Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Wintersemester 2016/17

Hausübung 4

Abgabe am 24.11.2016 in der Vorlesung

Aufgabe 12: Legendre-Polynome

Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome $P_l(\hat{z})$ auch durch die Relationen

$$P_0(\hat{z}) = 1\,, \qquad\qquad P_l(\hat{z}) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{d\hat{z}^l}(\hat{z}^2-1)^l$$

gegeben sind.

Mögliche Strategie: Zeigen Sie, dass $f(\hat{z}) = (\hat{z}^2-1)^l$ die Differentialgleichung

$$(\hat{z}^2-1)\, f'(\hat{z}) = 2\, l\, \hat{z}\, f(\hat{z})$$

erfüllt. Leiten Sie die Differentialgleichung $l+1$-mal ab, und zeigen Sie, dass sie daraus die Legrende-Differentialgleichung erhalten. (8 Punkte)

Aufgabe 13: Legendre-Polynome Teil II

Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome $P_l(\hat{z})$ folgende Relation erfüllen,

$$\int_{-1}^{1} d\hat{z}\, P_l(\hat{z})\, P_m(\hat{z}) = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{lm}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $l \neq m$ sowie $l = m$ getrennt voneinander. (8 Punkte)

Aufgabe 14: Zylindersymmetrisches Problem

Berechnen Sie das elektrostatische Feld eines homogen geladenen unendlich dünnen Kreisrings mit Radius R. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass der Kreisring in der xy-Ebene liegt mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung. (9 Punkte)

Mögliche Strategie:

- Berechnen Sie zuerst das elektrostatische Potential entlang der z-Achse
- Argumentieren Sie, dass man für $r < R$ bzw für $r > R$ (wobei $r = |\boldsymbol{r}|$) das Potential in Legendre-Polynome entwicklen kann. Welche Koeffizienten verschwinden jeweils?
- Bestimmen Sie die nicht-verschwindenden Koeffizienten für $r > R$ bzw $r < R$ indem Sie das Resultat für das elektrostatische Potential entlang der z-Achse verwenden.