Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Wintersemester 2016/17

Hausübung 5

Abgabe am 01.12.2017 in der Vorlesung

Aufgabe 15: Ladung in Hohlkugel

Betrachten Sie eine aus Metall bestehende Hohlkugel vom Radius R. Das Metall der Hohlkugel soll geerdet sein. In der Hohlkugel soll sich eine Ladung Q im Abstand $d < R$ vom Mittelpunkt befinden.

(i) Bestimmen Sie das Potential im Inneren der Hohlkugel mit Hilfe der Spiegelladungsmethode. Weisen Sie nach, dass das Potential die richtigen Randbedingungen erfüllt. Hinweis: Es darf verwendet werden, dass die Spiegelladung $Q' = -QR/d$ im Abstand $d' = R^2/d$ auf der Symmetrieachse in Richtung der Ladung Q sitzt.

(ii) Bestimmen Sie die Oberflächenladungsdichte auf der Kugeloberfläche.

(iii) Berechnen Sie das Potential im Inneren der Hohlkugel auch mit Hilfe von Legendre-Polynomen. Zeigen Sie, dass dieses Resultat mit dem von Teilaufgabe (i) übereinstimmt.

Tipp: Eine geeignete Wahl des Koordinatensystems erleichtert das Leben. Im ladungsfreien Raum gilt im Fall von Zylindersymmetrie außerdem für das elektrostatische Potential

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l\, r^l + b_l\, r^{-l-1} \right) P_l(\cos\theta)\,.$$

Eine nützliche Identität ist zudem

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\, P_l(\cos\theta)\,,$$

wobei $r_< = \min\{|\boldsymbol{r}_1|, |\boldsymbol{r}_2|\}$ und $r_> = \max\{|\boldsymbol{r}_1|, |\boldsymbol{r}_2|\}$. θ ist der Winkel zwischen $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$. (12 Punkte)

Aufgabe 16: Sphärische Multipolmomente I

Berechnen Sie die sphärischen Monopol-, Dipol-, und Quadrupolmomente eines unendlich dünnen, homogen geladenen Kreisrings der Ladung q in der xy-Ebene, dessen Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt. Bestimmen Sie auch das Potential bis zur Ordnung $\mathcal{O}(r^{-4})$ für große r. Wie lautet das zugehörige elektrische Feld? (10 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 17: Sphärische Multipolmomente II

Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen sphärischen und kartesischen Multipolmomente explizit bis einschliesslich des Quadrupolmoments.

Hinweis: Die Kugelflächenfunktionen sind wie folgt gegeben:

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,, \\
Y_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}\,, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,, \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}\,, \\
Y_{2-2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{-2i\varphi}\,, \qquad Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\,\cos\theta\, e^{-i\varphi}\,, \\
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1)\,, \\
Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\,\cos\theta\, e^{i\varphi}\,, \qquad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\varphi}\,.
\end{aligned}
$$

(8 Punkte)