Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

**Elektrodynamik**

Wintersemester 2016/17

Hausübung 2

Abgabe am 10.11.2016 in der Vorlesung

## Aufgabe 5: Potential eines dünnen Stabes

Benutzen Sie im Folgenden die Beziehung

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3\boldsymbol{r}' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

zwischen der Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$ und dem skalaren Potential $\phi(\boldsymbol{r})$.

(a) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential und die elektrische Feld-stärke eines homogen geladenen unendlich dünnen Stabes der Länge $2a$.

Hinweis: Legen Sie den Stab entlang der $z$-Achse mit Endpunkten $z = -a$ und $z = a$. Des Weiteren führen Sie Zylinderkoordinaten $(z, \rho, \phi)$ ein mit $\rho^2 = x^2 + y^2$ und drücken Sie das Potential durch die Abstände $r_\pm$ von den Endpunkten des Stabes aus, d.h. $r_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \mp a)^2}$ .

(b) Zeigen Sie das die Äquipotentiallinien Rotationsellipsoide um die $z$-Achse sind.

(c) Skizzieren Sie die Äquipotential- und Feldlinien. An welchen Stellen ist das Potential bzw. das elektrische Feld singulär?

(5+4+6 Punkte)

## Aufgabe 6: Bildladung / Flächenladungsdichte

Wir betrachten im Folgenden eine geerdete Metallkugel mit Radius $R$. Der Mittelpunkt der Metallkugel sei im Koordinatenursprung. Außerdem befindet sich im Abstand $a > R$ vom Mittelpunkt der Kugel entfernt eine Punktladung $Q$.

(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential mit Hilfe der Methode der Bildladung.

(b) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte auf der Oberfläche der Metallkugel!

(5+5 Punkte)

## Aufgabe 7: Bildladungsmethode

Eine Punktladung $q$ befindet sich zwischen zwei geerdeten leitenden Metallplatten, die sich unter dem Winkel $\alpha = 90°$ schneiden. Bestimmen Sie das elektrostatische Potential sowie das elektrische Feld. Skizzieren Sie wie Sie Ihre Resultate auf Winkel der Form $\alpha = 180°/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern können. (5 Punkte)

## Lösung Aufgabe 5

(a) Wie in der Aufgabenstellung beschrieben legen wir den Stab auf die $z$–Achse. Die Ladungsdichte eines solchen unendlich dünnen, homogen geladenen Stabes kann mit Hilfe der $\delta$–Funktion ausgedrückt werden als

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\rho(z), \qquad \rho(z) = \begin{cases} q & -a \le z \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Hierbei ist $q$ eine konstante Ladungsdichte. Für das elektrostatische Potential ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{r}) &= \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, d^3\boldsymbol{r} \\ &= q \int_{-a}^{a} dz \int dx'\, dy' \frac{\delta(x')\delta(y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \\ &= q \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} dz' \\ &= q \ln\left[\frac{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}-z+a}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}-z-a}\right], \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $\rho^2 = x^2 + y^2$ ist. Alternativ kann man für das Integral auch den Wert

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = -q \ln\left[\frac{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}+z-a}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}+z+a}\right] \tag{3}$$

erhalten. Diese beiden Resultate sind äquivalent, da

$$\frac{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}+z-a}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}+z+a} = \frac{\sqrt{\rho^2+(a-z)^2}+a-z}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}-z-a} \tag{4}$$

wie man durch Überkreuzmultiplizieren und Anwenden der dritten Binomischen Formel leicht sehen kann.

Definieren wir, wie in der Aufgabenstellung vorgegeben, die Abstände der beiden Stabenden vom Beobachtungspunkt mit $r_+$ bzw. $r_-$, so läßt sich (2) in derForm

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = q \ln\left[\frac{r_+ - z + a}{r_- - z - a}\right] \tag{5}$$

schreiben.

(b) Per Definition sind Äquipotentialflächen charakterisiert duch die Bedingung, dass das elektrostatische Potential auf dieser konstant ist, d.h. in unserem Fall dass das Argument des Logarithmus in (5) eine Konstante ist,

$$k = \frac{r_+ - z + a}{r_- - z - a}. \tag{6}$$

Durch Äquivalenzumformungen erhält man

$$r_-^2 - r_+^2 = 4az, \qquad z = \frac{1}{4a}(r_-^2 - r_+^2).$$

Setzt man das jetzt in (5) ein, so ergibt sich

$$k = \frac{4ar_+ - r_-^2 + r_+^2 + 4a^2}{4ar_- - r_-^2 + r_+^2 - 4a^2} = \frac{(r_+ - r_- + 2a)(r_+ + r_- + 2a)}{(r_+ - r_- + 2a)(r_+ + r_- - 2a)},$$

d.h.

$$k = \frac{r_+ + r_- + 2a}{r_+ + r_- - 2a} = const.$$

Damit diese Identität erfüllt ist, muß offenbar

$$r_+ + r_- = const. \tag{7}$$

gelten. Das ist aber genau die Gleichung eines Ellipsoids. Die Äquipotentialflächen sind also Rotationsellipsoide.

(c) Das elektrische Feld berechnet sich aus dem elektrostatischen Potential durch $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$. Durch die Geometrie der Konfiguaration bzw. durch die explizite Lösung für das elektrostatische Potential folgt, dass das elektrische Feld axialsymmetrisch ist, d.h. keine $\varphi$–Komponente hat. Wir finden

$$\begin{aligned} E_\rho &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = -q\,\rho\left[\frac{1}{(r_+ - z + a)r_+} - \frac{1}{(r_- - z - a)r_-}\right], \\ E_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = q\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right]. \end{aligned}$$

Schauen wir uns die beiden Komponenten des elektrischen Feldes näher an: $E_z$ ist offenbar singulär für

$$r_\pm = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho = 0,\; z = \pm a,$$

d.h. genau an den Stabenden. Demgegenüber ist $E_\rho$ singulär für

$$r_\pm = 0$$

und für

$$\begin{aligned} r_+ + a - z = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad z = a + r_+ \\ r_- - a - z = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad z = r_- - a. \end{aligned}$$

Das heißt, $E_\rho$ ist, ebenso wie das Potential, auf dem gesamten Stab singulär.

## Lösung Aufgabe 6

Gesucht ist die Flächenladungsdichte einer geerdeten Metallkugel, die sich im Feld einer Punktladung $Q$ befindet. Auf der Kugeloberfläche verschwindet das Potential, da die Metallkugel geerdet ist. Wir suchen also die Lösung des Potentialproblems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\boldsymbol{r}) &= -4\pi\,Q\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}), &\quad \text{für } |\boldsymbol{r}| > R \qquad (8)\\ \Phi(\boldsymbol{r}) &= 0 &\quad \text{für } |\boldsymbol{r}| = R\,. \qquad (9) \end{aligned}$$

Es bietet sich hier an, zur Berechnung des Potentials die Spiegelladungsmethode zu verwenden. Das Prinzip hierbei ist folgendes: Das Potential einer Punktladung

$$\Phi_1(r) = \frac{Q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|}$$

ist sicher eine Lösung von (8), erfüllt aber die Randbedingungen nicht. Addieren wir nun eine im Außenraum harmonische Funktion $\Phi_2$ hinzu, so ist $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ auch eine Lösung der Laplacegleichung. Durch geeignete Wahl von $\Phi_2$ werden die Randbedingungen erfüllt.

In unserem Fall ist es besonders einfach: wir setzen einfach eine Spiegelladung $Q'$ ins Innere der Kugel, so dass

$$\Phi = \left[\frac{Q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|} + \frac{Q'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a'}|}\right]. \tag{10}$$

Dabei ist aufgrund von Symmetrieüberlegungen $\boldsymbol{a'} = c\,\boldsymbol{a}$. Um die Randbedingung zu lösen ist es sinnvoll $\boldsymbol{a}$ entlang der z-Achse zu legen, d.h. $\boldsymbol{a} = a\,\boldsymbol{e}_z$ mit $a > R > 0$. Damit liegt auch $\boldsymbol{a'}$ auf der z-Achse wobei $a' < R$ gilt.

Auf dem Rand der Kugel soll das Potential verschwinden. Insbesondere muss das für die Punkte $\boldsymbol{r} = (0, 0, R)$ und $\boldsymbol{r} = (0, 0, -R)$ gelten. Somit erhält man für den Punkt $\boldsymbol{r} = (0, 0, R)$

$$\frac{Q}{a - R} + \frac{Q'}{R - a'} = 0\,, \tag{11}$$

d.h.

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{R - a'}{a - R}\,. \tag{12}$$

Für den Punkt $\boldsymbol{r} = (0, 0, -R)$ gilt

$$\frac{Q}{R + a} + \frac{Q'}{R + a'} = 0\,, \tag{13}$$

und somit unter Verwendung von (12)

$$(R + a)(R - a') = (R + a')(a - R) \tag{14}$$

und somit

$$a' = \frac{R^2}{a}. \tag{15}$$

Damit folgt für die Spiegelladung (12)

$$Q' = -\frac{R}{a}\,Q. \tag{16}$$

Das Potential der geerdeten Metallkugel ist im Außenraum durch

$$\begin{aligned}
\Phi &= Q\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|} - \frac{R}{a}\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a'}|}\right] && (17)\\
&= Q\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2a\,r\,\cos\theta}} - \frac{R}{a}\frac{1}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r\,\cos\theta}}\right] && (18)
\end{aligned}$$

gegeben, wobei $\theta$ der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{r}$ ist.

Die Flächenladungsdichte $\sigma$ ist (bis auf eine multiplikative Konstante) gerade die Normalenableitung des Potentials auf dem Rand der Kugel, also

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=R}. \tag{19}$$

Die Normalenableitung von $\Phi$ ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=R} &= Q\left[\frac{R}{a}\frac{r-a'\cos\theta}{[r^2+a'^2-2a'r\,\cos\theta]^{3/2}} - \frac{r-a\,\cos\theta}{[r^2+a^2-2a\,r\,\cos\theta]^{3/2}}\right]_{r=R} \\ &= Q\left[\frac{R}{a}\frac{R-(R^2/a)\cos\theta}{[R^2+(R^4/a^2)-2(R^3/a)\cos\theta]^{3/2}} - \frac{R-a\,\cos\theta}{[R^2+a^2-2aR\,\cos\theta]^{3/2}}\right]\end{aligned} \tag{20}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\frac{R}{a}\frac{R-(R^2/a)\cos\theta}{[R^2+(R^4/a^2)-2(R^3/a)\cos\theta]^{3/2}} &= \frac{R^2}{a^2}\frac{a-R\,\cos\theta}{R^3[1+(R^2/a^2)-(2R/a)\cos\theta]^{3/2}} \\ &= \frac{a}{R}\frac{a-R\,\cos\theta}{[R^2+a^2-2aR\,\cos\theta]^{3/2}}.\end{aligned}$$

Setzen wir das oben ein, so erhalten wir schließlich für die Normalenableitung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{Q}{[R^2+a^2-2aR\,\cos\theta]^{3/2}}\frac{a^2-R^2}{R}, \tag{21}$$

und damit die Oberflächenladung

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi[R^2+a^2-2aR\,\cos\theta]^{3/2}}\frac{R^2-a^2}{R}. \tag{22}$$

Wie nicht anders zu erwarten hängt die Flächenladungsdichte $\sigma$ vom Abstand $a$ der Punktladung $Q$ ab. Insbesondere ist $\sigma = 0$ falls $a = R$, d.h., falls sich die Punktladung direkt auf der Kugel befindet.

## Lösung Aufgabe 7

Wir betrachten zwei geerdete leitende Metallplatten im Winkel von 90 Grad. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Metallplatten durch

$$\begin{aligned}M_1 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x\geqslant 0, y=0, z\in\mathbb{R}\right\}, \\ M_2 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x=0, y\geqslant 0, z\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

beschrieben, d.h. in der $xy-$Ebene.
Für die Aufgabe ist es hilfreich, die Beschränkung $x \geqslant 0$ für $M_1$ bzw. $y \geqslant 0$ für $M_2$ aufzuheben und $M_1$ auch für $x \leqslant 0$ bzw. $M_2$ für $y \leqslant 0$ zu definieren.
Nun werden drei Bildladungen in die Ebene gelegt:


Es gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\boldsymbol{r}'_0 = \begin{pmatrix} -x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}''_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}'''_0 = \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt für das Potential mit $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) =& \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} + \frac{-q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + z^2}} \\ &+ \frac{-q}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Dieses Potential erfüllt

$$\phi(x = 0, y, z) = 0 \;\text{ und }\; \phi(x, y = 0, z) = 0,$$

d. h. die richtigen Randbedingungen. Dazu war es nötig Bildladungen zu Bildladungen zu betrachten.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\,\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} - \frac{q\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_0|^3} - \frac{q\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}''_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}''_0|^3} + \frac{q\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'''_0)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'''_0|^3}.$$

Zur Verallgemeinerung auf Winkel von $\varphi = 180°/n$ beachte, dass man die Prozedur Bildladungen von Bildladungen zu betrachten solange fortsetzen muss, bis man wieder die Original Ladung erhält. Die Metallplatten sind wieder in der $(xy)-$Ebene angeordnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschreiben wir eine der Metalplatten durch $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, y,\, z \in \mathbb{R}\}$. Wir betrachten die Drehmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$ und $\boldsymbol{s}_0 = (-x_0, y_0, 0)$ kann man alle anderen Bildladungen mit $\boldsymbol{r}_0^{(i)}$ und $\boldsymbol{s}_0^{(i)}$ erzeugen aus $\boldsymbol{r}_0^{(i)} = D^{2i}\,\boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{s}_0^{(i)} = D^{2i}\,\boldsymbol{s}_0$. Insbesondere gilt $D^{2n} = \mathbb{1}$, d.h.

$\boldsymbol{r}_0^{(0)} = \boldsymbol{r}_0^{(n)} = \boldsymbol{r}_0$.
Somit ergibt sich

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0^{(i)}|} - \frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_0^{(i)}|} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} q \left( \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0^{(i)}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0^{(i)}|^3} - \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_0^{(i)}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_0^{(i)}|^3} \right).$$