2. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Abgabe am 25. April in der Vorlesung

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Betrachten Sie zwei reelle Skalarfelder ϕ_1 und ϕ_2 jeweils mit Masse m. Die Wechselwirkung wird durch das Potential $\mathcal{V}_{int}$ beschrieben, welches nur von $\phi_1^2 + \phi_2^2$ abhängt.

(i) Zeige, dass der Lagrangian mit Hilfe eines komplexen Feldes ϕ

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1(x) + i\phi_2(x)\right)$$

sowie des komplex konjugierten Feldes $\phi^\star$ geschrieben werden kann.

(ii) Leite die Bewegungsgleichungen für ϕ und $\phi^\star$ her unter der Annahme, dass ϕ und $\phi^\star$ unabhängige Felder sind. Sind die Bewegungsgleichungen konsistent mit denen für ϕ_1 und ϕ_2?

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Betrachten wir eine skalare Feldtheorie die invariant unter Translationen $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu - a^\mu$ ist. Die zugehörige erhaltene Noether Ladung ist duch

$$P_\nu = \int d^3\vec{y}\ \theta^0{}_\nu = \int d^3\vec{y} \left(-\Pi(t,\vec{y})\partial_\nu\phi(t,\vec{y}) + \mathcal{L}\delta^0_\nu\right)$$

gegeben. Zeige explizit unter Verwendung von Poisson Klammern, dass die Feldtransformation $\delta\phi(t,\vec{x})$ durch

$$\delta\phi(t,\vec{x}) = a^\mu \left\{\phi(t,\vec{x}), P_\mu\right\}_{P.B.}\ .$$

rekonstruiert werden kann. In anderen Worten: Die Noether Ladung P_μ erzeugt Raumzeit Translationen.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Die Lagrangedichte für Elektrodynamik ist durch $\mathcal{L} = -1/4 F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ gegeben. Zeige, dass der Energie Impuls Tensor $\theta^\mu{}_\nu$, der durch

$$\theta^\mu{}_\nu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\,\partial_\nu A_\rho + \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu$$

definiert ist, zwar erhalten aber nicht symmetrisch in den beiden Indizes ist. Zeigen Sie, dass man (wie in der Vorlesung besprochen) durch Addition von $\partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu}$ (mit einem geeigneten $f^{\lambda\mu\nu}$) zum Energie Impuls Tensor $\theta^{\mu\nu}$ den sogenannten kanonischen Energie Impuls Tensor

$$T^{\mu\nu} = F^\nu{}_\rho F^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

erhält. Zeigen Sie, dass der kanonische Energie Impuls Tensor erhalten und symmetrisch in μ und ν ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 7 **(3 Punkte)**

Betrachten Sie die klassische Feldtheorie dreier reeller Felder $\phi^i(x)$ wobei $i \in \{1,2,3\}$, die durch folgende Wirkung beschrieben wird

$$S[\phi^i] = \int d^4x \mathcal{L}[\phi^i, \partial_\mu \phi^i] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu \phi^i(x) \partial_\nu \phi^i(x) - V(\phi^i \phi^i) \right) , \tag{1}$$

wobei V ein beliebiges Polynom in $\phi^i \phi^i$ ist. In den obigen Ausdrücken wird bei doppelt auftretenden gleichen Indices automatisch die Einsteinsche Summenkonvention benutzt, d.h. insbesondere $\phi^i(x)\phi^i(x) = (\phi^1(x))^2 + (\phi^2(x))^2 + (\phi^3(x))^2$.

(i) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $\phi^i(x)$ auf.

(ii) Zeigen Sie, dass die Wirkung (1) invariant unter der infinitesimalen Transformation

$$\delta_a \phi^i(x) = \epsilon^{ijk} a^j \phi^k(x) \tag{2}$$

ist, wobei a^i ein infinitesimaler Parameter aund ϵ^{ijk} der total antisymmetrische Tensor ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die drei zugehörigen Noether-Ströme J^i ($i \in \{1,2,3\}$) mit Komponenten $J^{\mu i}$ durch

$$J^{\mu i} = \epsilon^{ijk}\, \Pi^{\mu j}\, \phi^k \,, \qquad \Pi^{\mu j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^j)} \tag{3}$$

gegeben sind und verifizieren Sie, dass diese Ströme erhalten sind sofern man die Bewegungsgleichungen verwendet.