Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Wintersemester 2016/17

Präsenzübung 1

Aufgabe 1: Rechnen mit ∇

(a) Gegeben sei das Skalarfeld

$$f(x, y, z) = x\, y^2\, z\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten in kartesischen Koordinaten.

(b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = y^2\, \boldsymbol{e}_x + (2x\, y + z^2)\, \boldsymbol{e}_y + 2y\, z\, \boldsymbol{e}_z$$

in kartesischen Koordinaten. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds in diesen Koordinaten.

Aufgabe 2: Differentialoperatoren

Wir betrachten im Folgenden die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation sowie den Laplace-Operator in verschiedenen Koordinatensystemen.

(a) Die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x &= r\, \sin\theta\, \cos\phi\,, \\ y &= r\, \sin\theta\, \sin\phi\,, \\ z &= r\, \cos\theta\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie in diesen Kugelkoordinaten die oben genannten Differentialoperatoren!

(b) Die Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\phi\,, \\ y &= r \cos\phi\,, \\ z &= z\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie in diesen Zylinderkoordinaten die oben genannten Differentialoperatoren!

(c) Rechnen Sie das Skalarfeld f sowie das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ von Aufgabe 1 in Kugelkoordinaten um. *Zusatzaufgabe:* Skizzieren Sie, wie man den Gradienten von f sowie die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds $\boldsymbol{v}$ in Kugelkoordinaten (bzw. in einem anderen krummlinigen Koordinatensystem mit orthogonalen Einheitsvektoren) berechnet. Führen Sie dies am obigen Beispiel durch und vergleichen Sie mit den Resultaten aus (b).

Aufgabe 3: Rechenregeln für Differentialoperatoren

Es seien $f(\boldsymbol{r})$ und $g(\boldsymbol{r})$ Skalarfelder und $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\,(f(\boldsymbol{r})g(\boldsymbol{r})) &= f(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nabla}g(\boldsymbol{r}) + g(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{r})\,, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(f(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})) &= f(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{r}) &= \Delta f(\boldsymbol{r})\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: ϵ-Tensor

Im Folgenden sei ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Tensor, wobei $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ und $\epsilon_{123} = 1$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$$

sowie

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}\,, \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\,\delta_{km}\,.$$

Über doppelt auftretende Indizes wird summiert (Einsteinsche Summenkonvention).