Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Abgabe am 06. Juni in der Vorlesung

Aufgabe 17 **(2+1 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen die Feynman-Regeln für ein komplexes Skalarfeld sowohl im Orts- als auch im Impulsraum hergeleitet werden. Dazu betrachten wir die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x)^\star - m^2 \phi(x)^\star \phi(x) - \frac{\lambda}{4} (\phi(x)\phi(x)^\star)^2 \, .$$

(i) Benutzen Sie die Resultate aus Aufgabe 16 um den Propagator sowohl im Impuls- als auch im Ortsraum herzuleiten.

(ii) Zeigen Sie, dass im Impulsraum folgende Identität gilt

$$\begin{aligned} \int d^4x \, \mathcal{L}_{int} &= -\frac{\lambda}{4} \int d^4x \; (\phi(x)\phi(x)^\star)^2 \\ &= -\frac{\lambda}{4} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} \; \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \, \phi^\star(k_1) \, \phi^\star(k_2) \, \phi(k_3) \, \phi(k_4) \end{aligned}$$

und leiten Sie die entsprechenden Feynman-Regeln für den Wechselwirkungsvertex im Impuls- und im Ortsraum her.

Aufgabe 18 **(1+2+2+2 Punkte)**

Im folgenden betrachten wir ein-dimensionale Integrale, die uns etwas wertvolles über Störungstheorie lehren werden (siehe Vorlesung).

(i) Zeigen Sie, dass

$$Z_0[j] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \exp\left(-\frac{1}{2} m^2 x^2 + jx\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \exp\left(\frac{j^2}{2m^2}\right)$$

für $m > 0$ indem Sie das Quadrat in der Exponentialfunktion ergänzen

(ii) Zeigen Sie, dass $Z_0[j]$ das erzeugende Funktional für Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; x^{2n} \exp\left(-\frac{1}{2} m^2 x^2 + jx\right) \, .$$

ist, indem Sie Ableitungen bezgl. j betrachten und

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; x^{2n} \exp\left(-\frac{1}{2} m^2 x^2\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \frac{1}{2^n m^{2n}} \frac{(2n)!}{n!}$$

verifizieren.

(iii) Betrachten Sie nun das erzeugende Funktional für den wechselwirkenden Fall,

$$Z[j] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \exp\left(-\frac{1}{2} m^2 x^2 - \frac{\lambda}{4!} x^4 + jx\right) \, ,$$

wobei λ reell und positiv ist. Überzeugen Sie sich, dass

$$Z[j] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^n \frac{1}{n!}\, x^{4n} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2x^2 + jx\right)$$

gilt. Unter der Annahme, dass man die Reihenfolge von Summation und Integration vertauschen kann und das hierbei erhaltene Resultat in From von Ableitungen schreiben kann, zeigen Sie die folgende Relation zwischen $Z[j]$ und $Z_0[j]$

$$Z[j] = \exp\left(-\frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial j}\right)^4\right) Z_0[j]\,.$$

(iv) Betrachten Sie die Partialsummen

$$Z_k[j] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n=0}^{k} \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^n \frac{1}{n!} x^{4n} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2x^2 + jx\right)$$

und zeigen Sie dass für $j = 0$

$$Z_k[0] = \frac{\sqrt{2\pi}}{m} \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \lambda^n \frac{1}{2^{2n} m^{4n} (4!)^n} \frac{(4n)!}{(2n)!\, n!}$$

gilt.