THEORETISCH-PHYSIKALISCHES INSTITUT
FRIEDRICH-SCHILLER UNIVERSITÄT JENA

Elektrodynamik

Wintersemester 2016/17

Präsenzübung 2

Aufgabe 5: Identitäten von Differentialoperatoren

Es sei $f(\boldsymbol{r})$ ein Skalarfeld sowie $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ Vektorfelder. Zeigen Sie die folgenden Identitäten von Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) &= (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}\,, \\
\boldsymbol{\nabla} \times (f\,\boldsymbol{v}) &= f\,(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\nabla} f) \times \boldsymbol{v}\,, \\
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) &= 0\,, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) &= 0
\end{aligned}$$

mit Hilfe der Identitäten des ϵ Symbols aus Aufgabe 4. Zeigen Sie außerdem

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) - \Delta \boldsymbol{v}\,, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{w})\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Sätze von Gauß & Stokes

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = y^2\,\boldsymbol{e}_x + (2x\,y + z^2)\,\boldsymbol{e}_y + 2y\,z\,\boldsymbol{e}_z$$

in kartesischen Koordinaten.

(a) Was besagt der Satz von Gauß? Weisen Sie diesen nach für das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ und den Einheitswürfel in $\mathbb{R}^3$ nach. Der Einheitswürfel ist gegeben durch die Eckpunkte (x_i, y_i, z_i) wobei $x_i, y_i, z_i \in \{0, 1\}$.

(b) Integrieren Sie das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ explizit entlang der geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$, die durch die Teilstrecken $(0,0,0)$ nach $(0,1,0)$, $(0,1,0)$ nach $(0,1,1)$, $(0,1,1)$ nach $(0,0,1)$ sowie $(0,0,1)$ nach $(0,0,0)$. Verwenden Sie hierfür auch den Satz von Stokes. Was besagt dieser?

Aufgabe 7: Delta Distribution

Zeigen Sie, dass die Delta Distribution in krummlinigen Koordinaten mit dem Inversen der Funktionaldeterminante versehen werden muss, und dass somit die Delta-Distribution in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) durch

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\, \delta(r - r_0)\, \delta(\theta - \theta_0)\, \delta(\phi - \phi_0)$$

gegeben ist. Wie lautet die Delta-Distribution in Zylinderkoordinaten?

Aufgabe 8: Das Theorem von Helmholtz

Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})\,, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

für ein Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$, wobei $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ die Bedingung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = 0$ erfüllt. Des Weiteren nehmen wir an, dass $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ und $f(\boldsymbol{r})$ schneller als r^{-2} gegen 0 gehen für $r = |\boldsymbol{r}| \to \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

die obigen Differentialgleichungen erfüllt, sofern $g(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ durch

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}'\, \frac{f(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\,, \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}'\, \frac{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\,, \end{aligned}$$

gegeben sind. Exisitieren diese Integrale?

(b) Zeigen Sie unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})| \to 0 \qquad \text{für} \qquad |\boldsymbol{r}| \to \infty$$

dass die Lösung (2) eindeutig ist.