1. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenfeldtheorie

Abgabe am 18. April in der Vorlesung

Aufgabe 1: Compton Wellenlänge (2 Punkte)

Bestimme die Compton Wellenlänge des Elektrons ($m_e = 0.5$ MeV) und des up oder down Quarks ($m_q \approx 10$ MeV)!

Vergleichen Sie diese beiden Compton Wellenlängen mit der typischen Größe des Wasserstoffatoms bzw. des Protons. Was ist ihre Schlussfolgerung bezgl. einer quantenfeldtheoretischen Beschreibung des Wasserstoffatoms bzw. des Protons?

Aufgabe 2: Sattelpunktsnäherung (4 Punkte)

Betrachten Sie ein freies, relativistisches Teilchen der Masse m, welches vom Ort $\vec{y}$ zum Ort $\vec{x}$ in der Zeit t propagiert.

(i) Zeigen Sie, dass die Amplitude $U(t)$, gegeben durch

$$U(t) = \langle \vec{x}| e^{-iHt/\hbar} |\vec{y}\rangle \qquad \text{with} \quad H = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}\,,$$

wie folgt umgeschrieben werden kann

$$U(t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} e^{-it\sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}/\hbar} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})/\hbar}\,.$$

(ii) Benutzen Sie Kugelkoordinaten, um das Integral auf die folgende Form zu bringen

$$U(t) = \frac{1}{2\pi^2\hbar^2|\vec{x}-\vec{y}|}\int_0^\infty dp\; p\;\sin(p|\vec{x}-\vec{y}|/\hbar)\; e^{-it\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}/\hbar}$$

Tipp: $d^3\vec{p} = p^2\,dp\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ wobei $p = |\vec{p}|$ und $\theta \in [0,\pi[, \phi \in [0, 2\pi[$. Es kann angenommen werden, dass der Winkel θ durch die Vektoren $\vec{p}$ and $\vec{x}-\vec{y}$ bestimmt ist und somit sich das Skalarprodukt zu $\vec{p}(\vec{x}-\vec{y}) = p|\vec{x}-\vec{y}|\cos\theta$ vereinfacht.

(iii) Benutzen Sie die Sattelpunktsnäherung, um das Integral für $|\vec{x}-\vec{y}| \gg ct$ auszurechnen,

$$U(t) \approx A(|\vec{x}-\vec{y}|, t)\; e^{-\frac{mc}{\hbar}\sqrt{|\vec{x}-\vec{y}|^2 - c^2t^2}}\,.$$

Mit der Sattelpunktsnäherung (auch unter steepest descendt oder stationary phase method bekannt) kann man Integrale der Form $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{i\phi(x)}$ approximieren, wobei f eine nicht-zu-stark variierende Funktion ist. ϕ ist eine Funktion deren erste Ableitung bei $x = x_0$ verschwindet, d.h. $\phi'(x_0) = 0$. Entwickelt man ϕ um $x = x_0$,

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{1}{2}\phi''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots.$$

so erhält man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{i\phi(x)} \approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x_0)\, e^{i\phi(x_0)} e^{\frac{i}{2}\phi''(x_0)(x-x_0)^2} = f(x_0)e^{i\phi(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi i}{\phi''(x_0)}}\,,$$

wobei im letzten Schritt das Gaußsche Integral explizit ausgeführt wurde. Für die Lösung der Übungsaufgabe ist es nicht notwendig $\phi''(x_0)$ zu bestimmen, da dies nur zur Funktion A beiträgt, die nicht explizit bestimmt werden muss.

Aufgabe 3: Schwingende Saite **(5 Punkte)**

Wie in der Vorlesung betrachten wir N Massenpunkte der Masse m, die durch identische Federn (Federspannung S) so verbunden sind, dass sich die Massenpunkte an den äquidistanten Punkten $x_k = k \cdot a$ befinden (wobei $k = 1, \ldots, N$) wenn alle Federn entspannt sind. Die Massenpunkte können jedoch diesmal nur transversal ausgelenkt werden (vgl. in der Vorlesung wurden die Massenpunkte longitudinal ausgelenkt). Die Auslenkungen aus der Ruhelage werden mit $q_k(t)$ bezeichnet für den kten Massenpunkt. Wir nehmen an, dass die Enden der schwingenden Saite nicht ausgelenkt werden können, d.h. $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$.

(i) Stellen Sie die kinetische und potentielle Energie der N Massenpunkte auf. Im Fall der kinetischen Energie können Sie die zusätzliche Annahme machen, dass die Differenzen der Auslenkungen klein gegenüber des Abstands a sind.

(ii) Führen Sie den Kontinuumslimes aus, d.h. $N \to \infty$, ohne dass sich die physikalischen Eigenschaften der schwingenden Saite veräendern. Wie lautet die Lagrangefunktion?

(iii) Variieren Sie nun die zugehörige Wirkung und berechnen Sie damit die Bewegungsgleichungen. Wie lauten die Randbedingungen?

Aufgabe 4: Hamiltonsche Bewegungsgleichungen **(4 Punkte)**

Wie in der Vorlesung werde mit $\mathcal{H}$ die Hamilton-Dichte und mit H die Hamilton Funktion bezeichnet, d.h.

$$H = \int d^{d-1}\vec{x}\; \mathcal{H} \,.$$

In der Vorlesung wurden bereits die folgenden Hamiltonschen Bewegungsgleichungen hergeleitet

$$\dot{\phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} \,, \qquad \dot{\pi}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_a} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \phi_a)} \right) .$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichungen auch wie folgt geschrieben werden können

$$\dot{\phi}_a(t, \vec{x}) = \frac{\delta H}{\delta \pi_a(t, \vec{x})} \,, \qquad \dot{\pi}_a(t, \vec{x}) = -\frac{\delta H}{\delta \phi_a(t, \vec{x})} \,.$$