THEORETISCH-PHYSIKALISCHES INSTITUT
FRIEDRICH-SCHILLER UNIVERSITÄT JENA

Elektrodynamik

Wintersemester 2016/17

Hausübung 1

Aufgabe 1: Rechnen mit ∇

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3},$$

wobei $\boldsymbol{m}$ ein konstanter Vektor und $r = |\boldsymbol{r}|$ ist. Berechnen Sie $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Kugelsymmetrie

Wir betrachten im Folgenden eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$ wobei $r = |\boldsymbol{r}|$.

(a) Argumentieren Sie, dass das elektrische Feld nur eine radiale Komponente hat, d.h.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

(b) Wir nehmen desweiteren an, dass die Ladungsverteilung ausserhalb einer Kugel um den Ursprung mit Radius R verschwindet. Zeigen Sie mit Hilfe der integralen Maxwell-Gleichung, dass $f(r)$ durch

$$f(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = \frac{Q(r)}{r^2} \tag{1}$$

gegeben ist. Interpretieren Sie die Grösse $Q(r)$. Wie verhält sich das elektrische Feld für $r > R$?

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld für eine homogen geladene Kugelschale mit Radien R_1 und R_2 (wobei $R_2 > R_1$) mit Gesamtladung Q.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ladungsverteilung durch

$$\rho(r) = \rho_0\ \Theta(R_2 - r)\ \Theta(r - R_1)$$

gegeben ist, wobei Θ die Heaviside Funktion ist mit $\Theta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$. Bestimmen Sie ρ_0 in Abhängigkeit von R_1, R_2 und Q!

(d) Lösen Sie die Poisson-Gleichung für eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(r)$. Lösung (für spätere Teilaufgabe):

$$\phi(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r dr' r'^2\, \rho(r') + 4\pi \int_r^\infty dr'\, r'\, \rho(r')\,. \tag{2}$$

(e) Berechnen Sie das Potential für die Ladungsverteilung in Aufgabe 2 (c).

(2+4+4+3+3 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Modifiziertes Yukawa-Potential

Bestimmen Sie für das kugelsymmetrische Potential

$$\phi(r) = \frac{q}{r}(1 + br)e^{-ar} \tag{3}$$

die dazugehörige Ladungsverteilung. (4 Punkte)

Aufgabe 4: Kugelsymmetrische Ladungsdichte

Gegeben sei die kugelsymmetrische Ladungsdichte

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{L}{r}(1 - e^{-ar})\,\Theta(R - r)\,,$$

wobei $r = |\boldsymbol{r}|$. Außerdem sind L, R und a positive Konstanten. Berechnen Sie mit Hilfe der Poisson-Gleichung das elektrostatische Potential und hieraus das elektrische Feld. (5 Punkte)