta \subset \Gamma. \quad (4.14)$$

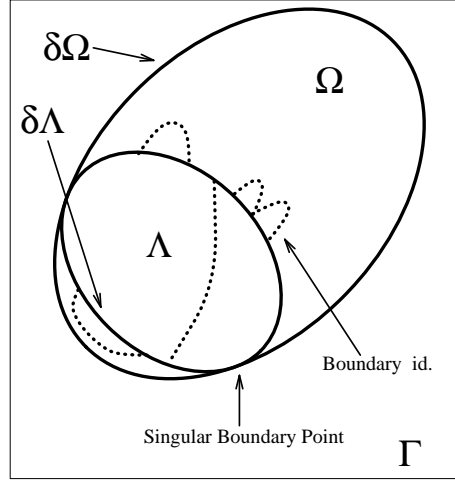


Abbildung 4.1: Gebiete im Raum $\{A_\mu^a(x)\}$. Die gestrichelten Linien beschreiben Eichorbits $A[g]$. Abbildung entnommen aus [35].

Die zweite Inklusion folgt aus der Tatsache, dass $\mathcal{M} - \mathcal{K}$ negativ definit ist. Es fehlt ein explizites Verfahren, welches eindeutig Eichkonfigurationen im Gebiet Λ , der sogenannten „fundamental modular region“, erzeugt, vgl. Abschnitt 3.4. Numerische Eichfixierungsprozesse enden in Ω , also in relativen Minima der Eichwirkung.

Im folgenden Kapitel werden wir aus der Positivität von \mathcal{K} Schranken für die Fourierkomponenten des Gluonfeldes ableiten, also in dem Gebiet Θ . Sie gelten damit also insbesondere in der „fundamental modular region“ Λ und sind damit unabhängig von Gribovkopien.

4.2 Unitäre Schranke

Wir erhalten eine einfache Schranke für die Gluonfeldamplituden bereits aus der Unitarität der Farbgruppe. Die acht Gell-Mann-Matrizen λ^a und die Identität bilden eine Basis des Raums der komplexen 3×3 -Matrizen. Wir zerlegen die unitäre Matrix $U_\mu(x)$ in dieser Basis mit komplexen Koeffizienten,

$$U_\mu(x) = C_a \lambda^a + R. \quad (4.15)$$

Es gilt $\text{tr } \lambda^a R = \text{tr } \lambda^a R^\dagger = 0$, da $R = r\mathbf{1}$ und die λ -Matrizen spurlos sind. Aus der Unitarität folgt

$$\begin{aligned} \text{tr } [U_\mu(x) U_\mu^\dagger(x)] &= N \\ &= \text{tr } [(C_a \lambda^a + R)(\bar{C}_b \lambda^b + R^\dagger)] \\ &= \text{tr } \left[\frac{\delta^{ab}}{2} C_a \bar{C}_b + R R^\dagger \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_a |C_a|^2 + \text{tr } [R R^\dagger]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Für das Feld $A_\mu^a(x)$ ergibt sich aus der Paulizerlegung, Gl. (4.15),

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &= -i \operatorname{tr} [\lambda^a (U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x))] \\ &= -i(C^a/2 - \bar{C}^a/2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Wir finden also die Schranke

$$\begin{aligned} \sum_a (A_\mu^a(x))^2 &= \sum_a (\Im C^a)^2 \\ &\leq \sum_a |C^a|^2 \\ &= 2(N - \operatorname{tr} [RR^\dagger]) \\ &\leq 2N. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dies können wir auch in Fourierkomponenten ausdrücken,

$$\begin{aligned} |a_\mu^a(k)| &= \left| \sum_x e^{-ikx} A_\mu^a(x) \right| \\ &\leq \sum_x |A_\mu^a(x)| \\ &\leq (2N)^{1/2} V. \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.3 Schranke als Folge des Gribovhorizonts

1. Nullkomponente

Wir schränken zunächst die Nullkomponente des Gluonfeldes ein. Dazu berechnen wir den Erwartungswert der reduzierten Faddeev-Popovoperators

$(\omega, (\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1)\omega)$ in Zuständen normierter ebener Wellen mit ebenfalls normierter Farbe,

$$|\omega\rangle = |k_0 \chi_0^a\rangle = \chi_0^a \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_x e^{ik_0 x} |x\rangle, \quad (4.20)$$

$$\langle k_0 \chi_0 | k_0 \chi_0 \rangle = 1 \quad (4.21)$$

$$\langle \chi_0 | \chi_0 \rangle = 1, \quad \langle k_0 | k_0 \rangle = 1. \quad (4.22)$$

Der Erwartungswert des Laplaceoperators \mathcal{K}_0 ist

$$\begin{aligned} \langle k_0 \chi_0 | \mathcal{K}_0 | k_0 \chi_0 \rangle &= \chi_0^{a\dagger} \chi_0^a \frac{1}{V} \sum_{x,x'} e^{-ik_0(x'-x)} \langle x | \mathcal{K}_0 | x' \rangle \\ &= \frac{1}{V} \sum_{x,x'} e^{-ik_0(x'-x)} \langle x | \sum_\mu (2|x'\rangle - |x' + e_\mu\rangle - |x' - e_\mu\rangle) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{x,x'} e^{-ik_0(x'-x)} \sum_\mu (2\delta_{x,x'} - \delta_{x,x'+e_\mu} - \delta_{x,x'-e_\mu}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{V} \sum_x \sum_\mu (2 - e^{ik_{0\mu}} + e^{-ik_{0\mu}}) \\
&= 4 \sum_\mu \sin^2 k_{0\mu}/2 \\
&\equiv \lambda_k.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Wir definieren die δ -Funktion

$$\sum_x e^{ikx} = V\delta_{k,0}. \tag{4.25}$$

Der zweite Summand $\omega\mathcal{K}_1\omega$ ergibt nach Fouriertransformation des Gluonfeldes und durch Einsetzen der δ -Funktion den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\langle k_0\chi_0|\mathcal{K}_1|k_0\chi_0\rangle &= -\chi_0^{a\dagger} f^{abc} \chi_0^c \frac{1}{2V} \sum_{x,\mu} (A_\mu^b(x) e^{ik_{0\mu}} - A_\mu^b(x - e_\mu) e^{-ik_{0\mu}}) \\
&= -\chi_0^{a\dagger} f^{abc} \chi_0^c \frac{1}{2V^2} \sum_{x,\mu,k} a_\mu^b(k) e^{ikx} (e^{i(k_\mu/2+k_{0\mu})} + e^{-i(k_\mu/2+k_{0\mu})}) \\
&= -\chi_0^{a\dagger} f^{abc} \chi_0^c \frac{i}{V} \sum_{\mu,k} a_\mu^b(k) \delta_{k,0} \sin(k_\mu/2 + k_{0\mu}) \\
&= -\chi_0^{a\dagger} f^{abc} \chi_0^c \frac{i}{V} \sum_\mu a_\mu^b(0) \sin(k_{0\mu}).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Wir wählen χ_0 als Eigenfunktion des Operators $if^{abc}\chi_0^c a_\mu^b(0)$ zum maximalen Eigenwert $|a_\mu^b(0)|$, siehe Gl. (A.8), und als Wellenvektor

$$k_0 = \left(\frac{2\pi}{L}\right) e_\mu. \tag{4.27}$$

Aus der Positivitätsbedingung für den reduzierten Faddeev-Popovoperator,

$$\langle k_0\chi_0|\mathcal{K}|k_0\chi_0\rangle \geq 0, \tag{4.28}$$

folgt damit also die Ungleichung

$$\lambda_0 - \frac{1}{V} \sum_\mu |a_\mu(0)| \sin\left(\frac{2\pi}{L}\right) \geq 0, \tag{4.29}$$

wobei

$$\lambda_0 \equiv 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{L}\right). \tag{4.30}$$

Dies gibt die Schranke

$$|a_\mu(0)| \leq \frac{4 \sin^2 \frac{\pi}{L}}{\sin \frac{2\pi}{L}} V = 2 \tan\left(\frac{\pi}{L}\right) V. \tag{4.31}$$

Komponenten ungleich Null

Wir rechnen nun Schranken für die restlichen Komponenten aus. Sei α eine reelle Zahl, $|k_0\chi_0\rangle$ ein normierter Zustand einer ebenen Welle und $|k\chi\rangle$ zu diesem orthogonal, $\langle k_0\chi_0|k\chi\rangle = 0$. Wir berechnen die Matrixelemente

$$(\langle k_0\chi_0 + \alpha\langle k\chi|)(\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1)(|k_0\chi_0\rangle + \alpha|k\chi\rangle) \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} &= \langle k_0\chi_0|\mathcal{K}_0|k_0\chi_0\rangle + \alpha^2\langle k\chi|\mathcal{K}_0|k\chi\rangle \quad \text{a)} \\ &+ \alpha\langle k_0\chi_0|\mathcal{K}_0|k\chi\rangle + \alpha\langle k\chi|\mathcal{K}_0|k_0\chi_0\rangle \quad \text{b)} \\ &+ \langle k_0\chi_0|\mathcal{K}_1|k_0\chi_0\rangle + \alpha^2\langle k\chi|\mathcal{K}_1|k\chi\rangle \quad \text{c)} \\ &+ \alpha\langle k_0\chi_0|\mathcal{K}_1|k\chi\rangle + \alpha\langle k\chi|\mathcal{K}_1|k_0\chi_0\rangle \quad \text{d)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \text{a)} & \lambda_0 + |\alpha|^2\lambda_k \\ \text{b)} & 0 \\ \text{c)} & -\frac{i}{V}\chi_0^a f^{abc}\chi_0^c \sum_{\mu} \sin(k_{0\mu})a_{\mu}^b(0) + \frac{i}{V}\alpha^2\chi^a f^{abc}\chi^c \sum_{\mu} \sin(k_{\mu})a_{\mu}^b(0) \\ \text{d)} & \Re \frac{4i}{V}\chi_0^a f^{abc}\chi^c a_{\mu}^b(k_0 - k) \cos(k_{\mu}/2) \sin(k_{\mu}/2). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Das Matrixelement d) folgt aus einer analogen Rechnung wie für die Erwartungswerte,

$$\alpha\langle k_0\chi_0|\mathcal{K}_1|k\chi\rangle = -\chi_0^{a\dagger} f^{abc}\chi^c \frac{1}{2V} \sum_{x,\mu} e^{i(k-k_0)x} (A_{\mu}^b(x)e^{ik_{\mu}} - A_{\mu}^b(x-e_{\mu})e^{-ik_{\mu}}) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} &= -\chi_0^{a\dagger} f^{abc}\chi^c \frac{i}{V} \sum_{\mu} a_{\mu}^b(k_0 - k) \sin((k_{0\mu} + k_{\mu})/2) \\ &= -\chi_0^{a\dagger} f^{abc}\chi^c \frac{i}{V} \sum_{\mu} a_{\mu}^b(k_0 - k) 2 \cos(k_{0\mu}/2) \sin(k_{\mu}/2), \end{aligned} \quad (4.36)$$

wobei wir im letzten Schritt von der Transversalität, Gl. (3.32), Gebrauch gemacht haben. Die Terme c) schätzen wir durch die Resultate für die Nullkomponente ab, das heißt, wir wählen wiederum χ_0 und χ als Eigenfunktionen zum größten Eigenwert $|a_{\mu}^b(0)|$ und $k_0 = \frac{2\pi}{L}e_{\mu}$, was

$$\frac{1}{V} \sum_{\mu} \sin(k_{0\mu})|a_{\mu}^b(0)| \leq \lambda_0, \quad (4.37)$$

$$\frac{1}{V}\alpha^2 \sum_{\mu} \sin(k_{\mu})|a_{\mu}^b(0)| \leq 2\alpha^2 \sum_{\mu} |\sin(k_{\mu})| \tan\left(\frac{\pi}{L}\right) \quad (4.38)$$

ergibt. Wir finden eine in α quadratische Ungleichung,

$$\alpha^2 \left(\lambda_k + 2 \sum_{\mu} |\sin k_{\mu}| \tan\left(\frac{\pi}{L}\right) \right) - \alpha \frac{4}{V} \sin \frac{\pi}{L} \cos(k_{\mu}/2) |a_{\mu}(k_0 - k)| + 2\lambda_0 \geq 0, \quad (4.39)$$

welche wir bezüglich α minimieren und erhalten schließlich eine Schranke für alle Fourierkomponenten,

$$|a_\mu(k)| \leq \sigma_\mu(k)V, \quad (4.40)$$

$$\sigma_\mu(k) = \sqrt{2 \frac{\sum_\nu 4 \sin^2((k+k_0)_\nu/2) + \sum_\nu |\sin(k+k_0)_\nu| 2 \tan(\pi/L)}{\cos^2((k+k_0)_\mu/2)}}, \quad (4.41)$$

wobei k_0 einer der Vektoren $\pm 2\pi e_\mu/L$ ist. Sie stimmt mit der Schranke für $k=0$ überein.

4.4 Schranken für erzeugende Funktionen

Für die Nullkomponente $a_\mu^a(0)$ haben wir die Schranken

$$\begin{aligned} |a(0)| &\leq (2N)^{1/2}L^4, & \text{(Unitarität)} & \text{(S1)} \\ |a(0)| &\leq 2 \tan(\pi/L)L^4, & \text{(Horizont)} & \text{(S2)}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

wobei die zweite Schranke sich für große Volumen wie

$$|a(0)| \leq CL^3 \quad (4.43)$$

verhält. Diese Schranken implizieren Schranken für das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Korrelationsfunktionen

$$W[J] = \ln Z[J] = \ln \int \mathcal{D}A e^{-S_E[A]} e^{(J,A)}. \quad (4.44)$$

Wir bemerken, dass $W[J]$ eine positive Größe ist. Wir sind interessiert an den Fourierkoeffizienten des Feldes $A_\mu^a(x)$,

$$(J, A) \equiv \sum_{x,\mu,a} J_\mu^a(x) A_\mu^a(x) = \frac{1}{V} \sum_{k,\mu,a} j_\mu^a(-k) a_\mu^a(k). \quad (4.45)$$

Die Schranken für das Gluonfeld ergeben also

$$\begin{aligned} Z(j) &= \int \mathcal{D}A e^{-S_W(A)} e^{\frac{1}{V} \sum_{k,\mu,a} j_\mu^a(-k) a_\mu^a(k)} \\ &\leq \begin{cases} \int \mathcal{D}A |e^{-S_W(A)}| e^{(2N)^{1/2} \sum_{k,\mu,a} |j_\mu^a(-k)|} & \text{(S1)} \\ \int \mathcal{D}A |e^{-S_W(A)}| e^{\sum_{k,\mu,a} |j_\mu^a(-k)| |\sigma(k)|} & \text{(S2)} \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} e^{(2N)^{1/2} \sum_{k,\mu,a} |j_\mu^a(-k)|} & \text{(S1)} \\ e^{\sum_{k,\mu,a} |j_\mu^a(-k)| |\sigma(k)|} & \text{(S2)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Die letzte Abschätzung ist wegen der Normierung des Schwingerfunktional, Gl.(2.19), möglich. Wir haben schließlich in $W[j]$

$$W[j] \leq \begin{cases} (2N)^{1/2} \sum_{k,\mu,a} |j_\mu^a(-k)| & \text{(S1)} \\ \sum_{k,\mu,a} |j_\mu^a(-k)| |\sigma(k)| & \text{(S2)}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Kapitel 5

Gluronpropagator

5.1 Analytische Struktur

Der Gluronpropagator ist die 2-Punktsfunktion

$$G_{\mu\nu}^{ab}(x, y) \equiv \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle \quad (5.1)$$

$$= \left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(y)} \right|_{J=0}. \quad (5.2)$$

Translationsinvarianz des Vakuumzustands ermöglicht

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle &= \langle 0 | e^{i\hat{p}\hat{x}} A_\mu^a(0) e^{-i\hat{p}\hat{x}} e^{i\hat{p}\hat{y}} A_\nu^b(0) e^{-i\hat{p}\hat{y}} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | A_\mu^a(0) e^{i\hat{p}(\hat{x}-\hat{y})} A_\nu^b(0) e^{-i\hat{p}(\hat{x}-\hat{y})} | 0 \rangle \\ &= \langle A_\mu^a(0) A_\nu^b(x-y) \rangle, \end{aligned} \quad (5.3)$$

so dass der Propagator aufgrund von Impulserhaltung nur noch von einer Variable abhängt. Diese Rechnung rechtfertigt Gl. (4.45). Wir definieren den Gluronpropagator im Fourierraum,

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(0) \rangle \equiv L^{-4} \sum_k G_{\mu\nu}^{ab}(k) e^{ik \cdot x}, \quad (5.4)$$

und folgern

$$\langle a_\mu^a(k) a_\nu^b(-k) \rangle = L^4 G_{\mu\nu}^{ab}(k), \quad (5.5)$$

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = L^4 \left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta j_\mu^a(-k) \delta j_\nu^b(k)} \right|_{j=0}. \quad (5.6)$$

Die allgemeine kinetische Form des Gluronpropagators in kovarianten Eichungen lautet

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i\delta^{ab} \left(\left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] G(k^2) + \alpha \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} G^L(k^2) \right), \quad (5.7)$$

was Farberhaltung und relativistische Kovarianz ausdrückt. In Landaugleichung, $\alpha = 0$, und Euklidischer Metrik vereinfacht sich dies zu

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \left(\left[\mathbb{1}_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] G(k^2) \right). \quad (5.8)$$

Wir interessieren uns für $G(k^2)$.

Bei $k = 0$ haben wir ein eindimensionales Problem,

$$G(k^2 = 0) = \frac{1}{4} L^{-4} \langle a(0)a(0) \rangle = \frac{1}{4} L^4 \frac{d^2}{dj^2} W(j) \Big|_{j=0}. \quad (5.9)$$

Der Faktor $1/4$ gilt für $k = 0$, da

$$\sum_{\mu} G_{\mu\mu}(k^2) = \begin{cases} 3G(k^2) & k \neq 0 \\ 4G(0) & k = 0 \end{cases}, \quad (5.10)$$

wobei der unterschiedliche Faktor für den Nullimpuls-Propagator durch einen zusätzlichen Freiheitsgrad unter globalen Eichtransformationen,

$$U_{\mu}(x) \rightarrow g^{-1}(x) U_{\mu}(x) g(x), \quad (5.11)$$

zustande kommt.

5.2 Renormierung

Auf dem Gitter messen wir $G_{\text{bare}}(k^2, \beta)$. Um verschiedene Eichwirkungen und verschiedene Gitterabstände vergleichen zu können, muss der Gluonpropagator renormiert werden. Üblicherweise wird dabei das Renormierungsschema MOM verwendet, was bedeutet, den renormierten Propagator G_{ren} ausgehend vom „nackten Propagator“ G_{bare} durch

$$G_{\text{ren}}(k^2, \mu^2) \equiv \frac{G_{\text{bare}}(\beta, k^2)}{Z_3(\beta, \mu^2)} \quad (5.12)$$

zu definieren mit Renormierungsbedingung (tree-level)

$$G_{\text{ren}}(\mu^2, \mu^2) = \frac{1}{\mu^2}, \quad (5.13)$$

wo also gilt

$$Z_3(\beta, \mu^2) = \mu^2 G_{\text{bare}}(\beta, \mu^2). \quad (5.14)$$

Die Renormierung kann störungstheoretisch durchgeführt werden, vorausgesetzt, dass μ in der Reichweite eines gegebenen Gitterabstands a liegt. Wenn dies nicht der Fall ist, muss man die Z_3 -Funktionen unterschiedlicher Gitterabstände anpassen.

Beispiel:

Renormierung bei $\mu = 4$ GeV ist nicht direkt möglich bei $\beta = 6.0$ (was bei Wilsonwirkung gemäß Tabelle 3.5 einem Gitterabstand $a^{-1} = 2$ GeV entspricht) und einem Gitter der Größe $L = 24$. Denn wir können die Impulse

$$k_\nu = n^2 \left(\frac{2\pi}{aL} \right)^2 = (4 \text{ GeV})^2$$

$$\Rightarrow n \approx 8$$

nicht in dem Bereich

$$n_{max} = \frac{L}{4} = 6$$

halten.

Wir werden also Resultate bei $\beta = 6.4$ d.h. $a^{-1} = 3.58$ GeV verwenden müssen. Ein zentrales Resultat der Theorie der Renormierungsgruppe für Z_3 [12] ist, dass das Verhältnis

$$\frac{Z_3(\beta, \mu^2)}{Z_3(\beta_0, \mu^2)} \quad (5.15)$$

unabhängig vom Renormierungspunkt μ ist. Wir verwenden das störungstheoretische Resultat bei einem loop,

$$Z_3(\beta, \mu^2) = \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{13}{22}} Z_3(\beta_0, \mu^2). \quad (5.16)$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} G_{\text{ren}}(k^2, \mu^2) &= \frac{G_{\text{bare}}(\beta, k^2)}{\left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{13}{22}} Z_3(\beta_0, \mu^2)} \\ &= \frac{G_{\text{bare}}(\beta, k^2)}{\left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{-\frac{13}{22}} \mu^2 G_{\text{bare}}(\beta_0, \mu^2)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.3 Numerische Resultate

Das Verhalten des Propagators in Abhängigkeit der inversen physikalischen Länge ist in Abb. 5.1 dargestellt. Wir haben nur wenige Punkte im Bereich großer Volumina, da für jeden Punkt eine thermalisierte Konfiguration erstellt werden muss durch Variation von β oder L . Wir führen einen nichtlinearen Fit des monoton ansteigenden Teils der Kurve (8 Werte) mit den Daten aus Tabelle C.1 durch, siehe Abb. 5.2. Wir verwenden die Funktion

$$G(k=0) = a \left(\frac{1}{(aL)^4} \right)^b + G_\infty(k=0) \quad (5.18)$$

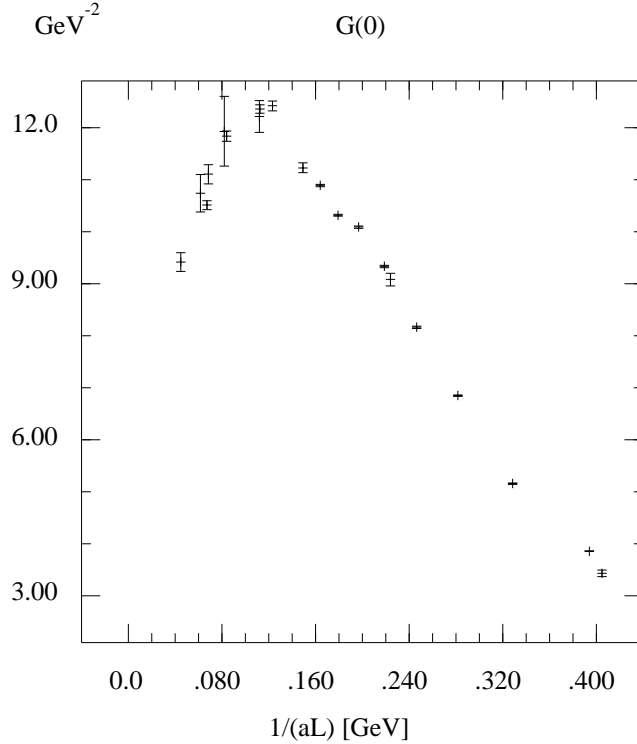


Abbildung 5.1: Volumenabhängigkeit des Gluonpropagators

und erhalten bei einem $\chi^2 = 0.086$

$$\begin{aligned}
 a &= 35.05579 \pm 15.22143 \\
 b &= 0.48394 \pm 0.88962 \\
 G_\infty(k=0) &= 9.00438 \pm 18.61405
 \end{aligned}$$

Der Exponent b weist auf eine Skalierung des Propagators mit der inversen Wurzel aus dem physikalischen Volumen $V = (aL)^4$ hin. Wir finden im Grenzwert des unendlichen Volumens den Wert

$$G_\infty(k=0) \approx 9 \pm 18,6 \text{ GeV}^{-2}. \quad (5.19)$$

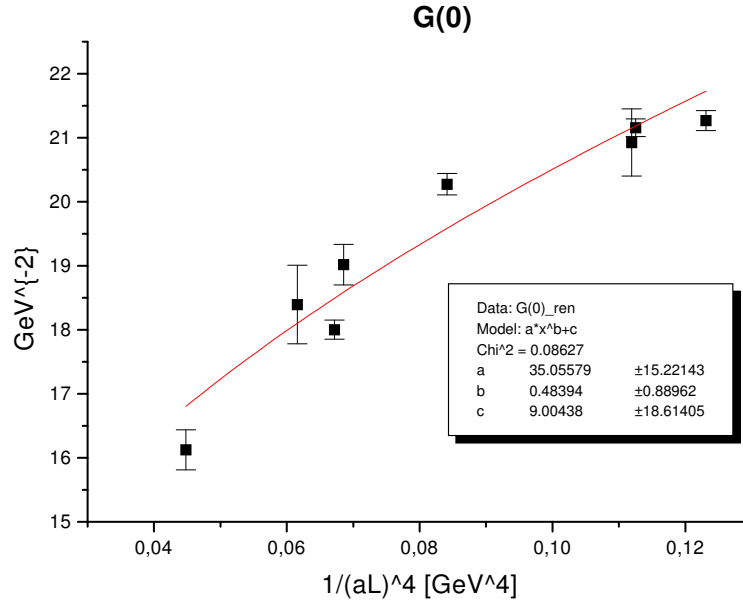
Wir folgen in einer zweiten Extrapolation der Methode von Bonnet, Bowman, Leinweber, Williams und Zanotti [36] und nutzen einen linearen Ansatz,

$$G(k=0) = a \frac{1}{V} + G_\infty(k=0) \quad (5.20)$$

Wir erhalten einen Wert von

$$G_\infty(k=0) \approx 9.6 \pm 0.7 \text{ GeV}^{-2} \quad (5.21)$$

im Grenzwert unendlichen Volumens. Die Differenz der Fehlerabschätzung in (5.19) und (5.21) ist auf die geringe Datenmenge und die verschiedene Anzahl von Parametern zurück-

Abbildung 5.2: Extrapolation $V \rightarrow \infty$

zuführen. Bonnet, Bowman, et al. errechneten unter Verwendung einer verbesserten Wilsonwirkung

$$G_{\infty}(k=0) \approx 7.95 \text{ GeV}^{-2}, \quad (5.22)$$

O. Oliveira und P. Silva [37] geben eine Extrapolation von

$$G_{\infty}(k=0) \approx 70 \quad (5.23)$$

in Gittereinheiten bei $\beta = 6.0$ mit Wilsonwirkung, allerdings auf stark asymmetrischen Gittern. Unser „nackter“ Wert liegt bei $G_{\infty}(k=0) \approx 72$. Das Verschwinden in der Extrapolation von A. Cucchieri und D. Zwanziger [38], in Coulombbeichung, steht dem entgegen. Das Verhalten des Propagators für die Gruppe $SU(2)$ in Abhängigkeit des Impulses ist in Abb. 5.3 zu sehen.

5.4 Fehlerrechnung

Es gibt drei Hauptfehlerquellen bei der Berechnung des Gluonpropagators: Statistische Fehler aus der Verwendung des Monte-Carlo-Algorithmus, welcher in Anhang B beschrieben ist, systematische Fehler aus der Diskretisierung der Raumzeit und den Fehler aus dem Eichfixierungsprozess (Gittergribovkopien). Auf das Problem der Gribovkopien soll

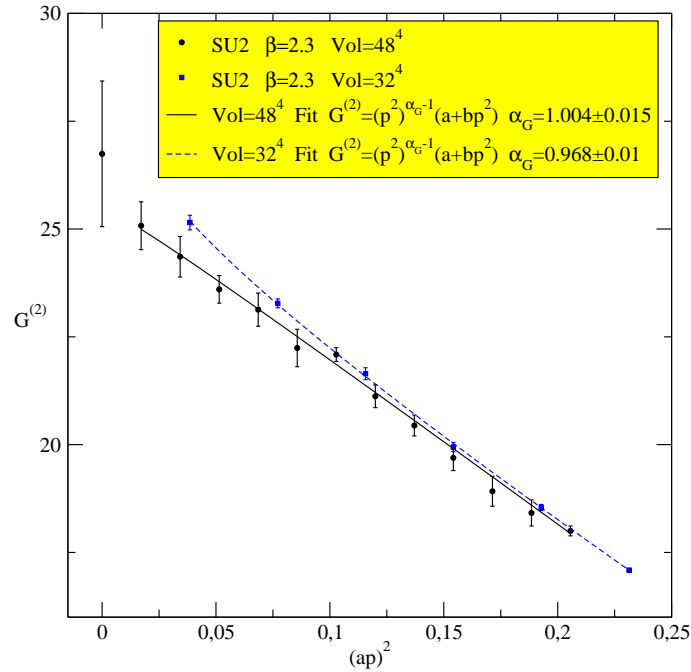


Abbildung 5.3: Gluonpropagator $G(k)$ für die Gruppe $SU(2)$ auf hyperkubischen Gittern der Größen 32^4 und 48^4 . Bild entnommen aus [39].

hier nicht eingegangen werden, wir nutzen das erste aufgefundene Minimum der Eichwirkung, die sogenannte „first copy“ [33].

1. Statistischer Fehler

Wir benutzen die „Jackknife“-Methode zur Berechnung des statistischen Fehlers. Im Wesentlichen ist die Methode eine „Bootstrap“-Methode zur Abschätzung der Varianz im Falle einer nicht-Gaußschen Verteilung. Wir beginnen mit M Samples aus einer Monte-Carlo-Simulation, und unser Ziel ist es, den Fehler des Mittelwerts

$$\langle G \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M O_i \quad (5.24)$$

zu berechnen. Hierzu teilen wir die Samples in M/m Gruppen mit m Elementen auf,

$$[G_1, \dots, G_m], [G_{m+1}, \dots, G_{2m}], \dots, [G_{M-m+1}, \dots, G_M], \quad (5.25)$$

und definieren die „Jackknifeschätzer“

$$a_k = \frac{\sum_{i=1}^M G_i - \sum_{i=km}^{(k+1)m} G_i}{M - m}, \quad k = 1, \dots, \frac{M}{m} \equiv \tilde{M}. \quad (5.26)$$

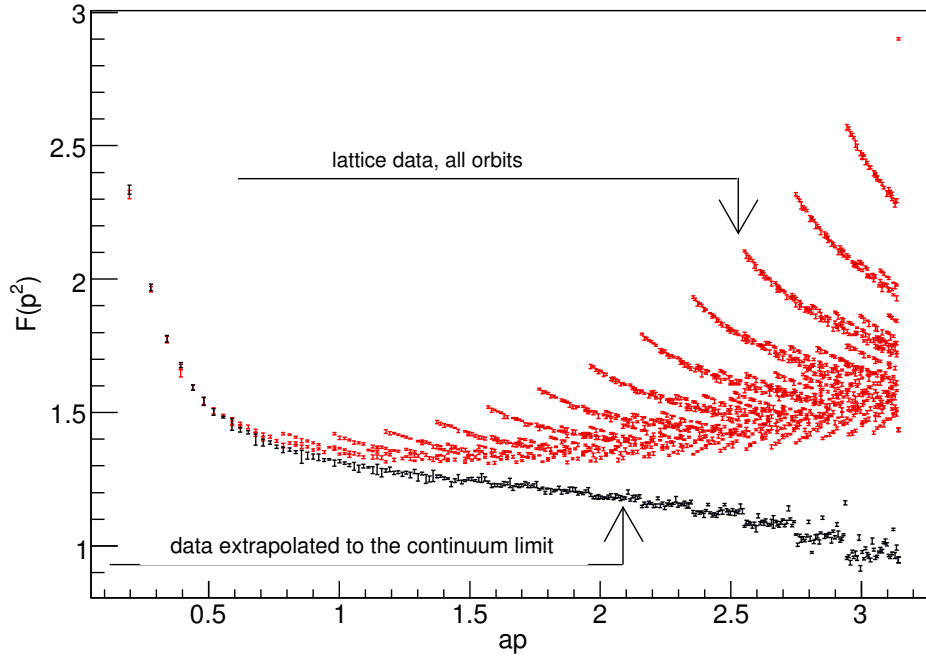


Abbildung 5.4: Hyperkubische Artefakte einer Greensfunktion (Geistpropagator). Wir danken A. Lokhov für die Verfügungstellung des Diagramms.

Wir erhalten den folgenden Ausdruck für den Fehler,

$$\Delta_{\text{Jackknife}} \langle G \rangle = \sqrt{\frac{\tilde{M} - 1}{\tilde{M}} \left(\sum_{k=1}^{\tilde{M}} a_k^2 - \frac{(\sum_{k=1}^{\tilde{M}} a_k)^2}{\tilde{M}} \right)}. \quad (5.27)$$

Er unterscheidet sich von der Standardformel der Varianz einer Zufallsgröße um einen zusätzlichen $\sqrt{\tilde{M}}$ -Faktor.

2. Fehler der Diskretisierung

Durch die Diskretisierung der Theorie ist die Symmetriegruppe $O(4)$ auf $H(4)$ heruntergebrochen. Die Auswirkungen sind in Abb. 5.4 sichtbar. Wird eine skalare Funktion $G(p^2)$ berechnet, müssen wir Punkte, welche von verschiedenen $p = \frac{2\pi}{La}(n_1, n_2, n_3, n_4)$ stammen, identifizieren. Wir mitteln über das Orbit der $H(4)$ -Gruppe, d.h. wir identifizieren Elemente, welche durch Reflektion, z.B.

$$(1, 0, 0, 0) \text{ und } (-1, 0, 0, 0),$$

und Permutation, z.B.

$$(1, 0, 0, 0) \text{ und } (0, 1, 0, 0), \quad (5.28)$$

auseinander entstehen.

Es existieren jedoch Elemente, welche durch eine $O(4)$ -Transformation, aber nicht durch eine $H(4)$ -Transformation verbunden sind, z.B. besitzen

$$n_1 = (1, 1, 1, 1) \text{ und } n_2 = (2, 0, 0, 0) \quad (5.29)$$

in unserer Diskretisierung das selbe Impulsquadrat $p_1^2 = p_2^2 = 16 \left(\frac{\pi}{La}\right)^2$. Betrachten wir zunächst zwei verschiedene Impulsdiskretisierungen, welche in Ordnung a den selben Kontinuumsimes besitzen,

$$\tilde{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{ap_\mu}{2}\right), \quad \bar{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin(ap_\mu). \quad (5.30)$$

Beide unterscheiden sich in der zweiten Ordnung in a von p_μ und auch untereinander,

$$\tilde{p}^2 = p^2 - \frac{1}{12}a^2p^{[4]} + \dots, \quad \bar{p}^2 = p^2 - \frac{1}{3}a^2p^{[4]} + \dots, \quad (5.31)$$

wobei $p^{[4]} \equiv \sum_{\mu=1}^4 p_\mu^4$. Um diese hyperkubischen Artefakte systematisch zu eliminieren, wird im Allgemeinen die „demokratische Methode“ verwendet, was heißt, nur Impulse zu benutzen, in welchen die einzelnen Impulskomponenten nicht sehr verschieden sind, im obigen Fall z.B. $n_1 = (1, 1, 1, 1)$. Damit wird der Fehler in $p^{[4]}$ minimiert. Aber dieses Verfahren reduziert einerseits die Anzahl der Punkte und damit die Statistik und andererseits bleibt ein Fehler in jeder Ordnung $p^{[2n]}$.

Wir verwenden deswegen die „ $p^{[2n]}$ -Extrapolationsmethode“ [40]. Durch die Theorie der Gruppeninvarianten [41] kann gezeigt werden, dass jedes Orbit durch die vier Gruppeninvarianten

$$p^{[n]} = a^n \sum_{\mu} p_\mu^n, \quad n = 2, 4, 6, 8, \quad (5.32)$$

charakterisiert ist: Durch die Angabe der Gruppeninvarianten können die vier Impulskomponenten durch Lösung von vier Gleichungen in vier Variablen theoretisch berechnet werden. Falls also mehrere Orbits existieren, definieren wir den Propagator als

$$G_{bare}(p^2) = \lim_{p^{[4]}, p^{[6]}, p^{[8]} \rightarrow 0} G(p^{[2]}, p^{[4]}, p^{[6]}, p^{[8]}), \quad (5.33)$$

wobei der Limes bei fixiertem p^2 genommen wird. Wir beschränken uns auf Terme der Ordnung a^4 . Wir können dies schreiben als

$$G(p^{[2]}, p^{[4]}, p^{[6]}, p^{[8]}) \approx G(p^{[2]}, 0, 0, 0) + p^{[4]} \frac{\partial G}{\partial p^{[4]}}(p^{[2]}, 0, 0, 0) + \mathcal{O}(a^6) \quad (5.34)$$

Existieren wie in unserem Beispiel zwei Orbits zu einem gemeinsamen Impulsquadrat, so können wir $G(p^{[2]}, 0, 0, 0)$ und $\frac{\partial G}{\partial p^{[4]}}(p^{[2]}, 0, 0, 0)$ durch Lösung eines Gleichungssystems in zwei Variablen berechnen und damit die beiden Werte mit $G(p^{[2]}, 0, 0, 0)$ identifizieren. Existieren mehr Orbits, extrapolieren wir mit linearer Regression. In einem globalen Fit für alle Impulse kann damit auch der Fall eines einzelnen Orbits berücksichtigt werden.

Wir bemerken, dass hyperkubische Artefakte keinen Einfluß auf den Gluonpropagator bei Nullimpuls haben.

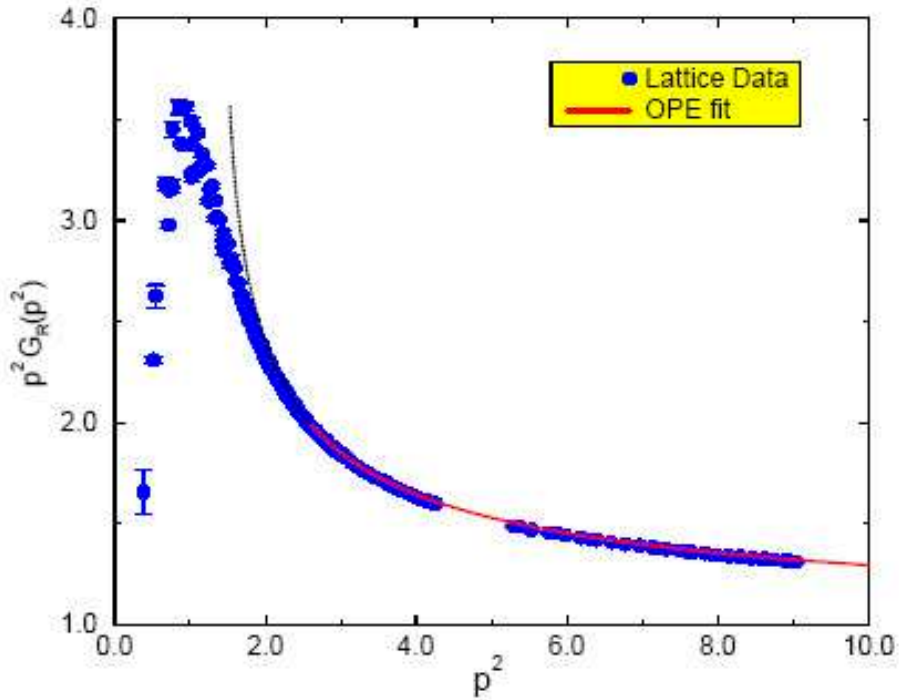


Abbildung 5.5: 'Dressing function' $k^2 G(k)$ in Abhängigkeit des Impulses für die Gruppe $SU(3)$. Bild entnommen aus [42].

5.5 Formvorschläge

Wir geben eine kurze Liste von Formvorschlägen, die seit dem Beginn der Untersuchungen zum Impulsverhalten des Gluonpropagators gemacht wurden. Die qualitativen Verläufe der Funktionen sind in Abb. 5.6 dargestellt.

Der tree-level Propagator [12] ist

$$G(k) \sim \frac{1}{k^2}, \quad (\text{schwarz}), \quad (5.35)$$

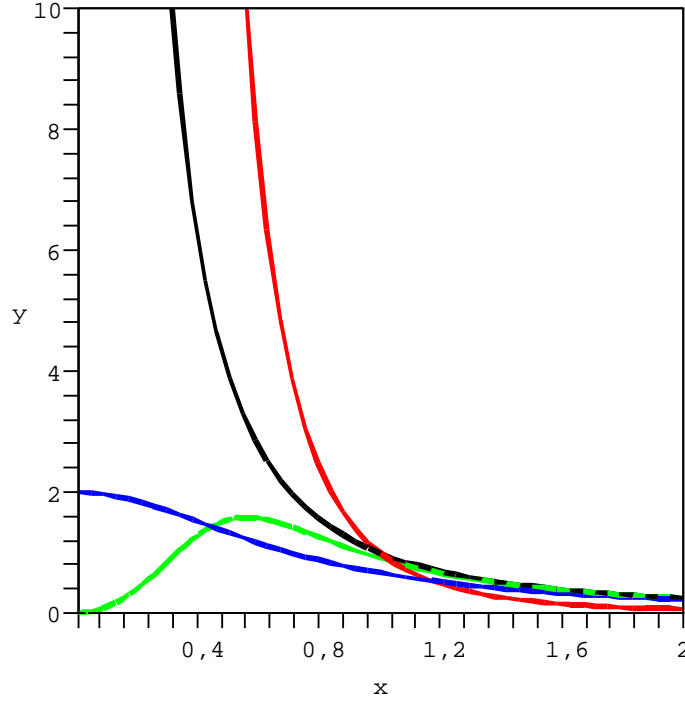
die „dressing function“ wäre konstant, im Gegensatz zu Abb. 5.5.

Gribov [4] errechnete aus dem Horizont die Form

$$G(k) \sim \frac{k^2}{k^4 + \gamma}, \quad (\text{grün}), \quad (5.36)$$

mit $m^2 = \pm i\gamma^{1/2}$, einer komplexen Masse $m = (1 \pm i)2^{-1/2}\gamma^{1/4}$. Zwanziger [5] stieß in einem einfachen Modell mit Gribovhorizont auf dieselbe Formel. Stingl [43] errechnete, dass aus der komplexen Masse ein instabiles Teilchen mit Energie und Lebenszeit bei hohem 3-Impuls \vec{k}

$$E(k) = |\vec{k}| \left[1 + \frac{\gamma}{8|\vec{k}|^4} + \dots \right],$$

Abbildung 5.6: Formvorschläge des Gluonpropagators $G(k)$

$$t(k) = |\vec{k}|\gamma^{-1/2}\left[1 + \frac{\gamma}{8|\vec{k}|^4} + \dots\right], \quad (5.37)$$

folgt. Die Lebenszeit steigt linear mit \vec{k} , und die erste Energiekorrektur ist von der Ordnung γ/\vec{k}^4 anstatt m^2/\vec{k}^2 , wie es für ein massives Teilchen der Fall wäre. Mandelstam [44] berechnete ein Trunkierungsschema der Schwinger-Dysongleichungen und fand den Propagator

$$G(k) \sim \frac{1}{k^4}, \quad (\text{rot}). \quad (5.38)$$

Dieses Potential impliziert eine mit dem Abstand linear ansteigende Energie zwischen zwei Quarks. Aktuell werden verbesserte Trunkierungen zum Beispiel von einer QCD-Gruppe in Erlangen [45] verfolgt.

Eine Analyse von Renormalonen [12] hat zu dem Begriff der anomalen Dimension geführt. Marenzoni, Martinelli, Stella und Testa [46] nutzten für den Fit die Form

$$G(k) \sim \frac{1}{m^2 + k^2 \left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)^\alpha}, \quad (\text{blau}). \quad (5.39)$$

Kapitel 6

Analytischer IR-Limes

6.1 Zwanzigers Extrapolation

Die Berechnung des Propagators erfordert die zweite Ableitung des Funktionals bezüglich der Quelle und ein anschließendes Null setzen. Wir führen eine Taylorentwicklung des erzeugenden Funktionals in der Quelle j durch,

$$\begin{aligned} W(j) &= W(0) + \sum_{k,a,\mu} \frac{\delta W(j)}{\delta j_\mu^a(k)} \Big|_{j=0} j_\mu^a(k) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k,k',a,b,\mu,\nu} \frac{\delta^2 W(j)}{\delta j_\mu^a(k) \delta j_\nu^b(k')} \Big|_{j=0} j_\mu^a(k) j_\nu^b(k') + r(j, L), \end{aligned} \quad (6.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} W(0) &= \ln(Z(0)) = 0, \quad \text{da } Z \text{ normiert ist und} \\ \frac{\delta W(j)}{\delta j_\mu^a(k)} \Big|_{j=0} &= \langle a_\mu^a(k) \rangle = 0, \quad \text{wegen Translationsinvarianz.} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Wir haben also nach der Ausführung der Kontraktionen

$$W(j, L) = \frac{1}{2L^4} \sum_{k,a,\mu,\nu} G_{\mu\nu}(k) j_\mu^a(k) j_\nu^a(-k) + r(j, L). \quad (6.3)$$

Da der erste nichtverschwindende Term durch den Propagator gegeben ist, übersetzen sich Schranken für W in Schranken für G . Das Restglied verhält sich wie $r(j, L) = O(j^3)$. Die Abhängigkeit bezüglich L können wir ohne die Kenntnis der Gewichte der QCD-Lagrangefunktion nicht feststellen.

Wir definieren der Übersicht halber das Symbol

$$f(x) \leq_{\rightarrow} x^n \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^n} < \infty. \quad (6.4)$$

Setzen wir die Schranken (4.47) für große Volumina ein, so folgt aus Gl. (5.9)

$$\begin{aligned} G(k=0) &\leq_{\rightarrow} L^4 & \text{(S1)} \\ G(k=0) &\leq_{\rightarrow} L^2 & \text{(S2)}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Wir werden zum erzeugenden Funktional übergehen. Die Schranke für die Korrelationsfunktion W ergibt nach der Taylorentwicklung (6.3) im Fall $k=0$

$$0 \leq W(j, L) = \frac{1}{2L^4} G(0)j^2 + r(j, L) \begin{cases} \leq (2N)^{1/2}|j| & \text{(S1)} \\ \leq 2 \tan(\pi/L)|j| & \text{(S2)}. \end{cases} \quad (6.6)$$

Somit haben wir unter der Annahme friedlichen Verhaltens des Restgliedes

$$\begin{aligned} G(k=0) &\leq_{\rightarrow} L^4 & \text{(S1)}, \\ G(k=0) &\leq_{\rightarrow} L^3 & \text{(S2)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Wir führen eine Variablensubstitution durch,

$$j = HL^4, \quad (6.8)$$

mit den Konsequenzen

$$G(k=0) = L^4 \left. \frac{\partial^2 W(H, L)}{(\partial H L^4)^2} \right|_{j=0} = \frac{1}{L^4} \left. \frac{\partial^2 W(H, L)}{\partial H^2} \right|_{j=0} \quad (6.9)$$

und

$$0 \leq W(H, L) = \frac{L^4}{2} G(0)H^2 + r'(H, L) \leq 2 \tan(\pi/L) L^4 H. \quad (6.10)$$

Wir sehen, dass der Gluonpropagator in Anwendung der Schranke (S2) unter Annahme eines friedlichen Verhaltens des Restgliedes im Grenzwert des unendlichen Volumens verschwindet, wohingegen die unitäre Schranke in dieser Variable einen endlichen Propagator vorhersagt,

$$\begin{aligned} G(k=0) &\leq_{\rightarrow} 1 & \text{(S1)} \\ G(k=0) &\leq_{\rightarrow} \frac{1}{L} & \text{(S2)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nehmen wir an, in einem Gebiet der Größe $j \leq \epsilon$ verschwinde der Rest, $r(j, L) \rightarrow 0$. In der Variable H erhalten wir

$$W(\epsilon, L) = \frac{L^4}{2} G(0) \frac{\epsilon^2}{L^8} + r' \left(\frac{\epsilon}{L^4}, L \right) \leq_{\rightarrow} \frac{\epsilon}{L}. \quad (6.12)$$

In der linken Seite der Ungleichung wird der Gültigkeitsgebiet der Taylorentwicklung für große Volumina immer kleiner, und verschwindet im Limes $\epsilon \rightarrow 0$. Kann also aus Gl. (4.47) das Verschwinden des Gluonpropagators gefolgert werden?

6.2 Toy-model de Jacques

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den Vertauschungsprozess

$$\lim_{j \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \neq \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow 0} \quad (6.13)$$

in einem eindimensionalen Modell mit Gribovhorizont. Wir schränken hierzu die Amplitude der Feldkomponenten auf die Größenordnung des Volumens V ein und verteilen die Moden gleichmäßig über die gesamte Region,

$$\rho(x) = \frac{1}{2L} \Theta(x - L) \Theta(-x + L), \quad (6.14)$$

$$Z(j) = \frac{1}{2L} \int \rho(x) e^{jx} = \frac{1}{jL} \sinh(jL). \quad (6.15)$$

Wir berechnen die erzeugende Funktion und deren Ableitungen, die Korrelationsfunktionen,

$$\begin{aligned} W(j) &= \ln \frac{\sinh(jL)}{jL} \\ W'(j) &= -\frac{1}{j} + L(\tanh(jL))^{-1} \\ W''(j) &= \frac{1}{j^2} - L^2(\sinh(jL))^{-2} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Zuerst stellen wir fest, dass $W'(j)$ und $W''(j)$ stetig in $j = 0$ sind, wir nutzen

$$\frac{1}{\tanh(jL)} \sim \frac{1 + (jL)^2/2}{jL + (jL)^3/6} \sim \frac{1}{jL} (1 + (jL)^2/3). \quad (6.17)$$

$$W(j) \sim \ln(1 + (jL)^2/3 + O(j^3)) \sim (jL)^2/3 + O(j^3) \quad (6.18)$$

und lesen die Stetigkeit ab,

$$\lim_{j \rightarrow 0} W(j) = 0. \quad (6.19)$$

Eine kleine Rechnung zeigt, dass auch $W'(j)$ und $W''(j)$ stetig sind,

$$\begin{cases} \lim_{j \rightarrow 0} \frac{W(j)}{j} = \lim_{j \rightarrow 0} W'(j) = 0 \\ \lim_{j \rightarrow 0} \frac{W'(j)}{j} = \lim_{j \rightarrow 0} W''(j) = 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Wir untersuchen gemäß Gl. (6.10) die Größe $W''(j)/V$. In unserem Toymodell setzen wir $V = 2L$. Aber der Limes des unendlichen Volumens und der Grenzübergang zu verschwindender Quelle vertauschen nicht,

$$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow 0} \frac{W''(j)}{2L} = \infty \\ \lim_{j \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{W''(j)}{2L} = 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Beschränken wir die Amplituden auf den Rand des Gebiets,

$$\rho(x) = \frac{1}{2a} [\theta(x - L + a)\theta(L - x) + \theta(x + L)\theta(a - x - L)]. \quad (6.22)$$

erhalten wir ein analoges Ergebnis,

$$Z(j) = \frac{2}{aj} \sinh(ja/2) \cosh(j(L - a/2)), \quad (6.23)$$

$$\begin{cases} \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow 0} \frac{W''(j)}{W''(j)} = 1 \\ \lim_{j \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{W''(j)}{2a} = 0. \end{cases} \quad (6.24)$$

Es scheint, als ob ein volumenabhängiger „cutt-off“ der Feldamplituden im Funktionalintegral im Allgemeinen ein Problem bei der Extrapolation der Korrelationsfunktionen in unendliches Volumen darstellt.

Nehmen wir nun an, wir hätten einen endlichen Gluonpropagator im unendlichen Volumen mit Hilfe der Methode des erzeugenden Funktionals berechnet. Wir zeigen, dass dies durchaus vereinbar ist mit den Bedingungen an das erzeugende Funktional:

- konvex
- linear durch $|j|$ nach oben beschränkt, Gl. 4.47
- positiv.

Wir nehmen als zweite Ableitung eine Gaußfunktion,

$$W''(j, L) = e^{-L^2 j^2}, \quad (6.25)$$

haben also $W''(0, L) = 1$ für alle Volumina L , also gilt

$$\lim_{L \rightarrow \infty} W''(0, L) = \begin{cases} 1 \text{ für } j = 0 \\ 0 \text{ für } j \neq 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

Wir bemerken, dass man a priori die Grenzwerte $j \rightarrow 0$ und $V \rightarrow \infty$ nicht vertauschen kann. Wir haben

$$W'(j, L) = \int_0^j dx \exp(-L^2 x^2) \quad (6.27)$$

und

$$W(j, L) = \int_0^j dx W'(x, L). \quad (6.28)$$

$W(j, L)$ ist konvex, da

$$W''(j, L) \geq 0, \quad (6.29)$$

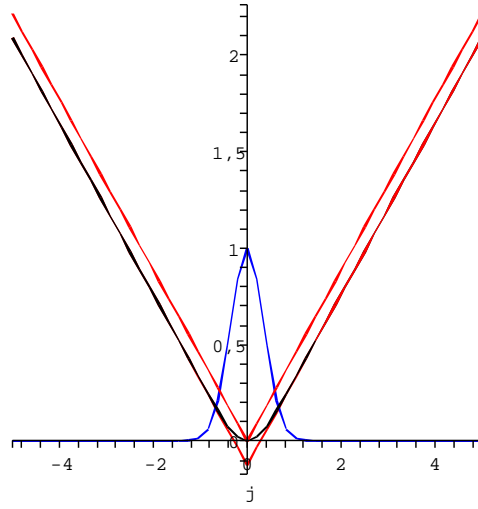


Abbildung 6.1: $V = 2$: Dargestellt ist die erzeugende Funktion (schwarz), ihre Asymptoten (rot) und der Propagator (blau)

ungerade in j und wegen

$$W'(j, L) < \int_0^{\infty} dx \exp(-L^2 x^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{L^2}} \quad (6.30)$$

beschränkt durch

$$0 \leq W(j, L) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{L^2}} |j|. \quad (6.31)$$

Wir werden im Folgenden das asymptotische Verhalten der Funktion $W(j, L)$ untersuchen.

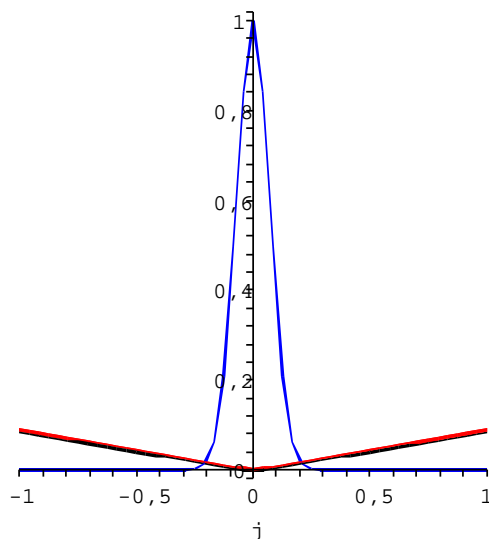
$$W(j, L) = \int_0^j dx W'(x, L) = \int_0^j dx \int_0^x dy W''(y, L) \quad (6.32)$$

Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge,

$$W(j, L) = \int_0^j dy (j - y) W''(y, L) \equiv A + B, \quad (6.33)$$

und schätzen den ersten Term ab,

$$\begin{aligned} A &= \frac{j\sqrt{\pi}}{2L} - j e^{-L^2 j^2} \int_j^{\infty} dy e^{-L^2(y^2 - j^2)} \\ &\geq \frac{j\sqrt{\pi}}{2L} - j e^{-L^2 j^2} \int_j^{\infty} dy e^{-L^2(y-j)^2} \\ &= \frac{j\sqrt{\pi}}{2L} (1 - e^{-L^2 j^2}). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Abbildung 6.2: $V = 100$

Der zweite lässt sich direkt berechnen,

$$\begin{aligned} B &= - \int_0^j dy y e^{-L^2 y^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{j^2} du e^{-L^2 u} \\ &= \frac{1}{2L} (e^{-L^2 j^2} - 1). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Für große Volumina gilt also

$$W(j, L) \geq \frac{j\sqrt{\pi}}{2L} - \frac{1}{2L}. \quad (6.36)$$

Die Funktionen sind in Abb. 6.2, und in dem Mapleprogramm `toy.mw` visualisiert, siehe Anhang C. Wir bemerken abschließend, dass wir durch einen Zusatzterm

$$\frac{d^2 W}{dj^2} = e^{-\frac{a}{2}j^2} \left(1 - e^{-\frac{1}{Aj^2}} \right) \quad (6.37)$$

die Bedingungen

$$\frac{2}{\sqrt{A}} < \sigma(0, L) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) \quad (6.38)$$

erfüllen und dabei den Nebeneffekt unendlicher 4-Punktsfunktionen vermeiden können.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die analytische Rechnung Zwanzigers wurde nachvollziehbar dargestellt und sämtliche Formeln verifiziert. Durch das Gegenbeispiel wurde der Beweis des Theorems aus Nucl. Phys. B 364, p. 127, widerlegt. Aus dem Verschwinden des erzeugenden Funktionals der zusammenhängenden Korrelationsfunktionen kann nicht auf das Verschwinden des Gluonpropagators geschlossen werden.

Die numerische Untersuchung wurde durchgeführt, bei der Präsentation der Ergebnisse wurde auf die Statistik der Forschung vergangener Jahre der LQCD-Gruppe in Orsay zurückgegriffen und eine Extrapolation der Ergebnisse in unendliches Volumen versucht. Unsere Daten weisen auf ein Skalierungsverhalten $1/(aL)^2$ hin. Durch die Renormalisierung ist ein Vergleich mit Ergebnissen von Gruppen, welche unter anderen Bedingungen arbeiten, möglich. In Anwendung der Extrapolationsmethode anderer Gruppen erscheint es am sinnvollsten, in Landaueichung einen endlichen Gluonpropagator bei Nullimpuls anzunehmen,

$$G_\infty(k=0) \approx 9.6 \pm 0.7 \text{ GeV}^{-2}.$$

Ein endgültiger Wert kann aufgrund der Datenmenge aber nicht angegeben werden.

Anhang A

Speziell unitäre Matrizen

Quark- und Gluonfarben werden durch $SU(3)$ -Matrizen, Quark- und Gluonflavours durch $SU(2)$ -Matrizen dargestellt.

Definition 8 ($SU(N)$).

$$U \in SU(N) \iff \begin{cases} \text{Mat}(\mathbb{C}, N) \\ U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \\ \det(U) = 1 \end{cases} . \quad (\text{A.1})$$

1. Haarmaß

$SU(N)$ ist eine kompakte Liegruppe, was bedeutet dass ein lineares, positives Maß, das sogenannte Haarmaß existiert, welches linksinvariant und normierbar ist,

$$\int dg f(g) = \int dg f(g'g), \quad \int dg 1 = 1. \quad (\text{A.2})$$

2. Mannigfaltigkeit

Die Mathematik stellt algebraische Identifikationen bereit,

$$\begin{aligned} SU(1) &\simeq S^1, \\ SU(2) &\simeq S^3, \\ SU(3)/SU(2) &\simeq S^5, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

welche zum Beispiel zur Generation zufälliger Elemente der Gruppe genutzt werden.

3. Drehimpulsoperatoren in Spin-1-Darstellung

Wir berechnen die Eigenwerte des Operators $i f^{abc} a_\mu^b(x)$ der Gruppe $SU(2)$ im Farbraum,

$$(i \epsilon^{abc} a^b) \chi^c = \lambda \chi^a. \quad (\text{A.4})$$

Die Eigenwertgleichung

$$i \begin{pmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{pmatrix} |\chi\rangle = \lambda |\chi\rangle \quad (\text{A.5})$$

führt auf das charakteristische Polynom

$$-\lambda^3 + \lambda|a|^2 = 0 \quad (\text{A.6})$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm|a|. \quad (\text{A.7})$$

Der größte Eigenwert ist durch $|a_\mu(x)|$ gegeben,

$$\chi_0^{a\dagger} i f^{abc} a_\mu^b(x) \chi_0^c = \chi_0^{a\dagger} |a_\mu(x)| \chi_0^a = |a_\mu(x)|. \quad (\text{A.8})$$

Dies lässt sich auf die Gruppen $SU(N)$ verallgemeinern.

Eine weitere Eigenschaft der Gruppe $SU(2)$ wird bei der Erstellung von Eichkonfigurationen genutzt, nämlich, dass die Summe zweier $SU(2)$ -Matrizen wieder proportional zu einer $SU(2)$ -Matrix ist.

4. Untergruppen der $SU(3)$

Zur numerischen Simulation wird von der Zerlegung der $SU(3)$ in „ $3 \times SU(2)$ “ Gebrauch gemacht. Sei dazu

$$\epsilon^{ij} \rightarrow_\eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

und

$$\delta^{ij} \rightarrow_\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Wir zeichnen eine Darstellung von

$$\epsilon^{ijk} = (\overrightarrow{\epsilon^{ij}})^k, \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m_{41} & 0 & m_{43} \\ 0 & 1 & 0 \\ m_{61} & 0 & m_{63} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{82} & m_{83} \\ 0 & m_{92} & m_{93} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Mit $m \in SU(2)$ erzeugen wir $SU(3)$, wenn wir die drei untereinander stehenden 3×3 -Matrizen miteinander multiplizieren. Mit $m = \epsilon^{ij}$ erzeugen wir ϵ^{ijk} . Das Resultat ist durch Cabbibo und Marinari [47] numerisch bestätigt worden.

Anhang B

Algorithmus Heat bath

Ein typisches Gitter der Größe $24^3 \times 48$ enthält

$$\begin{array}{cccccc} 24^3 & \times 48 & \times 4 & \times 18 & \times 8 \text{ bit} & = 382.205.960 \text{ bit} \\ \text{Ort} & \text{Zeit} & \text{Richtungen} & \text{Mat}(\mathbb{C}, 3) & \text{double precision} & \end{array} \quad (\text{B.1})$$

Die Berechnung einer Partitionsfunktion als Pfadintegral ist mit gewöhnlichen Diskretisierungsmethoden unmöglich. In diesem Fall wird üblicherweise die Monte-Carlo-Methode angewendet, welche wir im Folgenden beschreiben werden. Wir folgen in der Darstellung Creutz [15]. Wir geben uns zunächst eine Startkonfiguration vor, zum Beispiel alle Linkvariable auf Eins gesetzt (Kaltstart) oder diese statistisch über die Eichgruppe verteilt (Warmstart). Ausgehend von der Startkonfiguration wird eine Markovkette von Konfigurationen erzeugt, mit dem Ziel, dass im Grenzwert unendlicher Iterationen die Wahrscheinlichkeit, auf eine Konfiguration C zu stossen, proportional zum Boltzmannfaktor,

$$p(C) \propto e^{-\beta S(C)}, \quad (\text{B.2})$$

ist. Im Fall einer Eichtheorie interessieren wir uns für das Monte-Carlo-Update einer einzelnen Linkvariable $U \leftarrow U'$. Wir wählen zunächst eine neue Linkvariable U aus der Gruppenmannigfaltigkeit und berechnen die Änderung der Wirkung

$$\Delta S(U) = S(U) - S(U'). \quad (\text{B.3})$$

Ist $\Delta S(U) \leq 0$, nehmen wir die neue Linkvariable an. Im zweiten Fall, $\Delta S(U) > 0$, ziehen wir mit Hilfe eines Zufallsgenerators ungewichtet eine Zahl x aus dem Intervall $[0, 1]$ und vergleichen diese mit $e^{-\beta \Delta S(U)}$. Ist $e^{-\beta \Delta S(U)}$ kleiner als x , wird die neue Linkvariable die alte ersetzen, im komplementären Fall wird sie nicht ersetzt. Diese Prozedur wird über das gesamte Gitter fortgeführt und führt im Fall der $SU(3)$ nach typischerweise ca. 5000 solcher „sweeps“ die Startkonfiguration in das thermische Gleichgewicht über.

Wie wird die neue Linkvariable gewählt? Effektive Varianten nutzen eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz zum thermischen (mikrokanonischen) Gleichgewicht, das Kriterium des detaillierten Gleichgewichts,

$$P(C \leftarrow C') e^{-\beta S(C)} = P(C' \leftarrow C) e^{-\beta S(C')}, \quad (\text{B.4})$$

wobei $P(C \leftarrow C')$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet, welche eine Konfiguration C in eine Konfiguration C' überführt. $P(C \leftarrow C')$ ist eine stochastische Matrix, welche die Boltzmannverteilung als Eigenzustand besitzt. Eine mögliche Realisierung der Bedingung (B.4) ist durch einen von Metropolis et al. [48] entwickelten einfachen Algorithmus gegeben: Jede in U und U' symmetrische Verteilungsfunktion $P(U, U')$, erfüllt das detaillierte Gleichgewicht und gibt im Limes die Boltzmannverteilung. $P(U, U')$ unterliegt keiner weiteren Bedingung und kann empirisch und für das gegebene Problem (Eichgruppe und Gitter) optimiert gewählt werden. Zum Beispiel kann die neue Linkvariable ausgehend von der alten durch Multiplikation mit einem zufälligen Gruppenelement erstellt werden.

Wir nutzen den von Creutz speziell für die Gruppe $SU(2)$ mit Wilsonwirkung $S(U)$ entwickelten Algorithmus und erweitern auf $SU(3)$ gemäß Gl. (A.12). Bei der Wahl der neuen Linkvariable fungieren die Linkvariablen, die mit dieser in Kontakt stehen, als Wärmebad, „heat bath“. Die Wirkung ist lokal, es tragen in vierdimensionaler Euklidischer Raumzeit 6 Plaketten zum Update einer Linkvariable $U \leftarrow U'$ bei,

$$dp(U) \sim dU \exp \frac{1}{2} \beta \text{tr} \left(U \sum_{\alpha=1}^6 U_{\alpha} \right). \quad (\text{B.5})$$

Die Grösse $\sum_{\alpha=1}^6 U_{\alpha}$ heisst „staple“. Die Gruppe $SU(2)$ kann gemäß (A.3) als dreidimensionale Sphäre parametrisiert werden,

$$SU(2) = \{a_0 \mathbb{1} + i \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} | a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1\}, \quad (\text{B.6})$$

mit den Paulimatrizen $\boldsymbol{\sigma}_i, i = 1, \dots, 3$. Unter Verwendung einiger spezieller Eigenschaften der Gruppe, u.a. Gl. (A.2), lässt sich der heat-bath-Algorithmus angeben:

1. Erzeuge eine gleichverteilte Zufallszahl x aus dem Intervall

$$[e^{-2\beta k}, e^{2\beta k}], \quad (\text{B.7})$$

wobei

$$k = \left(\det \sum_{\alpha} U_{\alpha} \right)^{1/2}. \quad (\text{B.8})$$

2. Akzeptiere x mit der Wahrscheinlichkeit

$$dp(x) = dx \sqrt{1 - \beta^{-2} k^{-2} \ln^2 x}. \quad (\text{B.9})$$

3. Wiederhole 1. und 2. bis ein x akzeptiert ist, durchlaufe dabei das Gitter.

4. Setze

$$a_0 = \frac{1}{\beta k} \ln x. \quad (\text{B.10})$$

5. Konstruiere einen Zufallspunkt auf der 3-Sphäre mit Radius $r = \sqrt{1 - a_0^2}$:

- (a) Ziehe 3 Zahlen $\{x_i\}_{i=1,2,3}$ aus dem Intervall $[-1, 1]$.
- (b) Akzeptiere $\{x_i\}$, falls $\sum_i x_i^2 \leq 1$, sonst wiederhole die Auslosung 5.(a).
- (c) Setze

$$a_i = \frac{x_i}{r}. \quad (\text{B.11})$$

6. Ersetze U' durch

$$U = (a_0 \mathbf{1} + i \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot k \left(\sum_{\alpha=1}^6 U_\alpha \right)^{-1}. \quad (\text{B.12})$$

Nachdem das Gitter thermalisiert ist, können die Observablen gemessen werden. Ein zentrales und weitaus schwierigeres Problem der LQCD die Erzeugung von Konfigurationen mit dynamischen Quarks.

Eine numerische Eichfixierung wird mit dem Verfahren des „conjugate gradient“ oder „over-relaxation“ erreicht, für eine ausführliche Studie darüber siehe z.B. [49].

Anhang C

Daten und toy.mw

beta	L	a [GeV]	1/(aL) [GeV]	D(0) data	Fehler	rel. Fehler [%]	D(0) [GeV]
5,7	24	1,08E+00	4,5E-02	7,7E+06	15	1,95	9,42
6,0	32	1,97E+00	6,2E-02	9,6E+07	32	3,33	10,74
5,7	16	1,08E+00	6,7E-02	1,7E+06	14	0,82	10,51
5,9	24	1,65E+00	6,9E-02	2,2E+07	36	1,66	11,11
6	24	1,97E+00	8,2E-02	3,4E+07	19	5,63	11,93
5,8	16	1,35E+00	8,4E-02	3,0E+06	25	0,83	11,84
6,4	32	3,58E+00	1,1E-01	3,8E+08	94	2,50	12,22
6,2	24	2,70E+00	1,1E-01	6,7E+07	44	0,66	12,36
6	16	1,97E+00	1,2E-01	6,9E+06	51	0,73	12,42
6,4	24	3,58E+00	1,5E-01	1,1E+08	91	0,83	11,23
6	12	1,97E+00	1,6E-01	1,9E+06	43	0,22	10,89
6	11	1,97E+00	1,8E-01	1,3E+06	26	0,20	10,32
6	10	1,97E+00	2,0E-01	8,6E+05	20	0,23	10,09
6	9	1,97E+00	2,2E-01	5,2E+05	13	0,25	9,33
6,4	16	3,58E+00	2,2E-01	1,7E+07	23	1,32	9,08
6	8	1,97E+00	2,5E-01	2,9E+05	73	0,26	8,16
6	7	1,97E+00	2,8E-01	1,4E+05	26	0,19	6,85
6	6	1,97E+00	3,3E-01	5,7E+04	15	0,26	5,16
6	5	1,97E+00	3,9E-01	2,1E+04	38	0,18	3,86
6,8	16	6,48E+00	4,0E-01	2,2E+07	40	1,79	3,43

Abbildung C.1: Propagator in verschiedenen physikalischen Volumina

Maplefilm zur Ansicht:

```

restart :
with(plots) :
W2 := exp(-L **2 * j^2) :
W1 := int(W2, j = 0..k) :
W := int(W1, k = 0..j) :
AS := 1/2 * root(Pi/L **2, 2) * abs(j) :
AS2 := AS - 1/(2 * L **2) :
A := animate(W, j = -5..5, L = 2..10, color = black, frames = 70) :
B := animate(W2, j = -5..5, L = 2..10, color = blue, frames = 70) :
C := animate(AS, j = -5..5, L = 2..10, color = red, frames = 70) :
C1 := animate(AS2, j = -5..5, L = 2..10, color = red, thickness = 1, frames = 70) :
display([B, C, C1, A]);
A := animate(W, j = -1..1, L = 10..100, color = black, frames = 50) :
B := animate(W2, j = -1..1, L = 10..100, color = blue, frames = 50) :
C := animate(AS, j = -1..1, L = 10..100, color = red, frames = 50) :
C1 := animate(AS2, j = -1..1, L = 10..100, color = red, thickness = 1, frames = 50) :
display([B, C, C1, A]);

```

Literaturverzeichnis

- [1] I.M. Singer: The geometry of the orbit space for nonabelian gauge theories, Phys. Scripta 24, (1981), 817-820
- [2] V. Dzhunushaliev: A non-associative quantum mechanics, (2005)
e-Print Archive: hep-th/0502216
- [3] A.M. Jaffe, E. Witten: Clay Mathematics Institute Millenium Prize problem, (2000),
and references therein
- [4] V.N. Gribov: Quantization of nonabelian gauge theories, Nucl. Phys. B139, (1978), 1
- [5] D. Zwanziger: Vanishing of zero momentum gluon propagator and color confinement,
Nucl Phys B 364, (1991) 127
- [6] J.E. Mandula: The gluon propagator, Phys. Rept. 315, (1999), 273-284
e-Print Archive: hep-lat/9907020
- [7] R. Oehme, Int. J. Mod. Phys. A 10 (1995)
- [8] A. Wipf: Vorlesungen über Quantenfeldtheorie
- [9] A. Abada: Vorlesungen über LQCD
- [10] T. Heinzl: Vorlesungen über Quantenfeldtheorie
- [11] A. Mohaupt: Vorlesungen über Elementarteilchenphysik
- [12] M.E. Peskin, Schröder: An introduction to quantum field theory, Addison-Wesley
(1995)
- [13] M. Le Bellac: Quantum and statistical field theory, Oxford Science Publications, (1995)
- [14] J. Smit: Introduction to quantum fields on a lattice, Cambridge Lecture Notes in
Physics, Cambridge University Press, (2002)
- [15] M. Creutz: Quarks, gluons and lattices, Cambridge Monographs on Mathematical
Physics, Cambridge University Press, (1983)

- [16] I. Montvay, G. Münster: Quantum fields on a lattice, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, (1994)
- [17] K. Osterwalder, R. Schrader: Axioms for Euclidean Green's functions, Commun.Math.Phys.31, (1973), 83-112
- [18] A. Sternbeck: E.-M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, A. Schiller, (2005)
hep-lat/0511053
- [19] K.G. Wilson, Confinement of quarks, Phys. Rev. D10, (1974), 2445
- [20] R. Gupta: Introduction to Lattice QCD
e-Print Archive: hep-lat/9807028
- [21] SESAM Collaboration (Gunnar S. Bali et al.): Phys. Rev. D71, (2005)
e-Print Archive: hep-lat/0505012
- [22] L. Dittmann, T. Heinzl, A. Wipf: An effective lattice theory for Polyakov loops, JHEP 0406:005, (2004)
e-Print Archive: hep-lat/0306032
- [23] B. Petersson, T. Reisz: Polyakov loop correlations at finite temperature
Nucl.Phys.B353, (1991), 757-784
- [24] L. Maiani, M. Testa: Final state interactions from Euclidean correlation functions,
Phys.Lett.B 245, (1990), 585-590
- [25] P. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pene, C. Roiesnel: Lattice calculation of α_s in momentum scheme, JHEP 9810:017, (1998)
e-Print Archive: hep-ph/9810322
- [26] D.J. Gross, F. Wilczek: Phys. Rev. Lett. 30, (1973), 1343; H.D. Politzer: Phys. Rev. Lett. 30, (1973), 1346; G. 't Hooft: Report at the Marseille Conference on Yang-Mills Fields, (1972)
- [27] T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, S.A. Larin: The four-loop β -function in quantum chromodynamics, Phys.Lett.B400 (1997) 379-384
e-Print Archive: hep-ph/9701390
- [28] A. Cucchieri, T. Mendes: Gauge fixing and gluon propagator in λ -gauges, (1999)
e-Print Archive: hep-lat/9902024
- [29] D. Zwanziger: No confinement without Coulomb confinement Phys.Rev.Lett.90, (2003), 102001
e-Print Archive: hep-lat/0209105
- [30] T. Heinzl: Eichtheorien in Hamiltonscher Formulierung, (1998)

- [31] I.M. Singer: Some remarks on the Gribov ambiguity, Commun.Math.Phys.60, (1978) 7-12
- [32] D. Zwanziger: Nonperturbative Faddeev-Popov formula and infrared limit of QCD, Phys.Rev.D69, (2004), 016002
e-Print Archive: hep-ph/0303028
- [33] A.Y. Lokhov, O. Pene, C. Roiesnel: Scaling properties of the propability distribution of lattice Gribov copies, CPHT-RR-065-1105, LPT-ORSAY-05-76, (2005)
e-Print Archive: hep-lat/0511049
- [34] D. Zwanziger: Time independent stochastic quantization, DS equations, and infrared critical exponents in QCD, Phys.Rev.D67, (2003), 105001
e-Print Archive: hep-th/0206053
- [35] P. van Baal: Global issues in gauge fixing, Published in Trento QCD Workshop, 0004-23, (1995), QCD162:Q84
e-Print Archive: hep-th/9511119
- [36] F.D.R. Bonnet, P.O. Bowman, D.B. Leinweber, A.G. Williams, J.M. Zanotti: Infinite volume and continuum limits of the Landau-gauge gluon propagator, Phys.Rev.D64, (2001), 034501
e-Print Archive: hep-lat/0101013
- [37] O. Oliveira, P.J. Silva: PoS LAT2005, (2005), 287
e-Print Archive: hep-lat/0509037
- [38] A. Cucchieri, D. Zwanziger: Fit to gluon propagator and Gribov formula, Phys.Lett.B524, (2002), 123-128
e-Print Archive: hep-lat/0012024
- [39] Ph. Boucaud, J.P. Leroy, A. Le Yaouanc, A.Y. Lokhov, J. Micheli, O. Pene, J. Rodriguez-Quintero, C. Roiesnel: The infrared behaviour of pure Yang-Mills Green functions, (2005)
e-Print Archive: hep-ph/0507104
- [40] Ph. Boucaud, F. de Soto, J.P. Leroy, A. Le Yaouanc, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pene, J. Rodriguez-Quintero: Artefacts and $\langle A^2 \rangle$ power corrections: revisiting the MOM $Z_\psi(p^2)$ and Z_V , (2005)
e-Print Archive: hep-lat/0504017
- [41] T.A. Springer, Lecture Notes in Mathematics 585, Springer-Verlag (1977)
- [42] H. Moutarde, Contributions numériques à l'étude des fonctions de Green et des propriétés du vide de la Chromodynamique Quantique, Dissertationsarbeit, Ecole Polytechnique, (2003),
<http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/31/20/tel-00003120-00/>

- [43] M. Stingl: Phys. Rev. D34, (1986), 3863
- [44] S. Mandelstam: Approximation scheme for quantum chromodynamics, Phys. Rev. D20, (1979), 3223;
- [45] R. Alkhofer, L. von Smekal: The infrared behaviour of QCD Green's functions, confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states, Physics Reports 353, (2001), 281-465
- [46] P. Marenzoni, G. Martinelli, N. Stella, M. Testa: A lattice study of the gluon propagator in the Landau gauge, Como Quark Confinement, (1994), 210-212
e-Print Archive: hep-ph/9410355
- [47] N. Cabbibo, E. Marinari: A new method for updating $SU(N)$ -matrices in computer simulations of gauge theories, Phys.Lett.B119, (1982), 387-390
- [48] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, W. Teller: Journ. Chem. Phys. 21, (1953), 08
- [49] A. Cucchieri, T. Mendes: Nucl. Phys.B471, (1996), 263-292
e-Print Archive: hep-lat/9511020

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die Diplomarbeit selbständig verfasst und keine weiteren als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Thorsten Brüntjen.