4. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Abgabe am 09. Mai in der Vorlesung

Aufgabe 12 **(2 Punkte)**

Betrachten Sie die Projektionsoperatoren $\mathbb{P}_1$ and $\mathbb{P}_n$ (für $n \in \mathbb{N}$):

$$\mathbb{P}_1 = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| \,,$$
$$\mathbb{P}_n = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \int \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}_i}} |\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n\rangle\langle\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n| \,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_1$ auf 1-Teilchenzustände projeziert, d.h. $\mathbb{P}_1|\vec{k}\rangle = |\vec{k}\rangle$ und $\mathbb{P}_1|\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n\rangle = 0$ für $n > 1$. Wie wirkt $\mathbb{P}_n$ auf m-Teilchenzustände? Diskutieren Sie die Fälle $n = m$ und $n \neq m$.

Zeigen Sie, dass man den Einheitsoperator $\mathbb{1}$ in der Form $\mathbb{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n$ geschrieben werden kann.

Dies impliziert, dass der in der Vorlesung definierte Fockraum $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ vollständig ist.

Aufgabe 13 **(1+3+1 Punkte)**

Die retardierte Greensfunktion ist gegeben durch

$$G_R(x-y) = i\theta(x^0 - y^0)\ \langle 0|[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]|0\rangle \,.$$

(i) Zeigen Sie, dass $G_R(x-y)$ wie folgt geschrieben werden kann

$$G_R(x-y) = i\theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\, 2\omega_{\vec{p}}} \left(e^{ip(x-y)} - e^{-ip(x-y)}\right).$$

Benutze hierzu die Modenentwicklung für $\hat{\phi}(x)$. Überzeugen Sie sich, dass

$$G_R(x-y) = i\theta(x^0 - y^0)\,(D(x-y) - D(y-x))$$

gilt, wobei $D(x-y) = \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle$ und dass $G_R(x-y)$ reell ist.

(ii) Führen Sie die p^0 Integration aus und zeigen Sie, dass $G_R(x-y)$ in der Form

$$G_R(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{-(p^0 + i\epsilon)^2 + \vec{p}^2 + m^2}$$

geschrieben werden kann, wobei ϵ sehr klein ist und nur die Pole des Integranden verschiebt. Bestimmen Sie die Lage der Pole!

(iii) Zeigen Sie, dass für den Feynman Propagator $\Delta_F(x-y)$ bzw. für retardierte und avancierte Greens Funktionen $G_A(x-y)$ bzw. $G_R(x-y)$ folgendens gilt:

$$\Delta_F(x-y) = \Delta_F(y-x) \qquad\qquad G_A(x-y) = G_R(y-x)\,.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 14 **(3 Punkte)**

Im Folgenden soll der Feynman Propagator für ein komplexes Skalarfeld $\phi(x)$ mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x)^\star - m^2 \phi(x)^\star \phi(x)$$

her geleitet werden. Zeigen Sie insbesondere, dass

$$\langle 0|\mathcal{T}(\hat{\phi}^\dagger(x)\hat{\phi}(y))|0\rangle = \Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2+m^2-i\epsilon} e^{ik(x-y)}\,.$$

Tipp: Zerlegen Sie dafür das komplexe Feld $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x))$ wobei $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ reelle Skalarfelder der Masse m sind und benutzen Sie, dass für die reellen Skalarfelder folgendes gilt (warum?)

$$\langle 0|\mathcal{T}(\hat{\phi}_i(x)\hat{\phi}_j(y))|0\rangle = \delta_{ij}\Delta_F(x-y)\,.$$

Was gilt für $\langle 0|\mathcal{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y))|0\rangle$ und $\langle 0|\mathcal{T}(\hat{\phi}^\dagger(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle$?