3. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Abgabe am 02. Mai in der Vorlesung

Aufgabe 8 **(3 Punkte)**

Betrachten Sie ein freies reelles Skalarfeld mit verschwindender Masse. Zeigen Sie, dass die Wirkung

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x \eta^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi(x)\,\partial_\nu\phi(x)$$

invariant unter der Dilatationstransformation

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = e^\alpha x^\mu\,, \qquad \phi(x) \mapsto \tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x)e^{-d_\phi\alpha}$$

ist für eine geeignete Wahl von d_ϕ. Bestimmen Sie die infinitesimale Version der Transformation und berechnen Sie den Noether Strom. Zeigen Sie, dass der Noether Strom erhalten ist.

Ist die Dilatationstransformation immer noch eine Symmetrie falls man einen Wechselwirkungsterm der Form $\lambda\phi^4(x)$ oder eine Masse für das Skalarfeld betrachtet?

Aufgabe 9 **(3 Punkte)**

Betrachten Sie ein nicht-wechselwirkendes reelles Skalarfeld $\phi(t,x)$ mit Masse m in 1+1 Dimensionen mit $x \in [0,L]$. Das Skalarfeld $\phi(t,x)$ erfüllt Dirichlet Randbedingungen, $\phi(t,0) = \phi(t,L) = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung durch

$$\phi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_n x)}{2\omega_n L}\left(a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^\star e^{i\omega_n t}\right)$$

gegeben ist. Bestimmen Sie k_n in Abhängigkeit von L. Wie steht ω_n in Beziehung zu k_n?

(ii) Diskutieren Sie die Quantisierung der Theorie! Wie sehen die Vertauschungsrelationen für a_n und $a_n^\dagger$ aus?
Hinweis: $[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{nm} 2\omega_n L$ und beachten Sie dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/L)\ \sin(n\pi y/L)}{2L} = \delta(x-y)\,.$$

(iii) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse auf drei räumliche Dimensionen und vergleichen Sie mit Aufgabe 9. Insbesondere zeigen Sie, dass man in drei Raumdimensionen das Volumen L^3 wie folgt ersetzen muss

$$L^3 \mapsto (2\pi)^3\delta(\vec{0})\,.$$

Aufgabe 10 **(2 Punkte)**

Drücken Sie den Impulsoperator $\hat{\vec{P}}$ gegeben durch

$$\hat{\vec{P}} = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x}\ \hat{\Pi}(t,\vec{x})\ \vec{\nabla}\hat{\phi}(t,\vec{x})$$

mit Hilfe von Erzeuger- und Vernichteroperatoren $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ bzw. $\hat{a}(\vec{k})$ aus.

Bitte wenden!

Aufgabe 11 **(2 Punkte)**

Zerlegen Sie $\hat{\phi}(t,\vec{x})$ in Vernichtungsoperatoren $\hat{a}(\vec{k})$ und Erzeugungsoperatoren $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$, um die folgende Identität zu erhalten

$$\hat{a}(\vec{p}) = i \int d^3\vec{x}\, e^{i\omega_{\vec{p}}t - i\vec{p}\vec{x}} \overleftrightarrow{\partial_0} \hat{\phi}(t,\vec{x})\,,$$
$$\hat{a}^\dagger(\vec{p}) = -i \int d^3\vec{x}\, e^{-i\omega_{\vec{p}}t + i\vec{p}\vec{x}} \overleftrightarrow{\partial_0} \hat{\phi}(t,\vec{x})\,,$$

wobei $\overleftrightarrow{\partial_0}$ durch $f(t,\vec{x})\overleftrightarrow{\partial_0}\, g(t,\vec{x}) = f(t,\vec{x})\,\partial_0 g(t,\vec{x}) - (\partial_0 f(t,\vec{x}))\, g(t,\vec{x})$ definiert ist.