

# **Vorlesungsskript zur Elektrodynamik**

Martin Ammon

Friedrich-Schiller Universität Jena

Wintersemester 2016/17



# Vorwort

Dieses Skript basiert auf Vorlesungen, die ich im Wintersemester 2016/17 an der Friedrich-Schiller Universität in Jena für Bachelor Studierende im 3. Fachsemester gehalten habe. Dabei wurde das in den Vorlesungen *Mathematische Methoden* und *Theoretische Mechanik* vermittelte Wissen vorausgesetzt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>7</b>
1.1	Stellenwert der Elektrodynamik in der Physik . . . . .	7
1.2	Historische Einordnung . . . . .	8
1.3	Maxwell-Gleichungen . . . . .	9
1.4	Struktur der Vorlesung . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>13</b>
2.1	Vom Coulombgesetz zur elektrischen Feldstärke . . . . .	13
2.2	Das Skalare Potential & Feldgleichungen . . . . .	21
2.3	Elektrostatische Feldenergie . . . . .	28
2.4	Das Randwertproblem der Elektrostatik . . . . .	30
2.4.1	Eine naive Klassifizierung: Leiter und Isolatoren . . . . .	30
2.4.2	Verhalten des elektrischen Feldes an Grenzflächen . . . . .	32
2.4.3	Formulierung des Randwertproblems . . . . .	34
2.4.4	Methode der Spiegelladungen . . . . .	36
2.4.5	Methode der Greenschen Funktionen . . . . .	40
2.4.6	Anwendung: Kapazitäten . . . . .	43
2.5	Multipolentwicklung . . . . .	43



# 1 Einführung

Der Gegenstand dieser Vorlesung ist die klassische Elektrodynamik ist, ein Teilgebiet der Physik, das sich mit bewegten elektrischen Ladungen und mit zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern beschäftigt.

## 1.1 Stellenwert der Elektrodynamik in der Physik

Die Elektrodynamik hat – zu Recht – einen besonders hohen Stellenwert in der theoretischen Physik und somit auch in der universitären Ausbildung der Physiker. Nach heutigem Wissen beschreibt die Elektrodynamik eine der vier fundamentalen Naturkräfte bzw. Wechselwirkungen. Im einzelnen sind dies

- die Gravitationskraft,
- die elektromagnetische Kraft,
- die starke Kernkraft und
- die schwache Kernkraft.

Die starke und die schwache Kernkraft haben nur eine sehr geringe Reichweite auf der Größenskala der Elementarteilchenphysik und können daher nicht klassisch (sondern nur im Rahmen von Quantenfeldtheorien) beschrieben werden. Aus diesem Grund spielen diese beiden Naturkräfte auch keine Rolle in der Physik des Alltags.

Sowohl die Gravitationskraft als auch die elektromagnetische Kraft sind langreichweitig. Die Gravitationskraft kann im Rahmen einer klassischen Feldtheorie beschrieben werden und wird umfassend in Vorlesungen zur *Allgemeinen Relativitätstheorie* behandelt. Die Elektromagnetische Kraft wird durch die von James Clerk Maxwell postulierten Maxwell-Gleichungen beschrieben. Das zentrale Anliegen dieser Vorlesung ist es, die Maxwell-Gleichungen aufzustellen und für interessante Spezialfälle zu lösen.

Die obige Liste der fundamentalen Naturkräfte erscheint zuerst sehr kurz, und auch etwas willkürlich. So vermisst man die im Alltag wichtigen Reibungskräfte und auch diverse Arten von chemischen Kräfte, die beispielsweise verantwortlich für Bindungskräfte in Molekülen sind. In der Tat lassen sich alle diese Kräfte auf

die elektromagnetischen Kräfte zurückführen, was wiederum den Stellenwert dieser fundamentalen Naturkraft untermauert.

Neben Ihrer alltäglich Relevanz spielte die Elektrodynamik auch eine wichtige Rolle in der Entwicklung der theoretischen Physik. So wurde bereits Ende des 19. Jahrhunderts gezeigt, dass die Lorentz-Transformationen, benannt nach Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928), Symmetrien der Maxwell-Gleichungen sind. Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie postulierte Albert Einstein im Jahr 1905, dass auch Raum und Zeit unter Lorentz-Transformationen unterworfen sind, was unsere Vorstellung von Raum und Zeit grundsätzlich geändert hat.

Zudem ist die Elektrodynamik Vorbild für die Theorie der schwachen Wechselwirkung und für die Theorie der starken Wechselwirkung. Die hierfür wichtigen strukturellen Konzepte werden ebenfalls in dieser Vorlesung dargelegt. Insbesondere ist es bereits im Rahmen der Elektrodynamik gelungen, die elektrischen und magnetischen Kräfte in einer einzigen Theorie zu vereinigen und gleichzeitig aufzuzeigen, dass Optik nur ein Spezialfall der Elektrodynamik ist. Damit waren um 1890 die drei wichtigen Fachrichtungen der Physik, Optik, Magnetismus und Elektrizität mit einer Theorie beschreibbar.

Eine solche Vereinheitlichung aller oben aufgeführten vier fundamentalen Naturkräfte ist das Ziel der modernen theoretischen Physik. Im Rahmen der elektroschwachen Theorie ist es bereits um 1960 Glashow, Salam und Weinberg gelungen, die elektromagnetische Kraft und die schwache Kernkraft in einer Theorie zu formulieren. Ebenfalls gibt es im Rahmen von Großen Vereinheitlichungstheorien (engl. *grand unified theories*, kurz GUT) erste Erfolge auch die starke Kernkraft mit einzubeziehen. Wiederum hat hier die Struktur der Elektrodynamik eine sehr wichtige Rolle gespielt. Leider ist es noch nicht gelungen, Gravitation zu quantisieren und mit den anderen fundamentalen Naturkräften zu vereinheitlichen, wobei es beispielsweise im Rahmen von Stringtheorie erfolgversprechende Ansätze gibt.

## 1.2 Historische Einordnung

Bis Anfang des 19. Jahrhunderts gab es zahlreiche quantitative Beschreibungen der elektrischen und magnetischen Phänomene, die in den Disziplinen *Elektrizität* und *Magnetismus* getrennt untersucht wurden.

Der dänischen Physikers Hans Christian Oersted (1777 - 1851) entdeckte 1820 dass elektrische Ströme magnetische Kompassnadeln beeinflussen können. Schon kurz darauf postulierte Ampere, dass alle magnetischen Phänomene sich auf bewegte elektrische Ladungen zurückführen lassen. Der umgekehrte Schluss, dass auch veränderliche Magnetfelder elektrische Ströme verursachen, gelang dem Michael



Faraday (1791 - 1867) im Jahr 1831.

Noch 1850 konnten Laien die bahnbrechenden Erkenntnisse im Rahmen der Elektrodynamik nicht abschätzen. So wird überliefert, dass beispielsweise Michael Faraday vom damals britischen Schatzkanzler gefragt wurde, was der praktische Wert dieser ganzen Forschung sei, worauf Faraday entgegnete: *öne day, Sir, you may tax it*".

Als besonders wichtig für die Entwicklung der Elektrodynamik erwies sich Faraday's Vorstellung von raumfüllenden Kraftfeldern. Diese Vorstellung wurde von James Clerk Maxwell (1831 - 1879) weiterentwickelt, und mündete in die nach ihm benannten Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik, die er im Jahr 1864 publizierte. In diesen Arbeiten studierte Maxwell auch elektromagnetische Wellen, die durch Raum und Zeit propagieren, aber nur mit einer bestimmten Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Dies bestätigt auch frühere Vermutungen von Faraday, dass Licht elektromagnetisch ist. Die bahnbrechenden Versuche von Heinrich Hertz im Jahr 1888 brachten dann die entscheidende Bestätigung der Theorie. Somit waren Optik, Magnetismus und Elektrizität, die drei Hauptbetätigungsfelder der Physik in der damaligen Zeit, in der Elektrodynamik aufgegangen.

## 1.3 Maxwell-Gleichungen

Ausgehend von einer Ladungsverteilung  $\rho(t, \mathbf{x})$  und einer Stromdichte  $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$  kann man mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen das elektrische Feld  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  und das magnetische Feld  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$  berechnen. Die Maxwell-Gleichungen werden im Rahmen der Vorlesung motiviert und noch genauer besprochen. Hier soll nur ein erster Eindruck vermittelt werden, wie diese aussehen. Insbesondere diskutieren wir nur die Maxwell-Gleichungen in differentieller Form. In der in Experimentalphysik geläufigen SI-Einheiten lauten diese

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\
 \operatorname{div} \mathbf{B} &= \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\
 \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\mu_0$  ist die Permeabilitätskonstante des Vakuums, und  $\epsilon_0$  wird als Dielektrizitätskonstante des Vakuums bezeichnet.

In theoretischer Physik wird häufiger ein anderes Einheitensystem verwendet. Die genauen Unterschiede werden in den Kapitel 2,3 und 4 erläutert. In den sogenannten

Gaußschen Einheiten lauten die differentiellen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Man beachte, dass die Maxwell-Gleichungen aus zwei skalaren und zwei vektoriellen Differentialgleichungen, also insgesamt aus 8 Gleichungen, bestehen für insgesamt sechs Komponenten (davon drei für das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und drei für das magnetische Feld  $\mathbf{B}$ ).

Bei Anwesenheit von Materie sind die oben stehenden, sogenannten mikroskopischen Maxwell-Gleichungen einerseits unhandlich, da schließlich jeder Ladungsträger in jedem Atom des Mediums berücksichtigt werden muss. Andererseits können die magnetischen Eigenschaften (beispielsweise von einem Permanentmagneten) prinzipiell nicht ohne zusätzliche physikalische Erkenntnisse der Quantenmechanik aus den mikroskopischen Maxwell-Gleichungen abgeleitet werden.

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen berücksichtigen die Eigenschaften der Materie in Form von Materialparametern. Genauer gesagt kommt die Bezeichnung „makroskopisch“ dadurch zustande, dass die Eigenschaften der Materie letztlich örtlich gemittelte Eigenschaften der Materie kennzeichnen. Im Hinblick auf die Ladungen wird dabei zwischen freien Ladungsträgern (etwa Leitungselektronen im elektrischen Leiter) und gebundenen Ladungsträgern (etwa Elektronen in den Atomhüllen) unterschieden, und es wird davon ausgegangen, dass die gebundenen Ladungsträger durch mikroskopische Prozesse zu einer makroskopischen Polarisation  $\mathbf{P}$  bzw. Magnetisierung  $\mathbf{M}$  führen.

Wenn von Maxwell-Gleichungen im Folgenden die Rede ist, so sind damit die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen (bevorzugt im Gaußschen System) gemeint.

## 1.4 Struktur der Vorlesung

Im folgenden soll die Struktur der Vorlesung kurz vorgestellt skizziert werden:

Im Kapitel 2 wird die *Elektrostatik* behandelt, ein Spezialfall der Elektrodynamik, der sich mit ruhenden elektrischen Ladungen und ihren elektrischen Feldern beschäftigt. Insbesondere werden in diesem Kapitel Lösungsmethoden vorgestellt, wie man ausgehend von einer zeitlich konstanten elektrischen Ladungsverteilung  $\rho$  das elektrische Potential  $\phi$  bzw. das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  berechnet.

Kapitel 3 der Vorlesung handelt von der *Magnetostatik*. Magnetostatik ist ebenfalls ein Spezialfall der Elektrodynamik, in der beispielsweise die räumliche Verteilung von Magnetfeldern in der Umgebung von Dauermagneten und von stationären Strömen untersucht wird.

In Kapitel 4 werden ausgehend von den Resultaten der Kapitel 2 und 4 die *Maxwell-Gleichungen* motiviert. Im Anschluss wird in Kapitel 5 die *relativistische Formulierung der Elektrodynamik* vorgestellt. Insbesondere werden die oben angesprochenen Lorentz-Transformationen hergeleitet.

Kapitel 6 beschäftigt sich mit *Elektrodynamik in Materie*. Wie bereits oben ausgeführt ist es nicht zweckmässig die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen zu verwenden, sondern statt dessen Maxwell-Gleichungen mit örtlich gemittelte Eigenschaften der Materie, die sogenannten makroskopischen Maxwell-Gleichungen.

In Kapitel 7 werden dann die *elektromagnetischen Wellen und ihre Abstrahlung* diskutiert. Kapitel 8 widmet sich der *Dynamik relativistischer Teilchen und Felder*.



## 2 Elektrostatik

In diesem Kapitel wird die Elektrostatik behandelt, ein Spezialfall der Elektrodynamik, der sich mit ruhenden elektrischen Ladungen und ihren elektrischen Feldern beschäftigt. Zuerst werden wir die Maxwell-Gleichungen für das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  in diesem Spezialfall herleiten. Anschließend werden in diesem Kapitel Lösungsmethoden vorgestellt, wie man ausgehend von einer zeitlich konstanten elektrischen Ladungsverteilung  $\rho$  das elektrische Potential  $\phi$  bzw. das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  berechnet.

### 2.1 Vom Coulombgesetz zur elektrischen Feldstärke

#### Eigenschaften der elektrischen Ladung

Die Elektromagnetismus handelt von der Dynamik elektrischer Ladungen. Bevor wir daher die Maxwell-Gleichungen motivieren, sollten wir uns Gedanken über Eigenschaften der elektrischen Ladung machen. Diese Eigenschaften basieren auf zahlreichen Experimenten, die im folgenden nicht diskutiert werden sollen. Die Haupteigenschaften der Ladung sind:

- *Es gibt nur eine Ladungsart.* Diese Ladungsart kann positiv oder negativ sein, je nachdem ob Mangel oder Überschuss dieser Ladung vorhanden ist.
- *Ladung ist erhalten.* Die Ladung in einem abgeschlossenen System kann insbesondere nicht erzeugt oder vernichtet werden. So kann zwar ein positiv geladenes Teilchen (beispielsweise das Positron, das Anti-Teilchen des Elektrons) ein Elektron vernichten und es entsteht ein ungeladenes Photon. Die Gesamtladung dieses Prozesses ist aber erhalten: vor der Annihilation war eine positive und eine negative Ladung vorhanden, insgesamt also verschwand die Gesamtladung. Nach der Annihilation war nur das ungeladene Photon vorhanden.
- *Ladung ist quantisiert.* Freie elektrische Ladungen kommen nur als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung  $e$  vor. Das Elektron hat als Ladung  $-e$ , während das Positron und das Proton die Gesamtladung  $+e$  haben. Das Neutron ist ungeladen. Der Atomkern besteht aus Protonen und Neutronen und somit ist die Ladung des Atomkerns ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung. Man beachte, dass nach heutigem Kenntnisstand Protonen und Neu-

tronen wiederum aus Quarks aufgebaut sind, die Elementarladung  $+2/3e$  oder  $-1/3e$  tragen. Diese Quarks kommen unter alltäglichen Bedingungen nicht als freie Teilchen vor, sondern sind in Hadronen (Protonen, Neutronen,...) gebunden, die wiederum nur ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung tragen. Würde man Quarks unter diesen Bedingungen als freie Teilchen beobachten, so würde sich jedoch nichts an der Gültigkeit der Aussage ändern. Da die Elementarladung klein ist, kann die Quantisierung der Ladung in der makroskopischen Physik in der meistens Ladungen  $q \gg e$  betrachtet werden, vernachlässigt werden.

### Das Coulomb-Gesetz

Wir betrachten nun zwei ruhende geladene Massenpunkte im Vakuum an den Orten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  mit den Ladungen  $q_1$  und  $q_2$ . Experimentell wurde nachgewiesen, dass beide Massenpunkte aufeinander eine Kraft ausüben. So wirkt der Massenpunkt 2 auf den Massenpunkt 1 mit einer Kraft  $\mathbf{F}_{12}$ , während der Massenpunkt 1 auf den Massenpunkt 2 eine Kraft  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  (*actio = reactio*) ausübt. Insbesondere wissen wir aus Experimenten:

- Für  $q_1 q_2 < 0$  ist die Kraft anziehend, während für  $q_1 q_2 > 0$  die Kraft abstoßend ist.
- Der Betrag der Kraft,  $F_{12}$  ist invers proportional zum Quadrat des Abstands der Massenpunkte, d.h. zu  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$ . Dieses Abstandsverhalten der Kraft ist experimentell über viele Größenordnungen<sup>1</sup> nachgewiesen, insbesondere auch für sehr kleine Abstände im Rahmen von Streuexperimenten.
- Die Kraft wirkt entlang der Verbindungslinie von  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  und ist somit eine Zentralkraft.

Ausgehend von diesen experimentellen Befunden ergibt sich für die Kraft  $\mathbf{F}_{12}$

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (2.1)$$

Diese Gesetzmäßigkeit (2.1) wird nach Ihrem Entdecker auch Coulomb-Gesetz genannt, während die dazugehörige Kraft als Coulomb-Kraft bekannt ist.

In (2.1) wurde eine Proportionalitätskonstante  $k$  eingeführt, die von den verwendeten Einheiten für die Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  abhängt. Insbesondere sind die beiden Einheitensysteme gebräuchlich:

---

<sup>1</sup>Kommt man einer Punktladung näher als die Comptonwellenlänge, so hängt die Ladung des Punktteilchens tatsächlich vom Abstand ab. Dies ist ein quantenmechanischer Effekt, auf den hier nicht näher eingegangen werden kann.

- *SI-Einheitensystem (oder auch MKSA-Einheitensystem):*

Neben den bekannten Einheiten Meter m, Kilogramm kg und Sekunde s verwendet das SI-Einheitensystem auch die Einheit Ampere, abgekürzt A, als vierte Grundeinheit gewählt. Aus diesen Grundeinheiten werden die Einheiten Newton, mit N abgekürzt, Joule, J, und Coulomb, C, wie folgt abgeleitet:

$$N = \text{kg m/s}^2, \quad J = \text{N m}, \quad C = \text{As}. \quad (2.2)$$

In diesem Einheitensystem ergibt sich die Konstante  $k$  in (2.1) zu

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.3)$$

wobei  $\epsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist,

$$\epsilon_0 = 8.854187 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}. \quad (2.4)$$

Die Elementarladung  $e$  ergibt sich zu

$$e = 1.6021766208(98) \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad (2.5)$$

wobei die eingeklammerten Ziffern die Unsicherheit in den letzten Stellen des Wertes bezeichnet (geschätzte Standardabweichung).

- *Gaußsche Einheiten:*

Für die Elektrodynamik, insbesondere für deren relativistische Formulierung, erweist sich das Gaußsche Einheitensystem als wichtig, da elektrische und magnetische Felder in der gleichen Einheit gemessen werden. In diesem Einheitensystem werden die Grundeinheiten Zentimeter cm, Gramm g und Sekunde s verwendet. Abgeleitet von diesen drei Grundgrößen wird die Einheit dyn für die Kraft<sup>2</sup> und erg für die Energie bzw. Arbeit

$$\text{dyn} = \text{g cm/s}^2 = 10^{-5} \text{ N} \quad \text{erg} = \text{dyn cm} = 10^{-7} \text{ J} \quad (2.6)$$

eingeführt. Ausgehend von diesem *cgs* Einheitensystem, wird die Ladung so definiert, dass die Proportionalitätskonstante  $k$  den Wert  $k = 1$  annimmt. Insbesondere wählt man daher die Ladungseinheit so, dass sich zwei gleich geladene Punktteilchen im Abstand von 1 cm mit der Kraft 1 dyn abstoßen. Diese Ladungseinheit wird im Englischen als *electrostatic unit* bezeichnet und daher mit esu abgekürzt:

$$1 \text{ dyn} = \frac{(1 \text{ esu})^2}{\text{cm}^2} \quad 1 \text{ esu} = \frac{\text{cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2}}{\text{s}}. \quad (2.7)$$

---

<sup>2</sup>Das Dyn wurde als Kräfteinheit 1873 vereinbart und war die erste international verbindliche Einheit der Kraft überhaupt.

Das Coulomb-Gesetz in Gaußschen Einheiten ist somit gegeben durch

$$\mathbf{F}_{12} = q_1 q_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (2.8)$$

Vergleicht man das Coulomb-Gesetz in Gaußschen Einheiten mit dem in SI Einheiten, so erhält man die folgende Umrechnungsformel

$$1 \text{ C} = 2.9979 \cdot 10^9 \text{ esu} \quad (2.9)$$

bzw. für die Elementarladung

$$e = 4.8032 \cdot 10^{-10} \text{ esu}. \quad (2.10)$$

Im folgenden werden wir immer das Gaußsche Einheitensystem benutzen. In Kapitel 4 werden nochmals alle Einheitensysteme, und insbesondere die Maxwell-Gleichungen in diesen Einheitensystemen diskutiert.

Die Coulomb-Kraft ist eine Zweikörperkraft, für die das Superpositionsprinzip gilt. Insbesondere gilt in Anwesenheit von  $N - 1$  weiteren Ladungen  $q_i$  (mit  $i = 2, \dots, N$ ), dass auf die Ladung  $q_1$  die Kraft

$$\mathbf{F} = \sum_{i=2}^N \mathbf{F}_{1i} = q_1 \sum_{i=2}^N q_i \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.11)$$

ausgeübt wird.

## Die elektrische Feldstärke

Das Coulomb-Gesetz (2.11) kann wie folgt gedeutet werden: Die  $N - 1$  Punktladungen  $q_i$  wirken direkt auf die Punktladung  $q_1$  ohne Mitwirkung des dazwischenliegenden Raumes. Es liegt scheinbar eine nicht-lokale Wechselwirkung vor. Eine Wechselwirkung heißt lokal, wenn sie in jedem Raum-Punkt  $\mathbf{r}$  unabhängig von allen anderen Punkten  $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$  eingeführt werden kann. Des Weiteren ist die Ausbreitung der Wirkung instantan.

Das Konzept der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$ , das wir im Folgenden einführen, erlaubt jedoch eine andere Deutung. Um die elektrische Feldstärke zu definieren, führen wir formal eine Testladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r}$  ein. Die Testladung soll (infinitesimal) klein im Vergleich zu den anderen Ladungen  $q_i$  an den Orten  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sein.

Zuerst betrachten wir den Fall nur einer Ladung  $q_1$  am Ort  $\mathbf{r}_1$ , die auf die Testladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r}$  die Kraft

$$\mathbf{F} = q q_1 \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (2.12)$$



ausübt. Wir definieren nun die elektrische Feldstärke (kurz: elektrische Feld)  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{q} \mathbf{F} \quad (2.13)$$

Benutzt man (2.12) so erhält man für die elektrische Feldstärke in diesem Fall

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q_1 \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (2.14)$$

Man beachte, dass das elektrische Feld formal im ganzen Raum definiert ist. Für  $q_1 > 0$  ist das elektrische Feld um den Punkt  $\mathbf{r}_1$  radial nach außen gerichtet, während es für  $q_1 < 0$  nach innen gerichtet ist.

Mit Hilfe des elektrischen Feldes erhält man nun die folgende Deutung Das geladene Teilchen 1 verändert den Zustand des leeren Raums in seiner Umgebung durch Aufbau des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  der Form (2.14). Das elektrische Feld übt auf Teilchen mit Ladung  $q$  am Ort  $\mathbf{r}$  eine Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

aus. Durch die Einführung des elektrischen Feldes ist die Wechselwirkung lokal, da in (2.15) nur der Raum-Punkt  $\mathbf{r}$  auftritt.

Die Einheit der elektrischen Feldstärke in Gaußschen Einheitensystem wird definiert als Gauß. Somit gilt

$$[\mathbf{E}] = \frac{\text{dyn}}{\text{esu}} = \frac{\text{g}^{1/2}}{\text{s cm}^{1/2}} \equiv \text{Gauß}. \quad (2.16)$$

Die obige Argumentation lässt sich schnell auf  $N$  Ladungen  $q_i$  am Ort  $\mathbf{r}_i$  verallgemeinern. Da die Coulomb-Kraft dem Superpositionsprinzip genügt, gilt dies auch für das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (2.17)$$

Das elektrische Feld bzw. deren Feldstärke scheinen hier zuerst nur Hilfsgrößen zu sein, damit die Wechselwirkung lokal ist. Im Rahmen der Elektrodynamik führen die elektrischen Felder jedoch ein Eigenleben, losgelöst von den Ladungsträgern. Beispielsweise wird dies offensichtlich, wenn wir in Kapitel 7 die elektromagnetische Strahlung diskutieren.

In vielen konkreten Rechnungen erweist es sich jedoch nicht als zweckmässig, das elektrische Feld diskreter Ladungen  $q_i$  an Punkten  $\mathbf{r}_i$  aufzusummieren wie in (2.17). Wir betrachten hierzu an jedem Raumpunkt  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt  $t$  ein infinitesimales Volumen  $\delta V$  und bezeichnen die in  $\Delta V$  eingeschlossene Ladung mit  $\Delta q(\mathbf{r}, t)$ . Gilt

nun  $\Delta q(\mathbf{r}, t) \gg e$  für alle Raumpunkte, so spricht man von einer *kontinuierlichen Ladungsverteilung*, gegeben durch den Grenzprozeß

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\mathbf{r}, t)}{\Delta V}. \quad (2.18)$$

In der Elektrostatik gehen wir von ruhenden Ladungen aus und somit sind  $\Delta q(\mathbf{r}, t)$  und die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}, t)$  nicht zeitabhängig. Wir schreiben daher kurz  $\rho(\mathbf{r})$ .

Im Fall einer kontinuierlichen Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  setzt man an Stelle der Punktladung  $q_i$  in Gleichung (2.17) die Ladung  $\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$  ein und ersetzt die Summe durch ein Integral. Somit erhält man<sup>3</sup>

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.19)$$

Um nun wieder aus diesem allgemeinen Ausdruck (2.19) für die elektrische Feldstärke den Spezialfall (2.17) zu erhalten, benötigen wir *Delta-Funktionen*, oder genauer sogenannte *Delta-Distributionen*.

### Mathematischer Einschub: Delta-Distribution

Wir behandeln zuerst den Fall einer ein-dimensionalen Delta-Distribution, die die folgende definierende Eigenschaft erfüllt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - a) f(x) = f(a),$$

wobei  $f$  beispielsweise eine unendlich oft differenzierbare Funktion sei. Mit anderen Worten: Die Delta-Distribution wertet den Integrand, also  $f(x)$  an der Stelle  $x = a$  aus.<sup>4</sup> Tatsächlich folgt aus der definierenden Eigenschaft sofort, dass

- Die delta-Distribution ist immer positiv, d.h.  $\delta(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,
- Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - a) = 1, \quad (2.20)$$

---

<sup>3</sup>Sollte im Folgenden das Volumen des Volumenintegrals nicht näher spezifiziert sein, so bedeutet dies, dass über den ganzen Raum  $\mathbb{R}^3$  zu integrieren ist.

<sup>4</sup>Tatsächlich ist diese Schreibweise nicht vollkommen richtig und nur symbolisch zu verstehen. Die Delta-Distribution ist eine sogenannte irreguläre Distribution, das heißt, sie lässt sich nicht durch eine lokal integrierbare Funktion in obiger Weise darstellen. Insbesondere kann es sich bei der oben verwendeten Integralschreibweise nicht um ein Riemann- oder Lebesgue Integral handeln.

sowie

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \delta(x - a) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \notin [x_0, x_1] \\ f(a) & \text{falls } a \in (x_0, x_1) \end{cases}. \quad (2.21)$$

Diese drei Eigenschaften legen nahe, dass man sich  $\delta(x - a)$  anschaulich als eine beliebig hohe und beliebig schmale Funktion vor, die symmetrisch bezgl  $x = a$  ist und mit der x-Achse eine Fläche mit Flächeninhalt 1 einschließt. Man löst nun in Gedanken die Funktion immer schmaler und dafür immer höher werden – die Fläche darunter muss konstant 1 bleiben. Tatsächlich kann man diese anschauliche Vorstellung auch durch das Konzept einer Dirac-Folge  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  unterlegen mit den folgenden definierenden Eigenschaften

(i) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\delta_k(x) \geq 0$ ,

(ii) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_k(x) = 1, \quad (2.22)$$

(iii) Für alle  $\epsilon > 0$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\epsilon, \epsilon]} dx \delta_k(x) = 0. \quad (2.23)$$

Diese Dirac-Folge konvergiert nun gegen den Wert der Dirac-Distribution *im folgenden Sinne*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_k(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x), \quad (2.24)$$

wobei es im linken Ausdruck auf die Reihenfolge des Integrals und des Limes ankommt: das Integral muss zuerst ausgeführt werden und dann der Limes, denn andernfalls erhält man immer 0.

Statt  $\delta_k$  mit  $k \rightarrow \infty$  wird meistens die Notation  $\delta_\epsilon$  mit  $\epsilon \rightarrow 0$  verwendet, wobei dieses  $\epsilon$  nicht mit dem aus Bedingung (iii) verwechselt werden sollte. Zwei häufig verwendete Dirac-Folgen lauten

- Glockenkurve

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\epsilon}\right), \quad (2.25)$$

- Lorentzkurve

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad (2.26)$$

wobei in beiden Fällen der Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  zu nehmen ist.

Ableitungen der Delta-Distribution sind erlaubt, wobei Randterme nicht beachtet werden. Insbesondere gilt für eine einfach differenzierbare Funktion  $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x-a) f(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-a) f'(x) = -f'(a).$$

Des Weiteren gilt für eine reelle Zahl  $c$

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x).$$

Verwendet man hingegen eine Funktion  $f(x)$  mit ausschliesslich einfachen Nullstellen bei  $x = x_i$ , so lässt sich mittels Taylor-Entwicklung um die Nullstellen der folgende Zusammenhang aufzeigen

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i).$$

Man beachte, dass der Ausdruck  $\delta(f(x))$  für eine Funktion mit doppelter Nullstelle (oder noch höherer Ordnung) mathematisch nicht definiert ist. Insbesondere macht  $\delta(x^2)$  keinen Sinn!

Die oben genannte Definition der Delta-Distribution sowie deren Eigenschaften lässt sich auch auf den Fall mehrerer Variablen übertragen. Betrachtet man einen Vektor  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , so verstehen wir unter der drei-dimensionalen Delta-Distribution  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  formal den folgenden Ausdruck

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z').$$

Insbesondere kann man dann durch hintereinander Ausführen der drei Integrationen des Volumenintegrals zeigen, dass

$$\int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = f(\mathbf{r}') \quad (2.27)$$

Um nachzuweisen, dass es sich bei einer Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  um die Distribution  $f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  handelt, genügt es zu zeigen, dass für jedes Volumen  $V$  folgende Identität gilt:

$$\int_V d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{r}_0 \notin V \\ 1 & \text{falls } \mathbf{r}_0 \in V \end{cases} \quad (2.28)$$

### **zurück zur unserer eigentlichen Frage:**

Verwendet man den allgemeinen Ausdruck (2.19) für die elektrische Feldstärke, und wählt die Ladungsverteilung wie folgt

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.29)$$

so erhält man tatsächlich wieder den Spezialfall (2.17) für die elektrische Feldstärke.

## 2.2 Das Skalare Potential & Feldgleichungen

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  kann als (negativer) Gradient einer skalaren Funktion  $\phi(\mathbf{r})$  geschrieben werden,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) \equiv -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}). \quad (2.30)$$

Aus der Identität

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.31)$$

folgt mit (2.19), dass das skalare Potential  $\phi(\mathbf{r})$  durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \quad (2.32)$$

gegeben ist. Man beachte, dass das skalare Potential nicht eindeutig ist, sondern eine Konstante  $C$  enthält. Es ist allgemein üblich, zu fordern, dass das Potential für  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  verschwindet, was bei einer lokalisierten Ladungsverteilung impliziert, dass die Konstante  $C$  verschwindet,

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.33)$$

Da das elektrische Feld als Gradient einer skalaren Funktion geschrieben werden kann, und für allgemeine skalare Funktionen  $f(\mathbf{r})$

$$\text{rot grad}f(\mathbf{r}) = \nabla \times (\nabla_{\mathbf{r}}f(\mathbf{r})) = 0 \quad (2.34)$$

gilt, folgt somit, dass das elektrische Feld wirbelfrei ist,

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.35)$$

Im Folgenden berechnen wir die Divergenz des elektrischen Felds (2.19) mit Hilfe der Identität

$$\text{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.36)$$

die wir im Folgenden noch beweisen werden. Die Gültigkeit der Identität vorausgesetzt, ergibt sich somit für die Divergenz des elektrischen Feldes (2.19) einer kontinuierlichen Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \text{div} \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= 4\pi \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= 4\pi \rho(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

In der zweiten Zeile wurde nur die Identität (2.36) verwendet, während die letzte Zeile direkt aus der Definition der Delta-Funktion folgt. Wir haben nun gezeigt, dass die Quellen des elektrischen Feldes die elektrischen Ladungen, gegeben durch die kontinuierliche Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$ , sind.

Wir wenden uns dem Beweis für Gleichung (2.36) zu, der aus zwei Teilen besteht:

- Für  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  kann man die Divergenz berechnen

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad (2.38)$$

- Da die rechte Seite der zu beweisenden Identität eine Delta-Distribution enthält, ist es äquivalent, beide Seiten über beliebige Volumina  $V \subset \mathbb{R}^3$  zu integrieren und zu zeigen, dass

$$\int_V d^3\mathbf{r} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{r}' \notin V \\ 4\pi & \text{falls } \mathbf{r}' \in V \end{cases} \quad (2.39)$$

Behandeln wir zuerst den Fall, dass  $\mathbf{r}' \in V$ . In diesem Fall verschwindet der Integrand, und der Wert des Integrals ist somit 0. Für den Fall  $\mathbf{r}' \in V$  können wir (ohne den Wert des Integrals zu ändern) das Volumen  $V$  durch eine Kugel um  $\mathbf{r}'$  mit Radius  $R$  ersetzen. Diese Kugel bezeichnen wir im Folgenden mit  $B_R(\mathbf{r}')$ , Ihre Kugeloberfläche<sup>5</sup> mit  $S_R(\mathbf{r}')$ . Unter Verwendung des Satzes von Gauß gilt

$$\int_{B_R(\mathbf{r}')} d^3\mathbf{r} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \oint_{S_R(\mathbf{r}')} d^2\mathbf{A} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.40)$$

wobei  $d^2\mathbf{A}$  ein Vektor ist, der normal auf  $S_R(\mathbf{r}')$  steht und nach außen zeigt. Der Betrag von  $d^2\mathbf{A}$  entspricht dem infinitesimalen Flächeninhalt  $d^2A$ . Somit folgt

$$d^2\mathbf{A} = d^2A \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.41)$$

und das Integral vereinfacht sich zu

$$\oint_{S_R(\mathbf{r}')} d^2\mathbf{A} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \oint_{S_R(\mathbf{r}')} d^2A \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (2.42)$$

Wir berechnen nun das Integral, indem wir zuerst  $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  substituieren, und dann zu Kugelkoordinaten übergehen, wobei die radiale Koordinate  $r$  den festen Wert  $R$  annimmt,  $r = R$ :

$$\oint_{S_R(\mathbf{r}')} d^2A \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta R^2 \cdot \frac{1}{R^2} = 4\pi. \quad (2.43)$$

---

<sup>5</sup>Der Buchstabe B steht für das englische Wort *ball*, während der Buchstabe S für *sphere* steht.

Damit wurde die Behauptung gezeigt.

Diese Argumente, die die Gültigkeit der Gleichung (2.36) zeigen, komplettieren die Herleitung der beiden (differentiellen) Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \rho(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0,$$

die für ruhende Ladungen, d.h. für eine zeitlich unabhängige Ladungsdichte  $\rho$ , gültig sind. In der linken Maxwell-Gleichung geht die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$  ein. Daher wird diese Differentialgleichung als inhomogen bezeichnet, während die rechte Differentialgleichung homogen ist.

Eine analoge Gleichung kann man auch für das skalare Potential  $\phi(\mathbf{r})$  herleiten, welches durch (2.30) definiert ist. Wegen der Identität  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$ , folgt automatisch die zweite Maxwell-Gleichung. Außerdem gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) = \Delta \phi(\mathbf{r}) \tag{2.44}$$

wobei  $\Delta$  der Laplace-Operator ist. In kartesischen Koordinaten, bezeichnet mit  $(x, y, z)$ , des drei-dimensionalen Raumes  $\mathbb{R}^3$  ergibt sich der Laplace-Operator zu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.45}$$

Mit Hilfe der Identität (2.44) erhält man für die erste Maxwell-Gleichung die *Poisson-Gleichung*

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -4\pi \rho(\mathbf{r}). \tag{2.46}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  das skalare Potential  $\phi(\mathbf{r})$  und schließlich das elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  berechnen mit Hilfe von (2.30). Man beachte, dass man im Gegensatz zur Maxwell-Gleichung nur eine skalare Funktion, und nicht ein Vektorfeld mit drei Komponenten zu bestimmen hat.

Im Fall einer verschwindenden Ladungsdichte,  $\rho(\mathbf{r}) = 0$ , reduziert sich die Poisson-Gleichung auf die Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0. \tag{2.47}$$

Gleichungen der Form (2.46) lassen sich mit Hilfe von Greenschen Funktionen  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  lösen, welche per Definition die Gleichung

$$\Delta G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{2.48}$$

erfüllen. Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung ist damit durch

$$\phi(\mathbf{r}) = -4\pi \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \phi_h(\mathbf{r}) \tag{2.49}$$

gegeben, wobei  $\phi_h(\mathbf{r})$  eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist, d.h.  $\Delta \phi_h(\mathbf{r}) = 0$  erfüllt, und daher auch als *harmonische Funktion* bezeichnet wird. Wir werden im Verlauf des Kapitels sehen, dass die Randbedingungen diese harmonische Funktion  $\phi_h(\mathbf{r})$  eindeutig festlegen. Für die Randbedingung, dass die Felder für  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  verschwinden, erhält man  $\phi_h(\mathbf{r}) = 0$ .

Es verbleibt also die Greensche Funktion  $G$  zu bestimmen, die (2.48) erfüllt. Im Allgemeinen ist dies eine schwierige Aufgabe. Hier haben wir aber schon wertvolle Vorarbeit geleistet, zumal wir eigentlich auch schon die Lösung (2.33) kennen.

Um die Greensche Funktion zu finden, starten wir von der Identität (2.31) und verwenden (2.36). Somit folgt

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.50)$$

und daher man die Greensche Funktion

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.51)$$

Diese Greensche Funktion ist jedoch nicht eindeutig. Beispielsweise kann man eine harmonische Funktion addieren. Die allgemeine Greensche Funktion kann daher in der Form

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + G_h(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.52)$$

geschrieben werden, wobei  $G_h$  die Differentialgleichung  $\Delta G_h(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$  erfüllt.

### Integrale Form der Maxwell-gleichungen der Elektrostatik

Mit Hilfe der Sätze von Gauß und Stokes kann man die differentiellen Feldgleichungen auch in integraler Form schreiben. Integriert man die inhomogene Maxwell-Gleichung über ein Volumen  $V$ , so erhält man

$$4\pi Q_V = 4\pi \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.53)$$

wobei  $Q_V$  die im Volumen  $V$  eingeschlossene Ladung ist. Die homogene Maxwell-Gleichung  $\nabla \times \mathbf{E}$  übersetzt sich zu

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.54)$$

wobei  $\mathcal{C}$  eine geschlossene Kurve im Raum ist.



### Feldlinien und Äquipotentialflächen

Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, kann man an Stelle des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  auch das skalare Potential  $\phi(\mathbf{r})$  betrachten. Unter einer Äquipotentialfläche versteht man die Menge aller Punkte  $\mathbf{r}$  mit dem gleichen (vorgegebenen) Wert des Potentials  $\phi(\mathbf{r})$ . Die Normale auf diese Äquipotentialflächen ist durch den Gradienten des skalaren Potentials  $\phi(\mathbf{r})$  gegeben, und zeigt somit in Richtung des elektrischen Felds. Man spricht hiervon dann auch von sogenannten Feldlinien. Diese Feldlinien haben die folgenden Eigenschaften:

- Die Feldlinien dürfen sich nicht miteinander schneiden, da der Normalenvektor (bis auf dessen Betrag und die Richtung) immer eindeutig durch die Äquipotentialfläche festgelegt ist.
- Die Maxwell-Gleichung  $\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$  besagt, dass Feldlinien nicht geschlossen sein müssen in Anwesenheit von Ladungen, sondern auf diesen elektrischen Ladungen enden können. Man vereinbart, dass Feldlinien auf positiven Ladungen (oder im Unendlichen) beginnen und auf negativen Ladungen (oder im Unendlichen) enden.
- Durch die Beziehung  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$  kann man die Feldlinien des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  auf einen Probekörper (mit Ladung  $q$ ) ausgeübte Kraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  veranschaulichen.

Zur Veranschaulichung der Äquipotentialflächen betrachten wir zwei Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  an den Orten  $\mathbf{r}_1$  bzw  $\mathbf{r}_2$ . Im Fall gleich großer aber entgegengesetzter Ladungen  $q_1 = -q_2 = q > 0$  erhält man das folgende Bild für das elektrische Feld und dessen Äquipotentialflächen:

**Aufgabe.** Zeichnen Sie die Feldlinien und Äquipotentialflächen (gestrichelt) für gleich große und gleichnamige Ladungen! Wie unterscheiden sich die Bilder für zwei positive und zwei negative Ladungen?

### Anwendung: Feld einer homogen geladenen Kugel

Als Beispiel betrachten wir eine homogen geladene Kugel vom Radius  $R$  mit Gesamtladung  $Q$ . Da die Kugel homogen geladen ist, gilt für die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{falls } r \leq R \\ 0 & \text{falls } r > R \end{cases}, \quad (2.55)$$

wobei  $r = |\mathbf{r}|$ . Zwischen der konstanten Ladungsdichte  $\rho_0$  und  $Q$  besteht der folgende Zusammenhang

$$Q = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3. \quad (2.56)$$

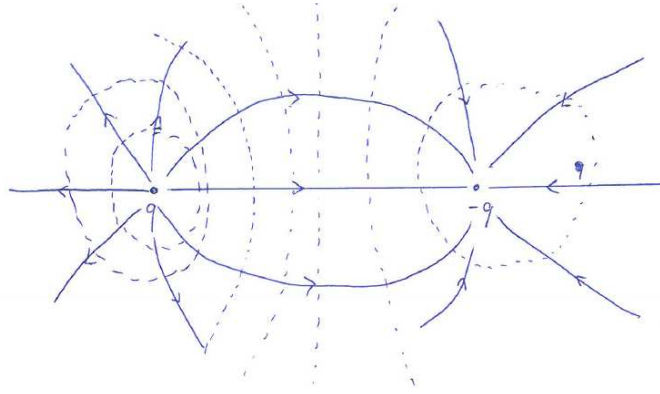


Abbildung 2.1: Feldlinien (durchgezogene Linien) und Äquipotentialflächen (gestrichelt) für gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen mit  $q > 0$ .

Im Folgenden berechnen wir das elektrische Feld und das dazugehörige skalare Potential auf zwei verschiedene Weisen, nämlich mit der integralen Form der Maxwell-Gleichungen und durch direktes Lösen der Poisson-Gleichung.

*Erstes Lösungsmöglichkeit:* Für die integrale Form der Maxwell-Gleichungen wie in (2.53) benötigen wir die in  $V$  eingeschlossene Ladung  $Q_V$ . Als Volumen bietet sich aufgrund der vorliegenden Kugelsymmetrie eine um den Koordinatenursprung zentrierte Kugel vom Radius  $r$  an, die wir mit  $B_r((0))$  bezeichnen. Somit gilt:

$$Q_V = \int_{B_r(\mathbf{0})} d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi \rho_0 r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3 & \text{falls } r \leq R \\ \frac{4}{3}\pi \rho_0 R^3 = Q & \text{falls } r > R \end{cases}, \quad (2.57)$$

wobei wir im jeweils letzten Schritt die Beziehung zwischen  $\rho_0$  und  $Q$  verwendet haben.

Des Weiteren müssen wir noch  $\int_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$  für unseren Fall auswerten. Wie Sie in einer Hausübung explizit zeigen werden, ist für (um den Ursprung) kugelsymmetrische Ladungsverteilungen das elektrische Feld in der Form  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}/r$  mit  $r = |\mathbf{r}|$  gegeben. In anderen Worten, dass elektrische Feld zeigt radial nach außen (oder innen, je nach Vorzeichen der Ladung). Da ebenfalls  $d^2\mathbf{A}$  radial nach außen reigt, d.h.  $d^2\mathbf{A} = d^2A \mathbf{r}/r$  folgt somit

$$\int_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{S_r((0))} d^2A f(r) = 4\pi r^2 f(r) \quad (2.58)$$

Verwendet man nun die integrale Form der Maxwellgleichungen (2.53), und verwen-

det die Zwischenresultate (2.57) und (2.57), so erhalten wir

$$f(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{R^3} & \text{falls } r \leq R \\ \frac{Q}{r^2} & \text{falls } r > R \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{R^3} \mathbf{r} & \text{falls } |\mathbf{r}| \leq R \\ \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} & \text{falls } |\mathbf{r}| > R \end{cases} \quad (2.59)$$

Man beachte, dass das elektrische Feld außerhalb der Kugel exakt gleich dem ist, wenn die gesamte Ladung im Punkt  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  konzentriert wäre.

Das zugehörige elektrostatische Potential, welches aufgrund der Kugelsymmetrie des Problems ebenfalls nur von  $r$  abhängig ist, erhält man durch Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\phi}{dr} = -f(r). \quad (2.60)$$

Das Potential ist jedoch nicht eindeutig durch das elektrische Feld festgelegt. Vielmehr ergeben zwei Potentiale, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, das selbe elektrische Feld. Üblicherweise wählt man für den obigen Fall das Potential so, dass es im Unendlichen verschwindet, d.h.

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.61)$$

und somit erhalten wir für  $\phi(\mathbf{r})$

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & \text{falls } r \leq R \\ \frac{Q}{r} & \text{falls } r > R \end{cases} \quad (2.62)$$

Insbesondere ist das elektrostatische Potential bei  $r = R$  stetig. Wir werden später sehen, dass dies immer der Fall ist. Das elektrische Feld ist ebenfalls stetig, was jedoch ein Spezialfall ist, da hier keine sogenannte Oberflächenladungsdichte vorliegt.

*Zweite Lösungsmöglichkeit:* Alternativ kann man auch direkt die Poisson-Gleichung integrieren. Verwendet man bereits, dass aufgrund von Kugelsymmetrie das elektrostatische Potential nur von  $r = |\mathbf{r}|$  abhängt und man daher den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten (siehe Übungen) verwenden sollte, so reduziert sich die Poisson-Gleichung auf

$$\Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = -4\pi\rho(r). \quad (2.63)$$

Für  $r > R$  verschwindet die Ladungsdichte, und somit reduziert sich in diesem Fall die Differentialgleichung auf

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = 0 \quad (2.64)$$

beziehungsweise

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{c_1}{r^2}. \quad (2.65)$$

Durch eine weitere Integration erhalten wir schliesslich die Lösung

$$\phi(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2, \quad (2.66)$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  Konstanten sind, deren Wert wir später bestimmen.

Für  $r < R$  ist die Ladungsdichte konstant, und somit ergibt sich

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = -4\pi\rho_0 r^2. \quad (2.67)$$

Integriert wir diese Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{4}{3}\pi\rho_0 r + \frac{c_3}{r^2}, \quad (2.68)$$

und schließlich nach nochmaliger Integration

$$\phi(r) = -\frac{Q}{2R^3} r^2 - \frac{c_3}{r} + c_4, \quad (2.69)$$

Wir haben nun eine Lösung, gegeben durch (2.66) und (2.69), mit vier freien Integrationskonstanten  $c_i$ , welche wir noch bestimmen müssen. Wir fordern, dass

- (i) das Potential im Unendlichen verschwindet, und setzen somit  $c_2 = 0$
- (ii) das Potential bei  $r = 0$  endlich ist, d.h. dort befindet sich keine (isolierte) Punktladung, und setzen  $c_3 = 0$
- (iii) das Potential bei  $r = R$  stetig differenzierbar ist. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass es keine Oberflächenladungen auf der Kugeloberfläche sitzen. Aus diesen beiden Bedingungen folgen Gleichungen für  $c_1$  und  $c_4$ ,

$$-\frac{Q}{2R^3} R^2 + c_4 = -\frac{c_1}{R}, \quad -\frac{Q}{2R^3} 2R = \frac{c_1}{R^2}, \quad (2.70)$$

wobei die linke Gleichung die Stetigkeit des Potentials und die rechte Gleichung die Stetigkeit dessen Ableitung garantiert. Letztere wird durch  $c_1 = -Q$  gelöst. Für  $c_4$  erhalten wir  $c_4 = 3Q/(2R)$ .

Somit erhalten wir die selbe Lösung wie durch die Integralform der maxwell-Gleichungen.

## 2.3 Elektrostatische Feldenergie

Um dem elektrischen Feld eine Energie zuzuordnen, fragen wir uns zunächst, welche Arbeit notwendig ist, um eine Ladung  $q_n$  von Unendlich an den Punkt  $\mathbf{r}_n$  zu bringen in Anwesenheit von  $n - 1$  anderen Ladungen  $q_i$  an den Orten  $\mathbf{r}_i$  mit  $i = 1, \dots, n - 1$ . Diese  $n - 1$  Punktladungen erzeugen das elektrostatische Potential  $\phi(\mathbf{r})$ ,

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (2.71)$$

Um eine Ladung  $q_n$  von Unendlich nach  $\mathbf{r}_n$  in diesem Potential zu verschieben, müssen wir eine Gegenkraft  $-\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q_n\mathbf{E}(\mathbf{r})$  entlang des Wegs von Unendlich nach  $\mathbf{r}_n$  aufbringen,

$$\begin{aligned} W_{\infty \rightarrow \mathbf{r}_n} &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_n} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q_n \int_{\infty}^{\mathbf{r}_n} d\mathbf{r} \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) \\ &= q_n (\phi(\mathbf{r}_n) - \phi(\infty)) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j q_n}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_j|}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Um nun dem elektrischen Feld eine Feldenergie zuzuweisen, überlegen wir uns, welche Arbeit notwendig ist, um das elektrische Feld aus Punktladungen aufzubauen, die initial im Unendlichen sitzen: Um die erste Ladung  $q_1$  von Unendlich nach  $\mathbf{r}_1$  zu bringen ist keine Arbeit notwendig, da noch kein elektrisches Feld vorhanden ist. Die zweite Ladung  $q_2$  muss gegen des von  $q_1$  erzeugten elektrischen Feldes nach  $\mathbf{r}_2$  gebracht werden, die dritte Ladung entgegen des von  $q_1$  und  $q_2$  erzeugten elektrischen Feldes nach  $\mathbf{r}_3$  transportiert werden, etc. Insgesamt müssen wir gemäß (2.72) die Arbeit  $W$ , gegeben durch

$$W = \sum_{i=2}^n W_{\infty \rightarrow \mathbf{r}_i} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2.73)$$

aufbringen, um nacheinander die Ladungen  $q_1, q_2, \dots, q_n$  an die Punkte  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  zu bringen. Die Doppelsumme in (2.73) lässt sich auch wie folgt vereinfachen

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (2.74)$$

Man beachte, dass wir in der Summe den Summanden mit  $i = j$  explizit ausschliessen, dessen entsprechender Term durch die Singularität unendlich groß wäre. Schliesslich weisen wir dem elektrischen Feld diese zu leistende Arbeit als Feldenergie zu.

Für rein kontinuierliche Ladungsverteilungen  $\rho(\mathbf{r})$  erhält man als Verallgemeinerung zu (2.75)

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' \int d^3\mathbf{r}'' \frac{\rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}. \quad (2.75)$$

Man beachte, dass diese Formel nicht für delta-distributionswertige Ladungsdichten geeignet ist, da man sonst unendlich große Selbstenergiebeiträge erhält.

Benutzt man nun den Zusammenhang (2.33) zwischen der Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$  und dem skalaren Potential  $\phi(\mathbf{r})$ , so erhält man

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}'). \quad (2.76)$$

Diesen Ausdruck kann man noch mit Hilfe der Poissongleichung (2.46) in

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r}' \phi(\mathbf{r}') \Delta\phi(\mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r}' |\nabla\phi(\mathbf{r}')|^2 = \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r}' |\mathbf{E}(\mathbf{r}')|^2 \quad (2.77)$$

umschreiben. Im vorletzten Schritt wurde dabei partiell integriert. Eventuell dabei auftretende Randterme verschwinden, da das Potential (bzw. das elektrische Feld) im Unendlichen schnell genug abfallen. Den Integranden des letzten Ausdrucks kann man als Energiedichte  $w$  des elektrischen Felds im Rahmen der Elektrostatik deuten, d.h.

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.78)$$

## 2.4 Das Randwertproblem der Elektrostatik

Bisher haben wir uns mit diskreten bzw. kontinuierlichen Ladungsverteilungen und die daraus resultierenden skalaren Potentialen bzw. elektrischen Feldstärken beschäftigt. Von Interesse ist auch die Berechnung des elektrischen Felds in Anwesenheit von Leitern. Diese werden in Form von sogenannten Randwerten beschrieben, wie wir im Folgenden sehen werden

### 2.4.1 Eine naive Klassifizierung: Leiter und Isolatoren

In diesem Abschnitt diskutieren wir eine einfache (eigentlich zu naive) Einteilung von Materie in Leiter und Isolatoren, die den Grundstein für die späteren Abschnitte des Kapitels legen:

- Leiter sind Materialien, in denen sich ein oder mehrere Elektronen pro Atom bzw. Molekül durch Anlegen eines äußeren elektrischen Felds frei verschieben lassen, beispielsweise indem das Energieband eines Festkörpers nicht vollständig gefüllt ist. Ein idealer Leiter besitzt unendlich viele freie Elektronen.
- Isolatoren (bzw. auch Nichtleiter) sind Materialien, in denen sich die Ladungsträger auch nach Anlegen eines äußeren elektrischen Felds nicht allzu sehr verschieben lassen. In anderen Worten, man kann die Atome bzw. Moleküle eines Isolators polarisieren, und damit ein Dipolmoment induzieren, jedoch keine freien Ladungsträger erzeugen. Die Beschreibung von Isolatoren bzw. von Polarisierungseffekten wird im Kapitel *Elektrodynamik in Materie* behandelt.

Wir behandeln im Folgenden die elektrostatischen Eigenschaften perfekter bzw. idealer Leiter. Hierzu betrachten wir diesen in einem konstanten äußeren elektrischen Feld  $\mathbf{E}_0$ . Die vorhandenen freien (negativen) Ladungsträger verschieben sich entgegen des angelegten elektrischen Felds. Durch die Verschiebung der Ladungsträger

entstehen positive (Mangel an Elektronen) bzw. negative (Überschuss an Elektronen) Nettoladungen, die wiederum ein elektrisches Feld  $\mathbf{E}_i$  induzieren. Das induzierte elektrische Feld ist entgegengesetzt zum äußeren elektrischen Feld  $\mathbf{E}_0$ . Bringt man

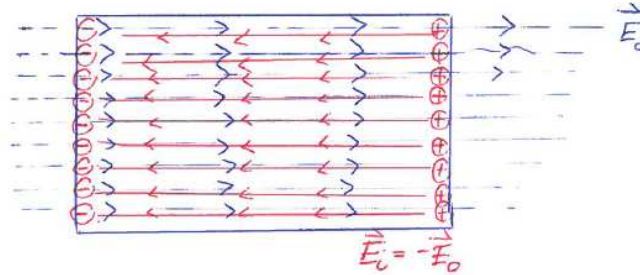


Abbildung 2.2: Äußeres angelegtes Feld und induziertes Feld heben sich auf im Inneren eines idealen Leiters

somit einen Leiter in ein äußeres elektrostatisches Feld, so verschieben sich die freien Ladungsträger so lange bis die dadurch induzierten Ladungen das äußere Feld im idealen Leiter aufheben. Somit gilt für ideale Leiter in einem äußeren elektrischen Feld:

- das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  verschwindet im Inneren des Leiters,
- innerhalb des Leiters gilt  $\rho = 0$ . Dies ist eine direkte Konsequenz aus  $\mathbf{E} = 0$  im Inneren des Leiters und unter Anwendung der Maxwell-Gleichung  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ . Daran ändert sich auch nichts, wenn wir den Leiter aushöhlen. Das Loch bleibt feldfrei (sogenannter Faraday-Käfig).
- die Ladungen sitzen auf der Leiteroberfläche,
- das elektrostatische Potential  $\phi$  ist im Inneren und auf der Oberfläche des Leiters konstant. Für zwei Punkte  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  im Inneren oder auf der Leiteroberfläche. Es gilt

$$\phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.79)$$

sofern alle Punkte des Leiters miteinander durch einen Weg verbunden werden können (in anderen Worten, der Leiter ist wegzusammenhängend).

- die Leiteroberfläche ist eine Äquipotentialfläche, und somit steht das elektrische Feld senkrecht auf der Leiteroberfläche.

### 2.4.2 Verhalten des elektrischen Feldes an Grenzflächen

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, werden (ideale) Leiter in einem äußeren Magnetfeld durch eine nicht-verschwindende Flächenladungsdichte  $\sigma(\mathbf{r})$  auf deren Oberfläche sowie durch einen feldfreien und ladungsfreien Raum im Inneren beschrieben. In diesem Abschnitt studieren wir die Eigenschaften des elektrischen Felds  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  in Anwesenheit einer Flächenladungsdichte  $\sigma(\mathbf{r})$  auf der zweidimensionalen Fläche  $\Sigma$ . Die Situation ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

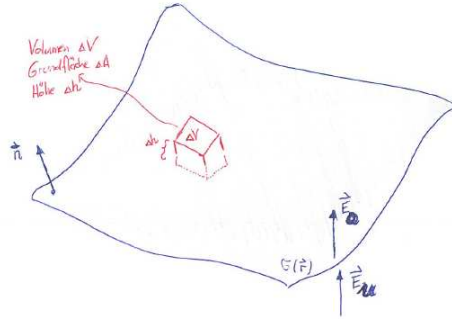


Abbildung 2.3: Fläche  $\Sigma$  mit Flächenladungsdichte  $\sigma(\mathbf{r})$ , Normalenvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  und Quader  $\Delta V$ .

Das elektrische Feld unterhalb der Fläche werde mit  $\mathbf{E}_u$  bezeichnet, das elektrische Feld oberhalb der Fläche mit  $\mathbf{E}_o$ . Wenn die Flächenladungsdichte auf der Oberfläche des idealen Leiters entsteht, und der ideale Leiter sich unterhalb erstreckt, so ist  $\mathbf{E}_u = \mathbf{0}$ . Hier wollen wir jedoch den allgemeinen Fall studieren, und setzen  $\mathbf{E}_u$  nicht auf Null.

Des Weiteren ist  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  der Normalenvektor am Punkt  $\mathbf{r}$  der Fläche. Um das Grenzverhalten des elektrischen Felds zu studieren betrachten wir zuerst ein infinitesimal kleinen Quader  $\Delta V$  mit Grundfläche  $\Delta A$  und Höhe  $\Delta h$ , welche wir später gegen Null gehen lassen. Für hinreichend kleines  $\Delta A$  können wir annehmen, dass der Normalenvektor von  $\Sigma$  sowie die Oberflächenladungsdichte  $\sigma$  in diesem Bereich konstant ist. Wir richten insbesondere den Quader so aus, dass die die Grundfläche  $\Delta A$  parallel zu  $\Sigma$  ist, und sich ein Teil des Quaders oberhalb, und der andere Teil unterhalb der Fläche  $\Sigma$  befindet. Wendet man den Satz von Gauß auf diesen Quader an, so erhält man

$$\int_{\Delta V} d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial(\Delta V)} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \Delta A \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_u), \quad (2.80)$$

wobei wir im letzten Schritt den Limes  $\Delta h \rightarrow 0$  durchgeführt haben. In diesem Grenzprozess tragen die Seitenflächen des Quaders nicht bei. Andererseits gilt unter



Anwendung der Maxwell-Gleichung

$$\int_{\Delta V} d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_{\Delta V} d^3\mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) = 4\pi \Delta A \sigma \quad (2.81)$$

Vergleicht man (2.80) und (2.81), so erhalten wir

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_u(\mathbf{r})) = 4\pi\sigma(\mathbf{r}) \quad (2.82)$$

Mit anderen Worten, die Normalkomponente des elektrischen Felds ist in Anwesenheit von einer Flächenladungsdichte  $\sigma$  unstetig.

Um eine Aussage über die Tangentialkomponente des elektrischen Felds entlang von  $\Sigma$  betrachten wir an Stelle des Quaders eine rechteckige Fläche der Länge  $\Delta l$  und der Höhe  $\Delta h$ , deren Normalenvektor in  $\Sigma$  liegt (siehe Abbildung 2.4.

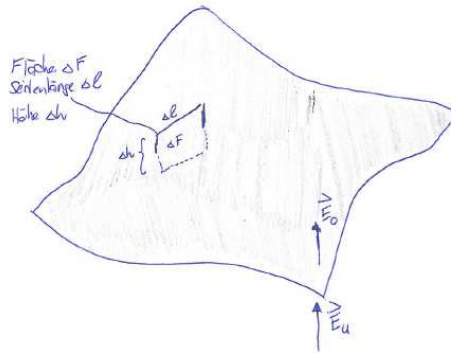


Abbildung 2.4: Fläche  $\Sigma$  mit Flächenladungsdichte  $\sigma(\mathbf{r})$ , Normalenvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  und Fläche  $\Delta F$ .

Wiederum legen wir diese rechteckige Fläche  $\Delta F$  so, dass ein Teil oberhalb, und der andere Teil unterhalb von  $\Sigma$  liegt. Des Weiteren sei  $\Delta l$  so klein, dass sich das elektrische Feld in dieser Größenordnung nicht ändert. Aus der Maxwell-Gleichung

$$\int_{\Delta F} d^2\mathbf{A} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint \partial(\cdot\mathcal{F}) d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.83)$$

folgt für die oben beschriebene rechteckige Schleife  $\partial(\Delta F) = \mathcal{C}$  im Limes  $\Delta h \rightarrow 0$

$$\Delta \mathbf{l} \cdot (\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_u) = 0, \quad (2.84)$$

wobei der Vektor  $\Delta \mathbf{l}$  tangential zu  $\Sigma$  sein soll. In anderen Worten, (2.84) besagt, dass die tangentiale Komponente des elektrischen Feldes stetig sein muss.

Die Erkenntnisse (2.81) und (2.84) kann man wie folgt

$$\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_u(\mathbf{r}) = 4\pi \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad (2.85)$$

kombinieren. Aus der Definition des skalaren Potentials

$$\phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.86)$$

folgt im Limes  $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$  dass das skalare Potential stetig an der Grenzfläche ist, da für verschwindende Weglänge das Integral in (2.86) verschwindet. Aus (2.85) folgt jedoch mit  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , dass die Normalableitung des skalaren Potentials unstetig ist, d.h.

$$\nabla\phi_o(\mathbf{r}) - \nabla\phi_u(\mathbf{r}) = -4\pi\sigma\mathbf{n} \quad (2.87)$$

bzw. nach Multiplikation mit  $\mathbf{n}$  von beiden Seiten:

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_o(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial n}\phi_u(\mathbf{r}) = -4\pi\sigma, \quad (2.88)$$

wobei die Normalableitung  $\frac{\partial}{\partial n}$  wie folgt definiert ist

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}). \quad (2.89)$$

### 2.4.3 Formulierung des Randwertproblems

Wir betrachten nun elektrische Felder in Anwesenheit von (idealen) Leitern sowie einer Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$ . Die Oberflächen der Leiter, im Folgenden mit  $L$  bezeichnet, werden als Ränder des Raumes  $V$ , in dem wir die Poisson-Gleichung (2.46) lösen werden, modelliert. Sei also  $\partial V = L$ , wobei  $L$  nicht notwendigerweise zusammenhängend ist. Vielmehr können wir  $L$  als Vereinigung von zusammenhängenden Oberflächen  $L_i$  mit  $i = 1, \dots, N$  beschreiben, die eine Flächenladungsdichte  $\sigma_i(\mathbf{r})$  tragen.

Diese Situation übersetzt sich in das folgende mathematische Problem: Im Inneren des Volumens  $V$  fordern wir für alle Punkte  $\mathbf{r}$  die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (2.90)$$

zu einer vorgegebenen Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$ . Auf den Rändern  $L_i$  gilt

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{(0)i} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} = -4\pi\sigma_i(\mathbf{r}), \quad (2.91)$$

für  $\mathbf{r} \in L_i$ . Im Fall mehrerer  $L_i$  können wir (für jedes  $L_i$ ) entweder  $\phi_{(0)i}$  oder  $\sigma_i(\mathbf{r})$  vorschreiben. Vom mathematischen Standpunkt schreiben wir mit dieser Wahl unterschiedliche Randbedingungen vor:

- Dirichlet-Randbedingungen:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{(0)}(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V \quad (2.92)$$

Mit anderen Worten, auf dem Rand von  $V$  geben wir eine beliebige Funktion  $\phi_{(0)}(\mathbf{r})$  vor. Im Fall von Leiter in der Elektrostatik muss diese Funktion jedoch konstant sein. Somit liegen Dirichlet-Randbedingungen vor, falls wir in (2.91) die Potentialwerte  $\phi_{(0)i}$  vorschreiben.

- Neumann-Randbedingungen: Wir geben die Normalableitung für  $\mathbf{r} \in \partial V$  vor

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} = -4\pi\sigma_i(\mathbf{r}) \quad (2.93)$$

Typischerweise werden in Elektrostatik Dirichlet-Randbedingungen gefordert. Die Neumann-Randbedingungen kommen nur sehr selten vor, da hierzu die Flächenladungsdichten  $\sigma_i$  explizit vorgegeben werden.

Bevor wir explizite Konstruktionsmethoden vorstellen – beispielsweise die Methode der Greenschen Funktionen und die Spiegelladungsmethode – möchten wir noch untersuchen, ob die Lösung für das Dirichlet- oder Neumann-Randwertproblem eindeutig ist oder nicht. Wir wenden uns zuerst dem Dirichlet Randwertproblem

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in V \quad (2.94)$$

und

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{(0)}(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V \quad (2.95)$$

zu, und nehmen an, dass für vorgegebenes  $\rho(\mathbf{r})$  auf  $V$  und  $\phi_{(0)}(\mathbf{r})$  auf  $\partial V$  das Randwertproblem zwei verschiedene Lösungen  $\phi^{(I)}$  und  $\phi^{(II)}$  besitzt. Wir betrachten nun die Differenz  $\Phi = \phi^{(I)} - \phi^{(II)}$ , die folglich  $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$  für  $\mathbf{r} \in V$  und  $\Phi(\mathbf{r}) = 0$  für  $\mathbf{r} \in \partial V$  erfüllt.

Um die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen, benutzen wir zuerst die Identität

$$\nabla \cdot (\Phi(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r})) = \Phi(\mathbf{r})\Delta\Phi(\mathbf{r}) - |\nabla\Phi(\mathbf{r})|^2 \quad (2.96)$$

und integrieren beide Seiten über das Volumen  $V$ . Mittels des Satzes von Gauß folgt

$$\int_V d^3\mathbf{r} \left( \Phi(\mathbf{r})\Delta\Phi(\mathbf{r}) - |\nabla\Phi(\mathbf{r})|^2 \right) = \int_{\partial V} d^2\mathbf{A} \Phi(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}). \quad (2.97)$$

Die rechte Seite von (2.97) verschwindet, da per Definition  $\Phi(\mathbf{r}) = 0$  für  $\mathbf{r} \in \partial V$  gilt. Verwendet man außerdem  $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$  für  $\mathbf{r} \in V$ , so vereinfacht sich die Gleichung (2.97) zu

$$\int_V d^3\mathbf{r} |\nabla\Phi(\mathbf{r})|^2 = 0. \quad (2.98)$$

Für eine beliebige Funktion  $\Phi$  auf  $V$  ist der Integrand  $|\nabla\Phi(\mathbf{r})|^2$  positiv oder Null. Damit jedoch das Integral in (2.98) verschwindet, muss bereits  $\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ , und somit  $\Phi(\mathbf{r}) = \text{const.}$ , für alle  $\mathbf{r} \in V$  gelten. Da jedoch am Rand von  $V$  die Funktion  $\Phi$  verschwindet, muss die Konstante bereits Null sein. Mit anderen Worten,  $\phi^{(I)}$  und  $\phi^{(II)}$  sind identisch, und die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems ist eindeutig.

Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass das Neumann Randwertproblem, gegeben durch

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in V \quad (2.99)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\sigma(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V, \quad (2.100)$$

ebenfalls für vorgegebenes  $\rho(\mathbf{r})$  auf  $V$  und  $\sigma(\mathbf{r})$  auf  $\partial V$  eine eindeutige Lösung (abgesehen von einer beliebig wählbaren additiven Konstante) besitzt.

#### 2.4.4 Methode der Spiegelladungen

Um Dirichlet Randbedingungen einfacher Geometrien (wie Metallplatte, leitende Kugel, etc) zu lösen, bietet sich die sogenannte Spiegelladungsmethode an. Insbesondere wollen wir das Dirichlet Randwertproblem auf  $V$  lösen, d.h. für vorgegebene Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$  die Lösung der Poisson-Gleichung  $\nabla\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$  für  $\mathbf{r} \in V$  finden, die die Randbedingung  $\phi(\mathbf{r}) = \phi_{(0)} = \text{const.}$  auf  $\mathbf{r} \in \partial V$  erfüllt.

Um die Lösung zu diesem Problem zu finden, gehen wir wie folgt vor. Zu der partikulären Lösung addieren wir noch eine bestimmte homogene Lösung,

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{part.}}(\mathbf{r}) + \phi_{\text{hom.}}(\mathbf{r}), \quad (2.101)$$

wobei die partikuläre Lösung durch

$$\phi_{\text{part.}}(\mathbf{r}) = \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.102)$$

gegeben ist. Die homogene Lösung wird durch Spiegelladungen generiert, die sich außerhalb von  $V$  befinden. Die (kontinuierliche) Ladungsverteilung der Spiegelladungen  $\rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}')$  wird so gewählt, dass die homogene Lösung

$$\phi_{\text{hom.}}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.103)$$

addiert zu der partikulären Lösung  $\phi_{\text{part.}}(\mathbf{r})$  die Randbedingung erfüllt, d.h.

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{part.}}(\mathbf{r}) + \phi_{\text{hom.}}(\mathbf{r}) = \phi_{(0)} = \text{const.} \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V. \quad (2.104)$$

Wir müssen noch zeigen, dass  $\phi(\mathbf{r})$  die Poisson-Gleichung auf  $V$  erfüllt. Es gilt für  $\mathbf{r} \in V$

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\mathbf{r}) &= \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} d^3\mathbf{r}' \rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}') \Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \\ &= -4\pi \left( \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} d^3\mathbf{r}' \rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right) \\ &= -4\pi\rho(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Insbesondere trägt die Bildladungsdichte  $\rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}')$  nicht bei, da  $\mathbf{r} \in V$  und  $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3 \setminus V$ .

Mit anderen Worten: Wir haben das Dirichlet-Randwertproblem zur vorgegebenen Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$  in einem Problem für die Ladungsdichten  $\rho(\mathbf{r})$  und  $\rho_{\text{bild}}(\mathbf{r})$  ohne Randbedingungen umformuliert.

**Beispiel:** Um die Vorgehensweise zu verdeutlichen betrachten wir eine Punktladung  $q$  im Abstand  $d$  zu einer geerdeten, in  $x$  und  $y$  Richtung unendlich ausgedehnten Metallplatte am Ort  $x = 0$ . Insbesondere suchen wir das Potential  $\phi(\mathbf{r})$  für den Halbraum  $x < 0$  und die induzierte Flächenladungsdichte auf der Metallplatte. Somit müssen wir das folgende Dirichlet Randwertproblem lösen:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi q \delta(\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0\} \quad (2.106)$$

und

$$\phi(x = 0, y, z) = 0. \quad (2.107)$$

Das Potential auf der  $(y, z)$ -Ebene  $x = 0$  muss verschwinden, da die Metallplatte geerdet ist. Des Weiteren fordern wir wie üblich, dass das Potential im Unendlichen verschwindet. Aufgrund der vorliegenden Symmetrie bietet es sich an, die Spiegelladung  $q'$  auf die  $x$ -Achse zu legen. Des Weiteren muss die Bildladung ausserhalb des Halbraums  $x < 0$  liegen, und somit erhalten wir für das Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - d'\mathbf{e}_x|} = \frac{q}{\sqrt{y^2 + z^2 + (x+d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{y^2 + z^2 + (x-d')^2}} \quad (2.108)$$

Die Werte  $q'$  und  $d'$  werden nun so bestimmt, dass das potential  $\phi$  auf der Metallplatte, also für  $x = 0$  aber  $y, z \in \mathbb{R}$  verschwindet,

$$\frac{q}{\sqrt{y^2 + z^2 + d^2}} + \frac{q'}{\sqrt{y^2 + z^2 + d'^2}} = 0. \quad (2.109)$$

Für  $y = z = 0$  reduziert sich die Bedingung auf

$$\frac{q}{d} + \frac{q'}{d'} = 0, \quad (2.110)$$

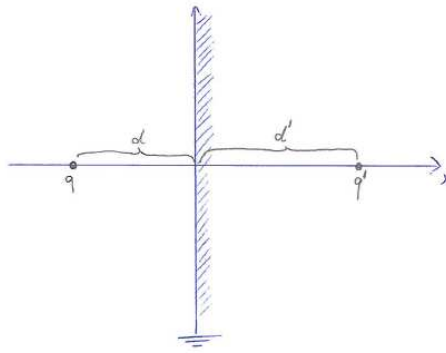


Abbildung 2.5: Punktladung  $q$  im Abstand  $d$  vor geerdeter Metallplatte

während für  $y = 1$  und  $z = 0$

$$\frac{q^2}{1 + d^2} = \frac{q'^2}{1 + d'^2}. \quad (2.111)$$

Somit folgt  $q' = -q$  und  $d' = d$ , und wir erhalten als Lösung für das Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x|} - \frac{q}{|\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x|}. \quad (2.112)$$

Das elektrische Feld im Halbraum  $x < 0$  ergibt sich zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = q \left( \frac{\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x|^3} - \frac{\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x|^3} \right). \quad (2.113)$$

Wir interessieren uns noch für die auf der Metallplatte induzierte Flächenladungsdichte.

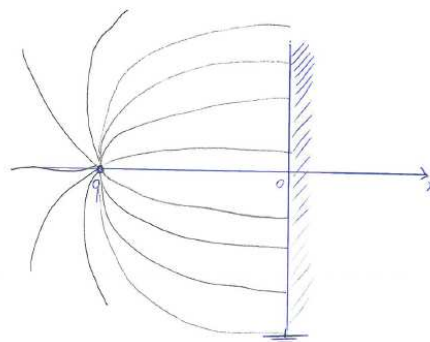


Abbildung 2.6: Feldlinien für eine Punktladung  $q$  im Abstand  $d$  vor geerdeter Metallplatte.

Der Normalenvektor ist durch  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$  gegeben, und somit erhalten wir für die induzierte Flächenladungsdichte  $\sigma(y, z)$

$$\begin{aligned}\sigma(y, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{4\pi} E_x(x=0, y, z) \\ &= -\frac{q d}{2\pi (y^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}.\end{aligned}\quad (2.114)$$

Der Verlauf der elektrischen Feldlinien und der Flächenladungsdichte ist in Abbildungen 2.6 und 2.7 skizziert. Die auf der Metallplatte induzierte Gesamtladung

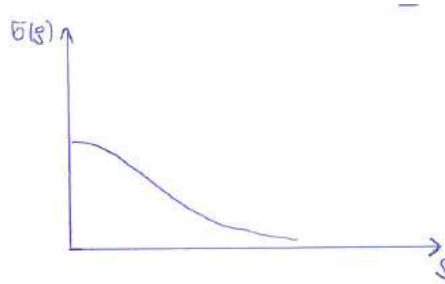


Abbildung 2.7: Flächenladungsdichte  $\sigma(x, y)$  auf geerdeter Metallplatte. Mit  $\rho$  wird  $\rho^2 = y^2 + z^2$  bezeichnet.

lässt sich wie folgt berechnen

$$\begin{aligned}q_{\text{infl}} &= \int_{x=0} dy dz \sigma(y, z) = -2\pi q d \int_0^{\infty} d\rho \rho \frac{1}{2\pi (\rho^2 + d^2)^{3/2}} \\ &= -q d (\rho^2 + d^2)^{-1/2} \Big|_0^{\infty} = -q,\end{aligned}\quad (2.115)$$

und entspricht gerade der Spiegelladung. Durch die Spiegelladung bzw. den induzierten Ladungen auf der Metallplatte wird eine Kraft  $\mathbf{F}$  auf die Punktladung  $q$  ausgeübt, die durch die Beziehung  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$  berechnet werden kann. In dieser Beziehung ist  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$  das von den Spiegelladungen (bzw. von den auf der Metallplatte induzierten Ladungen) erzeugte elektrische Feld am Ort  $\mathbf{r}$ . Man beachte, dass sich  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$  von dem in (2.113) berechnete elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  durch den Beitrag der Ladung  $q$  unterscheidet. Somit gilt

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -q \frac{\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x|^3} \quad (2.116)$$

und somit für die Kraft  $\mathbf{F}$  auf die Punktladung  $q$

$$\mathbf{F} = q\tilde{\mathbf{E}}(-d\mathbf{e}_x) = \frac{q^2}{4d^2} \mathbf{e}_x. \quad (2.117)$$

Gemäß dem Newtonschen Gesetz *actio = reactio* wirkt auf die Metallplatte eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft.

### 2.4.5 Methode der Greenschen Funktionen

Wir haben bereits gesehen, dass wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (2.118)$$

in der Form

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_h(\mathbf{r}) + \phi_{part.}(\mathbf{r}) \quad (2.119)$$

schreiben können. Während die homogene Funktion  $\phi_h(\mathbf{r})$  die Laplace-Gleichung, also  $\Delta\phi_h(\mathbf{r}) = 0$  erfüllt, löst die partikuläre Funktion  $\phi_{part.}(\mathbf{r})$  die ursprüngliche Poisson-Gleichung (2.118). Eine bestimmte partikuläre Lösung  $\phi_{part.}(\mathbf{r})$  ist durch das Integral

$$\phi_{part.}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.120)$$

gegeben. Mit anderen Worten die Funktion  $-1/(4\pi)|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  ist eine Greensche Funktion denn

$$\Delta \left( -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.121)$$

Wir können die allgemeine Lösung des Randwertproblems auch durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \quad (2.122)$$

erhalten, wobei die Greensche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  durch

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.123)$$

gegeben ist mit  $\Delta_{\mathbf{r}}G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ . Beachte, dass  $\Delta_{\mathbf{r}}$  auf das erste Argument von  $G_h$ , also auf  $\mathbf{r}$ , wirkt.

Damit  $\phi(\mathbf{r})$  und somit auch  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  die Randbedingungen erfüllt, müssen wir die Funktion  $G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  geeignet wählen. Im Folgenden leiten wir einen allgemeinen Ausdruck für  $\phi(\mathbf{r})$  ab, indem wir die zweite Greensche Identität benutzen.

**Einschub: Greensche Identitäten** Wir betrachten reellwertige Funktionen  $\phi(\mathbf{r})$  und  $\psi(\mathbf{r})$ . Mit Hilfe des Vektorfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \nabla\psi(\mathbf{r})$  können wir die erste Greensche Identität herleiten. Dazu wenden wir den Satz von Gauß auf das Vektorfeld  $\mathbf{v}$  an,

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (2.124)$$



wobei  $V$  ein beliebiges Volumen und  $\partial V$  dessen Rand sei. Somit folgt wegen

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) \quad (2.125)$$

die Identität

$$\int_V d^3 \mathbf{r} (\nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r})) = \oint_{\partial V} d^2 \mathbf{A} \cdot \phi(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}), \quad (2.126)$$

die sogenannte *erste Greensche Identität*. Vertauscht man nun die Rollen von  $\phi(\mathbf{r})$  und  $\psi(\mathbf{r})$ , und subtrahiert das Ergebnis von (2.126), so erhält man

$$\int_V d^3 \mathbf{r} (\phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r})) = \oint_{\partial V} d^2 \mathbf{A} \cdot (\phi(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r})), \quad (2.127)$$

die sogenannte *zweite Greensche Identität*. Diese werden wir im Folgenden verwenden, um einen allgemeinen Ausdruck für das skalare Potential herzuleiten.

Wir wenden nun die zweite Greensche Identität auf den folgenden Ausdruck an

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial V} d^2 \mathbf{A}' (\phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')) \quad (2.128) \\ &= \int_V d^3 \mathbf{r}' (\phi(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')) \\ &= \phi(\mathbf{r}) + 4\pi \int_V d^3 \mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

wobei  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  eine Greensche Funktion für  $\Delta$  ist, was wir auch im letzten Schritt benutzt hatten. Somit gilt für  $\phi(\mathbf{r})$

$$\phi(\mathbf{r}) = -4\pi \int_V d^3 \mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \oint_{\partial V} d^2 \mathbf{A}' \left( \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right), \quad (2.129)$$

wobei wiederum die Normalableitung (2.89) verwendet wurde. Der Strich soll dabei andeuten, dass nach  $\mathbf{r}'$  abgeleitet werden muss, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.130)$$

Im Folgenden betrachten wir zwei Spezialfälle für den allgemeinen Ausdruck (2.129).

**Das Dirichlet-Randwertproblem:** Ist das Potential auf  $\partial V$  bekannt, so erweist es sich als hilfreich, eine Greensche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  zu wählen, im Folgenden mit  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  bezeichnet, für die

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{falls} \quad \mathbf{r}' \in \partial V \quad (2.131)$$

erfüllt ist. Somit reduziert sich der allgemeine Ausdruck (2.129) auf

$$\phi(\mathbf{r}) = -4\pi \int_V d^3\mathbf{r}' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \oint_{\partial V} d^2 A' \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}, \quad (2.132)$$

wobei  $\phi(\mathbf{r}')$  für  $\mathbf{r}' \in \partial V$  explizit bekannt ist.

Die Greensche Funktion mit Dirichlet-Randbedingungen für die Metallplatte ist durch

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - S(\mathbf{r}')|} \right) \quad (2.133)$$

gegeben, wobei mit  $S(\mathbf{r}')$  der an der Metallplatte gespiegelte Punkt  $\mathbf{r}'$  bezeichnet wird. Falls die Metallplatte durch  $x = 0$  beschrieben ist, und  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  folgt somit  $S(\mathbf{r}') = (-x', y', z')$ .

Tatsächlich kann man allgemein zeigen, dass die Greensche Funktion mit Dirichlet-Randbedingungen symmetrisch in den beiden Argumenten ist (siehe Hausübung), d.h.  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ . Beispielsweise folgt dies für das obige Beispiel der Metallplatte, da  $|\mathbf{r} - S(\mathbf{r}')| = |S(\mathbf{r}) - S^2(\mathbf{r}')| = |\mathbf{r}' - S(\mathbf{r})|$  gilt. Hierbei haben wir verwendet, dass sich die Länge unter Spiegelungen nicht ändert, und dass die zweifache Ausführung einer Spiegelung die identische Abbildung ist, d.h.  $S^2 = \text{id}$ .

**Das Neumann-Randwertproblem:** An Stelle des Randwerts des skalaren Potentials sei nun Ihre Normalableitung explizit gegeben. Dazu betrachten wir nun eine spezielle Wahl der Greensche Funktion, die wir mit  $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  bezeichnen. Analog zum Dirichlet-Randwertproblem könnte man naiverweise fordern, dass die Normalableitung der Greenschen Funktion am Rand des Volumens zu verschwinden hat. Dies ist jedoch keine konsistente Wahl, wie die folgende Überlegung zeigt

$$\oint_{\partial V} d^2 A' \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \oint_{\partial V} d^2 A' \nabla_{\mathbf{r}'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1, \quad (2.134)$$

wobei  $\mathbf{r} \in V$ . Im letzten Schritt haben wir die Poisson-Gleichung verwendet.

Somit können wir nicht die Normalableitung am Rand von  $V$  auf Null setzen. Stattdessen werden wir für die Greensche Funktion  $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\text{vol}(\partial V)} \quad (2.135)$$

fordern für  $\mathbf{r}' \in \partial V$  und  $\mathbf{r} \in V$ . Somit reduziert sich der allgemeine Ausdruck (2.129) auf

$$\phi(\mathbf{r}) = -4\pi \int_V d^3\mathbf{r}' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \phi_0 - \oint_{\partial V} d^2 A' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'}, \quad (2.136)$$

wobei die Konstante  $\phi_0$  den Mittelwert des Potentials auf der Oberfläche  $\partial V$  bezeichnet, d.h.

$$\phi_0 = \frac{1}{\text{vol}(\partial V)} \oint_{\partial V} d^2 A' \phi(\mathbf{r}'). \quad (2.137)$$

Verwendet man schließlich noch, dass  $\partial_n \phi = -4\pi\sigma$  auf der Oberfläche eines idealen Leiters gilt, so folgt

$$\phi(\mathbf{r}) - \phi_0 = -4\pi \int_V d^3 \mathbf{r}' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + 4\pi \oint_{\partial V} d^2 A' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}'), \quad (2.138)$$

## 2.4.6 Anwendung: Kapazitäten

## 2.5 Multipolentwicklung

Im Folgenden betrachten wir eine statische und auch lokalisierte Ladungsverteilung. Lokalisiert bedeutet hierbei, dass die Ladungsverteilung außerhalb einer Kugel vom Radius  $R$  um den Koordinatenursprung verschwindet. Für Abstände  $r$  die wesentlich größer als  $R$  sind, kann das elektrostatische Potential  $\phi(\mathbf{r})$  in Potenzen von  $R/r$  entwickelt werden. Diese sogenannte Multipolentwicklung werden wir im Folgenden ableiten.

Aus der gegebenen Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  kann man das Potential durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.139)$$

berechnen. In der Integration tragen nur Punkte  $\mathbf{r}'$  mit  $r' = |\mathbf{r}'| \leq R$  bei. Außerdem nehmen wir  $r = |\mathbf{r}| \gg R$  im Folgenden an, so dass wir  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  in Potenzen von  $R/r$  entwickeln können. Hierzu formen wir wie folgt um

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2}. \quad (2.140)$$

Im nächsten Schritt verwenden wir die Potenzreihe von  $(1 - \xi)^\alpha$ ,

$$(1 - \xi)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} \xi^n. \quad (2.141)$$

die für  $|\xi| < 1$  konvergiert. Außerdem gilt für  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1. \quad (2.142)$$

Verwendet man nun die Potenzreihe (2.141) mit  $\xi = \frac{2}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' - \frac{r'^2}{r^2}$  so kann man (2.140) entwickeln in

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{R^3}{r^4}\right). \quad (2.143)$$

Verwendet man dieses Resultat, so erhält man für das elektrostatische Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{3x_i Q_{ij} x_j}{2r^5} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (2.144)$$

Hierbei handelt es sich um die (kartesische) Multipolentwicklung, die für  $r = |\mathbf{r}| \gg R$  anwendbar ist. Hierbei ist  $q$  die Gesamtladung,  $\mathbf{p}$  das Dipolmoment, und  $Q$  der Quadrupoltensor, die für eine lokalisierte Ladungsverteilung wie folgt gegeben sind,

$$\begin{aligned} q &= \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}), \\ \mathbf{p} &= \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}, \\ Q_{ij} &= \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \left( x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right), \end{aligned} \quad (2.145)$$

wobei  $x_i$  die Komponenten des Vektors  $\mathbf{r}$  sind, und  $r = |\mathbf{r}|$ .  $Q_{ij}$  sind die Komponenten des Quadrupoltensors  $Q$ . Man beachte, dass  $Q$  ein symmetrischer spurloser Tensor vom Rang zwei ist, d.h. es gilt insbesondere  $Q_{ij} = Q_{ji}$  und  $\text{Tr } Q = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$ .

Aus dem elektrostatischen Potential  $\phi(\mathbf{r})$  kann man leicht das elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$  berechnen,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (2.146)$$

Man beachte, dass das elektrische Feld eines Monopols (d.h. der Gesamtladung  $q$ ) wie  $r^{-2}$  abfällt, während das elektrische Feld eines Dipols mit verschwindender Gesamtladung wie  $r^{-3}$  abfällt. Für sehr große Abstände  $r$  dominiert daher der Monopolterm, d.h. das elektrische Feld kann durch eine Punktladung im Koordinatenursprung mit Ladung  $q$  approximiert werden. Verschwindet die Gesamtladung  $q$ , so ist der führende Term durch einen elektrischen Dipol mit Moment  $\mathbf{p}$  gegeben. Verschwindet auch das Dipolmoment, so ist der Quadrupolterm führend, und so weiter.

## Dipol und Quadrupol

Im folgenden diskutieren wir diskrete Ladungsverteilungen aus Punktladungen, die man benötigt, um ein nicht-verschwindendes Dipol- bzw. Quadrupolmoment zu erzeugen. Da die Gesamtladung des Dipols verschwinden muss, benötigen wir mindestens zwei entgegengesetzte Punktladungen. Diese platzieren wir im Abstand  $\mathbf{a}$  an den Stellen  $\mathbf{r}_0 \pm \frac{1}{2}\mathbf{a}$ , d.h. die Ladungsverteilung ist durch

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) - q \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) \quad (2.147)$$

gegeben. Für infinitesimale Abstände  $\mathbf{a}$  ergibt sich ein elektrischer Dipol mit Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) = -q \mathbf{a} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.148)$$

und Dipolmoment  $\mathbf{p} = q \mathbf{a}$ . Das elektrostatische Potential  $\phi(\mathbf{r})$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\mathbf{p} \cdot \int d^3 \mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{p} \cdot \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Ein reines Quadrupolmoment (ohne Monopol- und Dipolmoment) kann man durch vier Punktladungen erzeugen.