

Vorlesungsskript zur Elektrodynamik für Lehramt

Martin Ammon

Friedrich-Schiller Universität Jena

Sommersemester 2018

Vorwort

Dieses Skript basiert auf Vorlesungen, die ich im Sommersemester 2018 an der Friedrich-Schiller Universität in Jena für Studierende des Lehramt gehalten habe. Dabei wurde das in den Vorlesungen *Mathematische Methoden der Physik, Teil I* und *Theoretische Mechanik* vermittelte Wissen vorausgesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
1.1	Stellenwert der Elektrodynamik in der Physik	7
1.2	Historische Einordnung	8
1.3	Maxwell-Gleichungen	9
1.4	Struktur der Vorlesung	10
2	Elektrostatik	13
2.1	Vom Coulombgesetz zur elektrischen Feldstärke	13
2.2	Das Skalare Potential & Feldgleichungen	18
2.3	Elektrostatische Feldenergie	26
2.4	Das Randwertproblem der Elektrostatik	28
2.4.1	Eine naive Klassifizierung: Leiter und Isolatoren	28
2.4.2	Verhalten des elektrischen Feldes an Grenzflächen	30
2.4.3	Formulierung des Randwertproblems	32
2.4.4	Methode der Spiegelladungen	34
2.4.5	Methode der Greenschen Funktionen	38
2.4.6	Anwendung: Kapazitäten	42
2.5	Multipolentwicklung	45
2.5.1	Energie und Drehmoment von Multipolen*	48
2.5.2	Alternative Form der Multipolentwicklung	50
2.5.3	Eigenschaften der Legendre-Polynome	52
2.6	Lösungsmethoden der Laplace-Gleichung	57
2.6.1	Separationsansatz	57
2.6.2	Einschub: Wichtige Eigenschaften von Kugelflächenfunktionen	63
2.6.3	Einschub: Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten	64
3	Magnetostatik	69
3.1	Strom und Stromdichte	69
3.2	Vom Amperegesetz zur magnetischen Induktion	72
3.3	Das Vektorpotential & Feldgleichungen	76
3.4	Multipolentwicklung	79
3.4.1	Beispiele	80

3.4.2 Kraft und Drehmoment eines magnetischen Dipols* 81

1 Einführung

Der Gegenstand dieser Vorlesung ist die klassische Elektrodynamik ist, ein Teilgebiet der Physik, das sich mit bewegten elektrischen Ladungen und mit zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern beschäftigt.

1.1 Stellenwert der Elektrodynamik in der Physik

Die Elektrodynamik hat – zu Recht – einen besonders hohen Stellenwert in der theoretischen Physik und somit auch in der universitären Ausbildung der Physiker. Nach heutigem Wissen beschreibt die Elektrodynamik eine der vier fundamentalen Naturkräfte bzw. Wechselwirkungen. Im einzelnen sind dies

- die Gravitationskraft,
- die elektromagnetische Kraft,
- die starke Kernkraft und
- die schwache Kernkraft.

Die starke und die schwache Kernkraft haben nur eine sehr geringe Reichweite auf der Größenskala der Elementarteilchenphysik und können daher nicht klassisch (sondern nur im Rahmen von Quantenfeldtheorien) beschrieben werden. Aus diesem Grund spielen diese beiden Naturkräfte auch keine Rolle in der Physik des Alltags.

Sowohl die Gravitationskraft als auch die elektromagnetische Kraft sind langreichweitig. Die Gravitationskraft kann im Rahmen einer klassischen Feldtheorie beschrieben werden und wird umfassend in Vorlesungen zur *Allgemeinen Relativitätstheorie* behandelt. Die Elektromagnetische Kraft wird durch die von James Clerk Maxwell postulierten Maxwell-Gleichungen beschrieben. Das zentrale Anliegen dieser Vorlesung ist es, die Maxwell-Gleichungen aufzustellen und für interessante Spezialfälle zu lösen.

Die obige Liste der fundamentalen Naturkräfte erscheint zuerst sehr kurz, und auch etwas willkürlich. So vermisst man die im Alltag wichtigen Reibungskräfte und auch diverse Arten von chemischen Kräfte, die beispielsweise verantwortlich für Bindungskräfte in Molekülen sind. In der Tat lassen sich alle diese Kräfte auf

die elektromagnetischen Kräfte zurückführen, was wiederum den Stellenwert dieser fundamentalen Naturkraft untermauert.

Neben Ihrer alltäglich Relevanz spielte die Elektrodynamik auch eine wichtige Rolle in der Entwicklung der theoretischen Physik. So wurde bereits Ende des 19. Jahrhunderts gezeigt, dass die Lorentz-Transformationen, benannt nach Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928), Symmetrien der Maxwell-Gleichungen sind. Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie postulierte Albert Einstein im Jahr 1905, dass auch Raum und Zeit unter Lorentz-Transformationen unterworfen sind, was unsere Vorstellung von Raum und Zeit grundsätzlich geändert hat.

Zudem ist die Elektrodynamik Vorbild für die Theorie der schwachen Wechselwirkung und für die Theorie der starken Wechselwirkung. Die hierfür wichtigen strukturellen Konzepte werden ebenfalls in dieser Vorlesung dargelegt. Insbesondere ist es bereits im Rahmen der Elektrodynamik gelungen, die elektrischen und magnetischen Kräfte in einer einzigen Theorie zu vereinigen und gleichzeitig aufzuzeigen, dass Optik nur ein Spezialfall der Elektrodynamik ist. Damit waren um 1890 die drei wichtigen Fachrichtungen der Physik, Optik, Magnetismus und Elektrizität mit einer Theorie beschreibbar.

Eine solche Vereinheitlichung aller oben aufgeführten vier fundamentalen Naturkräfte ist das Ziel der modernen theoretischen Physik. Im Rahmen der elektroschwachen Theorie ist es bereits um 1960 Glashow, Salam und Weinberg gelungen, die elektromagnetische Kraft und die schwache Kernkraft in einer Theorie zu formulieren. Ebenfalls gibt es im Rahmen von Großen Vereinheitlichungstheorien (engl. *grand unified theories*, kurz GUT) erste Erfolge auch die starke Kernkraft mit einzubeziehen. Wiederum hat hier die Struktur der Elektrodynamik eine sehr wichtige Rolle gespielt. Leider ist es noch nicht gelungen, Gravitation zu quantisieren und mit den anderen fundamentalen Naturkräften zu vereinheitlichen, wobei es beispielsweise im Rahmen von Stringtheorie erfolgversprechende Ansätze gibt.

1.2 Historische Einordnung

Bis Anfang des 19. Jahrhunderts gab es zahlreiche quantitative Beschreibungen der elektrischen und magnetischen Phänomene, die in den Disziplinen *Elektrizität* und *Magnetismus* getrennt untersucht wurden.

Der dänischen Physikers Hans Christian Oersted (1777 - 1851) entdeckte 1820 dass elektrische Ströme magnetische Kompassnadeln beeinflussen können. Schon kurz darauf postulierte Ampere, dass alle magnetischen Phänomene sich auf bewegte elektrische Ladungen zurückführen lassen. Der umgekehrte Schluss, dass auch veränderliche Magnetfelder elektrische Ströme verursachen, gelang dem Michael

Faraday (1791 - 1867) im Jahr 1831.

Noch 1850 konnten Laien die bahnbrechenden Erkenntnisse im Rahmen der Elektrodynamik nicht abschätzen. So wird überliefert, dass beispielsweise Michael Faraday vom damals britischen Schatzkanzler gefragt wurde, was der praktische Wert dieser ganzen Forschung sei, worauf Faraday entgegnete: *öne day, Sir, you may tax it*".

Als besonders wichtig für die Entwicklung der Elektrodynamik erwies sich Faraday's Vorstellung von raumfüllenden Kraftfeldern. Diese Vorstellung wurde von James Clerk Maxwell (1831 - 1879) weiterentwickelt, und mündete in die nach ihm benannten Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik, die er im Jahr 1864 publizierte. In diesen Arbeiten studierte Maxwell auch elektromagnetische Wellen, die durch Raum und Zeit propagieren, aber nur mit einer bestimmten Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit c . Dies bestätigt auch frühere Vermutungen von Faraday, dass Licht elektromagnetisch ist. Die bahnbrechenden Versuche von Heinrich Hertz im Jahr 1888 brachten dann die entscheidende Bestätigung der Theorie. Somit waren Optik, Magnetismus und Elektrizität, die drei Hauptbetätigungsfelder der Physik in der damaligen Zeit, in der Elektrodynamik aufgegangen.

1.3 Maxwell-Gleichungen

Ausgehend von einer Ladungsverteilung $\rho(t, \mathbf{x})$ und einer Stromdichte $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ kann man mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen das elektrische Feld $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ berechnen. Die Maxwell-Gleichungen werden im Rahmen der Vorlesung motiviert und noch genauer besprochen. Hier soll nur ein erster Eindruck vermittelt werden, wie diese aussehen. Insbesondere diskutieren wir nur die Maxwell-Gleichungen in differentieller Form. In der in Experimentalphysik geläufigen SI-Einheiten lauten diese

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \end{aligned} \tag{1.1}$$

μ_0 ist die Permeabilitätskonstante des Vakuums, und ϵ_0 wird als Dielektrizitätskonstante des Vakuums bezeichnet.¹

¹In theoretischer Physik wird häufiger ein anderes Einheitensystem verwendet. Die genauen Unterschiede werden in den Kapitel 2,3 und 4 erläutert. In den sogenannten Gaußschen Einheiten

Man beachte, dass die Maxwell-Gleichungen aus zwei skalaren und zwei vektoriel- len Differentialgleichungen, also insgesamt aus 8 Gleichungen, bestehen für insge- samt sechs Komponenten (davon drei für das elektrische Feld \mathbf{E} und drei für das magnetische Feld \mathbf{B}).

Bei Anwesenheit von Materie sind die oben stehenden, sogenannten mikroskopi- schen Maxwell-Gleichungen einerseits unhandlich, da schließlich jeder Ladungsträger in jedem Atom des Mediums berücksichtigt werden muss. Andererseits können die magnetischen Eigenschaften (beispielsweise von einem Permanentmagneten) prin- zipiell nicht ohne zusätzliche physikalische Erkenntnisse der Quantenmechanik aus den mikroskopischen Maxwell-Gleichungen abgeleitet werden.

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen berücksichtigen die Eigenschaften der Materie in Form von Materialparametern. Genauer gesagt kommt die Bezeichnung „makroskopisch“ dadurch zustande, dass die Eigenschaften der Materie letztlich örtlich gemittelte Eigenschaften der Materie kennzeichnen. Im Hinblick auf die La- dungen wird dabei zwischen freien Ladungsträgern (etwa Leitungselektronen im elek- trischen Leiter) und gebundenen Ladungsträgern (etwa Elektronen in den Atomhüllen) unterschieden, und es wird davon ausgegangen, dass die gebundenen Ladungsträger durch mikroskopische Prozesse zu einer makroskopischen Polarisierung \mathbf{P} bzw. Ma- gnetisierung \mathbf{M} führen.

Wenn von Maxwell-Gleichungen im Folgenden die Rede ist, so sind damit die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen gemeint.

1.4 Struktur der Vorlesung

Im folgenden soll die Struktur der Vorlesung kurz vorgestellt skizziert werden:

Im Kapitel 2 wird die *Elektrostatik* behandelt, ein Spezialfall der Elektrodyna- mik, der sich mit ruhenden elektrischen Ladungen und ihren elektrischen Feldern beschäftigt. Insbesondere werden in diesem Kapitel Lösungsmethoden vorgestellt, wie man ausgehend von einer zeitlich konstanten elektrischen Ladungsverteilung ρ

lauten die differentiellen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Da jedoch auch in der Schule (zu Recht) das SI-Einheitensystem verwendet wird, wird auch hier (bis auf punktuelle Bemerkungen in den oben angegebenen Kapiteln) dieses Einheitensystem verwendet.

das elektrische Potential ϕ bzw. das elektrische Feld \mathbf{E} berechnet.

Kapitel 3 der Vorlesung handelt von der *Magnetostatik*. Magnetostatik ist ebenfalls ein Spezialfall der Elektrodynamik, in der beispielsweise die räumliche Verteilung von Magnetfeldern in der Umgebung von Dauermagneten und von stationären Strömen untersucht wird.

In Kapitel 4 werden ausgehend von den Resultaten der Kapitel 2 und 3 die *Maxwell-Gleichungen*, die Grundgleichungen der Elektrodynamik, motiviert.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit *Elektrodynamik in Materie*. Wie bereits oben ausgeführt ist es nicht zweckmässig die mikroskopischen Maxwell-Gleichungen zu verwenden, sondern statt dessen Maxwell-Gleichungen mit örtlich gemittelte Eigenschaften der Materie, die sogenannten makroskopischen Maxwell-Gleichungen.

In Kapitel 6 werden dann *elektromagnetischen Wellen* diskutiert, und deren Propagation im Vakuum untersucht. Kapitel 7 behandelt daraufhin die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen.

Im Anschluss wird in Kapitel 8 die *relativistische Formulierung der Elektrodynamik* vorgestellt. Insbesondere werden die oben angesprochenen Lorentz-Transformationen hergeleitet. Kapitel 9 widmet sich der *Dynamik relativistischer Teilchen und Felder*.

2 Elektrostatik

In diesem Kapitel wird die Elektrostatik behandelt, ein Spezialfall der Elektrodynamik, der sich mit ruhenden elektrischen Ladungen und ihren elektrischen Feldern beschäftigt. Zuerst werden wir die Maxwell-Gleichungen für das elektrische Feld \mathbf{E} in diesem Spezialfall herleiten. Anschließend werden in diesem Kapitel Lösungsmethoden vorgestellt, wie man ausgehend von einer zeitlich konstanten elektrischen Ladungsverteilung ρ das elektrische Potential ϕ bzw. das elektrische Feld \mathbf{E} berechnet.

2.1 Vom Coulombgesetz zur elektrischen Feldstärke

Eigenschaften der elektrischen Ladung

Die Elektromagnetismus handelt von der Dynamik elektrischer Ladungen. Bevor wir daher die Maxwell-Gleichungen motivieren, sollten wir uns Gedanken über Eigenschaften der elektrischen Ladung machen. Diese Eigenschaften basieren auf zahlreichen Experimenten, die im folgenden nicht diskutiert werden sollen. Die Haupteigenschaften der Ladung sind:

- *Es gibt nur eine Ladungsart.* Diese Ladungsart kann positiv oder negativ sein, je nachdem ob Mangel oder Überschuss dieser Ladung vorhanden ist.
- *Ladung ist erhalten.* Die Ladung in einem abgeschlossenen System kann insbesondere nicht erzeugt oder vernichtet werden. So kann zwar ein positiv geladenes Teilchen (beispielsweise das Positron, das Anti-Teilchen des Elektrons) ein Elektron vernichten und es entsteht ein ungeladenes Photon. Die Gesamtladung dieses Prozesses ist aber erhalten: vor der Annihilation war eine positive und eine negative Ladung vorhanden, insgesamt also verschwand die Gesamtladung. Nach der Annihilation war nur das ungeladene Photon vorhanden.
- *Ladung ist quantisiert.* Freie elektrische Ladungen kommen nur als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e vor. Das Elektron hat als Ladung $-e$, während das Positron und das Proton die Gesamtladung $+e$ haben. Das Neutron ist ungeladen. Der Atomkern besteht aus Protonen und Neutronen und somit ist die Ladung des Atomkerns ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung. Man beachte, dass nach heutigem Kenntnisstand Protonen und Neu-

tronen wiederum aus Quarks aufgebaut sind, die Elementarladung $+2/3e$ oder $-1/3e$ tragen. Diese Quarks kommen unter alltäglichen Bedingungen nicht als freie Teilchen vor, sondern sind in Hadronen (Protonen, Neutronen,...) gebunden, die wiederum nur ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung tragen. Würde man Quarks unter diesen Bedingungen als freie Teilchen beobachten, so würde sich jedoch nichts an der Gültigkeit der Aussage ändern. Da die Elementarladung klein ist, kann die Quantisierung der Ladung in der makroskopischen Physik, in der meistens Ladungen $q \gg e$ betrachtet werden, vernachlässigt werden.

Das Coulomb-Gesetz

Wir betrachten nun zwei ruhende geladene Massenpunkte im Vakuum an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 mit den Ladungen q_1 und q_2 . Experimentell wurde nachgewiesen, dass beide Massenpunkte aufeinander eine Kraft ausüben. So wirkt der Massenpunkt 2 auf den Massenpunkt 1 mit einer Kraft \mathbf{F}_{12} , während der Massenpunkt 1 auf den Massenpunkt 2 eine Kraft $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ (*actio = reactio*) ausübt. Insbesondere wissen wir aus Experimenten:

- Für $q_1 q_2 < 0$ ist die Kraft anziehend, während für $q_1 q_2 > 0$ die Kraft abstoßend ist.
- Der Betrag der Kraft, F_{12} ist invers proportional zum Quadrat des Abstands der Massenpunkte, d.h. zu $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$. Dieses Abstandsverhalten der Kraft ist experimentell über viele Größenordnungen¹ nachgewiesen, insbesondere auch für sehr kleine Abstände im Rahmen von Streuexperimenten.
- Die Kraft wirkt entlang der Verbindungslinie von \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 und ist somit eine Zentralkraft.

Ausgehend von diesen experimentellen Befunden ergibt sich für die Kraft \mathbf{F}_{12}

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (2.1)$$

Diese Gesetzmäßigkeit (2.1) wird nach Ihrem Entdecker auch Coulomb-Gesetz genannt, während die dazugehörige Kraft als Coulomb-Kraft bekannt ist.

In (2.1) wurde eine Proportionalitätskonstante k eingeführt, die von den verwendeten Einheiten für die Ladungen q_1 und q_2 abhängt. Insbesondere sind die beiden Einheitensysteme gebräuchlich:

¹Kommt man einer Punktladung näher als die Comptonwellenlänge, so hängt die Ladung des Punktteilchens tatsächlich vom Abstand ab. Dies ist ein quantenmechanischer Effekt, auf den hier nicht näher eingegangen werden kann.

- *SI-Einheitensystem (oder auch MKSA-Einheitensystem):*

Neben den bekannten Einheiten Meter m, Kilogramm kg und Sekunde s verwendet das SI-Einheitensystem auch die Einheit Ampere, abgekürzt A, als vierte Grundeinheit gewählt. Aus diesen Grundeinheiten werden die Einheiten Newton, mit N abgekürzt, Joule, J, und Coulomb, C, wie folgt abgeleitet:

$$N = \text{kg m/s}^2, \quad J = \text{N m}, \quad C = \text{As}. \quad (2.2)$$

In diesem Einheitensystem ergibt sich die Konstante k in (2.1) zu

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.3)$$

wobei ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist,

$$\epsilon_0 = 8.854187 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}. \quad (2.4)$$

Die Elementarladung e ergibt sich zu

$$e = 1.6021766208(98) \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad (2.5)$$

wobei die eingeklammerten Ziffern die Unsicherheit in den letzten Stellen des Wertes bezeichnet (geschätzte Standardabweichung).

- *Gaußsche Einheiten:*

Für die Elektrodynamik, insbesondere für deren relativistische Formulierung, erweist sich das Gaußsche Einheitensystem als wichtig, da elektrische und magnetische Felder in der gleichen Einheit gemessen werden. In diesem Einheitensystem werden die Grundeinheiten Zentimeter cm, Gramm g und Sekunde s verwendet. Abgeleitet von diesen drei Grundgrößen wird die Einheit dyn für die Kraft² und erg für die Energie bzw. Arbeit

$$\text{dyn} = \text{g cm/s}^2 = 10^{-5} \text{ N} \quad \text{erg} = \text{dyn cm} = 10^{-7} \text{ J} \quad (2.6)$$

eingeführt. Ausgehend von diesem *cgs* Einheitensystem, wird die Ladung so definiert, dass die Proportionalitätskonstante k den Wert $k = 1$ annimmt. Insbesondere wählt man daher die Ladungseinheit so, dass sich zwei gleich geladene Punktteilchen im Abstand von 1 cm mit der Kraft 1 dyn abstoßen. Diese Ladungseinheit wird im Englischen als *electrostatic unit* bezeichnet und daher mit esu abgekürzt:

$$1 \text{ dyn} = \frac{(1 \text{ esu})^2}{\text{cm}^2} \quad 1 \text{ esu} = \frac{\text{cm}^{3/2} \text{ g}^{1/2}}{\text{s}}. \quad (2.7)$$

²Das Dyn wurde als Kräfteinheit 1873 vereinbart und war die erste international verbindliche Einheit der Kraft überhaupt.

Das Coulomb-Gesetz in Gaußschen Einheiten ist somit gegeben durch

$$\mathbf{F}_{12} = q_1 q_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (2.8)$$

Vergleicht man das Coulomb-Gesetz in Gaußschen Einheiten mit dem in SI Einheiten, so erhält man die folgende Umrechnungsformel

$$1 \text{ C} = 2.9979 \cdot 10^9 \text{ esu} \quad (2.9)$$

bzw. für die Elementarladung

$$e = 4.8032 \cdot 10^{-10} \text{ esu}. \quad (2.10)$$

Im folgenden werden wir immer das SI-Einheitensystem benutzen.

Die Coulomb-Kraft ist eine Zweikörperkraft, für die das Superpositionsprinzip gilt. Insbesondere gilt in Anwesenheit von $N - 1$ weiteren Ladungen q_i (mit $i = 2, \dots, N$), dass auf die Ladung q_1 die Kraft

$$\mathbf{F} = \sum_{i=2}^N \mathbf{F}_{1i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \sum_{i=2}^N q_i \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.11)$$

ausgeübt wird.

Die elektrische Feldstärke

Das Coulomb-Gesetz (2.11) kann wie folgt gedeutet werden: Die $N - 1$ Punktladungen q_i wirken direkt auf die Punktladung q_1 ohne Mitwirkung des dazwischenliegenden Raumes. Es liegt scheinbar eine nicht-lokale Wechselwirkung vor. Eine Wechselwirkung heißt lokal, wenn sie in jedem Raum-Punkt \mathbf{r} unabhängig von allen anderen Punkten $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$ eingeführt werden kann. Des Weiteren ist die Ausbreitung der Wirkung instantan.

Das Konzept der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} , das wir im Folgenden einführen, erlaubt jedoch eine andere Deutung. Um die elektrische Feldstärke zu definieren, führen wir formal eine Testladung q am Ort \mathbf{r} ein. Die Testladung soll (infinitesimal) klein im Vergleich zu den anderen Ladungen q_i an den Orten \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, N$) sein.

Zuerst betrachten wir den Fall nur einer Ladung q_1 am Ort \mathbf{r}_1 , die auf die Testladung q am Ort \mathbf{r} die Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q_1 \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (2.12)$$

ausübt. Wir definieren nun die elektrische Feldstärke (kurz: elektrische Feld) $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{q} \mathbf{F} \quad (2.13)$$

Benutzt man (2.12) so erhält man für die elektrische Feldstärke in diesem Fall

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}} \quad (2.14)$$

Man beachte, dass das elektrische Feld formal im ganzen Raum definiert ist. Für $q_1 > 0$ ist das elektrische Feld um den Punkt \mathbf{r}_1 radial nach außen gerichtet, während es für $q_1 < 0$ nach innen gerichtet ist.

Mit Hilfe des elektrischen Feldes erhält man nun die folgende Deutung Das geladene Teilchen 1 verändert den Zustand des leeren Raums in seiner Umgebung durch Aufbau des elektrischen Feldes \mathbf{E} der Form (2.14). Das elektrische Feld übt auf Teilchen mit Ladung q am Ort \mathbf{r} eine Kraft

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r})} \quad (2.15)$$

aus. Durch die Einführung des elektrischen Feldes ist die Wechselwirkung lokal, da in (2.15) nur der Raum-Punkt \mathbf{r} auftritt. Im SI-Einheitensystem³ besitzt die elektrischen Feldstärke die Einheit

$$[\mathbf{E}] = \frac{[\mathbf{F}]}{[q]} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} \quad (2.17)$$

Die obige Argumentation lässt sich schnell auf N Ladungen q_i am Ort \mathbf{r}_i verallgemeinern. Da die Coulomb-Kraft dem Superpositionsprinzip genügt, gilt dies auch für das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.18)$$

Das elektrische Feld bzw. deren Feldstärke scheinen hier zuerst nur Hilfsgrößen zu sein, damit die Wechselwirkung lokal ist. Im Rahmen der Elektrodynamik führen die elektrischen Felder jedoch ein Eigenleben, losgelöst von den Ladungsträgern. Beispielsweise wird dies offensichtlich, wenn wir in Kapitel 7 die elektromagnetische Strahlung diskutieren.

In vielen konkreten Rechnungen erweist es sich jedoch nicht als zweckmässig, das elektrische Feld diskreter Ladungen q_i an Punkten \mathbf{r}_i aufzusummieren wie in (2.18).

³Im Gaußschen Einheitensystem wird die Einheit der elektrischen Feldstärke mit Gauss bezeichnet

$$[\mathbf{E}] = \frac{\text{dyn}}{\text{esu}} = \frac{\text{g}^{1/2}}{\text{s cm}^{1/2}} \equiv \text{Gauß} \quad (2.16)$$

Wir betrachten hierzu an jedem Raumpunkt \mathbf{r} zum Zeitpunkt t ein infinitesimales Volumen δV und bezeichnen die in ΔV eingeschlossene Ladung mit $\Delta q(\mathbf{r}, t)$. Gilt nun $\Delta q(\mathbf{r}, t) \gg e$ für alle Raumpunkte, so spricht man von einer *kontinuierlichen Ladungsverteilung*, gegeben durch den Grenzprozeß

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\mathbf{r}, t)}{\Delta V}. \quad (2.19)$$

In der Elektrostatik gehen wir von ruhenden Ladungen aus und somit sind $\Delta q(\mathbf{r}, t)$ und die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ nicht zeitabhängig. Wir schreiben daher kurz $\rho(\mathbf{r})$.

Im Fall einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ setzt man an Stelle der Punktladung q_i in Gleichung (2.18) die Ladung $\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$ ein und ersetzt die Summe durch ein Integral. Somit erhält man⁴

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.20)$$

Um nun wieder aus diesem allgemeinen Ausdruck (2.20) für die elektrische Feldstärke den Spezialfall (2.18) zu erhalten, benötigen wir *Delta-Funktionen*, oder genauer gesagt sogenannte *Delta-Distributionen* (siehe hierzu Kapitel ??). Verwendet man den allgemeinen Ausdruck (2.20) für die elektrische Feldstärke, und wählt die Ladungsverteilung wie folgt

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.21)$$

so erhält man tatsächlich wieder den Spezialfall (2.18) für die elektrische Feldstärke.

2.2 Das Skalare Potential & Feldgleichungen

Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kann aus als (negativer) Gradient einer skalaren Funktion $\phi(\mathbf{r})$ geschrieben werden,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) \equiv -\nabla_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}). \quad (2.22)$$

Aus der Identität

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.23)$$

folgt mit (2.20), dass das skalare Potential $\phi(\mathbf{r})$ durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \quad (2.24)$$

⁴Sollte im Folgenden das Volumen des Volumenintegrals nicht näher spezifiziert sein, so bedeutet dies, dass über den ganzen Raum \mathbb{R}^3 zu integrieren ist.

gegeben ist. Man beachte, dass das skalare Potential nicht eindeutig ist, sondern eine Konstante C enthält. Es ist allgemein üblich, zu fordern, dass das Potential für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ verschwindet, was bei einer lokalisierten Ladungsverteilung impliziert, dass die Konstante C verschwindet,

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.} \quad (2.25)$$

Da das elektrische Feld als Gradient einer skalaren Funktion geschrieben werden kann, und für allgemeine skalare Funktionen $f(\mathbf{r})$

$$\text{rot grad} f(\mathbf{r}) = \nabla \times (\nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r})) = 0 \quad (2.26)$$

gilt, folgt somit, dass das elektrische Feld wirbelfrei ist,

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.27)$$

Im Folgenden berechnen wir die Divergenz des elektrischen Felds (2.20) mit Hilfe der Identität

$$\boxed{\text{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),} \quad (2.28)$$

die wir im Folgenden noch beweisen werden. Die Gültigkeit der Identität vorausgesetzt, ergibt sich somit für die Divergenz des elektrischen Feldes (2.20) einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \text{div} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

In der zweiten Zeile wurde nur die Identität (2.28) verwendet, während die letzte Zeile direkt aus der Definition der Delta-Funktion folgt. Wir haben nun gezeigt, dass die Quellen des elektrischen Feldes die elektrischen Ladungen, gegeben durch die kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$, sind.

Wir wenden uns dem Beweis für Gleichung (2.28) zu, der aus zwei Teilen besteht:

- Für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ kann man die Divergenz berechnen

$$\text{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad (2.30)$$

- Da die rechte Seite der zu beweisenden Identität eine Delta-Distribution enthält, ist es äquivalent, beide Seiten über beliebige Volumina $V \subset \mathbb{R}^3$ zu integrieren und zu zeigen, dass

$$\int_V d^3\mathbf{r} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{r}' \notin V \\ 4\pi & \text{falls } \mathbf{r}' \in V \end{cases} \quad (2.31)$$

Behandeln wir zuerst den Fall, dass $\mathbf{r}' \notin V$. In diesem Fall verschwindet der Integrand, und der Wert des Integrals ist somit 0. Für den Fall $\mathbf{r}' \in V$ können wir (ohne den Wert des Integrals zu ändern) das Volumen V durch eine Kugel um \mathbf{r}' mit Radius R ersetzen. Diese Kugel bezeichnen wir im Folgenden mit $B_R(\mathbf{r}')$, Ihre Kugeloberfläche⁵ mit $S_R(\mathbf{r}')$. Unter Verwendung des Satzes von Gauß gilt

$$\int_{B_R(\mathbf{r}')} d^3\mathbf{r} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \oint_{S_R(\mathbf{r}')} d^2\mathbf{A} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.32)$$

wobei $d^2\mathbf{A}$ ein Vektor ist, der normal auf $S_R(\mathbf{r}')$ steht und nach außen zeigt. Der Betrag von $d^2\mathbf{A}$ entspricht dem infinitesimalen Flächeninhalt d^2A . Somit folgt

$$d^2\mathbf{A} = d^2A \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.33)$$

und das Integral vereinfacht sich zu

$$\oint_{S_R(\mathbf{r}')} d^2\mathbf{A} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \oint_{S_R(\mathbf{r}')} d^2A \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (2.34)$$

Wir berechnen nun das Integral, indem wir zuerst $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ substituieren, und dann zu Kugelkoordinaten übergehen, wobei die radiale Koordinate r den festen Wert R annimmt, $r = R$:

$$\oint_{S_R(\mathbf{r}')} d^2A \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta R^2 \cdot \frac{1}{R^2} = 4\pi. \quad (2.35)$$

Damit wurde die Behauptung gezeigt.

Diese Argumente, die die Gültigkeit der Gleichung (2.28) zeigen, komplettieren die Herleitung der beiden (differentiellen) Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0,}$$

⁵Der Buchstabe B steht für das englische Wort *ball*, während der Buchstabe S für *sphere* steht.

die für ruhende Ladungen, d.h. für eine zeitlich unabhängige Ladungsdichte ρ , gültig sind. In der linken Maxwell-Gleichung geht die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ ein. Daher wird diese Differentialgleichung als inhomogen bezeichnet, während die rechte Differentialgleichung homogen ist.

Eine analoge Gleichung kann man auch für das skalare Potential $\phi(\mathbf{r})$ herleiten, welches durch (2.22) definiert ist. Wegen der Identität $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$, folgt automatisch die zweite Maxwell-Gleichung. Außerdem gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) = \Delta \phi(\mathbf{r}) \quad (2.36)$$

wobei Δ der Laplace-Operator ist. In kartesischen Koordinaten, bezeichnet mit (x, y, z) , des drei-dimensionalen Raumes \mathbb{R}^3 ergibt sich der Laplace-Operator zu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.37)$$

Mit Hilfe der Identität (2.36) erhält man für die erste Maxwell-Gleichung die *Poisson-Gleichung*

$$\boxed{\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})}. \quad (2.38)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ das skalare Potential $\phi(\mathbf{r})$ und schließlich das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ berechnen mit Hilfe von (2.22). Man beachte, dass man im Gegensatz zur Maxwell-Gleichung nur eine skalare Funktion, und nicht ein Vektorfeld mit drei Komponenten zu bestimmen hat.

Im Fall einer verschwindenden Ladungsdichte, $\rho(\mathbf{r}) = 0$, reduziert sich die Poisson-Gleichung auf die Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.39)$$

Gleichungen der Form (2.38) lassen sich mit Hilfe von Greenschen Funktionen $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ lösen, welche per Definition die Gleichung

$$\boxed{\Delta G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}. \quad (2.40)$$

erfüllen. Die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung ist damit durch

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \phi_h(\mathbf{r})} \quad (2.41)$$

gegeben, wobei $\phi_h(\mathbf{r})$ eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist, d.h. $\Delta \phi_h(\mathbf{r}) = 0$ erfüllt, und daher auch als *harmonische Funktion* bezeichnet wird. Wir werden im Verlauf des Kapitels sehen, dass die Randbedingungen diese harmonische

Funktion $\phi_h(\mathbf{r})$ eindeutig festlegen. Für die Randbedingung, dass die Felder für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ verschwinden, erhält man $\phi_h(\mathbf{r}) = 0$.

Es verbleibt also die Greensche Funktion G zu bestimmen, die (2.40) erfüllt. Im Allgemeinen ist dies eine schwierige Aufgabe. Hier haben wir aber schon wertvolle Vorarbeit geleistet, zumal wir eigentlich auch schon die Lösung (2.25) kennen.

Um die Greensche Funktion zu finden, starten wir von der Identität (2.23) und verwenden (2.28). Somit folgt

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.42)$$

und daher man die Greensche Funktion

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.43)$$

Diese Greensche Funktion ist jedoch nicht eindeutig. Beispielsweise kann man eine harmonische Funktion addieren. Die allgemeine Greensche Funktion kann daher in der Form

$$\boxed{G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + G_h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (2.44)$$

geschrieben werden, wobei G_h die Differentialgleichung $\Delta G_h(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ erfüllt.

Integrale Form der Maxwell-gleichungen der Elektrostatik

Mit Hilfe der Sätze von Gauß und Stokes kann man die differentiellen Feldgleichungen auch in integraler Form schreiben. Integriert man die inhomogene Maxwell-Gleichung über ein Volumen V , so erhält man

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon_0} Q_V = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})}, \quad (2.45)$$

wobei Q_V die im Volumen V eingeschlossene Ladung ist. Die homogene Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{E}$ übersetzt sich zu

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0}, \quad (2.46)$$

wobei \mathcal{C} eine geschlossene Kurve im Raum ist.

Feldlinien und Äquipotentialflächen

Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, kann man an Stelle des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ auch das skalare Potential $\phi(\mathbf{r})$ betrachten. Unter einer Äquipotentialfläche

versteht man die Menge aller Punkte \mathbf{r} mit dem gleichen (vorgegebenen) Wert des Potentials $\phi(\mathbf{r})$. Die Normale auf diese Äquipotentialflächen ist durch den Gradienten des skalaren Potentials $\phi(\mathbf{r})$ gegeben, und zeigt somit in Richtung des elektrischen Felds. Man spricht hiervon dann auch von sogenannten Feldlinien. Diese Feldlinien haben die folgenden Eigenschaften:

- Die Feldlinien dürfen sich nicht miteinander schneiden, da der Normalenvektor (bis auf dessen Betrag und die Richtung) immer eindeutig durch die Äquipotentialfläche festgelegt ist.
- Die Maxwell-Gleichung $\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ besagt, dass Feldlinien nicht geschlossen sein müssen in Anwesenheit von Ladungen, sondern auf diesen elektrischen Ladungen enden können. Man vereinbart, dass Feldlinien auf positiven Ladungen (oder im Unendlichen) beginnen und auf negativen Ladungen (oder im Unendlichen) enden.
- Durch die Beziehung $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kann man die Feldlinien des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ auf einen Probekörper (mit Ladung q) ausgeübte Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ veranschaulichen.

Zur Veranschaulichung der Äquipotentialflächen betrachten wir zwei Ladungen q_1 und q_2 an den Orten \mathbf{r}_1 bzw. \mathbf{r}_2 . Im Fall gleich großer aber entgegengesetzter Ladungen $q_1 = -q_2 = q > 0$ erhält man das folgende Bild für das elektrische Feld und dessen Äquipotentialflächen:

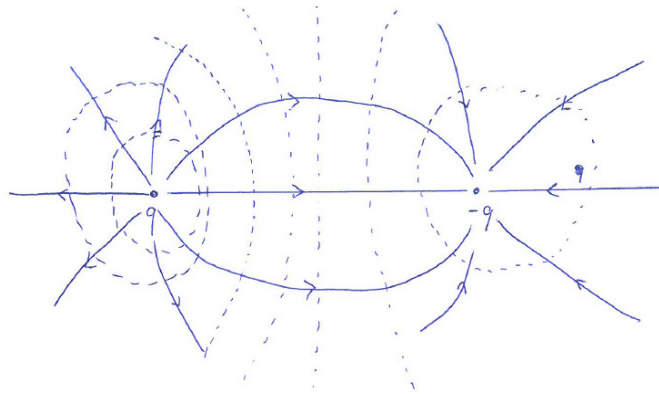


Abbildung 2.1: Feldlinien (durchgezogene Linien) und Äquipotentialflächen (gestrichelt) für gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen mit $q > 0$.

Aufgabe 2.1. Zeichnen Sie die Feldlinien und Äquipotentialflächen (gestrichelt)

für gleich große und gleichnamige Ladungen! Wie unterscheiden sich die Bilder für zwei positive und zwei negative Ladungen?

Anwendung: Feld einer homogen geladenen Kugel

Als Beispiel betrachten wir eine homogen geladene Kugel vom Radius R mit Gesamtladung Q . Da die Kugel homogen geladen ist, gilt für die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{falls } r \leq R \\ 0 & \text{falls } r > R \end{cases}, \quad (2.47)$$

wobei $r = |\mathbf{r}|$. Zwischen der konstanten Ladungsdichte ρ_0 und Q besteht der folgende Zusammenhang

$$Q = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3. \quad (2.48)$$

Im Folgenden berechnen wir das elektrische Feld und das dazugehörige skalare Potential auf zwei verschiedene Weisen, nämlich mit der integralen Form der Maxwell-Gleichungen und durch direktes Lösen der Poisson-Gleichung.

Erstes Lösungsmöglichkeit: Für die integrale Form der Maxwell-Gleichungen wie in (2.45) benötigen wir die in V eingeschlossene Ladung Q_V . Als Volumen bietet sich aufgrund der vorliegenden Kugelsymmetrie eine um den Koordinatenursprung zentrierte Kugel vom Radius r an, die wir mit $B_r(\mathbf{0})$ bezeichnen. Somit gilt:

$$Q_V = \int_{B_r(\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3 & \text{falls } r \leq R \\ \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3 = Q & \text{falls } r > R \end{cases}, \quad (2.49)$$

wobei wir im jeweils letzten Schritt die Beziehung zwischen ρ_0 und Q verwendet haben.

Des Weiteren müssen wir noch $\int_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$ für unseren Fall auswerten. Wie Sie in einer Hausübung explizit zeigen werden, ist für (um den Ursprung) kugelsymmetrische Ladungsverteilungen das elektrische Feld in der Form $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r}/r$ mit $r = |\mathbf{r}|$ gegeben. In anderen Worten, das elektrische Feld zeigt radial nach außen (oder innen, je nach Vorzeichen der Ladung). Da ebenfalls $d^2\mathbf{A}$ radial nach außen zeigt, d.h. $d^2\mathbf{A} = d^2A \mathbf{r}/r$ folgt somit

$$\int_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{S_r(\mathbf{0})} d^2A f(r) = 4\pi r^2 f(r) \quad (2.50)$$

Verwendet man nun die integrale Form der Maxwellgleichungen (2.45), und verwen-

det die Zwischenresultate (2.49) und (2.49), so erhalten wir

$$f(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} & \text{falls } r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{falls } r > R \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{r} & \text{falls } |\mathbf{r}| \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} & \text{falls } |\mathbf{r}| > R \end{cases} \quad (2.51)$$

Man beachte, dass das elektrische Feld außerhalb der Kugel exakt gleich dem ist, wenn die gesamte Ladung im Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ konzentriert wäre.

Das zugehörige elektrostatische Potential, welches aufgrund der Kugelsymmetrie des Problems ebenfalls nur von r abhängig ist, erhält man durch Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d\phi}{dr} = -f(r). \quad (2.52)$$

Das Potential ist jedoch nicht eindeutig durch das elektrische Feld festgelegt. Vielmehr ergeben zwei Potentiale, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, das selbe elektrische Feld. Üblicherweise wählt man für den obigen Fall das Potential so, dass es im Unendlichen verschwindet, d.h.

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.53)$$

und somit erhalten wir für $\phi(\mathbf{r})$

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & \text{falls } r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{falls } r > R \end{cases} \quad (2.54)$$

Insbesondere ist das elektrostatische Potential bei $r = R$ stetig. Wir werden später sehen, dass dies immer der Fall ist. Das elektrische Feld ist ebenfalls stetig, was jedoch ein Spezialfall ist, da hier keine sogenannte Oberflächenladungsdichte vorliegt.

Zweite Lösungsmöglichkeit: Alternativ kann man auch direkt die Poisson-Gleichung integrieren. Verwendet man bereits, dass aufgrund von Kugelsymmetrie das elektrostatische Potential nur von $r = |\mathbf{r}|$ abhängt und man daher den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten (siehe Übungen) verwenden sollte, so reduziert sich die Poisson-Gleichung auf

$$\Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r). \quad (2.55)$$

Für $r > R$ verschwindet die Ladungsdichte, und somit reduziert sich in diesem Fall die Differentialgleichung auf

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = 0 \quad (2.56)$$

beziehungsweise

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{c_1}{r^2}. \quad (2.57)$$

Durch eine weitere Integration erhalten wir schliesslich die Lösung

$$\phi(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2, \quad (2.58)$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten sind, deren Wert wir später bestimmen.

Für $r < R$ ist die Ladungsdichte konstant, und somit ergibt sich

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 r^2. \quad (2.59)$$

Integriert wir diese Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \rho_0 r + \frac{c_3}{r^2}, \quad (2.60)$$

und schließlich nach nochmaliger Integration

$$\phi(r) = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r^2 - \frac{c_3}{r} + c_4, \quad (2.61)$$

Wir haben nun eine Lösung, gegeben durch (2.58) und (2.61), mit vier freien Integrationskonstanten c_i , welche wir noch bestimmen müssen. Wir fordern, dass

- (i) das Potential im Unendlichen verschwindet, und setzen somit $c_2 = 0$
- (ii) das Potential bei $r = 0$ endlich ist, d.h. dort befindet sich keine (isolierte) Punktladung, und setzen $c_3 = 0$
- (iii) das das Potential bei $r = R$ stetig differenzierbar ist. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass es keine Oberflächenladungen auf der Kugeloberfläche sitzen. Aus diesen beiden Bedingungen folgen Gleichungen für c_1 und c_4 ,

$$-\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} R^2 + c_4 = -\frac{c_1}{R}, \quad -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} 2R = \frac{c_1}{R^2}, \quad (2.62)$$

wobei die linke Gleichung die Stetigkeit des Potentials und die rechte Gleichung die Stetigkeit dessen Ableitung garantiert. Letztere wird durch $c_1 = -Q/(4\pi\epsilon_0)$ gelöst. Für c_4 erhalten wir $c_4 = 3Q/(8\pi\epsilon_0 R)$.

Somit erhalten wir die selbe Lösung wie durch die Integralform der Maxwell-Gleichungen.

2.3 Elektrostatische Feldenergie

Um dem elektrischen Feld eine Energie zuzuordnen, fragen wir uns zunächst, welche Arbeit notwendig ist, um eine Ladung q_n von Unendlich an den Punkt \mathbf{r}_n zu bringen

in Anwesenheit von $n - 1$ anderen Ladungen q_i an den Orten \mathbf{r}_i mit $i = 1, \dots, n - 1$. Diese $n - 1$ Punktladungen erzeugen das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$,

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}. \quad (2.63)$$

Um eine Ladung q_n von Unendlich nach \mathbf{r}_n in diesem Potential zu verschieben, müssen wir eine Gegenkraft $-\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q_n\mathbf{E}(\mathbf{r})$ entlang des Wegs von Unendlich nach \mathbf{r}_n aufbringen,

$$\begin{aligned} W_{\infty \rightarrow \mathbf{r}_n} &= - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_n} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = q_n \int_{\infty}^{\mathbf{r}_n} d\mathbf{r} \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) \\ &= q_n (\phi(\mathbf{r}_n) - \phi(\infty)) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j q_n}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_j|}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Um nun dem elektrischen Feld eine Feldenergie zuzuweisen, überlegen wir uns, welche Arbeit notwendig ist, um das elektrische Feld aus Punktladungen aufzubauen, die initial im Unendlichen sitzen: Um die erste Ladung q_1 von Unendlich nach \mathbf{r}_1 zu bringen ist keine Arbeit notwendig, da noch kein elektrisches Feld vorhanden ist. Die zweite Ladung q_2 muss gegen des von q_1 erzeugten elektrischen Feldes nach \mathbf{r}_2 gebracht werden, die dritte Ladung entgegen des von q_1 und q_2 erzeugten elektrischen Feldes nach \mathbf{r}_3 transportiert werden, etc. Insgesamt müssen wir gemäß (2.64) die Arbeit W , gegeben durch

$$W = \sum_{i=2}^n W_{\infty \rightarrow \mathbf{r}_i} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j q_n}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_j|}, \quad (2.65)$$

aufbringen, um nacheinander die Ladungen q_1, q_2, \dots, q_n an die Punkte $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ zu bringen. Die Doppelsumme in (2.65) lässt sich auch wie folgt vereinfachen

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.} \quad (2.66)$$

Man beachte, dass wir in der Summe den Summanden mit $i = j$ explizit ausschliessen, dessen entsprechender Term durch die Singularität unendlich groß wäre. Schliesslich weisen wir dem elektrischen Feld diese zu leistende Arbeit als Feldenergie zu.

Für rein kontinuierliche Ladungsverteilungen $\rho(\mathbf{r})$ erhält man als Verallgemeinerung zu (2.66)

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \int d^3\mathbf{r}'' \frac{\rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}. \quad (2.67)$$

Man beachte, dass diese Formel nicht für delta-distributionswertige Ladungsdichten geeignet ist, da man sonst unendlich große Selbstenergiebeiträge erhält.

Benutzt man nun den Zusammenhang (2.25) zwischen der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ und dem skalaren Potential $\phi(\mathbf{r})$, so erhält man

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}'). \quad (2.68)$$

Diesen Ausdruck kann man noch mit Hilfe der Poissongleichung (2.38) in

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r}' \phi(\mathbf{r}') \Delta\phi(\mathbf{r}') = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r}' |\nabla\phi(\mathbf{r}')|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r}' |\mathbf{E}(\mathbf{r}')|^2 \quad (2.69)$$

umschreiben. Im vorletzten Schritt wurde dabei partiell integriert. Eventuell dabei auftretende Randterme verschwinden, da das Potential (bzw. das elektrische Feld) im Unendlichen schnell genug abfallen. Den Integranden des letzten Ausdrucks kann man als Energiedichte w des elektrischen Felds im Rahmen der Elektrostatik deuten, d.h.

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.70)$$

2.4 Das Randwertproblem der Elektrostatik

Bisher haben wir uns mit diskreten bzw. kontinuierlichen Ladungsverteilungen und die daraus resultierenden skalaren Potentialen bzw. elektrischen Feldstärken beschäftigt. Von Interesse ist auch die Berechnung des elektrischen Felds in Anwesenheit von Leitern. Diese werden in Form von sogenannten Randwerten beschrieben, wie wir im Folgenden sehen werden

2.4.1 Eine naive Klassifizierung: Leiter und Isolatoren

In diesem Abschnitt diskutieren wir eine einfache (eigentlich zu naive) Einteilung von Materie in Leiter und Isolatoren, die den Grundstein für die späteren Abschnitte des Kapitels legen:

- Leiter sind Materialien, in denen sich ein oder mehrere Elektronen pro Atom bzw. Molekül durch Anlegen eines äußeren elektrischen Felds frei verschieben lassen, beispielsweise indem das Energieband eines Festkörpers nicht vollständig gefüllt ist. Ein idealer Leiter besitzt unendlich viele freie Elektronen.
- Isolatoren (bzw. auch Nichtleiter) sind Materialien, in denen sich die Ladungsträger auch nach Anlegen eines äußeren elektrischen Felds nicht allzu sehr verschieben lassen. In anderen Worten, man kann die Atome bzw. Moleküle

eines Isolators polarisieren, und damit ein Dipolmoment induzieren, jedoch keine freien Ladungsträger erzeugen. Die Beschreibung von Isolatoren bzw. von Polarisierungseffekten wird im Kapitel *Elektrodynamik in Materie* behandelt.

Wir behandeln im Folgenden die elektrostatischen Eigenschaften perfekter bzw. idealer Leiter. Hierzu betrachten wir diesen in einem konstanten äußeren elektrischen Feld \mathbf{E}_0 . Die vorhandenen freien (negativen) Ladungsträger verschieben sich entgegen des angelegten elektrischen Felds. Durch die Verschiebung der Ladungsträger entstehen positive (Mangel an Elektronen) bzw. negative (Überschuss an Elektronen) Nettoladungen, die wiederum ein elektrisches Feld \mathbf{E}_i induzieren. Das induzierte elektrische Feld ist entgegengesetzt zum äußeren elektrischen Feld \mathbf{E}_0 . Bringt man

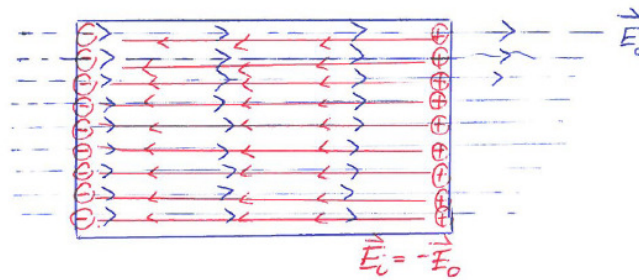


Abbildung 2.2: Äußeres angelegtes Feld und induziertes Feld heben sich auf im Inneren eines idealen Leiters

somit einen Leiter in ein äußeres elektrostatisches Feld, so verschieben sich die freien Ladungsträger so lange bis die dadurch induzierten Ladungen das äußere Feld im idealen Leiter aufheben. Somit gilt für ideale Leiter in einem äußeren elektrischen Feld:

- das elektrische Feld \mathbf{E} verschwindet im Inneren des Leiters,
- innerhalb des Leiters gilt $\rho = 0$. Dies ist eine direkte Konsequenz aus $\mathbf{E} = 0$ im Inneren des Leiters und unter Anwendung der Maxwell-Gleichung $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Daran ändert sich auch nichts, wenn wir den Leiter aushöhlen. Das Loch bleibt feldfrei (sogenannter Faraday-Käfig).
- die Ladungen sitzen auf der Leiteroberfläche,
- das elektrostatische Potential ϕ ist im Inneren und auf der Oberfläche des Leiters konstant. Für zwei Punkte \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 im Inneren oder auf der Leitero-

berfläche. Es gilt

$$\phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.71)$$

sofern alle Punkte des Leiters miteinander durch einen Weg verbunden werden können (in anderen Worten, der Leiter ist wegzusammenhängend).

- die Leiteroberfläche ist eine Äquipotentialfläche, und somit steht das elektrische Feld senkrecht auf der Leiteroberfläche.

2.4.2 Verhalten des elektrischen Feldes an Grenzflächen

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, werden (ideale) Leiter in einem äußeren Magnetfeld durch eine nicht-verschwindende Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ auf deren Oberfläche sowie durch einen feldfreien und ladungsfreien Raum im Inneren beschrieben. In diesem Abschnitt studieren wir die Eigenschaften des elektrischen Felds $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in Anwesenheit einer Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ auf der zweidimensionalen Fläche Σ . Die Situation ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

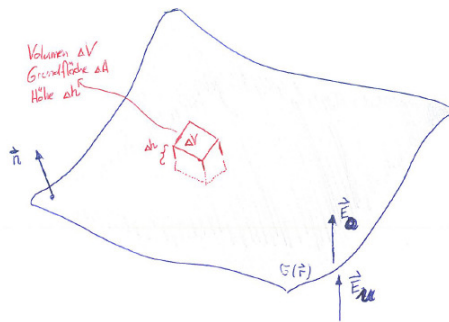


Abbildung 2.3: Fläche Σ mit Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$, Normalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ und Quader ΔV .

Das elektrische Feld unterhalb der Fläche werde mit \mathbf{E}_u bezeichnet, das elektrische Feld oberhalb der Fläche mit \mathbf{E}_o . Wenn die Flächenladungsdichte auf der Oberfläche des idealen Leiters entsteht, und der ideale Leiter sich unterhalb erstreckt, so ist $\mathbf{E}_u = \mathbf{0}$. Hier wollen wir jedoch den allgemeinen Fall studieren, und setzen \mathbf{E}_u nicht auf Null.

Des Weiteren ist $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ der Normalenvektor am Punkt \mathbf{r} der Fläche. Um das Grenzverhalten des elektrischen Felds zu studieren betrachten wir zuerst ein infinitesimal kleinen Quader ΔV mit Grundfläche ΔA und Höhe Δh , welche wir später gegen Null gehen lassen. Für hinreichend kleines ΔA können wir annehmen, dass der Normalenvektor von Σ sowie die Oberflächenladungsdichte σ in diesem Bereich konstant

ist. Wir richten insbesondere den Quader so aus, dass die die Grundfläche ΔA parallel zu Σ ist, und sich ein Teil des Quaders oberhalb, und der andere Teil unterhalb der Fläche Σ befindet. Wendet man den Satz von Gauß auf diesen Quader an, so erhält man

$$\int_{\Delta V} d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial(\Delta V)} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \Delta A \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_u), \quad (2.72)$$

wobei wir im letzten Schritt den Limes $\Delta h \rightarrow 0$ durchgeführt haben. In diesem Grenzprozess tragen die Seitenflächen des Quaders nicht bei. Andererseits gilt unter Anwendung der Maxwell-Gleichung

$$\int_{\Delta V} d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta V} d^3\mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta A \sigma(\mathbf{r}) \quad (2.73)$$

Vergleicht man (2.72) und (2.73), so erhalten wir

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_u(\mathbf{r})) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{r}) \quad (2.74)$$

Mit anderen Worten, die Normalkomponente des elektrischen Felds ist in Anwesenheit von einer Flächenladungsdichte σ unstetig.

Um eine Aussage über die Tangentialkomponente des elektrischen Felds entlang von Σ betrachten wir an Stelle des Quaders eine rechteckige Fläche der Länge Δl und der Höhe Δh , deren Normalenvektor in Σ liegt (siehe Abbildung 2.8).

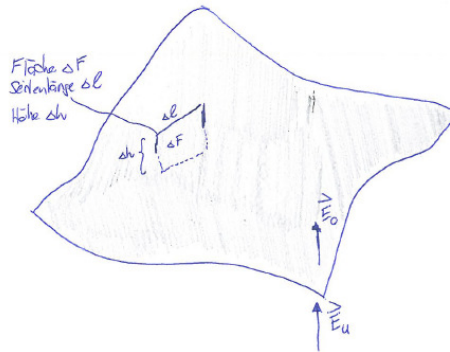


Abbildung 2.4: Fläche Σ mit Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$, Normalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ und Fläche ΔF .

Wiederum legen wir diese rechteckige Fläche ΔF so, dass ein Teil oberhalb, und der andere Teil unterhalb von Σ liegt. Des Weiteren sei Δl so klein, dass sich das

elektrische Feld in dieser Grössenordnung nicht ändert. Aus der Maxwell-Gleichung

$$\int_{\Delta F} d^2 \mathbf{A} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial(\Delta F)} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.75)$$

folgt für die oben beschriebene rechteckige Schleife $\partial(\Delta F) = \mathcal{C}$ im Limes $\Delta h \rightarrow 0$

$$\Delta \mathbf{l} \cdot (\mathbf{E}_o - \mathbf{E}_u) = 0, \quad (2.76)$$

wobei der Vektor $\Delta \mathbf{l}$ tangential zu Σ sein soll. In anderen Worten, (2.76) besagt, dass die tangentielle Komponente des elektrischen Feldes stetig sein muss.

Die Erkenntnisse (2.73) und (2.76) kann man wie folgt

$$\boxed{\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_u(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{n}(\mathbf{r})} \quad (2.77)$$

kombinieren. Aus der Definition des skalaren Potentials

$$\phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.78)$$

folgt im Limes $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$ dass das skalare Potential stetig an der Grenzfläche ist, da für verschwindende Weglänge das Integral in (2.78) verschwindet. Aus (2.77) folgt jedoch mit $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, dass die Normalableitung des skalaren Potentials unstetig ist, d.h.

$$\boxed{\nabla\phi_o(\mathbf{r}) - \nabla\phi_u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{n}(\mathbf{r})} \quad (2.79)$$

bzw. nach Multiplikation mit \mathbf{n} von beiden Seiten:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial n} \phi_o(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial n} \phi_u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{r})}, \quad (2.80)$$

wobei die Normalableitung $\frac{\partial}{\partial n}$ wie folgt definiert ist

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}). \quad (2.81)$$

2.4.3 Formulierung des Randwertproblems

Wir betrachten nun elektrische Felder in Anwesenheit von (idealen) Leitern sowie einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$. Die Oberflächen der Leiter, im Folgenden mit L bezeichnet, werden als Ränder des Raumes V , in dem wir die Poisson-Gleichung (2.38) lösen werden, modelliert. Sei also $\partial V = L$, wobei L nicht notwendigerweise zusammenhängend ist. Vielmehr können wir L als Vereinigung von zusammenhängenden

Oberflächen L_i mit $i = 1, \dots, N$ beschreiben, die eine Flächenladungsdichte $\sigma_i(\mathbf{r})$ tragen.

Diese Situation übersetzt sich in das folgende mathematische Problem: Im Inneren des Volumens V fordern wir für alle Punkte \mathbf{r} die Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})} \quad (2.82)$$

zu einer vorgegebenen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$. Auf den Rändern L_i gilt

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \phi_{(0)i} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_i(\mathbf{r}),} \quad (2.83)$$

for $\mathbf{r} \in L_i$. Im Fall mehrerer L_i können wir (für jedes L_i) entweder $\phi_{(0)i}$ oder $\sigma_i(\mathbf{r})$ vorschreiben. Vom mathematischen Standpunkt schreiben wir mit dieser Wahl unterschiedliche Randbedingungen vor:

- Dirichlet-Randbedingungen:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{(0)}(\mathbf{r}) \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \in \partial V \quad (2.84)$$

Mit anderen Worten, auf dem Rand von V geben wir eine beliebige Funktion $\phi_{(0)}(\mathbf{r})$ vor. Im Fall von Leiter in der Elektrostatik muss diese Funktion jedoch konstant sein. Somit liegen Dirichlet-Randbedingungen vor, falls wir in (2.83) die Potentialwerte $\phi_{(0)i}$ vorschreiben.

- Neumann-Randbedingungen: Wir geben die Normalableitung für $\mathbf{r} \in L_i$ vor

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_i(\mathbf{r}) \quad (2.85)$$

Typischerweise werden in Elektrostatik Dirichlet-Randbedingungen gefordert. Die Neumann-Randbedingungen kommen nur sehr selten vor, da hierzu die Flächenladungsdichten σ_i explizit vorgegeben werden.

Bevor wir explizite Konstruktionsmethoden vorstellen – beispielsweise die Methode der Greenschen Funktionen und die Spiegelladungsmethode – möchten wir noch untersuchen, ob die Lösung für das Dirichlet- oder Neumann-Randwertproblem eindeutig ist oder nicht. Wir wenden uns zuerst dem Dirichlet Randwertproblem

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \in V \quad (2.86)$$

und

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{(0)}(\mathbf{r}) \quad \text{für} \quad \mathbf{r} \in \partial V \quad (2.87)$$

zu, und nehmen an, dass für vorgegebenes $\rho(\mathbf{r})$ auf V und $\phi_{(0)}(\mathbf{r})$ auf ∂V das Randwertproblem zwei verschiedene Lösungen $\phi^{(I)}$ und $\phi^{(II)}$ besitzt. Wir betrachten nun die Differenz $\Phi = \phi^{(I)} - \phi^{(II)}$, die folglich $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \in V$ und $\Phi(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \in \partial V$ erfüllt.

Um die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen, benutzen wir zuerst die Identität

$$\nabla \cdot (\Phi(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r})) = \Phi(\mathbf{r}) \Delta\Phi(\mathbf{r}) - |\nabla \Phi(\mathbf{r})|^2 \quad (2.88)$$

und integrieren beide Seiten über das Volumen V . Mittels des Satzes von Gauß folgt

$$\int_V d^3\mathbf{r} \left(\Phi(\mathbf{r}) \Delta\Phi(\mathbf{r}) - |\nabla \Phi(\mathbf{r})|^2 \right) = \int_{\partial V} d^2\mathbf{A} \Phi(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}). \quad (2.89)$$

Die rechte Seite von (2.89) verschwindet, da per Definition $\Phi(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \in \partial V$ gilt. Verwendet man außerdem $\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \in V$, so vereinfacht sich die Gleichung (2.89) zu

$$\int_V d^3\mathbf{r} |\nabla \Phi(\mathbf{r})|^2 = 0. \quad (2.90)$$

Für eine beliebige Funktion Φ auf V ist der Integrand $|\nabla \Phi(\mathbf{r})|^2$ positiv oder Null. Damit jedoch das Integral in (2.90) verschwindet, muss bereits $\nabla \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, und somit $\Phi(\mathbf{r}) = \text{const.}$, für alle $\mathbf{r} \in V$ gelten. Da jedoch am Rand von V die Funktion Φ verschwindet, muss die Konstante bereits Null sein. Mit anderen Worten, $\phi^{(I)}$ und $\phi^{(II)}$ sind identisch, und die Lösung des Dirichlet-Randwertproblems ist eindeutig.

Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass das Neumann Randwertproblem, gegeben durch

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in V \quad (2.91)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{r}) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V, \quad (2.92)$$

ebenfalls für vorgegebenes $\rho(\mathbf{r})$ auf V und $\sigma(\mathbf{r})$ auf ∂V eine eindeutige Lösung (abgesehen von einer beliebig wählbaren additiven Konstante) besitzt.

2.4.4 Methode der Spiegelladungen

Um Dirichlet Randbedingungen einfacher Geometrien (wie Metallplatte, leitende Kugel, etc) zu lösen, bietet sich die sogenannte Spiegelladungsmethode an. Insbesondere wollen wir das Dirichlet Randwertproblem auf V lösen, d.h. für vorgegebene Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ für $\mathbf{r} \in V$ finden, die die Randbedingung $\phi(\mathbf{r}) = \phi_{(0)} = \text{const.}$ auf $\mathbf{r} \in \partial V$ erfüllt.

Um die Lösung zu diesem Problem zu finden, gehen wir wie folgt vor. Zu der partikulären Lösung addieren wir noch eine bestimmte homogene Lösung,

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{part.}}(\mathbf{r}) + \phi_{\text{hom.}}(\mathbf{r}), \quad (2.93)$$

wobei die partikuläre Lösung durch

$$\phi_{\text{part.}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.94)$$

gegeben ist. Die homogene Lösung wird durch Spiegelladungen generiert, die sich außerhalb von V befinden. Die (kontinuierliche) Ladungsverteilung der Spiegelladungen $\rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}')$ wird so gewählt, dass die homogene Lösung

$$\phi_{\text{hom.}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.95)$$

addiert zu der partikulären Lösung $\phi_{\text{part.}}(\mathbf{r})$ die Randbedingung erfüllt, d.h.

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{part.}}(\mathbf{r}) + \phi_{\text{hom.}}(\mathbf{r}) = \phi_{(0)} = \text{const.} \quad \text{für } \mathbf{r} \in \partial V. \quad (2.96)$$

Wir müssen noch zeigen, dass $\phi(\mathbf{r})$ die Poisson-Gleichung auf V erfüllt. Es gilt für $\mathbf{r} \in V$

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} d^3\mathbf{r}' \rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}') \Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \left(\int_V d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V} d^3\mathbf{r}' \rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Insbesondere trägt die Bildladungsdichte $\rho_{\text{bild}}(\mathbf{r}')$ nicht bei, da $\mathbf{r} \in V$ und $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3 \setminus V$.

Mit anderen Worten: Wir haben das Dirichlet-Randwertproblem zur vorgegebenen Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ in einem Problem für die Ladungsdichten $\rho(\mathbf{r})$ und $\rho_{\text{bild}}(\mathbf{r})$ ohne Randbedingungen umformuliert.

Beispiel: Um die Vorgehensweise zu verdeutlichen betrachten wir eine Punktladung q im Abstand d zu einer geerdeten, in x und y Richtung unendlich ausgedehnten Metallplatte am Ort $x = 0$. Insbesondere suchen wir das Potential $\phi(\mathbf{r})$ für den Halbraum $x < 0$ und die induzierte Flächenladungsdichte auf der Metallplatte. Somit müssen wir das folgende Dirichlet Randwertproblem lösen:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x) \quad \text{für } \mathbf{r} \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0\} \quad (2.98)$$

und

$$\phi(x = 0, y, z) = 0. \quad (2.99)$$

Das Potential auf der (y, z) -Ebene $x = 0$ muss verschwinden, da die Metallplatte geerdet ist. Des Weiteren fordern wir wie üblich, dass das Potential im Unendlichen verschwindet. Aufgrund der vorliegenden Symmetrie bietet es sich an, die Spiegella-

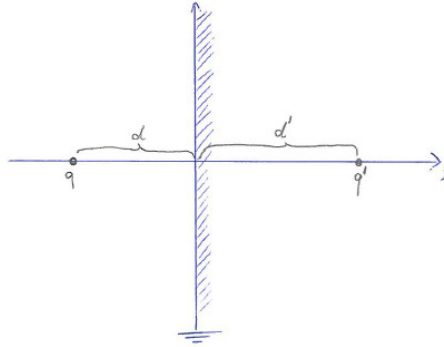


Abbildung 2.5: Punktladung q im Abstand d vor geerdeter Metallplatte

ladung q' auf die x-Achse zu legen. Des Weiteren muss die Bildladung ausserhalb des Halbraums $x < 0$ liegen, und somit erhalten wir für das Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - d'\mathbf{e}_x|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2 + (x + d)^2}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2 + (x - d')^2}} \quad (2.100)$$

Die Werte q' und d' werden nun so bestimmt, dass das potential ϕ auf der Metallplatte, also für $x = 0$ aber $y, z \in \mathbb{R}$ verschwindet,

$$\frac{q}{\sqrt{y^2 + z^2 + d^2}} + \frac{q'}{\sqrt{y^2 + z^2 + d'^2}} = 0. \quad (2.101)$$

Für $y = z = 0$ reduziert sich die Bedingung auf

$$\frac{q}{d} + \frac{q'}{d'} = 0, \quad (2.102)$$

während für $y = 1$ und $z = 0$

$$\frac{q^2}{1 + d^2} = \frac{q'^2}{1 + d'^2}. \quad (2.103)$$

Somit folgt $q' = -q$ und $d' = d$, und wir erhalten als Lösung für das Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x|} \right). \quad (2.104)$$

Das elektrische Feld im Halbraum $x < 0$ ergibt sich zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} + d\mathbf{e}_x|^3} - \frac{\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x|^3} \right). \quad (2.105)$$

Wir interessieren uns noch für die auf der Metallplatte induzierte Flächenladungsdichte.

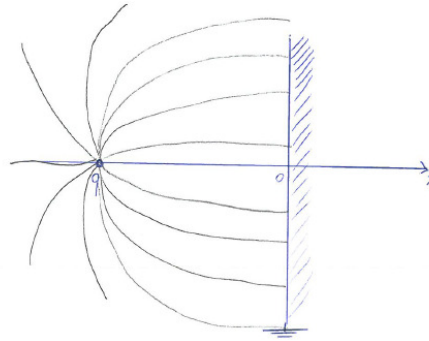


Abbildung 2.6: Feldlinien für eine Punktladung q im Abstand d vor geerdeter Metallplatte.

Der Normalenvektor ist durch $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$ gegeben, und somit erhalten wir für die induzierte Flächenladungsdichte $\sigma(y, z)$

$$\begin{aligned} \sigma(y, z) &= -\epsilon_0 \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} = -\epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) & (2.106) \\ &= \epsilon_0 \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\epsilon_0 E_x(x=0, y, z) \\ &= -\frac{q d}{2\pi (y^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Der Verlauf der elektrischen Feldlinien und der Flächenladungsdichte ist in Abbildungen 2.6 und 2.7 skizziert. Die auf der Metallplatte induzierte Gesamtladung

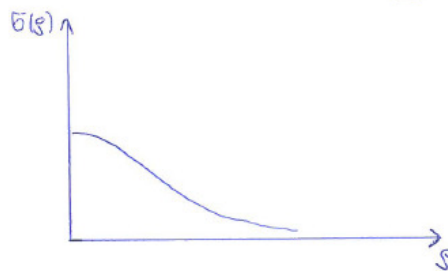


Abbildung 2.7: Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$ auf geerdeter Metallplatte. Mit ρ wird $\rho^2 = y^2 + z^2$ bezeichnet.

lässt sich wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} q_{\text{infl}} &= \int_{x=0} dydz\sigma(y, z) = -2\pi q d \int_0^{\infty} d\rho \rho \frac{1}{2\pi(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \\ &= -q d (\rho^2 + d^2)^{-1/2} \Big|_0^{\infty} = -q, \end{aligned} \quad (2.107)$$

und entspricht gerade der Spiegelladung. Durch die Spiegelladung bzw. den influenzierten Ladungen auf der Metallplatte wird eine Kraft \mathbf{F} auf die Punktladung q ausgeübt, die durch die Beziehung $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ berechnet werden kann. In dieser Beziehung ist $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ das von den Spiegelladungen (bzw. von den auf der Metallplatte influenzierten Ladungen) erzeugte elektrische Feld am Ort \mathbf{r} . Man beachte, dass sich $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ von dem in (2.105) berechnete elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ durch den Beitrag der Ladung q unterscheidet. Somit gilt

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x}{|\mathbf{r} - d\mathbf{e}_x|^3} \quad (2.108)$$

und somit für die Kraft \mathbf{F} auf die Punktladung q

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \tilde{\mathbf{E}}(-d\mathbf{e}_x) = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \mathbf{e}_x. \quad (2.109)$$

Gemäß dem Newtonschen Gesetz *actio = reactio* wirkt auf die Metallplatte eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft.

2.4.5 Methode der Greenschen Funktionen

Wir haben bereits gesehen, dass wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad (2.110)$$

in der Form

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_h(\mathbf{r}) + \phi_{\text{part.}}(\mathbf{r}) \quad (2.111)$$

schreiben können. Während die homogene Funktion $\phi_h(\mathbf{r})$ die Laplace-Gleichung, also $\Delta\phi_h(\mathbf{r}) = 0$ erfüllt, löst die partikuläre Funktion $\phi_{\text{part.}}(\mathbf{r})$ die ursprüngliche Poisson-Gleichung (2.110). Eine bestimmte partikuläre Lösung $\phi_{\text{part.}}(\mathbf{r})$ ist durch das Integral

$$\phi_{\text{part.}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.112)$$

gegeben. Mit anderen Worten die Funktion $-1/(4\pi)|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ ist eine Greensche Funktion denn

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.113)$$

Wir können die allgemeine Lösung des Randwertproblems auch durch

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \quad (2.114)$$

erhalten, wobei die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ durch

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.115)$$

gegeben ist mit $\Delta_{\mathbf{r}} G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Beachte, dass $\Delta_{\mathbf{r}}$ auf das erste Argument von G_h , also auf \mathbf{r} , wirkt.

Damit $\phi(\mathbf{r})$ und somit auch $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ die Randbedingungen erfüllt, müssen wir die Funktion $G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ geeignet wählen. Im Folgenden leiten wir einen allgemeinen Ausdruck für $\phi(\mathbf{r})$ ab, indem wir die zweite Greensche Identität benutzen.

Einschub: Greensche Identitäten Wir betrachten reellwertige Funktionen $\phi(\mathbf{r})$ und $\psi(\mathbf{r})$. Mit Hilfe des Vektorfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r})$ können wir die erste Greensche Identität herleiten. Dazu wenden wir den Satz von Gauß auf das Vektorfeld \mathbf{v} an,

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (2.116)$$

wobei V ein beliebiges Volumen und ∂V dessen Rand sei. Somit folgt wegen

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) \quad (2.117)$$

die Identität

$$\int_V d^3\mathbf{r} (\nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r})) = \oint_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \phi(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}), \quad (2.118)$$

die sogenannte *erste Greensche Identität*. Vertauscht man nun die Rollen von $\phi(\mathbf{r})$ und $\psi(\mathbf{r})$, und subtrahiert das Ergebnis von (2.118), so erhält man

$$\int_V d^3\mathbf{r} (\phi(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r})) = \oint_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot (\phi(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r})), \quad (2.119)$$

die sogenannte *zweite Greensche Identität*. Diese werden wir im Folgenden verwenden, um einen allgemeinen Ausdruck für das skalare Potential herzuleiten.

Wir wenden nun die zweite Greensche Identität auf den folgenden Ausdruck an

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial V} d^2\mathbf{A}' (\phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')) \quad (2.120) \\ &= \int_V d^3\mathbf{r}' (\phi(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')) \\ &= \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

wobei $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ eine Greensche Funktion für Δ ist, was wir auch im letzten Schritt benutzt hatten. Somit gilt für $\phi(\mathbf{r})$

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \oint_{\partial V} d^2A' \left(\phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right), \quad (2.121)$$

wobei wiederum die Normalableitung (2.81) verwendet wurde. Der Strich soll dabei andeuten, dass nach \mathbf{r}' abgeleitet werden muss, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{n}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.122)$$

Im Folgenden betrachten wir zwei Spezialfälle für den allgemeinen Ausdruck (2.121).

Das Dirichlet-Randwertproblem: Ist das Potential auf ∂V bekannt, so erweist es sich als hilfreich, eine Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ zu wählen, im Folgenden mit $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ bezeichnet, für die

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{falls} \quad \mathbf{r}' \in \partial V \quad (2.123)$$

erfüllt ist. Somit reduziert sich der allgemeine Ausdruck (2.121) auf

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3\mathbf{r}' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \oint_{\partial V} d^2A' \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}, \quad (2.124)$$

wobei $\phi(\mathbf{r}')$ für $\mathbf{r}' \in \partial V$ explizit bekannt ist.

Somit können wir mit Hilfe der Greenschen Funktion $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und vorgegebenen $\rho(\mathbf{r})$ auf V bzw. $\phi(\mathbf{r})$ auf ∂V das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ bestimmen.

Beispiel: Die Greensche Funktion mit Dirichlet-Randbedingungen für die Metallplatte ist durch

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - S(\mathbf{r}')|} \right) \quad (2.125)$$

gegeben, wobei mit $S(\mathbf{r}')$ der an der Metallplatte gespiegelte Punkt \mathbf{r}' bezeichnet wird. Falls die Metallplatte durch $x = 0$ beschrieben ist, und $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ folgt somit $S(\mathbf{r}') = (-x', y', z')$.

Tatsächlich kann man allgemein zeigen, dass die Greensche Funktion mit Dirichlet-Randbedingungen symmetrisch in den beiden Argumenten ist, d.h. $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Beispielsweise folgt dies für das obige Beispiel der Metallplatte, da $|\mathbf{r} - S(\mathbf{r}')| = |S(\mathbf{r}) - S^2(\mathbf{r}')| = |\mathbf{r}' - S(\mathbf{r})|$ gilt. Hierbei haben wir verwendet, dass sich die Länge unter Spiegelungen nicht ändert, und dass die zweifache Ausführung einer Spiegelung die identische Abbildung ist, d.h. $S^2 = \text{id}$.

Das Neumann-Randwertproblem:* An Stelle des Randwerts des skalaren Potentials sei nun Ihre Normalableitung explizit gegeben. Dazu betrachten wir nun eine spezielle Wahl der Greensche Funktion, die wir mit $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ bezeichnen. Analog zum Dirichlet-Randwertproblem könnte man naiverweise fordern, dass die Normalableitung der Greenschen Funktion am Rand des Volumens zu verschwinden hat. Dies ist jedoch keine konsistente Wahl, wie die folgende Überlegung zeigt

$$\oint_{\partial V} d^2 A' \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \oint_{\partial V} d^2 A' \nabla_{\mathbf{r}'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1, \quad (2.126)$$

wobei $\mathbf{r} \in V$. Im letzten Schritt haben wir die Poisson-Gleichung verwendet.

Somit können wir nicht die Normalableitung am Rand von V auf Null setzen. Stattdessen werden wir für die Greensche Funktion $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\text{vol}(\partial V)} \quad (2.127)$$

fordern für $\mathbf{r}' \in \partial V$ und $\mathbf{r} \in V$. Somit reduziert sich der allgemeine Ausdruck (2.121) auf

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3 \mathbf{r}' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \phi_0 - \oint_{\partial V} d^2 A' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'}, \quad (2.128)$$

wobei die Konstante ϕ_0 den Mittelwert des Potentials auf der Oberfläche ∂V bezeichnet, d.h.

$$\phi_0 = \frac{1}{\text{vol}(\partial V)} \oint_{\partial V} d^2 A' \phi(\mathbf{r}'). \quad (2.129)$$

Verwendet man schließlich noch, dass $\partial_n \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma$ auf der Oberfläche eines idealen Leiters gilt, so folgt

$$\phi(\mathbf{r}) - \phi_0 = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3 \mathbf{r}' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\partial V} d^2 A' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}'). \quad (2.130)$$

Somit können wir mit Hilfe der Greenschen Funktion $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und vorgegebenen $\rho(\mathbf{r})$ auf V bzw. $\sigma(\mathbf{r})$ auf ∂V das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ bis auf eine additive Konstante ϕ_0 bestimmen.

In diesem Abschnitt haben wir nun mittels der Greenschen Funktionen $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ bzw. $G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ für das Dirichlet- bzw. Neumann-Randwertproblem die Berechnung des elektrostatischen Potentials $\phi(\mathbf{r})$ formal auf einfache Integrationen zurück geführt. Für einfache Geometrien ist es tatsächlich möglich, die entsprechenden Greenschen Funktionen G_D bzw. G_N anzugeben.

In der Praxis, für einen beliebig vorgegebenen Rand ∂V ist dies im allgemeinen nicht analytisch möglich, und die Bestimmung der Greenschen Funktion ist numerisch genauso aufwändig wie die Bestimmung des elektrostatischen Potentials.

2.4.6 Anwendung: Kapazitäten

Wir diskutieren im Folgenden Kapazitäten von Kondensatoren. Mit Hilfe der allgemeinen Lösung des Dirichlet-Randwertproblems, siehe Gleichung (2.124), kann man allgemeine Ausdrücke für Kapazitäten aufstellen. Diese zugegebenermaßen sehr formalen Ausdrücke sollen an einem Beispiel vorab veranschaulicht werden.

Hierzu betrachten wir einen Kugelkondensator, der aus einer inneren leitenden Kugel (im folgenden mit L_1 bezeichnet) vom Radius R_1 und einer äußeren leitenden Kugelschale (L_2 genannt) vom Radius R_2 besteht. Die Kugelschale und die Kugel haben den selben Mittelpunkt. Des Weiteren trägt die Kugel die Ladung Q , während die Kugelschale die entgegengesetzte Ladung $-Q$ besitzt.

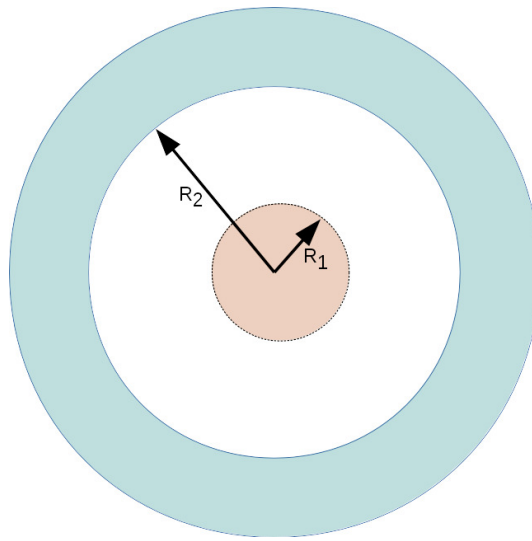


Abbildung 2.8: Kugelkondensator, bestehend aus einer inneren leitenden Kugel und einer äußeren leitenden Kugelschale.

Das Potential ϕ auf der Kugelschale L_2 werde im folgenden mit ϕ_{L_2} bezeichnet, d.h. es gilt

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{L_2} \quad \text{für } \mathbf{r} \in L_2. \quad (2.131)$$

Wir lösen nun die Poissongleichung (bzw. genauer gesagt die Laplace Gleichung) für den Bereich $R_1 \leq r \leq R_2$. Wir erhalten

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \phi_{L_2}, \quad (2.132)$$

wobei die Integrationskonstante so gewählt ist, dass wir die Randbedingung (2.131)

erfüllen. Auf der Kugeloberfläche L_1 ergibt sich das Potential $\phi_{L_1} = \phi(\mathbf{r})$ zu

$$\phi_{L_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \phi_{L_2}. \quad (2.133)$$

Dies folgt aus (2.132) mit $|\mathbf{r}| = R_1$. Im Inneren der Kugel L_1 beträgt das Potential ebenfalls ϕ_{L_1} .

Aus den obigen Formeln kann man einen Zusammenhang zwischen der Ladung Q auf der Kugeloberfläche L_1 und der Differenz der Potentiale $\phi_{L_1} - \phi_{L_2}$ herleiten, d.h.

$$\boxed{Q = C (\phi_{L_1} - \phi_{L_2})} \quad (2.134)$$

Die Konstante C wird als Kapazität bezeichnet, und (2.134) ist deren Definition. Für die allgemeine Definition für N Leiteroberflächen sei auf Formel (2.145) verwiesen.

Im diskutierten Beispiel erhalten wir

$$\phi_{L_1} - \phi_{L_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.135)$$

und daraus mittels (2.134) die Kapazität

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}. \quad (2.136)$$

Aus dieser Kapazität kann man mittels Grenzwertbildung weitere Kapazitäten für interessante Geometrien gewinnen:

- *Plattenkondensator* von (unendlich) ausgedehnten Platten im Abstand d Hierzu betrachten wir den Grenzprozeß $R_1 \rightarrow \infty$ und $R_2 \rightarrow \infty$ wobei wir $R_2 - R_1 = d$ festhalten. Damit ergibt sich

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1(R_1 + d)}{d} = \epsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{d} \left(1 + \frac{d}{R_1} \right) \quad (2.137)$$

und somit im Limes $R_1 \rightarrow \infty$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.138)$$

wobei $A = 4\pi R_1^2$ die Fläche der (unendlich großen) Platten des Plattenkondensators ist.

- *Einzelne Kugel als "Kondensator"*:

Betrachtet man nur eine einzelne leitende Kugel mit Radius R_1 , so erhält man mittels des Grenzwerts $R_2 \rightarrow \infty$ die Kapazität

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 R_1}. \quad (2.139)$$

Jedoch sollte man bei der Interpretation der Formel sehr vorsichtig sein. Hierbei handelt es sich um die Kapazität einer Kugel relativ zu einem (endlichen) Potential ϕ_{L_2} bei Unendlich.

Formale Verallgemeinerung*

Zur Verallgemeinerung betrachten wir wieder mehrere Leiter L_i mit $i = 1, \dots, N$, die als Rand des Volumens V aufgefasst werden, d.h. $\partial V = \cup_i L_i$. Wir nehmen zudem an, dass im Volumen V keine Ladungen vorhanden sind, d.h. $\rho(\mathbf{r}) = 0$ für $\mathbf{r} \in V$.

Des Weiteren seien die elektrischen Potentiale ϕ_{L_i} auf dem i -ten Leiter vorgegeben, d.h.

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_{L_i} \quad \text{für } \mathbf{r} \in L_i \quad (2.140)$$

Unser Ziel ist es, die Ladung q_j auf dem j -ten Leiter zu berechnen. Hierzu ist es nützlich, das elektrostatische Potential als Linearkombination der Form

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \phi_{L_i} f_i(\mathbf{r}) \quad (2.141)$$

zu schreiben, wobei die Funktionen $f_i(\mathbf{r})$ die Eigenschaft $f_i(\mathbf{r}) = \delta_{ij}$ für $\mathbf{r} \in L_j$ besitzen. Das Potential (2.141) erfüllt somit schon die Randbedingung (2.143). Tatsächlich kann man auch eine formale Lösung der Laplace-Gleichung in V angeben. Mit Hilfe der Greenschen Funktion für das Dirichlet-Randwertproblem, $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, und der Beziehung (2.124) mit $\rho(\mathbf{r}) = 0$ gilt

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \phi_{L_i} \oint_{L_i} d^2 A' \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}. \quad (2.142)$$

Durch Vergleichen der beiden Ausdrücke (2.141) und (2.143) folgern wir

$$f_i(\mathbf{r}) = \oint_{L_i} d^2 A' \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}. \quad (2.143)$$

Die Ladung auf dem i -ten Leiter ist durch

$$q_i = -\epsilon_0 \oint_{L_i} d^2 A \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \equiv \sum_{j=1}^N C_{ij} \phi_{L_j} \quad (2.144)$$

gegeben. Durch die letzte Gleichung wird der Kapazitätskoeffizient C_{ij} definiert,

$$C_{ij} = -\epsilon_0 \oint_{L_i} d^2 A \frac{\partial f_j(\mathbf{r})}{\partial n}. \quad (2.145)$$

Der Koeffizient C_{ij} gibt an, wieviel Ladung auf dem i -ten Leiter sitzt, wenn auf der j -ten Leiter auf dem Potential 1 gehalten wird, und alle anderen Leiter geerdet sind.

Der Koeffizient C_{ij} ist symmetrisch, d.h. $C_{ij} = C_{ji}$, da C_{ij} mittels (2.143) in der Form

$$C_{ij} = -\epsilon_0 \oint_{L_i} d^2 A \oint_{L_j} d^2 A' \frac{\partial^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n' \partial n}. \quad (2.146)$$

geschrieben werden kann. Wegen $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, folgt somit $C_{ij} = C_{ji}$. In dieser Anordnung von Kondensatoren wird eine elektrostatische Energie W der Form

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot (\phi(\mathbf{r}) \nabla\phi(\mathbf{r})) \quad (2.147) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} d^2A \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \phi_{L_i} q_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \phi_{L_i} \phi_{L_j} \end{aligned}$$

gespeichert. Dies ist eine Verallgemeinerung der in der Experimentalphysik besprochenen Beziehung $W = 1/2 C U^2$, wobei U das Potential bzw. eine Potentialdifferenz ist.

Bei der Herleitung dieser Formel wurde in der ersten Zeile verwendet, dass keine Ladungen im Volumen V sind, und somit ϕ die Laplace-Gleichung erfüllt. In der zweiten Zeile wurden außerdem die Beziehungen (2.143) und (2.144) verwendet.

2.5 Multipolentwicklung

Im Folgenden betrachten wir eine statische und auch lokalisierte Ladungsverteilung. Lokalisiert bedeutet hierbei, dass die Ladungsverteilung außerhalb einer Kugel vom Radius R um den Koordinatenursprung verschwindet. Für Abstände r die wesentlich größer als R sind, kann das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ in Potenzen von R/r entwickelt werden. Diese sogenannte Multipolentwicklung werden wir im Folgenden ableiten.

Aus der gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ kann man das Potential durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.148)$$

berechnen. In der Integration tragen nur Punkte \mathbf{r}' mit $r' = |\mathbf{r}'| \leq R$ bei. Außerdem nehmen wir $r = |\mathbf{r}| \gg R$ im Folgenden an, so dass wir $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ in Potenzen von R/r entwickeln können. Hierzu formen wir wie folgt um

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2}. \quad (2.149)$$

Im nächsten Schritt verwenden wir die Potenzreihe von $(1 - \xi)^\alpha$,

$$(1 - \xi)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} \xi^n. \quad (2.150)$$

die für $|\xi| < 1$ konvergiert. Außerdem gilt für $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1. \quad (2.151)$$

Verwendet man nun die Potenzreihe (2.150) mit $\xi = \frac{2}{r^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' - \frac{r'^2}{r^2}$ so kann man (2.149) entwickeln in

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{R^3}{r^4}\right). \quad (2.152)$$

Verwendet man dieses Resultat, so erhält man für das elektrostatische Potential

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{3x_i Q_{ij} x_j}{2r^5} \right) + \mathcal{O}(r^{-4})} \quad (2.153)$$

Hierbei handelt es sich um die (kartesische) Multipolentwicklung, die für $r = |\mathbf{r}| \gg R$ anwendbar ist. Hierbei ist q die Gesamtladung, \mathbf{p} das Dipolmoment, und Q der Quadrupoltensor, die für eine lokalisierte Ladungsverteilung wie folgt gegeben sind,

$$\boxed{\begin{aligned} q &= \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}), \\ \mathbf{p} &= \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}, \\ Q_{ij} &= \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right), \end{aligned}} \quad (2.154)$$

wobei x_i die Komponenten des Vektors \mathbf{r} sind, und $r = |\mathbf{r}|$. Q_{ij} sind die Komponenten des Quadrupoltensors Q . Man beachte, dass Q ein symmetrischer spurloser Tensor vom Rang zwei ist, d.h. es gilt insbesondere $Q_{ij} = Q_{ji}$ und $\text{Tr } Q = Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$.

Aus dem elektrostatischen Potential $\phi(\mathbf{r})$ kann man leicht das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ berechnen,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{p} r^2}{r^5} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (2.155)$$

Man beachte, dass das elektrische Feld eines Monopols (d.h. der Gesamtladung q) wie r^{-2} abfällt, während das elektrische Feld eines Dipols mit verschwindender Gesamtladung wie r^{-3} abfällt. Für sehr große Abstände r dominiert daher der Monopolterm, d.h. das elektrische Feld kann durch eine Punktladung im Koordinatenursprung mit Ladung q approximiert werden. Verschwindet die Gesamtladung q , so ist der führende Term durch einen elektrischen Dipol mit Moment \mathbf{p} gegeben. Verschwindet auch das Dipolmoment, so ist der Quadrupolterm führend, und so weiter.

Dipol und Quadrupol

Im folgenden diskutieren wir diskrete Ladungsverteilungen aus Punktladungen, die man benötigt, um ein nicht-verschwindendes Dipol- bzw. Quadrupolmoment zu erzeugen. Da die Gesamtladung des Dipols verschwinden muss, benötigen wir mindestens zwei entgegengesetzte Punktladungen. Diese platzieren wir im Abstand \mathbf{a} an den Stellen $\mathbf{r}_0 \pm \frac{1}{2}\mathbf{a}$, d.h. die Ladungsverteilung ist durch

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) - q \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) \quad (2.156)$$

gegeben. Für infinitesimale Abstände \mathbf{a} ergibt sich ein elektrischer Dipol mit Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) = -q \mathbf{a} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.157)$$

und Dipolmoment $\mathbf{p} = q \mathbf{a}$. Das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (2.158)$$

und somit

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}} \quad (2.159)$$

Das elektrische Feld des Dipols ergibt sich zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} \quad (2.160)$$

Insbesondere zeigt sich, dass der Betrag des elektrischen Feldes wie $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-3}$ abfällt. Im Vergleich dazu fällt der Betrag des elektrischen Feldes einer Punktladung am Ort \mathbf{r}_0 wie $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-2}$ ab.

Ein reines Quadrupolmoment (ohne Monopol- und Dipolmoment) kann man durch vier Punktladungen erzeugen. Diese kann man beispielsweise wie folgt anordnen: Zwei Ladungen $+q$ bei $\mathbf{r} = a\mathbf{e}_x$ und bei $\mathbf{r} = -a\mathbf{e}_x$ sowie zwei Ladungen $-q$ bei $\mathbf{r} = b\mathbf{e}_y$ und bei $\mathbf{r} = -b\mathbf{e}_y$, d.h. die Ladungsdichte ist durch

$$\rho(\mathbf{r}) = q (\delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x) + \delta(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x) - \delta(\mathbf{r} - b\mathbf{e}_y) - \delta(\mathbf{r} + b\mathbf{e}_y)) \quad (2.161)$$

gegeben. Das Monopolmoment verschwindet, da die Gesamtladung Null ist. Das Dipolmoment verschwindet ebenfalls, wie man durch eine kurze Rechnung zeigt. Für den Quadrupoltensor erhalten wir

$$Q = \frac{2}{3} q \text{diag}(2a^2 + b^2, -a^2 - 2b^2, b^2 - a^2). \quad (2.162)$$

2.5.1 Energie und Drehmoment von Multipolen*

Wir betrachten nun im Folgenden wiederum eine am Koordinatenursprung lokalisierte Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ sowie ein äußeres Feld ϕ_{ext} , dessen Quellen (ebenfalls elektrische Ladungen!) sich nicht im Bereich der lokalisierten Ladungsdichte befinden sollen.

Betrachten wir zuerst eine Ladung q am Ort \mathbf{r} . Die potentielle Energie dieser Ladung im externen Feld ϕ_{ext} ist durch $W = q \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ gegeben. Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung gilt daher infinitesimal $dW = \rho(\mathbf{r}) \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ und somit

$$W = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (2.163)$$

Man beachte den unterschiedlichen Vorfaktor in (2.68). In Gleichung (2.68) erzeugt die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ das Potential $\phi(\mathbf{r})$, und deshalb tritt der Faktor $1/2$ in der potentiellen Energie auf, um eine Doppelzählung der Beiträge zu vermeiden. Hier, in Gleichung (2.163), berechnen wir die potentielle Energie einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ in einem vorgegebenen externen skalaren Potential $\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, welches von einer Ladungsverteilung $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ erzeugt wird, und somit tritt keine Doppelzählung der Beiträge auf.

Entwickelt nun man das äußere Potential um $\mathbf{r} = 0$,

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \phi_{\text{ext}}(\mathbf{0}) + \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} x^i x^j \partial_i \partial_j \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \mathcal{O}(r^3), \quad (2.164)$$

und setzt dieses Resultat in (2.163) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} W &= \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \left(\phi_{\text{ext}}(\mathbf{0}) + \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} x^i x^j \partial_i \partial_j \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \mathcal{O}(r^3) \right) \\ &= q \phi_{\text{ext}}(\mathbf{0}) + \mathbf{p} \cdot \nabla \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} Q_{ij} \partial_i \partial_j \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \dots, \end{aligned} \quad (2.165)$$

wobei wir im letzten Schritt den Quadrupoltenor Q_{ij} verwendet hatten. Man beachte, dass der dabei addierte Term verschwindet, da per Annahme $\delta_{ij} \partial_i \partial_j \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = -4\pi \rho_{\text{ext}}(\mathbf{0}) = 0$. Somit erhalten wir für die Energie im äußeren externen Feld

$$W = q \phi_{\text{ext}}(\mathbf{0}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2} Q_{ij} \partial_i \partial_j \phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \dots \quad (2.166)$$

Sollte die Ladungsdichte nicht um $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ sondern um einen anderen Punkt $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ lokalisiert sein, so muss dieser Punkt entsprechend in (2.165) berücksichtigt werden, d.h. ϕ_{ext} bzw. \mathbf{E}_{ext} werden nicht bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ sondern bei $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ausgewertet.

Beispiel: Wir betrachten zwei Dipole \mathbf{p}_1 am Ort \mathbf{r}_1 und \mathbf{p}_2 am Ort \mathbf{r}_2 . Der Dipol \mathbf{p}_1 am Ort \mathbf{r}_1 erzeugt das elektrische Feld

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1))(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \mathbf{p}_1 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^5} \quad (2.167)$$

Dieses elektrische Feld spielt nun die Rolle des äußeren elektrischen Feldes. Die Energie des Dipols \mathbf{p}_2 in diesem Feld ist durch

$$W = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{|\mathbf{r}_{12}|^5} \quad (2.168)$$

mit $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ und $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$.

Kraft: Die Kraft auf eine wiederum im Ursprung lokalisierte Ladungsverteilung ist durch

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (2.169)$$

gegeben. Setzen wir wiederum die Taylor-Entwicklung von $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ um den Koordinatenursprung ein,

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{0}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \dots, \quad (2.170)$$

so gilt

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{0}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \frac{1}{2} Q_{ij} \partial_i \partial_j \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \dots, \quad (2.171)$$

wobei q , \mathbf{p} und Q_{ij} das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment der um den Koordinatenursprung lokalisierten Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ ist. Liegt also ein inhomogenes elektrisches Feld vor, so wirkt auf einem elektrischen Dipol bzw. Quadrupol eine Kraft \mathbf{F} . Diese Kraft kann gemessen werden, und somit das Dipol- bzw. Quadrupolmoment experimentell bestimmt werden.

Ist die Ladungsverteilung nicht um den Koordinatenursprung lokalisiert, sondern um \mathbf{r}_0 , so muss eine entsprechende Verschiebung $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vorgenommen werden, und wir erhalten für die Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + \frac{1}{2} Q_{ij} \partial_i \partial_j \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} + \dots \quad (2.172)$$

Drehmoment: Das Drehmoment \mathbf{M} , welches auf die lokalisierte Ladungsverteilung wirkt, ist durch

$$\mathbf{M} = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (2.173)$$

gegeben. Wir entwickeln wiederum $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ um den Koordinatenursprung wie in (2.168) aber nur die ersten beiden Terme mit. Somit erhalten wir

$$\mathbf{M} = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \times \left(\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{0}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \dots \right). \quad (2.174)$$

Im ersten Term kann man leicht die Integration über \mathbf{r} ausführen, und erhalten $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{0})$. Den zweiten Term müssen wir hierzu erst umformen. Aus der Definition des

Vektorprodukts ergibt sich, dass die k -te Komponente des Vektors $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ wie folgt gegeben ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}))_k &= \epsilon_{klm} x_l (\mathbf{r} \cdot \nabla) E_{\text{ext } m}(\mathbf{r}) \\ &= \epsilon_{klm} x_l x_n \partial_n E_{\text{ext } m}(\mathbf{r}) \\ &= \epsilon_{klm} \left(x_l x_n - \frac{1}{3} \delta_{ln} r^2 \right) \partial_n E_{\text{ext } m}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.175)$$

wobei x_l die l -te Komponente des Vektors \mathbf{r} und mit ∂_n die Ableitung nach x_n bezeichnet wird. Des Weiteren wurde in der dritten Zeile der Term $-1/3\delta_{ln} r^2$ hinzugefügt. Dieser verschwindet, da nach Kontraktion der Indizes dieser Term proportional zu $\nabla \times \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ ist, und wir annehmen, dass das externe Feld ebenfalls die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik erfüllt, und damit wirbelfrei sein muss.

Nach dieser Umformung können wir nun die \mathbf{r} Integration in (2.174) ausführen und erhalten

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{0}) + (Q \cdot \nabla) \times \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}. \quad (2.176)$$

Man beachte, dass hier mit $Q \cdot \nabla$ die übliche Matrix-Vektor-Multiplikation bezeichnet wird, d.h. in Komponenten $(Q \cdot \nabla)_l = Q_{ln} \partial_n$.

2.5.2 Alternative Form der Multipolentwicklung

Im folgenden besprechen wir eine alternative Form der Multipolentwicklung, die sich später als hilfreich erweisen wird. Wiederum muss $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ für große \mathbf{r} entwickelt werden. Hierzu verwendet man

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\hat{z}}}, \quad (2.177)$$

wobei $r = |\mathbf{r}|$ und $r' = |\mathbf{r}'|$ die Längen der Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' sind. Des Weiteren ist \hat{z} durch $\hat{z} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \cos \vartheta$ gegeben. Hierbei ist ϑ der Winkel, der durch die (Einheits-)vektoren $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{r}}'$ aufgespannt wird.

Für die Multipolentwicklung muss man $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ entwickeln. Hierzu ist es zweckmäßig, die Abkürzungen $r_<$ und $r_>$ durch

$$r_< = \min\{r, r'\}, \quad r_> = \max\{r, r'\}, \quad (2.178)$$

einzuführen. Somit gilt

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\hat{z}}} \quad \text{mit} \quad t = \frac{r_<}{r_>}. \quad (2.179)$$

Entwickelt man die linke Seite von (2.179) nach Potenzen in t , so findet man folgende Potenzreihe in t

$$\boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\hat{z}}} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\hat{z})}. \quad (2.180)$$

Man beachte, dass die Potenzreihe in t für $r \neq r'$ konvergent ist. $P_l(\hat{z})$ sind Polynome vom Grad l und heißen Legendre-Polynome. Wir studieren später die Eigenschaften der Legendre-Polynome. Nun wenden wir uns jedoch wieder der Multipolentwicklung zu. Ist die Ladungsverteilung innerhalb einer Kugel mit Radius R lokalisiert, so gilt

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^l} Q_l \quad (2.181)$$

wobei die Multipolmomente Q_l durch

$$Q_l = \int d^3\mathbf{r}' P_l(\hat{z}) r'^l \rho(\mathbf{r}') \quad (2.182)$$

gegeben sind. Wie man leicht durch explizite Berechnung der Taylorreihe von $(1 + t^2 - 2t\hat{z})^{-1}$ um $t = 0$ sieht, erhält man für die Legendre-Polynome

$$\begin{aligned} P_0(\hat{z}) &= 1, \\ P_1(\hat{z}) &= \hat{z}, \\ P_2(\hat{z}) &= \frac{1}{2} (3\hat{z}^2 - 1), \\ P_3(\hat{z}) &= \frac{1}{2} (5\hat{z}^3 - 3\hat{z}). \end{aligned} \quad (2.183)$$

Daher erhält man für die Multipolmomente

$$Q_0 = \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') = Q, \quad (2.184)$$

d.h. Q_0 entspricht wie im kartesischen Fall der Gesamtladung. Für Q_1 gilt

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \hat{z} r' \\ &= \frac{1}{r} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r}, \end{aligned} \quad (2.185)$$

wobei \mathbf{p} das kartesische Dipolmoment ist. Bei der Herleitung wurde benutzt, dass

$$\hat{z} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r r'}. \quad (2.186)$$

Schließlich erhält man für Q_2

$$Q_2 = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (3\hat{z}^2 - 1) r'^2. \quad (2.187)$$

2.5.3 Eigenschaften der Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome $P_l(\hat{z})$ erfüllen die Rekursionsbeziehung

$$(2l + 1)\hat{z} P_l(\hat{z}) = (l + 1) P_{l+1}(\hat{z}) + l P_{l-1}(\hat{z}). \quad (2.188)$$

Diese Rekursionsbeziehung leitet man wie folgt her. Definiert man

$$f(t, \hat{z}) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t\hat{z}}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\hat{z}), \quad (2.189)$$

so folgt nach Anwendung der partiellen Ableitung nach t

$$\frac{z - t}{(1 + t^2 - 2t\hat{z})^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} l t^{l-1} P_l(\hat{z}). \quad (2.190)$$

Multipliziert man beide Seiten mit $1 + t^2 - 2t\hat{z}$ und verwendet (2.189)

$$(z - t) \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\hat{z}) = (1 + t^2 - 2t\hat{z}) \sum_{l=0}^{\infty} l t^{l-1} P_l(\hat{z}) \quad (2.191)$$

und multipliziert man beide Seiten aus, so folgt nach einem Koeffizientenvergleich vor t^n die behauptete Rekursionsbeziehung

$$\boxed{(n + 1) P_{n+1}(\hat{z}) - (2n + 1) \hat{z} P_n(\hat{z}) + n P_{n-1}(\hat{z}) = 0.} \quad (2.192)$$

Die Legendre-Polynome werden im Folgenden eine wichtige Rolle spielen. Beispielsweise erfüllen $P_l(\hat{z})$ die Legendresche Differentialgleichung

$$(1 - \hat{z}^2) P_l''(\hat{z}) - 2\hat{z} P_l'(\hat{z}) + l(l + 1) P_l(\hat{z}) = 0 \quad (2.193)$$

bzw. nach einer Äquivalenzumformung

$$\boxed{\frac{d}{d\hat{z}} \left((1 - \hat{z}^2) \frac{d}{d\hat{z}} P_l(\hat{z}) \right) + l(l + 1) P_l(\hat{z}) = 0.} \quad (2.194)$$

Mit Hilfe der Variablen-Transformation $\hat{z} = \cos \vartheta$ folgt

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP_l(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \right) + l(l + 1) P_l(\cos \vartheta) = 0. \quad (2.195)$$

Weitere Eigenschaften der Legendre-Polynome*

Die Legendre-Polynome $P_l(z)$ haben die folgenden Eigenschaften:

- (i) Die Legendre-Polynome nehmen für $\hat{z} = 1$ den Wert 1 an, d.h.

$$P_l(1) = 1. \quad (2.196)$$

(ii) $P_l(\hat{z})$ ist durch

$$P_l(\hat{z}) = \frac{1}{l!} \left(\frac{\partial^l}{\partial t^l} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\hat{z}}} \right) \Big|_{t=0} \quad (2.197)$$

(iii) $P_l(\hat{z})$ erfüllt die Formel von Rodrigues

$$P_l(\hat{z}) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial \hat{z}^l} (\hat{z}^2 - 1)^l. \quad (2.198)$$

(iv) Es gilt die Summendarstellung

$$P_l(\hat{z}) = \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} \hat{z}^{l-2k}, \quad (2.199)$$

wobei $\lfloor l/2 \rfloor$ wie folgt definiert ist

$$\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{für } l \text{ gerade} \\ \frac{l-1}{2} & \text{für } l \text{ ungerade} \end{cases}$$

(v) Die Polynome $P_l(\hat{z})$ erfüllen die folgende Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 d\hat{z} P_l(\hat{z}) P_m(\hat{z}) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,m}. \quad (2.200)$$

(vi) Die Polynome $P_l(\hat{z})$ erfüllen eine Vollständigkeitsrelation. Hierzu betrachten wir die Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' in Kugelkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} r' \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ r' \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ r' \cos \vartheta' \end{pmatrix}.$$

Somit gilt für \hat{z}

$$\hat{z} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r r'} = \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta' \quad (2.201)$$

und $P_l(\hat{z})$ erfüllt die Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') = \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (2.202)$$

Mit Hilfe dieser Vollständigkeitsrelation kann jede beliebige Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ auf der Sphäre S^2 als Linearkombination von Legendre-Polynomen geschrieben

werden, da

$$\begin{aligned} f(\vartheta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' f(\vartheta', \varphi') \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin \vartheta' f(\vartheta', \varphi') P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'), \end{aligned} \quad (2.203)$$

wobei $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta'$.

Beweis einiger Eigenschaften:

(i) Aus $\hat{z} = 1$ folgt

$$\frac{1}{r > \sqrt{1+t^2-2t}} = \frac{1}{r > 1-t} = \frac{1}{r >} \sum_{l=0}^{\infty} t^l \quad (2.204)$$

und somit durch Koeffizientenvergleich mit (2.180) folgt $P_l(1) = 1$.

(ii) Die Behauptung folgt direkt aus

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\hat{z}}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\hat{z}) \quad (2.205)$$

indem man die linke Seite um $t = 0$ in eine Taylor-Reihe entwickelt, d.h.

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\hat{z}}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} t^l \left(\frac{\partial^l}{\partial t^l} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\hat{z}}} \right) \Big|_{t=0} \quad (2.206)$$

und dann einen Koeffizientenvergleich durchführt.

(iii) Man zeigt durch explizites Einsetzen, dass $f(z) = (z^2 - 1)^l$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(z^2 - 1) f'(z) = 2lz f(z)$$

ist. Genauer gesagt lautet die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\tilde{f}(z) = C (z^2 - 1)^l,$$

wobei C eine Konstante ist. Insbesondere gilt

$$\tilde{f}'(z) = 2Clz (z^2 - 1)^{l-1}$$

für $l \neq 0$. Somit erfüllt für $l \neq 0$ die Funktion $\tilde{f}(z)$ die obige Differentialgleichung. Für den Spezialfall $l = 0$ erhält man $f'(z) = 0$, was ebenso die obige Differentialgleichung löst.

Wir leiten nun die Differentialgleichung $l + 1$ mal nach z ab, d.h.

$$\frac{d^{l+1}}{dz^{l+1}} ((z^2 - 1) f'(z)) = 2l \frac{d^{l+1}}{dz^{l+1}} (z f(z)) . \quad (2.207)$$

Zur Vereinfachung der Ausdrücke verwenden wir die Beziehung

$$(g \cdot h)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)} \quad (2.208)$$

wobei mit $g^{(k)}$ die k -mal differenzierte Funktion g bezeichnet wird. Sofern nicht bekannt, kann diese Formel leicht durch Induktion und Anwenden der Produktregel gezeigt werden.

Für die linke Seite von (2.207) verwendet man die Beziehung (2.208) mit $n = l + 1$, $g(z) = (z^2 - 1)$ und $h(z) = f'(z)$, so erhält man

$$(z^2 - 1)f^{(l+2)} + 2z(l+1)f^{(l+1)} + (l+1)lf^{(l)} . \quad (2.209)$$

Für die rechte Seite erhält man analog

$$2lz f^{(l+1)} + 2l(l+1)f^{(l)} . \quad (2.210)$$

Somit kann man (2.207) in folgender Form schreiben:

$$(z^2 - 1)f^{(l+2)} + 2z f^{(l+1)} - (l+1)lf^{(l)} = 0 . \quad (2.211)$$

Ersetzt man $f^{(l)}$ durch $u(z)$ so erhält man die Legendresche Differentialgleichung. Die Lösung dieser Differentialgleichung sind durch die Legendresche Polynome $P_l(z)$ gegeben. Somit muss gelten

$$P_l(z) = C \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \quad (2.212)$$

Die genaue Normierungskonstante C kann durch die Eigenschaft $P_l(z = 1) = 1$ bestimmt werden. Dazu muss man

$$\left. \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \right|_{z=1}$$

berechnen. Da keine Faktoren $z^2 - 1$ stehen bleiben dürfen (ansonsten verschwindet der Ausdruck für $z = 1$), muss jede der l z -Ableitungen auf einen Faktor $z^2 - 1$ wirken. Es gibt insgesamt $l!$ verschiedene Kombinationen wie diese z -Ableitungen auf $z^2 - 1$ wirken können. Des Weiteren erhält man pro Ableitung einen Faktor 2, insgesamt also 2^l . Somit gilt

$$\left. \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \right|_{z=1} = 2^l l!$$

und somit

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l . \quad (2.213)$$

- (iv) beweisbar durch vollständige Induktion und der in (iii) bewiesenen Rekursionsbeziehung.
- (v) Wir betrachten zuerst den Fall $l \neq m$. $P_l(z)$ und $P_m(z)$ erfüllen die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{d}{dz} P_l(z) \right) + l(l+1)P_l(z) = 0, \quad (2.214)$$

$$\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{d}{dz} P_m(z) \right) + m(m+1)P_m(z) = 0. \quad (2.215)$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $P_m(z)$, die zweite Gleichung mit $P_l(z)$ und bildet die Differenz davon, so erhält man

$$(l(l+1)-m(m+1))P_l(z)P_m(z) = \frac{d}{dz} \left((1-z^2)P_m(z) \frac{dP_l(z)}{dz} - (1-z^2)P_l(z) \frac{dP_m(z)}{dz} \right). \quad (2.216)$$

Integriert man beide Seiten, so erhält man

$$(l(l+1)-m(m+1)) \int_{-1}^1 dz P_l(z)P_m(z) = \left[(1-z^2)P_m(z) \frac{dP_l(z)}{dz} - (1-z^2)P_l(z) \frac{dP_m(z)}{dz} \right]_{-1}^1 = 0 \quad (2.217)$$

wobei wir den Hauptsatz der Differential- und Integralgleichung verwendet haben. Somit gilt für $l \neq m$

$$\int_{-1}^1 dz P_l(z)P_m(z) = 0. \quad (2.218)$$

Für den Fall $l = m$ argumentiert man wie folgt: Die Legendre-Polynome können (wie in der Vorlesung eingeführt) aus einer erzeugenden Funktion bestimmt werden:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n \quad (2.219)$$

und somit

$$\frac{1}{1-2tz+t^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_n(z)P_m(z)t^n t^m \quad (2.220)$$

Integriert man beide Seiten über $z \in [-1, 1]$, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dz}{1-2tz+t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^n t^m \int_{-1}^1 dz P_n(z)P_m(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 dz P_n(z)^2, \end{aligned} \quad (2.221)$$

wobei wir im letzten Schritt bereits ausgenutzt hatten, dass die Legendre-Polynome für $n \neq m$ orthogonal sind. Die linke Seite kann man nach Substitution $y = 1 - 2tz + t^2$ integrieren,

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - 2tz + t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2t} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^2 = \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} \quad (2.222)$$

Verwendet man die bekannten Potenzreihen für $\ln(1+t)$ und $\ln(1-t)$

$$\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k} \quad (2.223)$$

$$\ln(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k} \quad (2.224)$$

$$(2.225)$$

So erhält man

$$\int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - 2tz + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n} \quad (2.226)$$

Koeffizientenvergleich ergibt somit

$$\int_{-1}^1 dz P_n(z)^2 = \frac{2}{2n+1} \quad (2.227)$$

und insgesamt

$$\int_{-1}^1 dz P_l(z) P_n(z) = \frac{2}{2n+1} \delta_{ln} \quad (2.228)$$

Die Beziehung kann auch mit der Formel von Rodrigues und mit partiellem Integrieren gezeigt werden.

2.6 Lösungsmethoden der Laplace-Gleichung

Im ladungsfreien Raum, d.h. für $\rho(\mathbf{r}) = 0$, erfüllt das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ die Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.229)$$

Im Folgenden stellen wir Methoden zur Lösung der Laplace-Gleichung vor.

2.6.1 Separationsansatz

In diesem Abschnitt betrachten wir die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten. Der Punkt \mathbf{r} wird durch die Koordinaten (r, ϑ, φ) beschrieben, die durch die folgende Transformation

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad (2.230)$$

gegeben sind, wobei $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und (x, y, z) die kartesischen Koordinaten sind. Der Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten angewandt auf eine skalare Funktion $\phi(\mathbf{r})$ ist durch

$$\Delta\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}\phi(r, \theta, \phi) \quad (2.231)$$

gegeben, wobei Δ_{S^2} der Laplace-Operator auf der Kugeloberfläche S^2 mit Radius eins ist,

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (2.232)$$

Nimmt man nun an, dass das elektrostatische Potential $\phi(r, \vartheta, \varphi)$ dem Separationsansatz

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) Y(\vartheta, \varphi), \quad (2.233)$$

genügt, so erhält man für die Laplace-Gleichung

$$\frac{Y(\vartheta, \varphi)}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df(r)}{dr} \right) + \frac{f(r)}{r^2} \Delta_{S^2} Y(\vartheta, \varphi) = 0. \quad (2.234)$$

Dividiert man beide Seiten durch $Y(\vartheta, \varphi) f(r)/r^2$ so erhält man

$$\frac{1}{f(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df(r)}{dr} \right) = - \frac{1}{Y(\vartheta, \varphi)} \Delta_{S^2} Y(\vartheta, \varphi). \quad (2.235)$$

Man beachte, dass die linke Seite der Gleichung nur von r und die rechte Seite nur von ϑ und φ abhängt. Somit können beide Seiten jeweils lediglich konstant sein, d.h.

$$\Delta_{S^2} Y(\vartheta, \varphi) = \lambda Y(\vartheta, \varphi). \quad (2.236)$$

Die Konstante λ muss negativ sein, da

$$\begin{aligned} \lambda \int_{S^2} d\Omega |Y(\vartheta, \varphi)|^2 &= \int_{S^2} d\Omega Y^*(\vartheta, \varphi) \Delta_{S^2} Y(\vartheta, \varphi) \\ &= - \int_{S^2} d\Omega \nabla Y^*(\vartheta, \varphi) \cdot \nabla Y(\vartheta, \varphi) = - \int_{S^2} d\Omega |\nabla Y(\vartheta, \varphi)|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.237)$$

und somit $\lambda \leq 0$. Wir setzen nun $\lambda = -l(l+1)$ wobei $l \geq 0$ sein muss. Wir werden später sehen, dass $l \in \mathbb{N}_0$ sein muss. Somit erhalten wir für die Differentialgleichung mit Hilfe des Separationsansatz

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df(r)}{dr} \right) = l(l+1) f(r) \quad (2.238)$$

sowie

$$\Delta_{S^2} Y(\vartheta, \varphi) + l(l+1) Y(\vartheta, \varphi) = 0. \quad (2.239)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.238) ist durch

$$f(r) = a r^l + b r^{-l-1} \quad (2.240)$$

gegeben, wobei a und b Konstanten sind. Im Folgenden werden wir die Lösung der Differentialgleichung (2.239) erarbeiten. Hierzu setzen wir zuerst den Laplace-Operator (2.232) in die Differentialgleichung (2.239) ein,

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + l(l+1) Y(\vartheta, \varphi) = 0. \quad (2.241)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung bietet sich erneut ein Separationsansatz der Form

$$Y(\vartheta, \varphi) = \tilde{P}(\vartheta) Q(\varphi) \quad (2.242)$$

an. Die Funktionen $\tilde{P}(\vartheta)$ und $Q(\varphi)$ lösen dabei die folgenden Differentialgleichungen

$$\sin \vartheta \frac{\partial \tilde{P}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \tilde{P}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) - m^2 \tilde{P}(\vartheta) + l(l+1) \sin^2 \vartheta \tilde{P}(\vartheta) = 0 \quad (2.243)$$

und

$$\frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 Q(\varphi) = 0, \quad (2.244)$$

wobei eine reelle m eine Konstante ist. Die Differentialgleichung (2.244) wird durch $Q(\varphi) = q \exp(im\varphi)$ gelöst. Im Folgenden setzen wir $q = 1$, und erhalten somit

$$Q(\varphi) = \exp(im\varphi). \quad (2.245)$$

Da es sich bei φ um einen Winkel handelt, d.h. um eine 2π -periodische Koordinate, muss $Q(\varphi + 2\pi) = Q(\varphi)$ gelten, und somit $m \in \mathbb{Z}$.

Die Differentialgleichung (2.243) kann man durch die Variablentransformation $\hat{z} = \cos \vartheta$ vereinfachen. Damit gilt

$$\frac{\partial}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{\frac{\partial \hat{z}}{\partial \vartheta}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \hat{z}} = -\sqrt{1 - \hat{z}^2} \frac{\partial}{\partial \hat{z}}, \quad (2.246)$$

und somit für die Differentialgleichung (2.243)

$$(1 - \hat{z}^2) \left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left((1 - \hat{z}^2) \frac{\partial P(\hat{z})}{\partial \hat{z}} \right) + l(l+1) P(\hat{z}) \right) - m^2 P(\hat{z}) = 0. \quad (2.247)$$

Bevor wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.247) diskutieren, schauen wir zuerst einen Spezialfall.

Zylindersymmetrie: Wir beschränken uns zuerst auf ein zylindersymmetrisches Problem. Mit anderen Worten, wir suchen die allgemeine Lösung der Laplacegleichung $\Delta\phi(r, \vartheta, \varphi) = 0$, wobei die Lösung zylindersymmetrisch sein soll, d.h. unabhängig von φ . Somit reduziert sich der Separationsansatz zu

$$\phi(r, \vartheta) = f(r) P(\cos \vartheta) \quad (2.248)$$

wobei $f(r)$ die Differentialgleichung (2.238) löst, und durch (2.240) gegeben ist. Die Funktion $P(\hat{z}) = P(\cos \vartheta)$ erfüllt die Differentialgleichung (2.247) mit $m = 0$, d.h. wir erhalten die Legendresche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left((1 - \hat{z}^2) \frac{\partial P(\hat{z})}{\partial \hat{z}} \right) + l(l+1)P(\hat{z}) = 0, \quad (2.249)$$

deren Lösung durch die Legendre-Polynome $P_l(\hat{z})$ gegeben ist. Somit lautet eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta\phi(r, \vartheta) = 0$ im zylindersymmetrischen Fall

$$\phi(r, \vartheta) = \left(a r^l + b r^{-l-1} \right) P_l(\cos \vartheta). \quad (2.250)$$

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination dieser Lösungen

$$\boxed{\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l r^{-l-1} \right) P_l(\cos \vartheta)}, \quad (2.251)$$

wobei a_l und b_l reelle Konstanten sind für $l \in \mathbb{N}_0$. Diese Konstanten sind durch Randbedingungen an das Potential $\phi(r, \vartheta)$, beispielsweise durch $\phi(r_0, \vartheta) = \phi_0(\vartheta)$. Hierbei nutzt man aus, dass sich jede beliebige stetige Funktion $\phi_0(\vartheta)$ in Legendre-Polynome entwickeln lässt,

$$\phi_0(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos \vartheta), \quad (2.252)$$

wobei die Koeffizienten c_l mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 d\hat{z} P_l(\hat{z}) P_m(\hat{z}) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm} \quad (2.253)$$

zu

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 d\cos \vartheta \phi_0(\vartheta) P_l(\cos \vartheta) \quad (2.254)$$

bestimmt werden können.

Beispiel: Leitende Kugel im homogenen \mathbf{E} -Feld. Zur Illustration der Lösungsmethode betrachten wir eine geerdete, leitende Kugel vom Radius R (dessen Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt) in einem homogenen \mathbf{E} -Feld gegeben durch $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z$, wobei E_0 konstant sein soll. Das vorliegende Problem ist offensichtlich achsensymmetrisch um die z -Achse.

Mit anderen Worten, wir wollen die Laplace-Gleichung $\Delta\phi(r, \vartheta) = 0$ außerhalb der Kugel lösen, wobei das elektrostatische Potential den Randbedingungen

$$\phi(r = R, \vartheta) = 0 \quad (2.255)$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \vartheta) = -E_0 z \quad (2.256)$$

genügen soll. Da $z = r \cos \vartheta = r \hat{z} = r P_1(\hat{z})$, kann man die letzte Randbedingung auch durch

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \vartheta) = -E_0 r P_1(\hat{z}) \quad (2.257)$$

formulieren. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung ist durch

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + b_l r^{-l-1} \right) P_l(\cos \vartheta), \quad (2.258)$$

gegeben. Man beachte, dass im Limes $r \rightarrow \infty$ die Terme mit den Koeffizienten b_l nicht beitragen. Somit verbleiben in diesem Limes noch die Terme mit den Koeffizienten a_l , die wir mittels Koeffizientenvergleich mit (2.249) bestimmen können. Es gilt

$$a_n = 0 \quad \text{für } n \geq 2, \quad \text{und} \quad a_0 = 0 \quad (2.259)$$

sowie

$$a_1 = -E_0. \quad (2.260)$$

Somit folgt

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{b_0}{r} + \left(\frac{b_1}{r^2} - E_0 r \right) P_1(\cos \vartheta) + \sum_{l=2}^{\infty} b_l r^{-l-1} P_l(\cos \vartheta) \quad (2.261)$$

für $r \geq R$. Für $r = R$ soll das Potential verschwinden. Auch die Nullfunktion lässt sich trivialerweise in Legendre-Polynome entwickeln, wobei alle Koeffizienten verschwinden. Koeffizientenvergleich von (2.258) für $r = R$ mit der Nullfunktion ergibt somit

$$b_n = 0 \quad \text{für } n \geq 2, \quad \text{und} \quad b_0 = 0 \quad (2.262)$$

sowie

$$b_1 = E_0 R^3. \quad (2.263)$$

Das gesuchte Potential lautet somit

$$\phi(r, \vartheta) = -E_0 r \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) P_1(\hat{z}) = -E_0 r \cos \vartheta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = -E_0 z \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right). \quad (2.264)$$

Zurück zum allgemeinen Problem: Wir haben noch die Differentialgleichung

$$(1 - \hat{z}^2) \left(\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left((1 - \hat{z}^2) \frac{\partial P(\hat{z})}{\partial \hat{z}} \right) + l(l+1)P(\hat{z}) \right) - m^2 P(\hat{z}) = 0 \quad (2.265)$$

zu lösen. Die Lösung ist durch das *zugeordnete Legendre-Polynom* $P_l^m(\hat{z})$ gegeben, das durch

$$P_l^m(\hat{z}) = (-1)^m (1 - \hat{z}^2)^{m/2} P_{lm}(\hat{z}) \quad (2.266)$$

zu der Helmholtz-Funktion $P_{lm}(\hat{z})$ mit

$$P_{lm}(\hat{z}) = \frac{d^m}{d\hat{z}^m} P_l(\hat{z}) \quad (2.267)$$

in Verbindung steht. Die Helmholtz-Funktion $P_{lm}(\hat{z})$ ist ein Polynom vom Grad $l - m$ und erfüllt die Differentialgleichung

$$\left((1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2(m+1)z \frac{d}{dz} + (l(l+1) - m(m+1)) \right) P_{lm}(\hat{z}) = 0. \quad (2.268)$$

Dies weist man nach, indem man die Legendresche Differentialgleichung m mal ableitet.

Des Weiteren kann man mittels der Formel von Rodrigues die zugeordneten Legendre-Polynome auch in der Form

$$P_l^m(\hat{z}) = (-1)^m (1 - \hat{z}^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\hat{z}^m} P_l(\hat{z}) = (-1)^m (1 - \hat{z}^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d\hat{z}^{l+m}} (\hat{z}^2 - 1)^l \quad (2.269)$$

schreiben. Die zugeordneten Legendre-Polynome P_l^m haben somit Grad l . Durch Multiplikation mit der Funktion $Q(\varphi) = \exp(im\varphi)$ und einem konventionellen Normierungsfaktor erhalten wir die *Kugelflächenfunktionen* $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (2.270)$$

mit $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \{-l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l-1, l\}$. Der Normierungsfaktor in (2.270) wurde dabei so gewählt, dass die Kugelflächenfunktionen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{S^2} d^2 A Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.271)$$

erfüllen, wobei $d^2 A = d\vartheta d\varphi \sin \vartheta$.

Mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen, kann die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten folgendermaßen geschrieben werden

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-l-1} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.272)$$

wobei die komplexen Koeffizienten a_{lm} und b_{lm} durch Randbedingungen fixiert werden. Damit beispielsweise das Potential $\phi(r, \vartheta, \varphi)$ im Unendlichen verschwindet, müssen alle Koeffizienten $a_{lm} = 0$ verschwinden.

2.6.2 Einschub: Wichtige Eigenschaften von Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen haben die folgenden Eigenschaften

- (i) die Kugelflächenfunktionen sind orthonormal

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.273)$$

wobei $d\Omega$ das Flächenelement der S^2 ist mit Radius $R = 1$, d.h. $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$.

- (ii) die Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges System

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta(\cos\vartheta' - \cos\vartheta) \delta(\varphi' - \varphi). \quad (2.274)$$

Diese Eigenschaft kann man ausnutzen, um Funktionen f auf S^2 , d.h. die von ϑ und φ abhängen, nach Kugelflächenfunktionen zu entwickeln

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.275)$$

wobei die Koeffizienten a_{lm} durch

$$a_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') f(\vartheta', \varphi') \quad (2.276)$$

berechnet werden können.

- (iii) Es besteht der folgende einfache Zusammenhang mit Legendre-Polynome

$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_l(\cos\gamma), \quad (2.277)$$

wobei γ der Winkel zwischen $\hat{\mathbf{r}}$ (gegeben durch ϑ und φ) und $\hat{\mathbf{r}}'$ (gegeben durch ϑ' und φ') ist, d.h.

$$\cos\gamma = \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos\vartheta \cos\vartheta'. \quad (2.278)$$

(iv) Es gelten die Zusammenhänge

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi), \quad Y_{lm}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.279)$$

Bei der Transformation $\vartheta \mapsto \pi - \vartheta$ und $\varphi \mapsto \varphi + \pi$ handelt es sich um eine Paritätstransformation, d.h. um eine Punktspiegelung am Ursprung, $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$.

(v) Aus $P_l(1) = 1$ sowie $P_l(-1) = (-1)^l$ folgt

$$Y_{l0}(0, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \quad Y_{l0}(\pi, \varphi) = (-1)^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \quad (2.280)$$

2.6.3 Einschub: Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Wir haben in den letzten Abschnitten festgestellt, dass das elektrostatische Potential ausserhalb einer Ladungsverteilung, und unter der Annahme, dass das Potential im Unendlichen verschwindet, wie folgt dargestellt werden kann

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.281)$$

Somit verbleibt nur noch, einen Zusammenhang zwischen den Parameter q_{lm} , den sphärischen Multipolmomenten, und der lokalisierten Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ herzustellen. Im Folgenden werden wir den Zusammenhang

$$q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int d^3\mathbf{r}' r'^l \rho(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \quad (2.282)$$

beweisen.

Herleitung des Resultats*

Wie auch schon bei der Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten müssen wir hierzu die Greensche Funktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.283)$$

in Kugelflächenfunktionen entwickeln,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l G_{lm}(r, r', \vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.284)$$

Somit verbleibt noch $G_{lm}(r, r', \vartheta', \varphi')$ zu bestimmen. Hierzu gehen wir indirekt vor. Wir wissen, dass die Greensche Funktion die Differentialgleichung

$$\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.285)$$

Im Folgenden entwickeln wir die Delta-Distribution $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ in Kugelflächenfunktionen, und leiten eine Differentialgleichung für die Funktionen G_{lm} her. Es gilt

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{\delta(r - r')}{r^2} \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') & (2.286) \\ &= \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi),\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen verwendet wurde. Setzt man nun (2.286) und (2.284) in die Differentialgleichung (2.285) ein, so erhalten wir

$$\Delta_{r,\vartheta,\varphi} (G_{lm}(r, r', \vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)) = \frac{\delta(r - r')}{r^2} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.287)$$

wobei mit $\Delta_{r,\vartheta,\varphi}$ der Laplace-Operator (2.231) bezeichnet wird. Wir definieren $g_l(r, r')$ durch

$$G_{lm}(r, r', \vartheta', \varphi') = g_l(r, r') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (2.288)$$

Spaltet man außerdem den Laplace-Operator (2.231) in einen radialen Anteil und einen Winkelanteil, wobei $\Delta_{S^2} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ gilt, so folgt für $g_l(r, r')$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} g_l(r, r') \right) - l(l+1) g_l(r, r') = \delta(r - r') \quad (2.289)$$

Die gesuchte Lösungen $g_l(r, r')$ sind für $r = r'$ stetig, jedoch nicht stetig differenzierbar (wie wir sehen werden).

Für $r \neq r'$ löst somit $g_l(r, r')$ die entsprechende Laplace Gleichung, da $\delta(r - r')$ für $r \neq r'$ verschwindet. Somit gilt

$$g_l(r, r') = A_l(r') r^l + B_l(r') \frac{1}{r^{l+1}}. \quad (2.290)$$

Da für $r < r'$ $g_l(r, r')$ regulär sein soll, muss $B_l(r') = 0$ sein. Analog gilt für $r > r'$ und der Regularität von $g_l(r, r')$, dass $A_l(r') = 0$ sein muss. Somit

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A_l(r') r^l & \text{für } r < r' \\ B_l(r') r^{-l-1} & \text{für } r > r' \end{cases} \quad (2.291)$$

Aus der Stetigkeit von $g_l(r, r')$ bei $r = r'$ folgt

$$A_l(r') r'^l = B_l(r') r'^{-l-1}. \quad (2.292)$$

Setzt man nun

$$C_l = A_l(r') r'^{l+1} = B_l(r') r'^{-l} \quad (2.293)$$

so folgt

$$g_l(r, r') = C_l \begin{cases} \frac{r^l}{r^{l+1}} & \text{für } r < r' \\ \frac{r'^l}{r^{l+1}} & \text{für } r > r' \end{cases} \quad (2.294)$$

Man beachte, dass C_l Konstanten sind. Dies sieht man wie folgt ein: C_l sind dimensionslos sind, und können somit nicht von der dimensionsbehafteten Koordinate r' abhängen.

Um die Konstanten C_l zu bestimmen, untersuchen wir die Unstetigkeit der ersten Ableitung von $g_l(r, r')$ für $r = r'$. Hierzu integrieren wir die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} g_l(r, r') \right) - l(l+1)g_l(r, r') = \delta(r - r') \quad (2.295)$$

über $r \in [r' - \epsilon, r' + \epsilon]$ und erhalten

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} dr \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} g_l(r, r') \right) - l(l+1)g_l(r, r') \right) = 1 \quad (2.296)$$

Da $g_l(r, r')$ stetig ist, fällt der zweite Term im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ weg. Für den ersten Term gilt:

$$\left[r^2 \frac{d}{dr} g_l(r, r') \right]_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} = 1 \quad (2.297)$$

bzw. im Limes $\epsilon \rightarrow 0$

$$\left[\frac{d}{dr} g_l(r, r') \right]_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} = \frac{1}{r'^2} \quad (2.298)$$

Verwendet man diese Sprungbedingung (2.298) der Ableitung in Verbindung mit dem Resultat (2.289), so folgt

$$C_l \left(-(l+1) \frac{r'^l}{(r'+\epsilon)^{l+2}} - l \frac{(r'-\epsilon)^{l-1}}{r'^{l+1}} \right) = \frac{1}{r'^2} \quad (2.299)$$

bzw. im Limes $\epsilon \rightarrow 0$

$$C_l \left(-(l+1) \frac{1}{r'^2} - l \frac{1}{r'^2} \right) = \frac{1}{r'^2} \quad (2.300)$$

bzw.

$$C_l = -\frac{1}{2l+1}. \quad (2.301)$$

Damit folgt

$$g_l(r, r') = -\frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \quad (2.302)$$

und somit

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.303)$$

Mit (2.283) folgt

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.304)$$

bzw unter Verwendung von (2.277)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (2.305)$$

mit

$$\cos \theta = \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta'. \quad (2.306)$$

Wir benutzen nun den Zusammenhang (2.304), um die sphärische Multipolentwicklung herzuleiten. Wie im Fall der kartesischen Multipolentwicklung, nehmen wir an, dass die Ladungsverteilung um den Koordinatenursprung, beispielsweise in einer Kugel mit Radius R lokalisiert ist. Für $|\mathbf{r}| > R$ folgt dann mit (2.304), wobei $r_{>} = r$ und $r_{<} = r'$,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \end{aligned} \quad (2.307)$$

und daher

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.308)$$

wobei die sphärischen Multipolmomente durch

$$q_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int d^3\mathbf{r}' r'^l \rho(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \quad (2.309)$$

gegeben sind.

3 Magnetostatik

In der Elektrostatik haben wir elektrische Phänomene ruhender Ladungen untersucht. Die Magnetostatik handelt von den magnetischen Phänomenen zeitlich konstanter Ströme. Insbesondere motivieren wir ausgehend von experimentellen Befunden die Feldgleichungen für zeitlich konstante Magnetfelder.

3.1 Strom und Stromdichte

Wir definieren die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ als einen Vektor in Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger mit Betrag

$$j(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)| = \frac{dq(\mathbf{r}, t)}{dA dt}, \quad (3.1)$$

wobei $dq(\mathbf{r}, t)$ eine zur Zeit t am Ort \mathbf{r} befindliche Ladungsmenge ist. Mit anderen Worten, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ist der Fluss der Ladungsmenge dq durch die Fläche dA . Integriert man die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ über eine Fläche F mit Normalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, so ergibt sich der elektrische Strom $I(t)$ zu

$$I(t) = \int_F d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (3.2)$$

Es ist im Rahmen der Magnetostatik sinnvoll, ausgedehnte Stromverteilungen $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ durch Überlagerung von stromdurchflossenen imaginären Drähten, bzw. sogenannten Stromfäden zu beschreiben. Hierzu betrachten wir einen dünnen Draht mit der Querschnittsfläche ΔF (wobei wir insbesondere am Grenzprozess $\Delta F \rightarrow 0$ interessiert sind), der mit dem Strom I durchfloßen wird. Desweiteren sei der Draht mit $l(s)$ parametrisiert, und somit gilt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{I(t)}{\Delta F} \frac{d\mathbf{l}(s)}{|d\mathbf{l}(s)|}. \quad (3.3)$$

Insbesondere zeigt der Strom \mathbf{j} entlang des Stromfadens, da $\frac{d\mathbf{l}(s)}{|d\mathbf{l}(s)|}$ der Tangentialvektor entlang des Drahts ist. In Gleichung (3.3) ist der Parametrisierungsparameter s so gewählt, dass es den Punkt \mathbf{r} des Drahts beschreibt.

Mikroskopische Beschreibung des Stroms Im mikroskopischen Beschreibung des Stroms gehen wir zuerst von n Punktladungen q_i mit $i = 1, \dots, n$ aus, die durch die Ortsvektoren $\mathbf{r}_i(t)$ beschrieben werden. Somit erhalten wir als mikroskopische Ladungsdichte

$$\rho_{mik}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.4)$$

und somit als mikroskopische Stromdichte

$$\mathbf{j}_{mik}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (3.5)$$

mit den Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_i(t)$. Die aus diesen mikroskopischen Ladungsverteilungen und Stromdichten resultierenden makroskopischen Ladungsverteilungen $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ entstehen durch Mittelung der mikroskopischen Größen über ein kleines Volumen ΔV , welches am Raumpunkt \mathbf{r} angeheftet ist. Insbesondere gilt

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\int_{\Delta V} d^3\mathbf{r} \rho_{mik}(\mathbf{r}, t)}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\mathbf{r}_i \in \Delta V} q_i \quad (3.6)$$

sowie

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int_{\Delta V} d^3\mathbf{r} \mathbf{j}_{mik}(\mathbf{r}, t)}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\mathbf{r}_i \in \Delta V} q_i \mathbf{v}_i(t). \quad (3.7)$$

Im Fall gleicher Ladungen $q_i = q$ vereinfachen sich die obigen Ausdrücke. Führt man die Größe ΔN der in ΔV befindliche Anzahl an Ladungen ein, so folgt für die gemittelte Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \quad (3.8)$$

wobei $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ die mittlere Geschwindigkeit der Ladungen im Volumen ΔV , angeheftet an den Raumpunkt \mathbf{r} , ist

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta N} \sum_{\mathbf{r}_i \in \Delta V} \mathbf{v}_i(t). \quad (3.9)$$

Die Annahme nur einer Form von Ladungsträgern, $q_i = q$, ist sehr vereinfachend. Beispielsweise besteht ein Leiter aus einem Gitter von positiv geladene Ionen und negativ geladene Elektronen. Legt man nun eine Spannungsdifferenz an, so bewegen sich allerdings nur die Elektronen. Die Ionen sind (fast) unbeweglich, und somit ist deren mittlere Geschwindigkeit gleich Null. Damit tragen jedoch nur effektiv die negativ geladenen Elektronen zur Stromdichte bei gemäß der Gleichung (3.9).

Kontinuitätsgleichung: Wir wissen aus Experimenten, dass die (totale) elektrische Ladung des Universums weder vergrößert noch verkleinert werden kann, da es keinen physikalischen Prozess gibt, der die Nettoladungen erzeugen oder vernichten kann. Daraus resultiert die Kontinuitätsgleichung, wie wir in diesem Abschnitt sehen werden.

Wir betrachten nun eine Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$, die zeitabhängig sein darf, in einem fest vorgegebenen Volumen V . Die zeitliche Änderung der Ladung in einem Volumen V muss gleich dem Strom der Ladungen durch die Oberfläche ∂V sein, d.h.

$$\int_V d^3\mathbf{r} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \oint_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.10)$$

Diese Beziehung, die auch integrale Kontinuitätsgleichung genannt wird, muss für beliebige Volumina V gelten. Wendet man das Gaußsche Theorem auf den zweiten Term an, so folgt

$$\int_V d^3\mathbf{r} \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right) = 0, \quad (3.11)$$

und somit, da dies für alle V gelten muss,

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.12)$$

Die Gleichung (3.12) wird Kontinuitätsgleichung genannt.

Magnetostatik: Im Fall von Magnetostatik betrachten wir stationäre Strömdichten, d.h. Stromdichten, deren Betrag und Richtung zeitlich konstant ist. In anderen Worten gilt $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Aus den obigen Überlegungen folgt sofort, dass dies nicht mit einer einzigen bewegten Ladung realisiert werden kann. Vielmehr sind hierzu unendlich viele Punktladungen notwendig, was auch aufzeigt, dass ein stationärer Strom eine hochgradig idealisierte Annahme ist. Trotzdem werden in der Magnetostatik wichtige Erkenntnisse gewonnen, die dann auch in eine Formulierung der Elektrodynamik, in der die volle Zeitabhängigkeit studiert wird, eingehen.

Im statischen Fall der Magnetostatik, d.h. für $\partial\rho/\partial t = 0$, reduziert sich die Kontinuitätsgleichung (3.12) auf

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.13)$$

In der Magnetostatik ist also die Stromdichte quellenfrei. Unter anderem impliziert dies, dass an jedem Verzweigungspunkt in einem Stromkreis ebensoviel Ladung zu- wie abfließen muss. Diese Konsequenz der Kontinuitätsgleichung wird also Kirchhoffsche Knotenregel bezeichnet.

3.2 Vom Amperegesetz zur magnetischen Induktion

Ausgangspunkt der Feldgleichungen in der Elektrostatik war das Coulombsche Gesetz, also die Kraftwirkung \mathbf{F}_{12} einer elektrischen Punktladung (bzw. eines elektrischen Monopols) am Punkt \mathbf{r}_2 auf eine elektrische Punktladung am Ort \mathbf{r}_1 .

Ein ähnliches Kraftgesetz wollen wir nun im Rahmen der Magnetostatik diskutieren. Wie wir jedoch aus experimentellen Befunden wissen, gibt es in der Magnetostatik keine magnetischen Monopole. Stattdessen betrachten wir zwei Stromfäden L_1 und L_2 . Werden diese Stromfäden von den stationären Strömen I_1 bzw. I_2 durchflossen, so wirkt auf diese Stromfäden ein Kraft.

Insbesondere wirkt der Stromfaden L_2 mit einer Kraft \mathbf{F}_{12} auf den Stromfaden L_1 , während der Stromfaden L_1 eine Kraft $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ (*actio=reactio*) auf den Stromfaden L_2 ausübt. Aus experimentellen Befunden ergibt sich das sogenannte Ampere'sche Gesetz

$$\mathbf{F}_{12} = -k_2 I_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} (d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad (3.14)$$

k_2 ist eine positive Proportionalitätskonstante, die vom gewählten Einheitensystem abhängt. Im Gaußschen Einheitensystem ergibt sich die Konstante k_2 zu $k_2 = 1/c^2$. Im SI-Einheitensystem definiert man die Stromstärke über das Ampere'sche Gesetz (3.14) definiert. Man wählt $k_2 = \mu_0/(4\pi)$, wobei μ_0 die Permeabilitätskonstante des Vakuums ist. In SI-Einheiten¹ gilt $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{N/A}^2$. In diesem Skript verwenden wir SI-Einheiten.

Man beachte außerdem das Minuszeichen in Gleichung (3.14). Somit ziehen sich die Leiter bei gleichsinniger Stromrichtung an und stoßen sich bei entgegengesetzter Stromrichtung ab

Im Folgenden formulieren wir das Ampere'sche Gesetz noch etwas um. Hierzu führen wir die Abkürzungen $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ und $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$ ein und benutzen die Identität

$$d\mathbf{r}_1 \times (d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_{12}) = (d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_{12}) d\mathbf{r}_2 - (d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2) \mathbf{r}_{12} \quad (3.15)$$

für das zweifache Kreuzprodukt. Somit folgt für (3.14)

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \times (d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{(r_{12})^3} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} d\mathbf{r}_2 \left(\oint_{L_1} d\mathbf{r}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{(r_{12})^3} \right). \quad (3.16)$$

¹In SI-Einheiten ist die Stromstärke 1 Ampere als die Stärke des zeitlich konstanten elektrischen Stromes, der im Vakuum zwischen zwei parallelen, unendlich langen, geraden Leitern mit vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt und dem Abstand von 1 m zwischen diesen Leitern eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton pro Meter Leiterlänge hervorrufen würde.

Der zweite Term verschwindet, da

$$\oint_{L_1} d\mathbf{r}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{(r_{12})^3} = - \oint_{L_1} d\mathbf{r}_1 \cdot \nabla \left(\frac{1}{r_{12}} \right) = - \int_{O(L_1)} d^2\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{r_{12}} \right) = 0, \quad (3.17)$$

wobei für das zweite Gleichheitszeichen der Satz von Stokes verwendet wurde. Desweiteren wurde die Identität $\nabla \times \nabla f = 0$ ausgenutzt. Somit folgt die alternative Formulierung des Ampereschen Gesetzes

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \times (d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{(r_{12})^3}. \quad (3.18)$$

Wie auch im Fall der Elektrostatik interpretieren wir das Amperesche Gesetz mittels des Feldbegriffs. Der Stromfaden L_2 wirkt mit der Kraft \mathbf{F}_{12} auf den Stromfaden L_1 gemäss (3.18)

$$\mathbf{F}_{12} = I_1 \oint_{L_1} d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) \quad (3.19)$$

mit

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (3.20)$$

Mit anderen Worten, durch den Stromfaden L_2 wird die sogenannte *magnetische Induktion* (oder kurz \mathbf{B} -Feld) $\mathbf{B}_2(\mathbf{r})$ erzeugt, welches sich durch (3.20) berechnet. Die magnetische Induktion bewirkt nun eine Kraft auf den Stromfaden L_1 , die durch (3.19) gegeben ist. Offensichtlich kann man auch die Rolle der Stromfäden L_1 und L_2 vertauschen, und erhält

$$\mathbf{F}_{21} = I_2 \oint_{L_2} d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (3.21)$$

Die Gleichung (3.20) zur Bestimmung des \mathbf{B} -Feldes wird auch Biot-Savart-Gesetz genannt. Man beachte, dass in Gsäußschen Einheiten die magnetische Induktion \mathbf{B} die gleiche Dimension hat wie die elektrische Feldstärke \mathbf{E} .

Bisher haben wir zwei Stromfäden L_1 und L_2 betrachtet. Analog zur Elektrostatik folgt aus dem Superpositionsprinzip der Kraftwirkungen auch das Superpositionsprinzip für die magnetische Induktion \mathbf{B} . Im Fall von n Stromfäden L_i (mit $i = 1, \dots, n$), die durch stationäre Ströme I_i erzeugt werden, gilt für die gesamte magnetische Induktion

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \oint_{L_i} \frac{d\mathbf{r}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (3.22)$$

Auf einen Probe-Stromfaden L_{n+1} wirkt somit in Anwesenheit der n Stromfäden L_i – oder äquivalent in Anwesenheit der durch (3.22) gegebenen magnetischen Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ die Kraft

$$\mathbf{F} = I_{n+1} \oint_{L_{n+1}} d\mathbf{r}_{n+1} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_{n+1}) \quad (3.23)$$

Mittels der Beziehung $\mathbf{j}(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = Id\mathbf{r}$ können wir die Beziehung (3.22) auch auf beliebige Stromdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ verallgemeinern und erhalten

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.24)$$

Die zu (3.24) analoge Gleichung in der Elektrostatik lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (3.25)$$

d.h. um vom \mathbf{E} -Feld zum \mathbf{B} -Feld überzugehen, müssen wir nur das Produkt aus $\rho(\mathbf{r}')$ und dem Vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ durch das Kreuzprodukt aus $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ und dem Vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ersetzen. Wir werden sehen, dass sich diese Analogie größtenteils durch die Magnetostatik zieht, und wir daher viele der Methoden der Elektrostatik auch hier anwenden können.

Schließlich lässt sich auch die Beziehung (3.23) auf kontinuierliche Stromdichten $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ erweitern. Die Kraft, die auf eine Stromdichte \mathbf{j} von einem durch eine andere Stromdichte \mathbf{j}' erzeugtes \mathbf{B} -Feld ausgeübt wird, ist durch

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (3.26)$$

gegeben.

Beispiel: Punktladung in äußerem \mathbf{B} -Feld Für eine Punktladung q am Ort $\mathbf{r}_0(t)$ folgt für die (mikroskopische) Ladungs- und Stromdichten

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q \mathbf{v}_0(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad (3.27)$$

wobei $\mathbf{v}_0(t) = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ gilt. Setzen wir diese Beziehungen in (3.26) ein, so folgt

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v}_0(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0(t)). \quad (3.28)$$

Betrachten wir zudem noch ein äußeres elektrisches Feld \mathbf{E} , so erhalten wir für die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}_0(t)) + \mathbf{v}_0(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0(t))). \quad (3.29)$$

Nach Newton bewirkt die Kraft \mathbf{F} eine Beschleunigung

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_0(t) \quad (3.30)$$

des (nicht-relativistischen) Punktteilchens. Mit Hilfe von (3.29) und (3.30) können wir nun die nicht-relativistische Bewegung von Punktteilchen in beliebigen äußeren elektrischen und magnetischen Feldern berechnen.

Beispiel: Magnetfeld eines geraden stromdurchflossenen geraden Leiters Wir betrachten im Folgenden einen unendlich langen und unendlich dünnen geraden Leiter L , der entlang der z -Achse verläuft und durch $x = y = 0$ beschrieben wird. Dieser Leiter wird vom Strom I durchfloßen.

Aufgrund der vorliegenden Achsensymmetrie führen wir Zylinderkoordinaten ein, $x = \varrho \cos \varphi$ und $y = \varrho \sin \varphi$. Es gilt für $\mathbf{B}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.31)$$

Mit \mathbf{r}' werden die Punkte auf dem Leiter parametrisiert $\mathbf{r}' = z' \mathbf{e}_z$. Somit gilt

$$d\mathbf{r}' = dz' \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \varrho \mathbf{e}_\varrho + (z - z') \mathbf{e}_z. \quad (3.32)$$

und daher folgt für das \mathbf{B} -Feld

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\mathbf{e}_z \times (\varrho \mathbf{e}_\varrho + (z - z') \mathbf{e}_z)}{(\varrho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I \varrho}{4\pi} \mathbf{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{(\varrho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varrho = \mathbf{e}_\varphi$ verwendet wurde. Den Integralausdruck kann man durch die Ersetzung $z - z' = \varrho \xi$ auf die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{(\varrho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{2}{\varrho^2} \int_0^{\infty} d\xi \frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{2}{\varrho^2} \quad (3.34)$$

gebracht werden. Im letzten Schritt wurde das Integral beispielsweise mit Mathematica ausgewertet.²

Somit erhalten wir für das \mathbf{B} -Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \varrho} \mathbf{e}_\varphi. \quad (3.35)$$

Die Feldlinien der magnetischen Induktion sind somit konzentrische Kreise um die z -Achse. Der Betrag von \mathbf{B} ist proportional zur Stromstärke I des durchflossenen Stromes, und invers proportional zum Abstand zur z -Achse.

²Um das Integral analytisch auszuwerten, kann man eine weitere Substitution der Form $\zeta = \xi^2$ durchführen, und erhält die Integraldarstellung der Beta-Funktion.

3.3 Das Vektorpotential & Feldgleichungen

In Analogie zur Elektrodynamik, in der wir das elektrische Feld durch den Gradienten des elektrostatischen Potentials ausgedrückt haben, kann man für die magnetische Induktion \mathbf{B} ebenfalls ein Vektorpotential \mathbf{A} einführen,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla f(\mathbf{r}). \quad (3.36)$$

Die magnetische Induktion \mathbf{B} ist durch $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ gegeben, wie man durch explizite Rechnung sieht

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times \left(\int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Insbesondere fällt in der Berechnung des \mathbf{B} -Feldes die Funktion $f(\mathbf{r})$ heraus. Mit anderen Worten, wir können die Funktion $f(\mathbf{r})$ beliebig wählen, und erhalten für das Vektorpotential \mathbf{A} in (3.36) immer diesselbe magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Eine ähnliche Wahlfreiheit besteht bereits in der Elektrostatik. Dort ist das Potential auch nur bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt.

Eine mögliche Wahl für die Funktion f , die wir im Folgenden verwenden, ist durch $f(\mathbf{r}) = 0$ für alle \mathbf{r} gegeben. Diese Wahl wird als Coulomb-Eichung bezeichnet. Damit reduziert sich (3.36) auf

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.} \quad (3.38)$$

Differentielle Feldgleichungen

Im Folgenden leiten wir die differentiellen Feldgleichungen für die magnetische Induktion \mathbf{B} her. Eine direkte Konsequenz aus $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ ist die Quellenfreiheit von $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, d.h.

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.39)$$

da für jedes Vektorfeld gilt $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0$. Um eine Gleichung für die Rotation der magnetischen Induktion herzuleiten, gehen wir ebenfalls von (3.38) aus. Die Rotation von \mathbf{B} steht dabei mit \mathbf{A} wie folgt in Beziehung

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \int d^3\mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (3.40)$$

wobei die Identität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v}$ verwendet wurde. Verwenden wir nun

$$\Delta_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.41)$$

so folgt

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \int d^3 \mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ verwendet wurde. Der zweite Term in der letzten Zeile verschwindet identisch. Dies sieht man unter Verwendung des Satzes von Gauß wie folgt

$$\int d^3 \mathbf{r}' \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \int d^3 \mathbf{a}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.43)$$

wobei das Oberflächenintegral im Unendlichen ausgewertet werden muss. Im Unendlichen verschwindet jedoch der Integrand. Somit erhalten wir die beiden Differentialgleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})} \quad (3.44)$$

für die magnetische Induktion.

Analog kann man die differentiellen Feldgleichungen für das Vektorpotential herleiten. In der Coulomb-Eichung gilt für das Vektorpotential (3.38)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' (\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Im letzten Schritt wurde partiell integriert. Randterme tragen hierbei nicht bei, da $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ schnell genug abfällt (siehe obiges Argument). Verwendet man nun die Kontinuitätsgleichung der Magnetostatik, $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$, so folgt, dass das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung quellenfrei ist. Die Quellenfreiheit hängt jedoch von der Wahl der Eichung ab. Für allgemeine Vektorpotentiale der Form (3.36), so folgt für die Divergenz des Vektorpotentials

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \Delta f(\mathbf{r}). \quad (3.46)$$

Des Weiteren folgt in Coulomb-Eichung mit $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ und der Divergenzfreiheit von \mathbf{A} , dass

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = -\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (3.47)$$

Hierbei wurde die Differentialgleichung (3.44) verwendet. Man beachte, dass die Differentialgleichung in anderen Eichungen modifiziert werden muss.

Somit lauten die Feldgleichungen für das Vektorpotential \mathbf{A} in der Coulomb-Eichung

$$\boxed{\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0.} \quad (3.48)$$

Das Grundproblem der Magnetostatik ist ausgehend von einer vorgegebenen zeitunabhängigen Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ die Bestimmung der magnetischen Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Hierbei gibt es zwei mögliche Vorgehensweisen: man kann die Gleichungen (3.44) für die magnetische Induktion \mathbf{B} lösen, oder das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ mittels der Gleichungen (3.48) bestimmen, und dann auf die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ schließen.

Formal haben wir ein ähnliches mathematisches Problem wie in der Elektrostatik. Die Ähnlichkeit zwischen elektrischer Feldstärke und magnetischer Induktion wurde bereits oben diskutiert. Dies setzt sich, wie wir in diesem Abschnitt gesehen haben, zwischen dem Vektorpotential und dem elektrostatischen skalaren Potential fort, wie man anhand der Gleichung (3.48) sieht. Im Vergleich zur Elektrodynamik muss man für die drei Komponenten des Vektorpotentials \mathbf{A} lösen, und dabei die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ beachten. Somit lassen sich auch die im vorherigen Kapitel entwickelten Lösungsverfahren auf die Magnetostatik übertragen. Wir werden die entsprechenden Lösungsverfahren in Übungsaufgaben illustrieren. Insbesondere werden auch Randwerte eine Rolle spielen. Das Grenzverhalten der magnetischen Induktion in Anwesenheit von Oberflächenströmen werden wir in einem der nächsten Abschnitte diskutieren.

Integralform der Feldgleichungen

Neben den differentiellen Feldgleichungen (3.44) gibt es auch die entsprechende Integralform. Die Divergenzfreiheit von \mathbf{B} , d.h. $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$, resultiert in einem Verschwinden des magnetischen Flusses durch eine beliebige geschlossene Oberfläche $F = \partial V$, denn nach Satz von Gauß gilt

$$\boxed{\int_F d^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_V d^3 \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.} \quad (3.49)$$

Es gehen also immer ebenso viele Feldlinien in ein vorgegebenes (aber beliebiges) Volumen V hinein wie hinaus. Daraus folgt, dass magnetische Feldlinien geschlossen

sein müssen, und es daher keine magnetische Elementarladungen geben kann, an denen Feldlinien bekanntlich beginnen oder enden würden.

Die Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ übersetzt sich zu folgender Form. Integriert man $\nabla \times \mathbf{B}$ über eine Fläche F , die durch die Kurve C berandet ist, so gilt

$$\boxed{\oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_F d^2\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_F d^2\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \equiv \mu_0 I_F,} \quad (3.50)$$

wobei I_F der durch die Fläche F geflossene Strom ist. Das Gesetz wird auch als die integrale Form des Ampereschen Gesetzes bezeichnet.

3.4 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine um den Koordinatenursprung lokalisierte Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, die außerhalb einer Kugel um den Ursprung mit Radius R verschwindet, d.h. $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ für $r = |\mathbf{r}| > R$. Ähnlich wie in der Elektrostatik entwickeln wir nun das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung (3.38), indem wir

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \quad (3.51)$$

für $r > r'$. Damit erhalten wir für das Vektorpotential \mathbf{A} bzw. für dessen i te Komponente A_i

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3\mathbf{r}' j_i(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3\mathbf{r}' x'_j j_i(\mathbf{r}') + \dots \quad (3.52)$$

wobei $r > R$ gilt. Der erste Term verschwindet, da der Integrand als totale Ableitung geschrieben werden kann

$$j_i(\mathbf{r}') = \frac{\partial}{\partial x'_k} (x'_j j_k(\mathbf{r}')) . \quad (3.53)$$

Da der Strom \mathbf{j} lokalisiert ist, und somit im Unendlichen verschwindet, gilt

$$\int d^3\mathbf{r}' j_i(\mathbf{r}') = 0. \quad (3.54)$$

Wir schreiben nun den zweite Term in (3.52) um mittels der Identität

$$x'_j j_i(\mathbf{r}') = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} x'_l j_m(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x'_m} (j_m(\mathbf{r}') x'_j x'_i) . \quad (3.55)$$

Die totale Ableitung verschwindet wieder, und somit gilt unter Verwendung von (3.52)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2r^3} \mathbf{r} \times \left(\int d^3\mathbf{r}' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right) + \dots \quad (3.56)$$

Der führende Term stellt den Beitrag eines magnetischen Dipols da. Insbesondere definieren wir das magnetische Dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (3.57)$$

Das Vektorpotential des magnetischen Dipols ist durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (3.58)$$

gegeben. Das zugehörige Magnetfeld lautet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5}. \quad (3.59)$$

3.4.1 Beispiele

Im Folgenden diskutieren wir zwei Beispiele.

Magnetisches Moment einer geschlossenen Leiterschleife. Wir betrachten eine Leiterschleife L , durch die ein Strom der Stärke I fließt. Somit können wir $d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = I d\mathbf{r}$ verwenden, und erhalten für das magnetische Dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_L \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \quad (3.60)$$

Die z -Komponente des Vektors \mathbf{m} ist somit durch

$$m_z = \frac{I}{2} \oint_L (x dy - y dx) = I \int_F d^2 a_z \quad (3.61)$$

gegeben, wobei F eine durch L berandete Fläche und $d^2 \mathbf{a}_z = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$ das auf die (x, y) -Ebene (bzw. senkrecht zur z -Achse) projizierte infinitesimale Flächenelement ist. Analoge Resultate erhält man auch für die Komponenten m_x und m_y .

Somit folgt

$$\mathbf{m} = I \mathbf{a}_F \quad (3.62)$$

wobei die Komponenten \mathbf{a}_F den Flächeninhalt von F projiziert senkrecht zur x , y bzw. z -Achse angibt.

Magnetisches Moment von Punktladungen. Wir betrachten nun N Punktladungen q der Masse m am Ort $\mathbf{r}_i(t)$. Diese erzeugen eine Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = q \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (3.63)$$

und somit ein magnetisches Moment

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2} \sum_{i=1}^N \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_i(t)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = \frac{q}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{v}_i(t)) . \quad (3.64)$$

Diesen Ausdruck können wir noch mittels des Bahndrehimpuls \mathbf{L}_i des i -ten Teilchens ausdrücken. Es gilt $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ und somit

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \frac{q}{2m} \mathbf{L} , \quad (3.65)$$

wobei $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i$ der Gesamtdrehimpuls des Systems ist. Der konstante Faktor $\gamma = q/(2m)$ wird als gyromagnetisches Verhältnis bezeichnet.

Tatsächlich gilt die Beziehung (3.65) nicht nur für Bahndrehimpulse, sondern auch im atomaren Bereich für den Spin \mathbf{s} ,

$$\mathbf{m} = \frac{q\hbar}{2m} g \frac{\mathbf{s}}{\hbar} \quad (3.66)$$

wobei g der Landé Faktor ist. Für Elektronen gilt laut Quantenmechanik³ $g = 2$, und die Komponenten des spins \mathbf{s} nehmen nur die Werte $\pm\hbar/2$ an.

3.4.2 Kraft und Drehmoment eines magnetischen Dipols*

Im Folgenden betrachten wir ein äußeres Magnetfeld $\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r})$ und eine um den Koordinatenursprung lokalisierte Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, die durch ein magnetisches Dipolmoment \mathbf{m} hinreichend gut beschrieben ist.

Kraft. Wir bestimmen zuerst die Kraft des äußeres Magnetfelds $\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r})$ auf die durch den magnetischen Dipolterm hinreichend gut beschriebene lokalisierte Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Hierzu verwenden wir die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}) \quad (3.67)$$

und nähern das äußere Magnetfeld durch dessen Taylorreihe um den Koordinatenursprung, d.h.

$$\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) + \dots \quad (3.68)$$

Damit gilt

$$\mathbf{F} = \left(\int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right) \times \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) + \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) + \dots \quad (3.69)$$

³Durch die Quantenfeldtheorie erhalten wir zusätzliche Korrekturen zu g , so dass die Quantenelektrodynamik einen Wert von $g = 2,0023193048(8)$ vorhersagt, der sehr gut mit dem gemessenen Wert $g = 2,00231930436182(52)$ übereinstimmt.

Der erste Term verschwindet wegen

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.70)$$

Somit

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times x_k \nabla_k \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) = -\nabla_k \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \times \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) x_k \\ &= -\nabla_k \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \times \mathbf{e}_l \epsilon_{klm} m_m. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Wir beweisen nun, dass

$$\int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}) x_k = \mathbf{e}_l \epsilon_{klm} m_m \quad (3.72)$$

Hierzu verwenden wir die Definition für \mathbf{m} , also Gleichung (3.57), sowie die Identität

$$\int d^3\mathbf{r} (j_l(\mathbf{r})x_k + j_k(\mathbf{r})x_l) = 0. \quad (3.73)$$

Letztere ist eine Konsequenz aus (3.55), da $j_l(\mathbf{r})x_k + j_k(\mathbf{r})x_l$ als eine totale Ableitung geschrieben werden. Das Integral darüber verschwindet, da die aus der totalen Ableitung resultierenden Randterme aufgrund der lokalisierten Stromdichte verschwinden.

Somit folgt aus (3.71) und (3.72)

$$\mathbf{F} = -\nabla_k \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \times \mathbf{e}_l \epsilon_{klm} m_m. \quad (3.74)$$

Mittels

$$\mathbf{e}_l \epsilon_{klm} m_m = m_m \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_k = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_k, \quad (3.75)$$

wobei \mathbf{e}_k die Einheitsvektoren in einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem sein sollen, kann man \mathbf{F} wie folgt umschreiben

$$\mathbf{F} = -\nabla_k \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) = -\mathbf{m} \left(\mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0})}{\partial x^k} \right) + \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0})}{\partial x^k} \right) \mathbf{e}_k.$$

Es gilt

$$\mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0})}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0})) = \frac{\partial}{\partial x^k} \mathbf{B}_{ext,k}(\mathbf{0}) = \nabla \cdot \mathbf{B}_{ext} = 0.$$

Außerdem soll das externe \mathbf{B} -Feld quellenfrei sein, d. h. $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0})}{\partial x^k} \right) \mathbf{e}_k &= \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{ext}) = m_l \frac{\partial \mathbf{B}_{ext,l}(\mathbf{0})}{\partial x^k} \mathbf{e}_k \\ &= m_l \frac{\partial \mathbf{B}_{ext,k}(\mathbf{0})}{\partial x^l} \mathbf{e}_k = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}).$$

Die analoge Formel in der Elektrostatik lautet

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{0}),$$

wobei \mathbf{p} das elektrische Dipolmoment ist.

Drehmoment. Für das mechanische Drehmoment gilt

$$\mathbf{M}_{mech} = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times \mathbf{f}(\mathbf{r}),$$

mit Kraftdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}).$$

Wir nähern nun $\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0})$, d.h. wir nehmen nur den ersten Term der Taylorentwicklung mit. Somit gilt

$$\mathbf{M}_{mech} = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0})).$$

Mit $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ folgt

$$\mathbf{M}_{mech} = -\mathbf{B}(\mathbf{0}) \cdot \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} + \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

Das erste Integral reduziert sich aufgrund von (3.55) (mit $j = i$) auf einen Randterm, der aufgrund der lokalisierten Stromdichte wiederum verschwindet. Das zweite Integral in (3.4.2) ergibt sich zu

$$\mathbf{M}_{mech} = \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}).$$

Davon überzeugt man sich am besten, indem man die Definition von \mathbf{m} , also Gleichung (3.57), einsetzt, Somit

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mech} &= \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) = +\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})) \times \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \times (\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})) \mathbf{r} + \frac{1}{2c} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch den ersten Term umformen. Es gilt

$$\begin{aligned} - \int d^3\mathbf{r} B_{ext,k}(\mathbf{0}) j_k(\mathbf{r}) x_l &= -B_{ext,k}(\mathbf{0}) \int d^3\mathbf{r} j_k(\mathbf{r}) x_l \\ &= B_{ext,k}(\mathbf{0}) \int d^3\mathbf{r} j_l(\mathbf{r}) x_k \\ &= \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{B}_{ext,k}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}) j_l(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

wobei wir die Identität (3.73) verwendet haben. Somit erhalten wir für das mechanische Drehmoment

$$\boxed{\mathbf{M}_{mech} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0}) .}$$

Das Gleichgewicht wird durch $\mathbf{M}_{mech} = \mathbf{0}$ charakterisiert. Damit folgt, dass sich im Gleichgewicht der magnetische Dipol immer parallel zu $\mathbf{B}_{ext}(\mathbf{0})$ einstellt.